本稿は特別講義・数学特別講義（多重ゼータ値）の前半部分（オンデマンド方式）のノートです．

- 本文中にある演習問題のうち**2 問以上**を選び解答してください．レポートの演習問題の解答は不完全なものでも構いませんが，その場合は問題にどのように取り組んだかについて詳細を書いてください．
- 主に多重ゼータ値の基礎的な内容について解説してあります．
- 対面講義では主に「多重ゼータ値と反復積分」「モチビック多重ゼータ値」「多重ゼータ値と modular 形式」といった内容を取り扱う予定です．

1 多重ゼータ値の定義

多重ゼータ値は以下で定義される．

定義 1. 正整数 $k_1,\dots,k_d$ で $k_d>1$ となるものに対して，多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{R}$ を次の無限級数で定義する．

$$\zeta(k_1,\dots,k_d)\coloneqq\sum_{0<m_1<\cdots<m_d}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}}. \tag{1.1}$$

定義に現れる $k_d>1$ は収束性のために必要十分な条件である．

演習問題 1. $k_1,\dots,k_d$ を正整数とする．無限級数 (1.1) が収束するための必要十分条件は $k_d>1$ であることを示せ．

定義に現れる正整数の組について，以下の用語はよく使われる．

定義 2. 正の整数の組 $\Bbbk=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}_{>0}^d$ をインデックスと呼ぶ．また $\mathrm{wt}(\Bbbk)\coloneqq k_1+\cdots+k_d$ を $\Bbbk$ の重さ (weight)，$\mathrm{dep}(\Bbbk)\coloneqq d$ を $\Bbbk$ の深さ（depth）という．$d=0$ の場合，$\Bbbk=\emptyset$ と表記し空インデックスと呼ぶ．$d=0$ もしくは $k_d>1$ となるとき $\Bbbk$ を許容的インデックスと呼ぶ．

空インデックスに対する多重ゼータ値は $\zeta(\emptyset)\coloneqq 1$ として定義する．重さ，深さなどの用語は対応する多重ゼータ値にも使われ，例えば「Euler は深さ 2 の多重ゼータ値を研究した」などといった言い方をする．

例 1. 重さ 2 の許容的なインデックスは (2) の 1 個で，対応する多重ゼータ値は

$$\zeta(2)=\sum_{0<m}\frac{1}{m^2}$$

である．また重さ 3 の許容的なインデックスは (3) と $(1,2)$ の 2 個で，対応する多重ゼータ値は

$$\zeta(3)=\sum_{0<m}\frac{1}{m^3},\quad \zeta(1,2)=\sum_{0<m_1<m_2}\frac{1}{m_1m_2^2}$$

である．重さ $k>2$，深さ 2 の許容的なインデックスは $(a,k-a)$ $(a=1,\dots,k-2)$ の $k-2$ 個ある．

演習問題 2. 重さ k の許容的なインデックスの個数を求めよ．また重さ k，深さ d の許容的なインデックスの個数を求めよ．

2 Riemann ゼータ値

多重ゼータ値の $d=1$ の場合，つまり

$$\zeta(k)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^k}=\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots$$

について考えよう．これは Riemann ゼータ関数の正の整数点での値であることから Riemann ゼータ値とも呼ばれる．偶数点での値については次が知られている．

定理 1 (Euler)**.** *Bernoulli* 数 $B_0, B_1, B_2, \dots \in \mathbb{Q}$ を

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m t^m}{m!}$$

で定める．このとき正偶数 $k \in 2\mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\zeta(k) = \frac{-(2\pi i)^k B_k}{2k!}.$$

例 2. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$，$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$，$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$，$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$，$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$，$\zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$，$\cdots$

この定理には多くの証明が知られているが，ここではそのうちの一つを紹介する．鍵となるのは余接関数 $\cot z = \frac{1}{\tan z}$ に関する，よく知られた等式

$$\pi \cot \pi z = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n} \tag{2.1}$$

である．

演習問題 3. 複素変数 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に関する等式 (2.1) を証明せよ．ヒントとして証明方針の一つを下に述べる．

(1) (2.1) の左辺から右辺を引いたものを

$$f(z) \coloneqq \pi \cot \pi z - \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z+n}$$

と置く．$f(z)$ は周期 1 の関数となることを示す．

(2) $f(z)$ は整関数となる，つまり極を持たないことを示す．

(3) $f(z)$ は有界であることを示す．

(4) Liouville の定理より，有界な整関数は定数関数しか存在しないので $f(z)$ は定数関数である．

(5) $f(1/2) = 0$ なので，$f(z)$ は常に 0 となる．よって (2.1) が示される．

式 (2.1) から，一般の正偶数 k に対する $\zeta(k)$ の公式が得られる．

定理 1 の証明. 定義より (2.1) の左辺の $z = 0$ における Laurent 展開は

$$\begin{aligned}\pi \cot \pi z &= \pi i + \frac{1}{z} \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z} - 1} \\ &= \pi i + \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\pi i z)^m B_m}{m!}\end{aligned}$$

で与えられる．一方 (2.1) の右辺の $z=0$ における Laurent 展開は

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z+n} &= \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}) \\ &= \frac{1}{z}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n^2-z^2} \\ &= \frac{1}{z}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n^2(1-\frac{z^2}{n^2})} \\ &= \frac{1}{z}-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{z^{2s-1}}{n^{2s}} \\ &= \frac{1}{z}-2\sum_{s=1}^{\infty}\zeta(2s)z^{2s-1}\end{aligned}$$

で与えられる．よってこれらの z^{k-1} の係数を比較して $k\in 2\mathbb{Z}_{>0}$ に対する $\zeta(k)=\frac{-(2\pi i)^k B_k}{2k!}$ が得られる． □

奇数点での値については，次が予想されている．

予想 1. $\pi,\zeta(3),\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9),\dots,\zeta(2k+1),\dots$ は代数的に独立である．

分母を少し一般化した場合は有理数と Riemann ゼータ値の線形和となる．

演習問題 4. $k\geq 2$, $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．このとき

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+a_1)\cdots(m+a_k)}\in\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\zeta(2)+\cdots+\mathbb{Q}\zeta(k)$$

を示せ．

3 多重ゼータ値の積分表示

多重ゼータ値の重要な性質の一つである反復積分表示を説明しよう．そのため反復積分記号をある程度一般的な形で導入しておく．

定義 3. p,q を $p<q$ を満たす実数，$k\geq 0$ を整数とする．このとき開区間 (p,q) に含まれない複素数 $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{C}\setminus(p,q)$ に対し，反復積分記号を

$$I(p;a_1,\dots,a_k;q)\coloneqq\int_{p<t_1<\cdots<t_k<q}\prod_{j=1}^{k}\frac{dt_j}{t_j-a_j}$$

で定義する．ただし，収束性のため $p\neq a_1$ と $a_k\neq q$ を仮定する．

上の反復積分記号を用いて多重ゼータ値の積分表示は次のように述べられる．

定理 2. $\Bbbk=(k_1,\dots,k_d)$ を許容インデックスとする．このとき

$$\zeta(k_1,\dots,k_d)=(-1)^d I(0;1,\overbrace{0,\dots,0}^{k_1-1},1,\overbrace{0,\dots,0}^{k_2-1},\dots,1,\overbrace{0,\dots,0}^{k_d-1};1).$$

例 3.
(3.1)
$$\zeta(3,2)=(-1)^2I(0;1,0,0,1,0;1)=\int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<t_5<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5}.$$
定理 2 は幾何級数の公式 $\frac{1}{1-t}=\sum_{m=1}^{\infty}t^{m-1}$ と積分の直接計算から従う．例えば $\zeta(3,2)$ の場合は次の通りである．

$$\begin{aligned}
&\int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<t_5<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5}\\
&=\sum_{0<m}\int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<t_5<1}t_1^m\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5}\\
&=\sum_{0<m}\frac{1}{m}\int_{0<t_2<t_3<t_4<t_5<1}t_2^m\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5}\\
&=\sum_{0<m}\frac{1}{m^2}\int_{0<t_3<t_4<t_5<1}t_3^m\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5}\\
&=\sum_{0<m}\frac{1}{m^3}\int_{0<t_4<t_5<1}t_4^m\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5}\\
&=\sum_{0<m<n}\frac{1}{m^3}\int_{0<t_4<t_5<1}t_4^n\frac{dt_4}{t_4}\frac{dt_5}{t_5}\\
&=\sum_{0<m<n}\frac{1}{m^3n}\int_{0<t_5<1}t_5^n\frac{dt_5}{t_5}\\
&=\sum_{0<m<n}\frac{1}{m^3n^2}.
\end{aligned}$$

演習問題 5. 定理 2 を示せ．

4 多重ゼータ値の代数的定式化

$\mathfrak{h}:=\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$ を 2 変数非可換多項式環とし，部分環 $\mathfrak{h}^0\subset\mathfrak{h}^1\subset\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}^0:=\mathbb{Q}\oplus y\mathfrak{h}x$, $\mathfrak{h}^1:=\mathbb{Q}\oplus y\mathfrak{h}$ で定める．正整数 $k>0$ に対し $z_k:=yx^{k-1}\in\mathfrak{h}$ と置く．インデックスと $\mathfrak{h}^1$ に含まれる単項式の間には

(4.1) $$(k_1,\ldots,k_d)\leftrightarrow z_{k_1}\cdots z_{k_d}=yx^{k_1-1}\cdots yx^{k_d-1}$$

によって一対一の対応があることに注意しよう．更に対応 (4.1) によって，許容的インデックスは $\mathfrak{h}^0$ に含まれる単項式と一対一に対応する．

また $\mathbb{Q}$-線型写像 $Z:\mathfrak{h}^0\to\mathbb{R}$ を

$$Z(z_{k_1}\cdots z_{k_d})=\zeta(k_1,\ldots,k_d)$$

で定める．

5 多重ゼータ値の双対関係式

$\zeta(3,2)$ の反復積分表示 (3.1) で変数変換

$$(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=(1-s_5,1-s_4,1-s_3,1-s_2,1-s_1)$$

を施すと，

$$\begin{aligned}\zeta(3,2) &= \int_{0<t_1<t_2<t_3<t_4<t_5<1} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{t_5} \\ &= \int_{0<s_1<s_2<s_3<s_4<s_5<1} \frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\frac{ds_3}{1-s_3}\frac{ds_4}{1-s_4}\frac{ds_5}{s_5} \\ &= \zeta(2,1,2)\end{aligned}$$

となり多重ゼータ値の関係式が得られる．これを一般化したのが双対関係式であり次のように定式化される．

定義 4. $\mathfrak{h}$ の反自己同型写像 τ を $\tau(x)=y$, $\tau(y)=x$ で定める．例えば

$$\tau(yx^4yx) = \tau(yxy^4x)$$

である．また許容インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し，その双対インデックス $\mathbf{k}^\dagger = (l_1,\dots,l_s)$ を

$$\tau(z_{k_1}\cdots z_{k_r}) = z_{l_1}\cdots z_{l_s}$$

で定める．

定理 3 (双対関係式)**.** 許容インデックス $(k_1,\dots,k_r)$ の双対インデックスを $(l_1,\dots,l_s)$ とするとき

$$\zeta(k_1,\dots,k_r) = \zeta(l_1,\dots,l_s).$$

別の言い方をすれば，任意の $u\in\mathfrak{h}^0$ に対し，

$$Z(u) = Z(\tau(u)).$$

例 4. (3) の双対インデックスは $(1,2)$ である．よって $\zeta(3)=\zeta(1,2)$.

演習問題 6. 重さ 5 の多重ゼータ値の双対関係式を全て明示的に書け．

演習問題 7. $\mathbf{k}$ の双対インデックスを $\mathbf{l}$ とするとき $\mathrm{dep}(\mathbf{k})+\mathrm{dep}(\mathbf{l})=\mathrm{wt}(\mathbf{k})$ となることを示せ．

演習問題 8. 最大の多重ゼータ値は $\zeta(2)$ であることを示せ．

注意 1. 双対関係式の一般化として大野関係式と呼ばれる次の関係式が知られている([4])．$(k_1,\dots,k_r)$ を許容インデック，$(l_1,\dots,l_s)$ をその双対インデックスとするとき，任意の非負整数 $m\geq 0$ に対して

$$\sum_{\substack{e_1,\dots,e_r\geq 0\\ e_1+\cdots+e_r=m}} \zeta(k_1+e_1,\dots,k_r+e_r) = \sum_{\substack{e'_1,\dots,e'_s\geq 0\\ e'_1+\cdots+e'_s=m}} \zeta(l_1+e'_1,\dots,l_s+e'_s).$$

6 多重ゼータ値の調和積公式

$\zeta(k)$ と $\zeta(l)$ の積を計算すると

$$\begin{aligned}\zeta(k)\zeta(l) &= \sum_{0<m}\frac{1}{m^k}\cdot\sum_{0<n}\frac{1}{n^l} \\ &= (\sum_{0<m<n} + \sum_{0<n<m} + \sum_{0<m=n})\frac{1}{m^kn^l} \\ &= \zeta(k,l)+\zeta(l,k)+\zeta(k+l)\end{aligned}$$

として多重ゼータ値の和に分解できる．また $\zeta(k_1,k_2)$ と $\zeta(l_1)$ の積も同様に計算すると

$$\begin{aligned}\zeta(k_1,k_2)\zeta(l_1) &= \sum_{\substack{0<m_1<m_2\\0<n_1}} \frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}n_1^{l_1}}\\ &= \sum_{0<m_1<m_2<n_1} + \sum_{0<m_1<m_2=n_1} + \sum_{0<m_1<n_1<m_2} + \sum_{0<m_1=n_1<m_2} + \sum_{0<n_1<m_1<m_2}\\ &= \zeta(k_1,k_2,l_1)+\zeta(k_1,k_2+l_1)+\zeta(k_1,l_1,k_2)+\zeta(k_1+l_1,k_2)+\zeta(l_1,k_1,k_2)\end{aligned}$$

となる．このような表示を一般化したのが多重ゼータ値の調和積公式である．以下，少々複雑だが多重ゼータ値の調和積公式を述べよう．まず許容インデックス $(k_1,\dots,k_r)$ と $(k_{r+1},\dots,k_{r+s})$ に対し，

$$\zeta(k_1,\dots,k_r)\zeta(k_{r+1},\dots,k_{r+s}) = \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\0<m_{r+1}<\cdots<m_{r+s}}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_{r+s}^{k_{r+s}}}$$

である．ここで $\{m_1,\dots,m_{r+s}\}$ を重複を取り除いて小さい順に並べたものを $p_1<\cdots<p_d$ としよう．$\max(r,s)\le d\le r+s$ である．各 $1\le j\le d$ に対し p_j は $\{m_1,\dots,m_r\}$ にのみ含まれるか，$\{m_{r+1},\dots,m_{r+s}\}$ にのみ含まれるか，$\{m_1,\dots,m_r\}$ と $\{m_{r+1},\dots,m_{r+s}\}$ の両方に含まれるかの 3 パターンがある．また，$i=1,\dots,r+s$ に対し $f(i)\in\{1,\dots,d\}$ を m_i が全体で何番目に小さいかで定義しよう．つまり

$$p_{f(i)} = m_i$$

である．このとき $l_1(f),\dots,l_d(f)$ を

$$l_j(f) \coloneqq \sum_{\substack{1\le i\le r+s\\f(i)=j}} k_i$$

で定めると

$$\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_{r+s}^{k_{r+s}}} = \frac{1}{p_1^{l_1(f)}\cdots p_d^{l_d(f)}}$$

となる．これにより多重ゼータ値の調和積公式

$$\begin{aligned}&\zeta(k_1,\dots,k_r)\zeta(k_{r+1},\dots,k_{r+s})\\ &= \sum_{d=\max(r,s)}^{r+s} \sum_{\substack{f:\{1,\dots,r+s\}\to\{1,\dots,d\}\\f(1)<\cdots<f(r),\ f(r+1)<\cdots<f(r+s)\\\mathrm{image}(f)=\{1,\dots,d\}}} \sum_{0<p_1<\cdots<p_d} \frac{1}{p_1^{l_1(f)}\cdots p_d^{l_d(f)}}\\ &= \sum_{d=\max(r,s)}^{r+s} \sum_{\substack{f:\{1,\dots,r+1\}\to\{1,\dots,d\}\\f(1)<\cdots<f(r),\ f(r+1)<\cdots<f(r+s)\\\mathrm{image}(f)=\{1,\dots,d\}}} \zeta(l_1(f),\dots l_d(f)).\end{aligned}$$

が得られる．調和積公式の代数的取り扱いも導入しておこう．

定義 5. 双線型写像 $*:\mathfrak{h}^1\otimes\mathfrak{h}^1\to\mathfrak{h}^1$ を

$$z_{k_1}\cdots z_{k_r} * z_{k_{r+1}}\cdots z_{k_{r+s}} = \sum_{d=\max(r,s)}^{r+s} \sum_{\substack{f:\{1,\dots,r+s\}\to\{1,\dots,d\}\\f(1)<\cdots<f(r),\ f(r+1)<\cdots<f(r+s)\\\mathrm{image}(f)=\{1,\dots,d\}}} z_{l_1(f)}\cdots z_{l_d(f)}$$

で定める．ここで，$l_1(f),\dots,l_d(f)$ は $l_j(f)=\sum_{\substack{1\le i\le r+s\\ f(i)=j}} k_j$ で定義される整数とする．

定理 4 (調和積公式の代数的定式化)**.** $u,v\in\mathfrak{h}^0$ に対し

$$Z(u*v)=Z(u)Z(v).$$

調和積 $*$ の組み合わせ論的な意味付けから次が従う．

- $u,v\in\mathfrak{h}^0$ のとき
$$u*v\in\mathfrak{h}^0.$$
- $w\in\mathfrak{h}^1$ に対し
$$w*1=1*w=w.$$
- $k,l\in\mathbb{Z}_{\ge1}$ および $u,v\in\mathfrak{h}^1$ に対し
$$\begin{aligned}z_ku*z_lv&=z_k(u*z_lv)+z_l(z_ku*v)+z_{k+l}(u*v),\\ uz_k*vz_l&=(u*vz_l)z_k+(uz_k*v)z_l+(u*v)z_{k+l}.\end{aligned}$$

演習問題 9. 任意の $k\in2\mathbb{Z}_{>0}$, $d\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\zeta(\overbrace{k,\dots,k}^{d})\in\mathbb{Q}\pi^{kd}$$

が成り立つことを示せ．難しければ $d=2$ の場合だけでもよい．

7 多重ゼータ値のシャッフル積関係式

反復積分表示を用いて $\zeta(3)$ と $\zeta(2)$ の積を計算すると

$$\zeta(3)\zeta(2)=\int_{\substack{0<t_1<t_2<t_3<1\\ 0<s_1<s_2<1}}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{1-s_2}$$

となる．ここで多重ゼータ値の調和積公式の場合と同様に t_1,t_2,t_3,s_1,s_2 の大小関係によって 10 個の積分領域

$$\begin{aligned}&\{0<t_1<t_2<t_3<s_1<s_2<1\},\quad \{0<t_1<t_2<s_1<t_3<s_2<1\},\\ &\{0<t_1<s_1<t_2<t_3<s_2<1\},\quad \{0<s_1<t_1<t_2<t_3<s_2<1\},\\ &\{0<t_1<t_2<s_1<s_2<t_3<1\},\quad \{0<t_1<s_1<t_2<s_2<t_3<1\},\\ &\{0<s_1<t_1<t_2<s_2<t_3<1\},\quad \{0<t_1<s_1<s_2<t_2<t_3<1\},\\ &\{0<s_1<t_1<s_2<t_2<t_3<1\},\quad \{0<s_1<s_2<t_1<t_2<t_3<1\}.\end{aligned}$$

に分割することで

$$\zeta(3)\zeta(2)=\zeta(3,2)+3\zeta(2,3)+6\zeta(1,4)$$

が得られる．同様に任意の許容インデックス $\mathbf{k},\mathbf{l}$ に対し $\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$ の積分表示の積分領域を分割することで $\zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$ を多重ゼータ値の線形和で表すことができる．これが多重ゼータ値のシャッフル積関係式である．

定義 6. 双線型写像 $ш:\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ を

$$u_1\cdots u_r\,ш\,u_{r+1}\cdots u_{r+s}=\sum_{\substack{f:\{1,\dots,r+s\}\to\{1,\dots,r+s\}\\ f(1)<\cdots<f(r),\ f(r+1)<\cdots<f(r+s)\\ \mathrm{image}(f)=\{1,\dots,r+s\}}}u_{f^{-1}(1)}\cdots u_{f^{-1}(r+s)}$$

で定義する．

定理 5 (多重ゼータ値のシャッフル積公式). $u, v \in \mathfrak{h}^0$ に対し

$$Z(u ⧢ v) = Z(u)Z(v).$$

シャッフル積 ⧢ の組み合わせ論的な意味付けから次が従う.

- $u, v \in \mathfrak{h}^0$ のとき
$$u ⧢ v \in \mathfrak{h}^0.$$
- $u, v \in \mathfrak{h}^1$ のとき
$$u ⧢ v \in \mathfrak{h}^1.$$
- $w \in \mathfrak{h}$ に対し
$$w ⧢ 1 = 1 ⧢ w = w.$$
- $u_1, u_2 \in \{x, y\}$ および $w_1, w_2 \in \mathfrak{h}$ に対し
$$\begin{aligned} u_1w_1 ⧢ u_2w_2 &= u_1(w_1 ⧢ u_2w_2) + u_2(u_1w_1 ⧢ w_2), \\ w_1u_1 ⧢ w_2u_2 &= (w_1 ⧢ w_2u_2)u_1 + (w_1u_1 ⧢ w_2)u_2. \end{aligned}$$

演習問題 10. 多重ゼータ値のシャッフル積公式を用いて，整数 $k, l > 1$ に対して次を示せ

$$\zeta(k)\zeta(l) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{l-1+j}{j} \zeta(k-j, l+j) + \sum_{j=0}^{l-1} \binom{k-1+j}{j} \zeta(l-j, k+j).$$

8 多重ゼータ値のシャフル正規化

多重ゼータ値は許容的インデックスに対して定義されるが，これを一般のインデックスに拡張するのが正規化である．シャッフル正規化と調和正規化の二種類あるが，ここではシャッフル正規化を紹介しよう．

$$A_N := \bigoplus_{s=0}^{N} \mathfrak{h}^0 y^n \subset \mathfrak{h}^1$$

と置く．$\mathfrak{h}^1 = \bigcup_{N=0}^{\infty} A_N$ となることに注意する．

命題 1. 任意の $w \in A_N$ に対し次を満たす $w_0, \ldots, w_N \in \mathfrak{h}^0$ がただ一つ存在する．

$$w = \sum_{j=0}^{N} w_j ⧢ y^j.$$

Proof. 任意の $u \in \mathfrak{h}^0$ に対し $u ⧢ y^N - uy^N \in A_{N-1}$ であることから従う． □

定義 7. 命題 1 における $w_0 \in \mathfrak{h}^0$ を w のシャッフル正規化とよび $\mathrm{reg}_{⧢}(w)$ で表す．

定義 8 (シャッフル正規化された多重ゼータ値). (許容的とは限らない) インデックス $(k_1, \ldots, k_d)$ に対し，シャッフル正規化された多重ゼータ値を

$$\zeta^{⧢}(\mathbf{k}) = Z(\mathrm{reg}_{⧢}(z_{k_1} \cdots z_{k_d})) \in \mathbb{R}$$

で定義する．

演習問題 11. $\zeta^{⧢}(2, 1)$ を計算せよ．

9 多重ゼータ値の正規化複シャッフル関係式

調和積公式 (定理 4) およびシャッフル積公式 (定理 5) より

$$Z(u * v - u \sqcup v) = 0 \quad (u, v \in \mathfrak{h}^0)$$

が従う．これを $u \in \mathfrak{h}^1, v \in \mathfrak{h}^0$ に拡張したものが正規化複シャッフル関係式である．

定理 6. $u \in \mathfrak{h}^1$, $v \in \mathfrak{h}^0$ のとき

$$Z(\mathrm{reg}_{\sqcup}(u * v - u \sqcup v)) = 0.$$

正規化複シャッフル関係式は多重ゼータ値の全ての関係式を与えると予想されている．

予想 2. $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\mathrm{reg}_{\sqcup}(u * v - u \sqcup v) \mid u \in \mathfrak{h}^1, v \in \mathfrak{h}^0\} = \ker Z.$

演習問題 12. 定理 6 において $u = y$, $v = z_{k_1} \cdots z_{k_d}$ としたときに得られる関係式を具体的に書け．

10 多重ゼータ値が張る線型空間

定義 9. 正整数 k に対し，重さ k の多重ゼータ値で張られる $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$-部分ベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ で表す．

複数の重さにまたがる多重ゼータ値の (非自明な) 線形関係式は存在しないと予想されている．

予想 3. $\mathcal{Z} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_k$.

また $\mathcal{Z}_k$ の次元については次が予想されている．

予想 4. 数列 $(d_k)_{k\geq}$ を

$$\frac{1}{1 - t^2 - t^3} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$$

で定義する．このとき $k \geq 0$ に対して

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k.$$

予想 4 の上限部分については次の決定的な結果が示されている．

定理 7 (Deligne-Goncharov [2], Terasoma [5])**.** $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$.

また定理 7 の精密化として次も知られている．

定理 8 (Brown [1])**.** 重さ k の任意の多重ゼータ値は 2, 3 のみからなるインデックス[1]に対する重さ k の多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線形和となる．つまり

$$\mathcal{Z}_k = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\zeta(k_1, \ldots, k_d) : k_1, \ldots, k_d \in \{2, 3\}, k_1 + \cdots + k_d = k\}.$$

注意 2. 定理 7, 8 の証明は混合テイトモチーフ等の非常に高度な理論に基づいている．より初等的，あるいは具体的な関係式に基づいた定理 7, 8 の証明は知られていない．

演習問題 13. 定理 8 から定理 7 が導かれることを示せ．

[1]定理 8 を予想した Hoffman [3] の名をとって Hoffman インデックスとも呼ばれる．

11 多重ゼータ値の具体例

以下，多重ゼータ値の代数構造に関する雰囲気を掴むためにも，重さの低い多重ゼータ値をリストアップしよう．

重さ 2 の多重ゼータ値は $\zeta(2)$ のみからなり，これは π^2 の有理数倍である．

$$\zeta(2)=\frac{1}{6}\pi^2.$$

重さ 3 の多重ゼータ値は $\zeta(3), \zeta(1,2)$ の二つであり，これらは等しいことが知られている．

$$\begin{aligned}\zeta(3)&=\zeta(3)\\ \zeta(1,2)&=\zeta(3).\end{aligned}$$

重さ 4 の多重ゼータ値は 4 つあり，全て π^4 の有理数倍となる．

$$\begin{aligned}\zeta(4)&=\frac{1}{90}\pi^4\\ \zeta(1,3)&=\frac{1}{360}\pi^4\\ \zeta(2,2)&=\frac{1}{120}\pi^4\\ \zeta(1,1,2)&=\frac{1}{90}\pi^4.\end{aligned}$$

重さ 5 の多重ゼータ値は全て $\zeta(5)$ と $\pi^2\zeta(3)$ の $\mathbb{Q}$-線形結合となる．

$$\begin{aligned}\zeta(5)&=\zeta(5)\\ \zeta(1,4)&=-\frac{1}{6}\pi^2\zeta(3)+2\zeta(5)\\ \zeta(2,3)&=\frac{1}{2}\pi^2\zeta(3)-\frac{11}{2}\zeta(5)\\ \zeta(3,2)&=-\frac{1}{3}\pi^2\zeta(3)+\frac{9}{2}\zeta(5)\\ \zeta(1,1,3)&=-\frac{1}{6}\pi^2\zeta(3)+2\zeta(5)\\ \zeta(1,2,2)&=\frac{1}{2}\pi^2\zeta(3)-\frac{11}{2}\zeta(5)\\ \zeta(2,1,2)&=-\frac{1}{3}\pi^2\zeta(3)+\frac{9}{2}\zeta(5)\\ \zeta(1,1,1,2)&=\zeta(5).\end{aligned}$$

重さ 6 の多重ゼータ値は全て $\zeta(3)^2$ と π^6 の $\mathbb{Q}$-線形結合となる．

$$\begin{aligned}\zeta(6)&=\frac{1}{945}\pi^6\\ \zeta(1,5)&=\frac{1}{1260}\pi^6-\frac{1}{2}\zeta(3)^2\\ \zeta(2,4)&=-\frac{4}{2835}\pi^6+\zeta(3)^2\\ \zeta(3,3)&=-\frac{1}{1890}\pi^6+\frac{1}{2}\zeta(3)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(4,2)&=\frac{5}{2268}\pi^6-\zeta(3)^2\\ \zeta(1,1,4)&=\frac{23}{15120}\pi^6-\zeta(3)^2\\ \zeta(1,2,3)&=-\frac{29}{6480}\pi^6+3\zeta(3)^2\\ \zeta(1,3,2)&=\frac{53}{22680}\pi^6-\frac{3}{2}\zeta(3)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta(2,1,3) &= \frac{53}{22680}\pi^6 - \frac{3}{2}\zeta(3)^2 & \zeta(1,1,2,2) &= -\frac{4}{2835}\pi^6 + \zeta(3)^2 \\
\zeta(2,2,2) &= \frac{1}{5040}\pi^6 & \zeta(1,2,1,2) &= -\frac{1}{1890}\pi^6 + \frac{1}{2}\zeta(3)^2 \\
\zeta(3,1,2) &= -\frac{13}{15120}\pi^6 + \zeta(3)^2 & \zeta(2,1,1,2) &= \frac{5}{2268}\pi^6 - \zeta(3)^2 \\
\zeta(1,1,1,3) &= \frac{1}{1260}\pi^6 - \frac{1}{2}\zeta(3)^2 & \zeta(1,1,1,1,2) &= \frac{1}{945}\pi^6.
\end{aligned}
$$

重さ 7 の多重ゼータ値は全て $\zeta(7)$ と $\pi^2\zeta(5)$ と $\pi^4\zeta(3)$ の係数となる．重さ 8 の多重ゼータ値は π^8 と $\pi^2\zeta(3)^2$ と $\zeta(3)\zeta(5)$ と $\zeta(3,5)$ の $\mathbb{Q}$-線形結合となる．$\zeta(3,5)$ は Riemann ゼータ値の多項式としては書けないと予想されている．

演習問題 14. 本節で述べた重さ 4, 5 の多重ゼータ値の明示式を全て証明せよ．ただし，本ノートで紹介した定理は証明なしに自由に用いてよい．

References

[1] F. C. S. Brown: Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$, Ann. of Math. 175 (2012), 949-976.

[2] P. Deligne, A. Goncharov: Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (2005), no. 1, 1-56.

[3] M. E. Hoffman: The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra 194 (1997), 477-495.

[4] Y. Ohno: A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, J. Number Theory 74 (1999), 39-43.

[5] T. Terasoma: Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math. 149 (2002), 339-369.