保型形式の空間と Hecke 作用素[1]

大阪大学理学研究科数学専攻
森山知則 (Tomonori Moriyama)

はじめに. 本稿の主な目的は, 複素上半空間上の正則保型形式を, 半単純 Lie 群 $SL(2,\mathbf{R})$ およびアデール群 $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式とみなす方法について解説することである. 正則保型形式が離散系列表現 (やその極限) と呼ばれる $SL(2,\mathbf{R})$ の無限次元表現を生成することや, アデール群上の保型形式に対して Hecke 作用素がどのように定義されるかについても説明する. ここで述べた内容を多変数の保型形式 (高階の半単純 Lie 群, 代数群上の保型形式) についてもある程度平行的に述べることができるが, 記号等の煩雑さを避けるため一変数の場合に絞って説明した.

目次

$\boxed{1}$ 半単純 Lie 群上の解析の基本的な手法

この節では, $G = SL(2,\mathbf{R})$ を例にとって, 半単純 Lie 群上の解析の基本的な言語と道具について次節以降で必要になる事柄を中心にまとめる. Lie 群論のごく基礎的な部分は既知とする.

(1.1) Lie 環による右微分. G の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ は

$$\mathfrak{g} := \{X \in M(2,\mathbf{R}) \mid \exp(tX) \in G \quad (\forall t \in \mathbf{R})\}$$

で与えられる. X の Jordan 標準形を考えればすぐにわかるように, $\det(\exp(tX)) = e^{\mathrm{tr}(tX)}$ となるので, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) := \{X \in M(2,\mathbf{R}) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$ である. G 上の複素数値 C^∞ 級関数の全体を $C^\infty(G)$ であらわす. G の $C^\infty(G)$ 上への線形表現 R を右移動

$$[R(g)\phi](g') = \phi(g'g), \qquad \phi \in C^\infty(G), \quad g, g' \in G$$

で定める. これの微分表現として, $R : \mathfrak{g} \ni X \mapsto R(X) \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ を

$$\begin{aligned}[R(X)\phi](g) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}[R(\exp(tX))\phi](g) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\phi(g\exp(tX)), \quad g \in G, X \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

で定める. G 上の左不変ベクトル場 $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(G)$ で $\widetilde{X}_{g=e} = X$ を満たすものを $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(G)$ と書くと, $R(X)\phi = \widetilde{X}\phi$ であることに注意する.

[1] 『ss2010 Arthur-Selberg trace formulae』Sept. 6th, 2010 10:20-12:40

命題１. $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ において等式

$$R(X)\circ R(Y)-R(Y)\circ R(X)=R([X,Y])$$

が任意の $X,Y\in\mathfrak{g}$ に対して成立する.

Proof. $GL(n,\mathbf{R})$ において, 同様の等式が成立することを示せば, $SL(2,\mathbf{R})$ は $GL(2,\mathbf{R})$ の部分リー群であることから命題は従う ([Ma, p196-198]). 行列単位 $E_{i,j}\in M(n,\mathbf{R})$ に対応する $GL(n,\mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場 $\widetilde{E_{i,j}}$ が

$$\widetilde{E_{i,j}}=\sum_{k=1}^{n}x_{k,i}\frac{\partial}{x_{k,j}}$$

で与えられることに注意して,

$$[\widetilde{E_{a,b}},\widetilde{E_{c,d}}]=\delta_{b,c}\widetilde{E_{a,d}}-\delta_{d,a}\widetilde{E_{c,b}}$$

を直接計算で確かめれば良い. □

右移動と同様にして, 左移動 $L:G\times C^\infty(G)\to C^\infty(G)$ が

$$[L(g)\phi](g')=\phi(g^{-1}g'),\phi\in C^\infty(G),\quad g,g'\in G$$

で定義される. その微分表現は

$$[L(X)\phi](g)=\frac{d}{dt}_{|t=0}\phi(\exp(-tX)g),\quad g\in G,X\in\mathfrak{g}$$

で与えられる.

(1.2) 普遍展開環. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}:=\mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化とする. $R:\mathfrak{g}\ni X\mapsto R(X)\in\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ を $\mathbf{C}$-線型に拡張した写像も $R:\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ で表す. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ のテンソル代数 $T\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\otimes n}$ を, $\{X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]\mid X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\}$ で生成される両側イデアルで割って得られる結合的 $\mathbf{C}$-代数を $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ と記す：

$$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})=T(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})/\langle X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]\in T(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mid X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\rangle.$$

$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の普遍展開環ないしは普遍包絡環 (unuiversal enveloping algebra) と呼ぶ (注: 実簡約群の表現論では, $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を単に $U(\mathfrak{g})$ と書く文献も多い). 次は比較的容易に示される（対称テンソルの場合とほぼ同様であるので, 各自試みよ).

命題２.(Poincare-Birkoff-Witt の定理, 略して P-B-W) $\{X_i\mid i=1,2,3\}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の任意の $\mathbf{C}$-基底とするとき, $\mathbf{C}$-線型空間として

$$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})=\bigoplus_{k_1,k_2,k_3\geq 0}\mathbf{C}X_1^{k_1}\cdot X_2^{k_2}\cdot X_3^{k_3}$$

が成立する.

特に, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ は自然に $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の部分線型空間と思える. 先の命題 1 によって $R:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ は $\mathbf{C}$-algebra の準同型 $R:U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\to\mathrm{End}(C^\infty(G))$ に拡張することができる.

(1.3) Casimir element $\Omega_{\mathfrak{g}}$. 普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の中心を $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ で表す. $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ に属する Casimir element と呼ばれる元 $\Omega_{\mathfrak{g}}$ を構成しよう. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の随伴表現 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を $\mathrm{ad}(X)(Y):=[X,Y]$ で定める.

問. これが確かに Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の表現になっていること, すなわち

$$\mathrm{ad}([X,Y]) = \mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(Y)\circ\mathrm{ad}(X), \qquad X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$$

であることを確かめよ.

$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ 上の対称形式 $B_{\mathfrak{g}}:\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\to\mathbf{C}$ を

$$B_{\mathfrak{g}}(X,Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y)), \qquad X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$$

で定める. $B_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の Killing 形式という. 対称形式 $B_{\mathfrak{g}}$ は非退化であることが容易にわかる (一般に, 非退化な Killing 形式を持つ Lie 環を半単純 Lie 環 (semi-simple Lie algebra) という). $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の基底 $\{X_i \mid 1\le i\le 3\}$ を一つ取り, $\{X^i \mid 1\le i\le 3\}$ を条件 $B_{\mathfrak{g}}(X_i,X^j)=\delta_{i,j}$ で定める $(1\le i,j\le 3)$.

定義-命題３. $\Omega_{\mathfrak{g}} := \sum_{i=1}^{3} X_i\otimes X^i \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ と置く.
(i) $\Omega_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の基底 $\{X_i \mid 1\le i\le 3\}$ の取り方によらない. $\Omega_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Casimir element と呼ぶ.

(ii) $\Omega_{\mathfrak{g}}\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ である.

(iii) $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は $\Omega_{\mathfrak{g}}$ で生成される一変数多項式環である. すなわち, $\mathbf{C}[X]\ni f\mapsto f(\Omega_{\mathfrak{g}})\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は $\mathbf{C}$-algebra の同型を与える.

略証 (i) 非退化対称形式 $B_{\mathfrak{g}}$ によって, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ との双対空間を同一視する. すると,

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\otimes\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\cong\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\otimes\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{*}\cong\mathrm{End}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$$

を通じて, $\sum_{i=1}^{3} X_i\otimes X^i$ と $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}$ が同一視されるので, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ が基底 $\{X_i \mid 1\le i\le 3\}$ の取り方によらないことがわかる.
(ii) 直接計算でも容易に確かめられるが, 次のようにしてもよい. 上の同型において, 左辺への $\mathrm{Ad}\otimes\mathrm{Ad}$ の作用は右辺において, $F\mapsto\mathrm{Ad}(g)\circ F\circ\mathrm{Ad}(g^{-1})$ $(F\in\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ に対応するから, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ は G-不変である. それを微分してやれば, $X\cdot\Omega_{\mathfrak{g}}=\Omega_{\mathfrak{g}}\cdot X$ $(X\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を得る.
(iii) は上記 P-B-W を用いて地道にやればできるであろうが, 下の注意に述べる Harish-Chandra 同型の特別な場合と思ってもよい. □

注意. 一般の半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ でも Casimir element が上と同じように定義されて, (i), (ii) と同様のことが成立する. 一方, 一般の複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ について, $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は Casimir element のみで生成されるとは限らないが, 有限生成 $\mathbf{C}$-代数であることが知られている. その構造は, Harish-Chandra 同型で記述される ([Wallach, 3.2.3] を参照).

$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}=\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ の基底とし

$$h := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad e := \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad f := \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

を取る. すると

$$[e,f]=h,\quad [h,e]=2e,\quad [h,f]=-2f$$

が成立する.

問. $B_{\mathfrak{g}}(X,Y)=4\mathrm{tr}(XY)$ であることを確かめよ.

問. $8\Omega_{\mathfrak{g}} = h^2 + 2(e \cdot f + f \cdot e) = h^2 - 2h + 4e \cdot f$ を確かめよ.

(1.4) Iwasawa 分解と積分公式. G の 3 つの部分群 N, A, K を次で定義する:

$$N = \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | x \in \mathbf{R} \right\}, \qquad A = \left\{ a(y) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} | y > 0 \right\},$$

$$K = \left\{ r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

このとき次が成立する.

命題 4. (Iwasawa 分解, NAK 分解) 次の掛算写像

$$N \times A \times K \ni (n, a, k) \mapsto nak \in G.$$

は微分同相写像である:

Proof. $\mathbf{H} = \{ z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$ を複素上半平面とする. G を $\mathbf{H}$ に一次分数変換

$$g\langle z \rangle := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \in \mathbf{H}$$

で作用させる. $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbf{H}$ に対して, $g_z = n(x)a(y) \in G$ と置けば $g_z\langle\sqrt{-1}\rangle = z$ が成立するのでこの作用は推移的である. また, $\mathrm{Stab}_G(\sqrt{-1}) = K$ なので, 自然な全単射 $G/K \cong \mathbf{H}$ を得る. したがって, 命題の掛算写像が全単射を与えることがわかる. これが微分同相であることを見るには, 各点 (n, a, k) における微分写像が単射であることを確かめればよい. より直接に, 命題の掛算写像の逆写像を書いてみて, それが C^∞ 写像であることを確かめても良い. □

次に G 上の Haar 測度を, Iwasawa 分解に応じて変数分離して表そう.

命題 5. (1) G は unimodular である, すなわち G の左 Haar 測度 dg は右不変でもある.
(2) 次を満たす正の数 $C > 0$ が存在する：

$$\int_G \phi(g)dg = C \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^\infty \frac{dy}{y} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, \phi(n(x)a(y)r(\theta))y^{-1}, \qquad \phi \in C_c^\infty(G).$$

<u>略証</u> (Haar 測度について基本的なことは岩波数学辞典を参照). (1) G 上の左 Haar 測度 dg にたいして, G 上の測度 d_rg を

$$\int_G f(g)d_rg = \int f(g^{-1})dg, \qquad f(g) \in C_c^\infty(G)$$

で定めると, これは G 上の右 Haar 測度となる. $dg = \Delta_G(g)d_rg$ によって G の modular function を定めると, $\Delta_G : G \to \mathbf{R}_+^\times$ は準同型写像である. $\mathbf{R}_+^\times$ はアーベル群なので Δ_G は交換子群 $[G, G]$ 上で自明である. 一方で, $[G, G] = G$ であるので, $\Delta_G \equiv 1$ となって, G は unimodular であることがわかる.

(2) まず, 関数 $\rho : G \to \mathbf{R}_+^\times$ を

$$\int_G \phi(g)dg = \int_N dn \int_A da \int_K dk\, \phi(nak)\rho(nak), \qquad \phi(g) \in C_c^\infty(G)$$

で定める．ここで, dn, da, dk はそれぞれアーベル群 N, A, K 上の Haar 測度を表す．$\displaystyle\int_G \phi(g)dg = \int_G \phi(ngk)dg$ が任意の $(n,k) \in N\times K$ に対して成立するので, $\rho(nak) = \rho(a)$, $(n,a,k) \in N \times A \times K$ となる．一方,

$$\begin{aligned}\int_G \phi(a(y)g)dg &= \int_N dn \int_A da \int_K dk\, \phi(a(y)na(y)^{-1}a(y)ak)\rho(a) \\ &= \int_N dn \int_A da \int_K dk\, \phi(a(y)na(y)^{-1}ak)\rho(a(y)^{-1}a) \\ &= \int_N dn \int_A da \int_K dk\, \phi(nak)y^{-1}\rho(a(y)^{-1}a)\end{aligned}$$

より $y^{-1}\rho(a(y)^{-1}a) = \rho(a)$ がわかる．ここで, $a = a(y)$ とすれば定理の公式を得る． □

系 6． G/K 上の商測度を $d\dot{g}$ で表すと,

$$\int_{G/K} \phi(gK)d\dot{g} = \int_0^\infty \frac{dy}{y^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \phi(x+\sqrt{-1}y), \qquad \forall\phi(z) = \phi(gK) \in L^1(G/K)$$

が成立する．

(1.5) Casimir 作用素. 次に Casimir 元 $\Omega_{\mathfrak{g}}$ の $C^\infty(G/K)$ への作用を計算しよう．その前に, G の随伴表現 (Adjoint 表現) について思い出しておこう．$g \in G$ および $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}_{|t=0} g e^{tX} g^{-1}$$

によって定義される群準同型 $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を G の随伴表現 (Adjoint 表現) と呼ぶ．Ad の微分表現が, ad であること, すなわち

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}\mathrm{Ad}(e^{tX})(Y) = [X,Y], \quad X,Y \in \mathfrak{g}$$

であることに注意する．$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を G の $\mathbf{C}$ 上の線型表現 $G \to GL(U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ に延長したものも同じ記号 Ad で表そう．

命題 7. 微分作用素 $R(\Omega_{\mathfrak{g}}) : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ は部分空間 $C^\infty(G/K)$ を保つ．また, 自然な同一視 $C^\infty(G/K) \cong C^\infty(\mathbf{H})$ の下で

$$8R(\Omega_{\mathfrak{g}})\phi(z) = 4y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi(z), \qquad \phi(z) \in C^\infty(\mathbf{H})$$

が成立する．

Proof. $B_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(g)X_i, \mathrm{Ad}(g)X^j) = \delta_{i,j}$ $(g \in G)$ より,

$$\mathrm{Ad}(g)(\Omega_{\mathfrak{g}}) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Ad}(g)(X_i)\cdot\mathrm{Ad}(g)(X^i) = \Omega_{\mathfrak{g}}, \qquad \forall g \in G$$

が成立する．したがって

$$R(g)\circ R(\Omega_{\mathfrak{g}}) = R(\mathrm{Ad}(g)(\Omega_{\mathfrak{g}}))\circ R(g) = R(\Omega_{\mathfrak{g}})\circ R(g), \quad \forall g \in G$$

なので, 特に $g\in K$ のときを考えれば前半が従う. $R(\Omega_{\mathfrak{g}})$ の表示を求めるために, Casimir element $\Omega_{\mathfrak{g}}$ を次の形に表しておく：

$$8\Omega_{\mathfrak{g}}=H^2+2(X_+\cdot X_-+X_-\cdot X_+)=H^2-2H+4X_+X_-.$$

ここで,

$$H:=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix},\quad X_\pm:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \pm\sqrt{-1}\\ \pm\sqrt{-1} & -1\end{pmatrix}$$

と置いた. 各整数 $m\in\mathbf{Z}$ に対して,

$$C^\infty(G/K;m):=\{\phi\in C^\infty(G)\mid \phi(gr(\theta))=e^{\sqrt{-1}m\theta}\phi(g),\quad \forall(g,r(\theta))\in G\times K\}$$

と置く. $C^\infty(G/K)=C^\infty(G/K;0)$ に注意する. $H,X_\pm\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の $C^\infty(G/K;m)$ への作用を計算しよう. まず,

$$[R(H)\phi](g)=m\phi(g),\quad \phi\in C^\infty(G/K;m)$$

は $C^\infty(G/K;m)$ の定義から容易に出る. 次に, X_+ を岩澤分解して計算してやると

(1)
$$\begin{aligned}&[R(X_+)\phi](g_z)\\ =&[R(\begin{pmatrix}1/2 & \\ & -1/2\end{pmatrix})\phi](g_z)+\sqrt{-1}[R(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix})\phi](g_z)+\frac{1}{2}[R(H)\phi](g_z)\\ =&\frac{d}{dt}_{|t=0}\phi(n(x)a(ye^t))+\sqrt{-1}\frac{d}{dt}_{|t=0}\phi(n(x+ty)a(y))+\frac{m}{2}\phi(g_z)\\ =&\Big(y\frac{\partial}{\partial y}+\sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x}+\frac{m}{2}\Big)\phi(g_z),\quad \forall\phi\in C^\infty(G/K;m),\forall z\in\mathbf{H}\end{aligned}$$

を得る. 同様にして

$$[R(X_-)\phi](g_z)=\Big(y\frac{\partial}{\partial y}-\sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x}-\frac{m}{2}\Big)\phi(g_z),\quad \forall\phi\in C^\infty(G/K;m),\forall z\in\mathbf{H}$$

であることがわかる.

(2)
$$R(X_\pm)\phi\in C^\infty(G/K;m\pm2),\qquad \forall\phi\in C^\infty(G/K;m)$$

に注意すれば

(3)
$$\begin{aligned}8[R(\Omega_{\mathfrak{g}})\phi](g_z)=&4\Big(y\frac{\partial}{\partial y}+\sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x}-1\Big)\Big(y\frac{\partial}{\partial y}-\sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x}\Big)\phi(g_z)\\ =&4y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\qquad \forall\phi\in C^\infty(G/K)\end{aligned}$$

となって, 所望の結果を得る. □

2 半単純 Lie 群 $G=SL(2,\mathbf{R})$ 上の保型形式

この節では, Harish-Chandra([Harish-Chandra]) による保型形式の空間の定義を $SL(2,\mathbf{R})$ の場合に述べ, それが上半平面上の保型形式を拡張したものであることを説明する. さらに, $SL(2,\mathbf{R})$ の表現論から必要事項を準備した後,『正則保型形式が $SL(2,\mathbf{R})$ の反正則離

散系列表現を生成する』という Gel'fand, Graev, Piatetski-Shapiro の reciprocity を解説する．

(2.1) 保型形式の空間． 正整数 $N \geq 1$ に対して，

$$\Gamma(N) := \left\{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) \mid \gamma \equiv I_2 \pmod{N}\right\}$$

で定義される G の離散部分群 $\Gamma(N)$ をレベル N の主合同部分群という．適当な正整数 N に対して, $\Gamma(N) \subset \Gamma \subset \Gamma(1) = SL(2, \mathbf{Z})$ を満たす離散部分群 Γ を $SL(2, \mathbf{Z})$ の合同部分群という.

定義 8． $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{Z})$ を合同部分群とする.
(1) G 上の C^∞-関数 $\varphi : G \to \mathbf{C}$ が次の (i)-(iv) を満たすとき, φ を G 上の Γ に関する保型形式 (automorphic form) である呼び, その全体を $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ で表す.

(i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g), \quad \forall(\gamma, g) \in \Gamma \times G$;
(ii) φ は右 K-有限, すなわち, $\mathbf{C}$-span$\{R(k)\varphi \mid k \in K\}$ は有限次元 $\mathbf{C}$-線形空間である;
(iii) φ は $Z(\mathfrak{g})$-有限, すなわち,

$$\{R(\xi)\varphi \mid \xi \in Z(\mathfrak{g})\} = \mathbf{C}\text{-span}\{R(\Omega_{\mathfrak{g}}^m)\varphi \mid m \geq 0\};$$

は有限次元 $\mathbf{C}$-線形空間である;
(iv) φ は緩増大である, すなわち, 次の不等式を満たす様な $C > 0$, $M > 0$ が存在する

$$|\varphi(g)| \leq C||g||^M, \qquad g \in G.$$

ここで, $||\cdot|| : G \to \mathbf{R}_+^\times$ は $||\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}|| := \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$ で定義される高さ関数である.

(2) $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ が, 条件を

$$\int_{N\cap\delta^{-1}\Gamma\delta\backslash N} \varphi(\delta n g) dn = 0, \qquad \forall\delta \in \Gamma(1)$$

を満たすとき, φ を G 上の Γ に関する尖点形式 (カスプ形式) と呼び, その全体を $\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)$ で表す.

注意． $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ および $\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)$ は G の右移動 R に関して閉じていない (右 K 有限性が保たれない)．しかし, リー環 $\mathfrak{g}$ および極大コンパクト部分群 K の作用では安定であり

$$R(k) \circ R(X) \circ R(k^{-1}) = R(\mathrm{Ad}(k)X), \qquad k \in K, X \in \mathfrak{g}$$

が成立する. このようなものを $(\mathfrak{g}, K)$-加群という（正確な定義は, [Wallach] 等を参照).

次に, 上半平面 $\mathbf{H}$ 上の正則保型形式および正則尖点形式の空間を導入し, それが上記の G 上の保型形式の空間およびカスプ形式の空間の部分空間とみなせることを説明する．ま

ず, $GL(2,\mathbf{R})^+ := \{g \in GL(2,\mathbf{R}) \mid \det(g) > 0\}$ と置いて, 保型因子 (automorphic factor) $j : GL(2,\mathbf{R})^+ \times \mathbf{H} \to \mathbf{C}^\times$ を

$$j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) = cz + d$$

で定義する. 整数 $k \in \mathbf{Z}$ に対して, $C^\infty(\mathbf{H})$ への $GL(2,\mathbf{R})^+$ の右作用を

$$f|_k g(z) := \det(g)^{k/2} j(g,z)^{-k} f(g\langle z\rangle), \quad f \in C^\infty(\mathbf{H}), g \in GL(2,\mathbf{R})^+$$

で定める.

定義 9. $\Gamma \subset SL(2,\mathbf{Z})$ を $SL(2,\mathbf{Z})$ の合同部分群とする.
(1) 正則関数 $f : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ が次の 2 条件を満たすとき, f を $\mathbf{H}$ 上の Γ に関する正則保型形式と呼び, その全体を $M_k(\Gamma)$ で表す.

(i) $f|_k\gamma = f \qquad \forall\gamma \in \Gamma$;

(ii) 任意の $\delta \in \Gamma(1)$ に対して $h_\delta > 0$ が存在して

$$f|_k\delta(z) = \sum_{n \geq 0} a_f(n;\delta) \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}nz}{h_\delta}\right)$$

という形に書ける.

(2) $f \in M_k(\Gamma)$ がさらに次の条件

$$a_f(0;\delta) = 0, \quad \forall\delta \in \Gamma(1)$$

を満たすとき, f を尖点形式 (あるいは, カスプ形式) と呼び, その全体を $S_k(\Gamma)$ で表す.

上の定義の (ii) において $n < 0$ の項が現れないことも, 条件の一部であることに注意しよう. 定義 8 と定義 9 の関係は次の定理で与えられる.

定理 10. (1) $f \in M_k(\Gamma)$ に対して, G 上の関数 $\varphi_f : G \to \mathbf{C}$ を

$$\varphi_f(g) := f|_k g(\sqrt{-1}) = j(g,\sqrt{-1})^{-k} f(g\langle\sqrt{-1}\rangle)$$

で定めると, $\varphi_f \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ である.
(2) $f \in M_k(\Gamma)$ に対して, $f \in S_k(\Gamma)$ であることと $\varphi_f \in \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)$ である事とは同値である.

Proof. (1) φ_f が定義における条件 (i)-(iv) を満たすことを確かめれば良い.

$$\varphi_f(\gamma g) = f|_k\gamma g(\sqrt{-1}) = f|_k\gamma|_k g(\sqrt{-1}) = f|_k g(\sqrt{-1}) = \varphi_f(g), \quad (\gamma, g) \in \Gamma \times G$$

であるので, (i) は満たされる. また,

$$\varphi_f(gr(\theta)) = e^{\sqrt{-1}k\theta}\varphi_f(g), \quad \forall g \in G, \forall r(\theta) \in K,$$

より, φ_f は右 K-有限である. 次に (iii) を確かめよう. 鍵となるのは, $f \in C^\infty(\mathbf{H})$ に対して, φ_f を定理にあるように定めるとき,

$$(\sharp) : \qquad R(X_-)\varphi_f = 0 \Leftrightarrow f \text{ は正則関数}$$

であることである．これは, $\varphi_f(g_z) = y^{k/2}f(z)$ および $\varphi_f \in C^\infty(G/K;k)$ に注意すれば, (2) より

$$[R(X_-)\varphi_f](g_z) = -2\sqrt{-1}y^{k/2+1}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$$

となることから分かる．したがって,

$$R(\Omega_{\mathfrak{g}})\varphi_f = R(H^2 - 2H + 4X_+X_-)\varphi = R(H^2 - 2H)\varphi = (k^2 - 2k)\varphi$$

と計算され, φ_f が Casimir 作用素 $R(\Omega_{\mathfrak{g}})$ の固有関数であることがわかる．最後に (iv) を確かめる．良く知られているように $\forall g \in G$ は

$$g = \delta g_z r(\theta), \qquad \delta \in \Gamma(1), |\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2, |z| \geq 1, r(\theta) \in K$$

と表すことができる．このとき

$$\varphi_f(g) = e^{\sqrt{-1}k\theta}y^{k/2}\sum_{n\geq 0} a_f(n;\delta)\exp(2\pi\sqrt{-1}nz/h_\delta)$$

となるが,　$C > 0$, $r > 0$ が存在して $y < C||g||^r$ となるので, φ_f は緩増大であることが分かる．

(2) $\delta \in \Gamma(1)$ に対して, $N \cap \delta^{-1}\Gamma\delta$ の生成元を $n(h_\delta)$ とするとき,

$$\int_{N\cap\delta^{-1}\Gamma\delta\backslash N} \varphi_f(\delta n(x)a(y)r(\theta))dx = h_\delta \times a_f(0;\delta) \times e^{\sqrt{-1}k\theta}$$

が成立することから従う． □

注意. $f_1(z), f_2(z) \in M_k(\Gamma)$ の Petersson 内積を

$$\langle f_1, f_2\rangle := \int_{\Gamma\backslash G} \varphi_{f_1}(g)\overline{\varphi_{f_2}(g)}dg = \int_{\Gamma\backslash \mathbf{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dxdy}{y^{k+2}}$$

で定義する．f_1 または f_2 の少なくとも一方は $S_k(\Gamma)$ に属するとき, これは絶対収束することがわかる．

(2.2) $SL(2,\mathbf{R})$ の表現論. 次節の準備として, $G = SL(2,\mathbf{R})$ の表現論から基礎的な部分をまとめておく．まず主系列表現を定義して, その可約点における部分加群として (反) 正則離散系列表現を導入する．G の Borel 部分群を $B = \{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G\}$ で定義する．指標 $\sigma : \{\pm 1\} \to \mathbf{C}^\times$ および $\nu \in \mathbf{C}$ に対して,

$$I(\sigma,\nu)$$
$$:=\left\{\phi \in C^\infty(G) \mid \phi(\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} g) = \sigma(a/|a|)|a|^{\nu+1}\phi(g), \quad \forall \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B, \forall g \in G\right\}$$

と置く．$I(\sigma,\nu)$ は, G の右移動による作用 R によって安定で, $I(\sigma,\nu)$ の自然な Fréchet 位相を与えると, 連続表現となる．この表現を $\pi_{\sigma,\nu}$ であらわし, G の主系列表現 (principal series representaion) と呼ぶ．$I(\sigma,\nu)$ に計量

$$(\phi_1,\phi_2) := \int_K \phi_1(k)\overline{\phi_2(k)}dk, \qquad \phi_1,\phi_2 \in I(\sigma,\nu)$$

を導入しこれに関して完備化した Hilbert 空間を L^2-$I(\sigma,\nu)$ であらわす．G の $I(\sigma,\nu)$ への作用は，L^2-$I(\sigma,\nu)$ 上への連続な作用として延長される ([Wallach, 1.5.3 (1)])． また，$\nu\in\sqrt{-1}\mathbf{R}$ のとき，これは G のユニタリ表現となる ([Wallach, 1.5.3 (2)])．$m\in\mathbf{Z}$ に対して $\phi_m^{(\nu)}\in C^\infty(G/K;m)$ を

$$\phi_m^{(\nu)}(n(x)a(y)r(\theta))=e^{\sqrt{-1}m\theta}y^{(\nu+1)/2},$$

で定める．$I(\sigma,\nu)$ の右 K-有限部分を

$$I(\sigma,\nu)_K:=\{\phi\in I(\sigma,\nu)\mid\phi\text{ は右 }K\text{-有限 }\}$$

で表すと，

$$I(\sigma,\nu)_K=\bigoplus_{\sigma(-1)=(-1)^m}\mathbf{C}\phi_m^{(\nu)}\subset I(\sigma,\nu)\subset L^2\text{-}I(\sigma,\nu)$$

となっている．$I(\sigma,\nu)_K$ には G は作用しないが $(\mathfrak{g},K)$ 加群であり，$I(\sigma,\nu)$ および L^2-$I(\sigma,\nu)$ の中で稠密である．K-有限部分 $I(\sigma,\nu)_K$ は，G の連続表現 $I(\sigma,\nu)$ や L^2-$I(\sigma,\nu)$ の，いわば「骨格」のみ取り出したものであると言ってもよいだろう．さて，$I(\sigma,\nu)_K$ の可約性に関しては次の命題が成立する．$F_k:=\mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^2)$, $(k\geq 0)$ を，G の自然な 2 次元表現 (tautological representation) $\mathbf{C}^2$ の k 次対称テンソル表現とする．F_k は G の唯一の $(k+1)$-次元既約表現である．

命題 11. (1) $\nu=k-1$, $\sigma=\mathrm{sgn}^k$ $(k\geq 2,k\in\mathbf{Z})$ のとき，

$$D_k^+:=\bigoplus_{m\geq k,\,m\equiv k\pmod 2}\mathbf{C}\phi_m^{(k-1)},\quad D_k^-:=\bigoplus_{m\leq -k,\,m\equiv k\pmod 2}\mathbf{C}\phi_m^{(k-1)},$$

と置くと，これらは $I(\sigma,k-1)_K$ の既約な $(\mathfrak{g},K)$-部分加群である． また，商 $(\mathfrak{g},K)$-加群 $I(\sigma,k-1)_K/D_k^+\oplus D_k^-$ は既約な $(\mathfrak{g},K)$-加群であり，F_{k-2} に同型である．

(2) $\nu=1-k$, $\sigma(-1)=(-1)^k$ $(k\geq 2,k\in\mathbf{Z})$ のとき，$\bigoplus_{|m|\leq k-2,\,m\equiv k\pmod 2}\mathbf{C}\phi_m$ は F_{k-2} に同型な $(\mathfrak{g},K)$-部分加群であり，商 $(\mathfrak{g},K)$-加群 $I(\sigma,\nu)/F_{k-2}$ は $D_k^+\oplus D_k^-$ に同型である．

(3) $\nu=0$, $\sigma=\mathrm{sgn}$ (i.e. $\sigma(-1)=(-1)$) のとき，

$$D_1^+:=\bigoplus_{m\geq 1,\,m\equiv 1\pmod 2}\mathbf{C}\phi_m^{(0)},\quad D_1^-:=\bigoplus_{m\leq -1,\,m\equiv 1\pmod 2}\mathbf{C}\phi_m^{(0)},$$

と置けば，これらは $I(\sigma,k-1)_K$ の既約な $(\mathfrak{g},K)$-部分加群であり，次の直和分解がある: $I(\mathrm{sgn},0)=D_1^+\oplus D_1^-$.

(4) 上記 3 つの場合以外では，$I(\sigma,\nu)_K$ は既約な $(\mathfrak{g},K)$-加群である．

注意. (i) 上の命題の (1), (2) は次の完全列として書ける：

$$0\to D_k^+\oplus D_k^-\to I(\mathrm{sgn}^k,k-1)\to F_{k-2}\to 0;$$

$$0\to F_{k-2}\to I(\mathrm{sgn}^k,1-k)\to D_k^+\oplus D_k^-\to 0.$$

(ii) D_k^+ (resp. D_k^-) $(k\geq 2)$ は Blattner parameter k (resp. $-k$) の離散系列表現と呼ばれる．D_1^+(resp. D_1^-) は離散系列表現の極限と呼ばれる．D_1^+ および D_1^- はすでに導入した計量によって完備化すれば G の既約ユニタリ表現を与える．また $k\geq 2$ のときにも，D_k^+ および D_k^- は別の計量によって完備化することで G の既約ユニタリ表現となる．

(iii) $SL(2,\mathbf{R})$ の既約認容表現の $(\mathfrak{g},K)$-加群レベルでの分類, $SL(2,\mathbf{R})$ の既約ユニタリ表現の分類は, [Wallach, 5.6] を参照せよ. 拙著 [Mo] およびそこに引いてある文献も参照.

Proof. $\phi_m^{(\nu)}$ への $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の基底の作用を書くと,

$$\pi_{\sigma,\nu}(H)\phi_m^{(\nu)} = m\phi_m^{(\nu)}, \quad \pi_{\sigma,\nu}(X_\pm)\phi_m^{(\nu)} = \frac{\nu+1\pm m}{2}\phi_{m\pm 2}^{(\nu)}$$

である. 実際,

$$\pi_{\sigma,\nu}(H)\phi_m^{(\nu)}(r(\theta)) = -\sqrt{-1}\frac{d}{dt}_{|t=0}\phi_m^{(\nu)}(r(\theta+t)) = m\phi_m(r(\theta))$$

より始めの式が成り立つ. 次に, (3) より適当な複素数 $c_\pm(\nu)$ を用いて

$$\pi_{\sigma,\nu}(X_\pm)\phi_m^{(\nu)} = c_\pm(\nu)\phi_{m\pm 2}^{(\nu)}$$

となることが分かる. $c_\pm(\nu)$ は (1), (2) より

$$c_\pm(\nu) = [\pi_{\sigma,\nu}(X_\pm)\phi_m^{(\nu)}](I_2) = \frac{1}{2}(\nu+1\pm m)$$

と計算される. 命題は, これよりすぐにわかる. □

D_k^+ $(k\geq 1)$ と Verma 加群との関係を見ておく. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の subalgebra $\bar{\mathfrak{b}}$ を $\bar{\mathfrak{b}} := \mathbf{C}H\oplus\mathbf{C}X_-$ で定義する. $\mu\in\mathbf{C}$ を任意に取り, 1 次元数ベクトル空間 $\mathbf{C}$ に $\bar{\mathfrak{b}}$ を $H\cdot 1=\mu$, $X_-\cdot 1 = 0$ で作用させて $\bar{\mathfrak{b}}$-加群とみたものを $\mathbf{C}_\mu$ で表す. 係数拡大により $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-加群 $V(\mu) := U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\bar{\mathfrak{b}})}\mathbf{C}_\mu$ が得られるが, これを Verma 加群と呼ぶ.

補題 12. $k\geq 1$ とするとき, 写像 $V(k)\ni\xi\otimes 1\mapsto\xi\cdot\phi_k\in D_k^+$ は $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-加群としての同型を与える. 特に, $V(k)$ は既約である.

Proof. 写像が well-defined なことをいえば, あとは容易である. □

注意. 斜交群 $Sp(n,\mathbf{R})$ やユニタリ群 $U(m,n)$ に対しても, 正則離散系列表現が定義される. それらは（少なくともパラメータが十分に regular であるという条件下で）generalized Verma 加群と同型となる. Casimir 作用素の固有値に着目した巧みな証明を [Garrett] に見ることができる ([Garrett] では, 正則離散系列表現を含む少し広いクラスの表現を扱っているが, ちょっとした言葉の誤用で, それらすべてを正則離散系列表現と呼んでいる).

(2.3) G-G-PS の reciprocity

定理 13. $\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G) := \{\varphi_f \mid f\in M_k(\Gamma)\}$ と置く. $\Psi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(D_k^+,\mathcal{A}(\Gamma\backslash G))$ に対して, $\Psi(\phi_k)\in\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)$ である. この対応は, 次の同型写像を定める:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(D_k^+,\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)) \cong \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)(\cong M_k(\Gamma))$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(D_k^+,\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)) \cong \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)(\cong S_k(\Gamma))$$

Proof. まず, 定理 10 の証明からわかるように

$$\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G) = \{\varphi\in\mathcal{A}(\Gamma\backslash G) | R(r(\theta))\varphi = e^{\sqrt{-1}k\theta}\varphi, R(X_-)\varphi = 0\}$$

であることに注意する．Ψ に対して, $\varphi(g) \equiv \varphi_\Psi(g) := \Psi(\phi_k)(g) \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ と置くと,

$$\varphi(gr(\theta)) = [R(r(\theta))\Psi(\phi_k)](g) = \Psi(D_k^+(r(\theta))\phi_k)(g) = \Psi(e^{\sqrt{-1}k\theta}\phi_k)(g) = e^{\sqrt{-1}k\theta}\varphi(g)$$
$$[R(X_-)\varphi](g) = 0$$

より, φ は $\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)$ に属することがわかる．逆に, $\varphi_f \in \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)(\cong M_k(\Gamma))$ を取り, $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})\varphi_f \subset \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ を考える．すると, テンソル積の普遍性から $V(k)$ から $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})\varphi_f$ へ全射が存在する．ところが補題 12 より $V(k)$ は既約なのでこれは同型 $D_k^+ \cong V(k) \cong U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})\varphi_f$ を与える． □

定理 13 は, $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ (resp. $\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)$) は, $\dim_\mathbf{C} M_k(\Gamma)$ 個 (resp. $\dim_\mathbf{C} S_k(\Gamma)$ 個) の D_k^+ の直和を部分表現 (部分 $(\mathfrak{g}, K)$-加群) として含み, 各直和因子の最低ウエイトベクトルの集合が $M_k(\Gamma)$(resp. $S_k(\Gamma)$) の一つの基底を与える, ということを主張している．これは Gel'fand-Graev-Patetski-Shapiro の相互律 (あるいは双対性) と呼ばれる．この見方によって, 半単純 Lie 群の（無限次元）表現の手法を用いることができ, 仮に正則保型形式 $f \in M_k(\Gamma)$ に考察対象を限ったとしても, さまざまな点で話の見通しがよくなることがある．その実例はこの報告集の中にも多く見出されるであろう．

注意. (2.1) の末尾で注意したように, $f \in M_k(\Gamma)$ はカスプ形式ならば φ_f は $L^2(\Gamma\backslash G)$ に属するが, 実はその逆も成立する．すなわち, $\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G) \cap L^2(\Gamma\backslash G) = \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G) \cap \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G) \cong S_k(\Gamma)$ が成立する (証明は久保田富雄「数論論説」第５章に書いてある．あるいはより一般的な結果 [Wallach-2] からも従う)．したがって

$$\mathrm{Hom}_G(D_k^+, L^2(\Gamma\backslash G)) \cong S_k(\Gamma)$$

が成り立つ．

(2.4) ($\sharp$) **の別証明.** 上では計算によって示したが, 任意の有界対称領域 (=Hermite 対称空間) に対して適用出来る方法も説明しておこう．なお, Hermite 対称空間については, [Helgason1, Ch. 8] を参照.

準備１：単位円盤モデル (有界対称領域) への移行 :

$GL(2,\mathbf{C})$ の射影直線 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への一次分数変換による作用を

$$GL(2,\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \ni (g,z) \mapsto g\langle z\rangle \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$$

で表す．命題 4 の証明中に定義した G の $\mathbf{H}$ への作用は, 勿論これの制限となっている．

$$G' := SU(1,1) = c_G G c_G^{-1} = \{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1\} \subset G_\mathbf{C} = SL(2,\mathbf{C}),$$
$$c_G := \begin{pmatrix}1 & -\sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1} & 1\end{pmatrix} \in GL(2,\mathbf{C})$$

とおき, その部分群 K' を $K' = c_G K c_G^{-1} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} \mid |\alpha| = 1\right\}$ で定める．$\mathfrak{g}'_\mathbf{C}$ の $\mathbf{C}$ 上の基底として

$$X'_+ := \mathrm{Ad}(c_G)X_+ \quad X'_- := \mathrm{Ad}(c_G)X_+, \quad H' := \mathrm{Ad}(c_G)H$$

が取れる. G' は $\Delta := \{w \in \mathbf{C} \mid |w| < 1\}$ に推移的に作用して, $G'/K' \cong \Delta$ となる. $j : GL(2,C) \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を

$$j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) = cz + d$$

と拡張しておく. C^∞-関数 $f : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ に対して, $F = F_f : \Delta \to \mathbf{C}$ を

$$F_f(w) := j(c_G^{-1}, w)^{-k} f(c_G^{-1}\langle w \rangle)$$

で定め, さらに $\phi_F : G' \to \mathbf{C}$ を,

$$\phi_F(g') := j(g', 0)^{-k} F(g'\langle 0 \rangle)$$

で定義する. すると, $\varphi_f : G \to \mathbf{C}$ を定理 10 のように定めるとき

$$j(c_G, \sqrt{-1})^k \varphi_f(g) = \phi_F(c_G g c_G^{-1}), \qquad g \in G$$

が成立する. したがって, $(\sharp)$ を示すためには, $F \in C^\infty(\Delta)$ に対して

$$(\bigstar) : \qquad F \text{ は正則関数} \Leftrightarrow R(X'_-)\phi_F = 0$$

を証明すれば良い.

準備２：Borel 埋め込みと保型因子

複素リー群 $G_\mathbf{C}$ の部分群 P'_+, $K'_\mathbf{C}$, P'_- を

$$P'_+ := \exp(\mathbf{C}X'_-) = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{C}\}, \qquad K'_\mathbf{C} := \exp(\mathbf{C}H') = \{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{C}\},$$

$$P'_- := \exp(\mathbf{C}X'_-) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{C}\},$$

で定める. 次は容易に確かめられる：

補題 14. (i) 掛算写像 $P'_+ \times K'_\mathbf{C} \times P'_- \to G_\mathbf{C}$ はその像 $P'_+K'_\mathbf{C}P'_-$ への双正則写像である. また, $P'_+K'_\mathbf{C}P'_- = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_\mathbf{C} \mid \delta \neq 0\right\}$ は $G_\mathbf{C}$ の開部分集合である.
(ii) $G' \subset P'_+K'_\mathbf{C}P'_+$.
(iii) $G' \cap K'_\mathbf{C}P'_- = K'$.

この補題により,

$$G'/K' \hookrightarrow P'_+ \cong P'_+K'_\mathbf{C}P'_-/K'_\mathbf{C}P'_- \hookrightarrow G_\mathbf{C}/K'_\mathbf{C}P'_- \cong \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$$

なる写像が引き起こされる (Borel 埋め込み). これによって G'/K' に自然に複素構造が導入される. また, 分解

$$(4) \qquad g' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g'\langle 0 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(g',0)^{-1} & 0 \\ 0 & j(g',0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar\alpha^{-1}\bar\beta & 1 \end{pmatrix}$$

によって保型因子が自然に現れることに注意しよう (保型因子の値 $j(g', w)$ ($g' \in G, w \in \Delta$) は, その性質から $j(g', 0)$ だけで決まることに注意). ここで, ２つ補題を準備する.

補題 15. $g'K \in G'/K'$ における複素化された接空間 $T_{g'K}(G'/K') \otimes_\mathbf{R} \mathbf{C}$ においてその反

正則部分は $\mathbf{C}L_{g*}X'_-$ で与えられる.

Proof. G' の G'/K' への作用は双正則なので, $g=e$ のときに示せば良いが, それは G'/K' への複素構造の入れ方を考えれば自明である. □

補題 16. 写像 $\widetilde{j}: P'_+K'_{\mathbf{C}}P'_- \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\widetilde{j}(g') := j(g',0) = \delta, \qquad g' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, $\widetilde{j}$ は右 P'_- 不変な正則関数である.

Proof. これは (4) の分解より自明である. □

<u>(★) の証明</u> 以上の準備の下で, (★) を証明しよう. 定義にしたがって計算してやれば

$$\begin{aligned}
&[R(X'_-)\phi_F](g') \\
=&\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big\{\phi_F(g'\exp(t\mathrm{Re}(X'_-))) + \sqrt{-1}\phi_F(g'\exp(t\mathrm{Im}(X'_-)))\Big\} \\
=&\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big\{\widetilde{j}(g'\exp(t\mathrm{Re}(X'_-))^{-k} + \sqrt{-1}\,\widetilde{j}(\exp(t\mathrm{Im}(X'_-))^{-k}\Big\}F(g'\langle 0\rangle) \\
&+\widetilde{j}(g')^{-k}\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big\{F(g'\exp(t\mathrm{Re}(X'_-)\langle 0\rangle)) + \sqrt{-1}F(g'\exp(t\mathrm{Im}(X'_-)\langle 0\rangle))\Big\} \\
=&\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big\{\widetilde{j}(g'\exp(tX'_-))^{-k}\Big\}F(g'\langle 0\rangle) + \widetilde{j}(g')^{-k}R(X'_-)\Big[G' \ni g' \mapsto F(g'\langle 0\rangle) \in \mathbf{C}\Big]
\end{aligned}$$

となる. 最後の等式で $\widetilde{j}$ が正則関数であることを用いた. 補題 16 より $\widetilde{j}(g'\exp(tX'_-))$ は $t \in \mathbf{R}$ によらず一定なので, 結局

$$[R(X'_-)\phi_F](g') = \widetilde{j}(g')^{-k}R(X'_-)\Big[G' \ni g' \mapsto F(g'\langle 0\rangle) \in \mathbf{C}\Big]$$

を得る. ところが, 補題 15 に注意すればこれは, (★) (したがって (♯)) を示している.

注意. K' の一次元表現 $\mathbf{C}_k$ を $K' \ni \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \alpha^k \in \mathbf{C}^{(1)}$ で定める. これの反傾表現を $\mathbf{C}_k^\vee (\cong \mathbf{C}_{-k})$ 書くとき, Borel 埋め込みによって $\mathbf{L}_k := G' \times_{K'} \mathbf{C}_k^\vee \to G'/K'$ には正則直線束の構造が入る. 上記の証明は, $\mathbf{L}_k$ を保型因子を通じてを自明化することにより, $\mathbf{L}_k$ の正則切断の空間が G'/K' 上の正則関数の空間と同一視できることを言っている. この見方は, 離散系列表現 D_k^- の $G/K(\cong G'/K')$ 上の正則関数の空間の部分空間への実現 ([Knapp, Chapter II]) を理解する上でも大切である.

3 $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式と Hecke 作用素

アデール群 $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式を定義し, 上半平面上の保型形式における Hecke 作用素が $GL(2,\mathbf{Q}_p)$ の Hecke 環の作用として書けることを説明する. また, 後の講演の準備を兼ねて, Eisenstein 級数を定義して, それが Hecek-eigen form であることを解説する.

(3.1) アデール群 $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式の空間. 有理数体 $\mathbf{Q}$ の素点 v に対して, $GL(2,\mathbf{Q}_v)$

は $M(2,\mathbf{Q}_v)$ からの誘導位相を与えると局所コンパクト群になる．$GL(2,\mathbf{Q}_v)$ の部分群 K_v を

$$K_\infty := O(2), \qquad K_p := GL(2,\mathbf{Z}_p), \quad (v = p < \infty)$$

で定める． K_v は $GL(2,\mathbf{Q}_v)$ の（共役を除いてただ一つの）極大コンパクト部分群である．$GL(2,\mathbf{A})$ にも $M(2,\mathbf{A})$ からの誘導位相を与えると局所コンパクト群となるが, これは $GL(2,\mathbf{Q}_v)$ たちの部分群の族 $\{K_v\}$ に関する制限直積群 $\prod'_v GL(2,\mathbf{Q}_v)$ と位相群として同型である．また $\mathbf{K} := \prod_v K_v$, $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}} := \prod_{v<\infty} K_v$ と置くと, これは $GL(2,\mathbf{A})$ の（共役を除いてただ一つの）極大コンパクト部分群である．$GL(2,\mathbf{A})$ の中心は $Z(\mathbf{A}) := \{\begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{A}^\times\}$ で与えられる．しばしば $\mathbf{A}^\times \ni z \mapsto \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \in Z(\mathbf{A})$ を通じて, $\mathbf{A}^\times$ と $Z(\mathbf{A})$ を同一視する．単射準同型 $\mathbf{R}_+^\times \hookrightarrow \mathbf{A}^\times$ により, $\mathbf{R}_+^\times$ を $\mathbf{A}$ や $Z(\mathbf{A})$ の部分群と見做すことにする．$GL(2,\mathbf{A})$ 上の関数 $\varphi : GL(2,\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ が, smooth(あるいは C^∞) であるとは, $g_{\mathrm{fin}} \in GL(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$ を固定するごとに

$$GL(2,\mathbf{R}) \ni g_\infty \mapsto \varphi(g_\infty g_{\mathrm{fin}}) \in C$$

が C^∞-級関数であり, $g_\infty \in GL(2,\mathbf{R})$ を固定するごとに $GL(2,\mathbf{R}) \ni g_\infty \mapsto \varphi(g_\infty g_{\mathrm{fin}}) \in \mathbf{C}$ は局所定数関数であることとする．

定義 17. (1) Hecke 指標 $\omega : \mathbf{Q}^\times \mathbf{R}_+^\times \backslash \mathbf{A}^\times \to \mathbf{C}^{(1)}$ を固定する．smooth な関数 $\varphi : GL(2,\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ が, 次の条件 (i)-(iv) を満たすとき, φ を $GL(2,\mathbf{A})$ 上の中心指標 ω を持つ保型形式と呼び, その全体を $\mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\omega)$ で表す.

(i) $\varphi(\gamma z g) = \omega(z)\varphi(g), \quad \forall(\gamma, z, g) \in GL(2,\mathbf{Q}) \times Z(\mathbf{A}) \times GL(2,\mathbf{A})$;
(ii) φ は右 $\mathbf{K}$-有限である;
(iii) φ は, $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-有限である;
(iv) φ は緩増大である, すなわち, 次の不等式を満たす様な $C > 0$, $M > 0$ が存在する:

$$|\varphi(g)| \le C||g||^M, \qquad g \in GL(2,\mathbf{A}).$$

但し, 局所的な高さ関数 $||\cdot||_v : GL(2,\mathbf{Q}_v) \to \mathbf{R}_+^\times$ を

$$||\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}||_v := \max\{|a|_v, |b|_v, |c|_v, |d|_v, 1/|ad-bc|_v\}$$

で定め, $GL(2,\mathbf{A})$ 上の高さ関数を $||g|| := \prod_v ||g_v||_v$ $(g = (g_v) \in GL(2,\mathbf{A}))$ で定義する.
(2) $\varphi \in \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\omega)$ が条件

$$\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}} \varphi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)dx = 0, \quad \forall g \in GL(2,\mathbf{A})$$

を満足するとき, φ を $GL(2,\mathbf{A})$ 上の中心指標 ω を持つカスプ形式 (尖点形式）と呼び, その全体を $\mathcal{A}^{cusp}(GL(2,\mathbf{A});\omega)$ で表す.

(3.2) $SL(2,\mathbf{R})$ **上の保型形式との関係.** §2 で導入した $SL(2,\mathbf{R})$ 上の合同部分群に関する保型形式は, 上で定義した $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式とみなすことができる．それを説明す

るためにまず次を証明する.

補題 18. $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ を $\det(\mathbf{K}') = \widehat{\mathbf{Z}}^\times$ を満たすような $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ の開コンパクト部分群とする. このとき, $SL(2,\mathbf{R})$ の部分群 Γ' を

$$GL(2,\mathbf{Q}) \cap (SL(2,\mathbf{R}) \times \mathbf{K}')$$

の $SL(2,\mathbf{Q}) \hookrightarrow GL(2,\mathbf{A})$ による引き戻しで定義する. このとき, Γ' は $SL(2,\mathbf{R})$ の合同部分群である. また $\Gamma' g_\infty \in \Gamma' \backslash SL(2,\mathbf{R})$ に対して,

$$[g_\infty] := \mathbf{R}_+^\times GL(2,\mathbf{Q}) g_\infty \mathbf{K}' \in \mathbf{R}_+^\times GL(2,\mathbf{Q}) \backslash GL(2,\mathbf{A})/\mathbf{K}'$$

を対応させることにより全単射

$$\Gamma' \backslash G \cong \mathbf{R}_+^\times GL(2,\mathbf{Q}) \backslash GL(2,\mathbf{A})/\mathbf{K}'$$

が得られる.

Proof. Γ' が合同部分群であることを見るには, $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ の単位元の基本近傍系として

$$\{\mathbf{K}(N)\}_{N \geq 1} \qquad \mathbf{K}(N) := \{k \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} \mid k \equiv I_2 \pmod N\}$$

がとれることに注意すればよい. また, 補題の写像が定義可能 (well-defined) であること及び単射であることは Γ' の定義から従う. 全射性を示そう. $g \in GL(2,\mathbf{A})$ を一つ取ると, 直積分解 $\mathbf{A}^\times = \mathbf{Q}^\times \times \mathbf{R}_+^\times \times \hat{\mathbf{Z}}^\times$ より,

$$\det(g) = \lambda t_\infty u_{\mathrm{fin}}, \qquad (\lambda, t_\infty, t_{\mathrm{fin}}) \in \mathbf{Q}^\times \times \mathbf{R}_+^\times \times \hat{\mathbf{Z}}^\times$$

と書くことができる. $\mathbf{K}'$ に関する仮定より, $\det(u_{\mathrm{fin}}) = t_{\mathrm{fin}}$ となるような $u_{\mathrm{fin}} \in \mathbf{K}'$ が取れる. $g_1 \in SL(2,\mathbf{A})$ を

$$g = \begin{pmatrix} t_\infty^{1/2} & \\ & t_\infty^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix} g_1 u_{\mathrm{fin}}$$

によって定める. ところで, $SL(2)$ は単連結な半単純代数群なので $SL(2,\mathbf{Q})$ は $SL(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$ において稠密である (強近似定理). したがって,

$$SL(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}}) = SL(2,\mathbf{Q})(\mathbf{K}' \cap SL(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}}))$$

が成立する. そこで, g_1 を

$$g_1 = \gamma_1 g_{1,\infty} u_{1,\mathrm{fin}} u_{\mathrm{fin}}, \qquad (\gamma_1, g_{1,\infty}, u_{1,\mathrm{fin}}) \in SL(2,\mathbf{Q}) \times G \times (\mathbf{K}' \cap SL(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}}))$$

と書くことができる. 以上を合わせて

$$g = \begin{pmatrix} t_\infty^{1/2} & \\ & t_\infty^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix} \gamma_1 g_{1,\infty} u_{1,\mathrm{fin}} u_{\mathrm{fin}}$$

と書けるから

$$\Gamma' g_{1,\infty} \mapsto [g] \in \mathbf{R}_+^\times GL(2,\mathbf{Q}) \backslash GL(2,\mathbf{A})/\mathbf{K}'$$

となって全射性も示された. □

例. (i) $\mathbf{K}'$ として $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$, $\mathbf{K}_0(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} \mid c \in N\widehat{\mathbf{Z}}\}$, または $\mathbf{K}' = \mathbf{K}_1(N) :=$

$\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} \mid c, d-1 \in N\widehat{\mathbf{Z}}\}$ を取ると, これらは補題の仮定を満たし, それぞれの場合の応じて $\Gamma' = SL(2,\mathbf{Z})$, $\Gamma' = \Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod N\}$, または $\Gamma' = \Gamma_1(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \mid c, d-1 \equiv 0 \pmod N\}$ となる.

命題 19. 補題 18 の全単射を通じて, $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma'\backslash G)$ を自然に $\mathbf{R}_+^\times GL(2,\mathbf{Q})\backslash GL(2,\mathbf{A})/\mathbf{K}'$ 上の関数とみなしたものを $\widetilde{\varphi}$ と記す. すると, $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ は単射

$$M_k(\Gamma_0(N)) \cong \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma_0(N)\backslash G) \hookrightarrow \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\mathbf{1})$$

$$S_k(\Gamma_0(N)) \cong \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma_0(N)\backslash G) \cap \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma_0(N)\backslash G) \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(GL(2,\mathbf{A});\mathbf{1})$$

を与える.

Proof. 1 つ目の単射は, $\widetilde{\varphi}$ が緩増大であることを確かめれば良い. 2 つ目の単射については, 尖点条件が対応することを見れば良い. □

同様に, $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ を Dirichlet 指標とし,

$$M_k(\Gamma_0(N),\chi) := \left\{ f \in M_k(\Gamma_1(N)) \mid f|_k\gamma = \chi(d)f \quad \forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

と置くとき,

$$M_k(\Gamma_0(N),\chi) \hookrightarrow \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\omega_\chi^{-1})$$

なる自然な単射が得られる. ここで, $\omega_\chi : \mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times\mathbf{R}_+^\times \cong \widehat{\mathbf{Z}}^\times \to (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \xrightarrow{\chi} \mathbf{C}^\times$ と置いた.

(3.3) Hecke 作用素. 有限素点 $p < \infty$ を一つ固定し,

$$\mathcal{H}_p := \left\{ \Phi : GL(2,\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{C} \mid \begin{array}{l} \bullet\ \Phi(kgk') = \Phi(g), \quad \forall k,k' \in K_p, \forall g \in GL(2,\mathbf{Q}_p), \\ \bullet\ \mathrm{supp}(\Phi)\ \text{はコンパクト} \end{array} \right\}$$

と置く. unimodular 群 $GL(2,\mathbf{Q}_p)$ 上の Haar 測度を $\mathrm{vol}(K_p) = 1$ となるように正規化し, $\mathcal{H}_p$ に合成積

$$(\Phi * \Phi')(x) = \int_{GL(2,\mathbf{Q}_p)} \Phi(xy^{-1})\Phi'(y)dy, \qquad \Phi,\Phi' \in \mathcal{H}_p$$

によって積演算を入れると ch_{K_p} を単位元とする結合的 $\mathbf{C}$-algebra となる. $\mathcal{H}_p$ を Hecke 環 (Hecke algebra) と呼ぶ. $\mathcal{H}_p$ は次の空間

$$\left\{ \Phi : GL^+(2,\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]) \to \mathbf{C} \mid \begin{array}{l} \bullet\ \Phi(\gamma\delta\gamma') = \Phi(g), \quad \forall\gamma,\gamma' \in \Gamma(1), \forall\delta \in GL^+(2,\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]); \\ \bullet\ \exists\delta_i \text{ s.t. } \{\delta \mid \Phi(\delta) \neq 0\} \subset \cup_{i=1}^{\ell}\Gamma(1)\delta_i\Gamma(1) \end{array} \right\}$$

と制限写像を通じて同一視される. $p \nmid N$ のときに $M_k(\Gamma_0(N))$ への $\mathcal{H}_p$ の作用を定義しよう. $\delta \in GL^+(2,\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$ に対して $\Phi_\delta \in \mathcal{H}_p$ を $\Gamma(1)\delta\Gamma(1)$ の定義関数とする. $\Gamma(1)\delta\Gamma(1) = \sqcup_j \Gamma(1)\alpha_j$ とするとき

$$f * \Phi_\delta = \sum_j f|_k\alpha_j$$

と定義し, これを $\mathbf{C}$-線形に拡張する. また, $\varphi \in \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\mathbf{1})$ および $\Phi \in \mathcal{H}_p$ に対して,

$$[\varphi * \Phi](x) := \int_{GL(2,\mathbf{Q}_p)} \varphi(xg_p^{-1})\Phi(g_p)dg_p$$

によって定義する. このとき,

$$\widetilde{\varphi}_{f*\Phi} = \widetilde{\varphi_f} * \Phi, \qquad f \in M_k(\Gamma_0(N)), \quad \Phi \in \mathcal{H}_p$$

が成立する.

問. 上の等式を確かめよ.

(3.4) Eisenstein 級数. 後の講演（原稿）の準備を兼ねて, $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式の例として, Eisenstein 級数を最も簡単な場合に導入しておこう. $GL(2,\mathbf{A})$ の主系列表現の空間を

$$I(s) := \Big\{\phi : GL(2,\mathbf{A}) \to \mathbf{C} \mid \phi(\begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} g) = |\frac{b_1}{b_2}|^{(s+1)/2}\phi(g)\Big\}$$

で定義する. $I(s)$ に属す関数のうち右 $\mathbf{K}$ 有限な関数の全体を $I(s)_{\mathbf{K}}$ で表す. このとき, $E : I(s)_{\mathbf{K}} \to \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\mathbf{1})$ を

$$E(\phi; g) := \sum_{\gamma \in B(\mathbf{Q})\backslash GL(2,\mathbf{Q})} \phi(\gamma g)$$

で定義すると, これは $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し, $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times GL(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$-加群としての絡作用素を与える. ここで, $B(\mathbf{Q}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbf{Q})\}$ は $GL(2,\mathbf{Q})$ の Borel 部分群である. さらに, 関数族 $\phi^{(s)} \in I(s)_{\mathbf{K}}$ ($s \in \mathbf{C}$) の $\mathbf{K}$ への制限が s によらないとき, $E(\phi^{(s)}; g)$ は全 s-平面に有理型に解析接続されることが示される. $\phi^{(s)}$ として, $\mathbf{K}$-不変ベクトル $\phi^{\circ,(s)}(k) = 1$ ($\forall k \in \mathbf{K}$) をとると

$$E(\phi^{\circ,(s)}, g_z) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d) \in \mathbf{Z}^2, (c,d)=1} \Big(\frac{y}{|cz+d|^2}\Big)^{(s+1)/2}$$

となって, 重さ 0 の実解析的 Eisenstein 級数を得る. $C^\infty(G/K)$ 上のラプラス作用素を

$$\Delta = -y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) = -2R(\Omega_{\mathfrak{g}})$$

で定義する. E が $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-準同型であることを使って計算すれば

$$\Delta E(\phi^{\circ,(s)}, g_z) = 2(1-s^2)E(\phi^{\circ,(s)}, g_z)$$

を得る. 同じく $\phi^{\circ,(s)}(k) = 1$ ($\forall k \in \mathbf{K}$) が Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ たちの同時固有関数であることに注意すれば, E が $GL(2,\mathbf{Q}_p)$-準同型であることから $E(\phi^{\circ,(s)}, g)$ も Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ たちの同時固有関数であることがわかる.

文献案内

1．半単純 Lie 群上の解析の基本的な手法． Lie 群の基礎事項に関しては [Helgason1](あるいは [Helgason2]) の Ch. 2（約 60 ページ） が勧められる（一部で，Ch. 1 の微分幾何の定理を援用している個所もあるが，Ch. 2 からでも読み進めることも可能). 他にも，[小林-大島], [Warner], [松嶋 1], [松木] などがあるが, これらから一冊読めば十分であろう．上記と平行して [佐武] を読まれるのも全体像をつかむのに役立つ．Lie 環論については [Serre] はいくつか基本的な定理 (Lie の定理, Engel の定理) の証明は略されているが，それらを法として self-contained に書かれており，読みやすい．そのほか [Helgason1, Ch. 3] もよくまとまっている．[松嶋 2], [Humphreys] も昔からよく読まれているようである．

2．半単純 Lie 群 $G = SL(2, \mathbf{R})$ 上の保型形式の空間． [Harish-Chandra] およびその解説として [Borel], [Bump, Ch.2], [Borel-Jacquet] など．Lie 群の表現論に関しては, [Knapp], [Wallach] が標準的な教科書である．特に後者は, 保型形式の研究者にとってなじみやすいように思う．

3．アデール群上の保型形式の空間と Hecke 作用素 ($GL(2)$ の場合)． 全般的な解説としては, [Bump, Chapter 3], [Gelbart-Shahidi], [Cogdell] 等がある．関連する p-進代数群の表現に関しては, [Bernstein-Zelvinski], [Bump, Ch.4], [Cartier], [高橋], [Satake] をまず見るとよい．L-関数については, まったく触れなかった．これについては，[Jacquet-Langalands] に加えて，[Cogdell]，[今野] などにも詳しい解説がある．代数群に関しては，[Platonov-Rapinchuk] が便利な文献.

References

[Borel] Borel, A., *Automorphic forms on* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, Cambridge Tracts in Mathematics, 130. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

[Bernstein-Zelvinski] , Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field, Russian Math Suveys **3** (1976) 1–68.

[Borel-Jacquet] Borel, A. and Jacquet, H, Automorphic forms and automorphic representations., With a supplement "On the notion of an automorphic representation" by R. P. Langlands. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, pp. 189–207, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Bump] Bump, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, (1997).

[Cartier] Cartier, P, Representations of p-adic groups: a survey. Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977, Part 1, pp. 111–155, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Cogdell] Cogdell, J., L-functions and converse theorems for GL_n, In; Automorphic forms and applications, AMS (2007).

[Garrett] Garrett, P., Universality of holomorphic discrete series. Available from http://www.math.umn.edu/~garrett

[Gelbart-Shahidi] Gelbart, S and Shahidi, F., *Analytic properties of automorphic L-functions*, Perspectives in Math. (1988). Academic Press.

[Harish-Chandra] Harish-Chandra., *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Lecture notes in Math. **62** (1968), Springer.

[Helgason1] HELGASON, S., *Differential geometry and symmetric spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XII. Academic Press, New York-London 1962 xiv+486 pp.

[Helgason2] HELGASON, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, 34. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xxvi+641 pp. (Academic Press version もある).

[Humphreys] HUMPHREYS, J. E, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* (GTM 9), (1978) Springer.

[Jacquet-Langlands] JACQUET, H. AND LANGLANDS, R.P., *Automorphic forms on* $GL(2)$., Nocture notes in Mathematics 114, (1970) Springer Verlag.

[Knapp] KNAPP, A.W., Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples. Princeton Mathematical Series, 36. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.

[小林-大島] 小林俊行　大島利雄, Lie 群と表現論 (「Lie 群と Lie 環 1,2」(1999) を改題), 岩波書店 (2005).

[今野] 今野拓也, 「GL_2 上の保型形式とその標準 L 函数」, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集　(2009), p37-136.

[松木] 松木敏彦, リー群入門 (日評数学選書), 日本評論社 (2005).

[松嶋 1] MATSUSHIMA, Y., 多様体入門, 裳華房 (1965).

[松嶋 2] MATSUSHIMA, Y., Lie 環論, 共立出版 (1956).

[Mo] MORIYAMA, T., Representations of $GSp(4,\mathbf{R})$ with emphasis on discrete series 第 9 回整数論オータムワークショップ 報告集 (2007), page 199-211.

[Platonov-Rapinchuk] PLATONOV. V AND RAPINCHUK. A., Algebraic groups and number theory., Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen. Pure and Applied Mathematics, 139. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994. xii+614 pp.Academic Press.

[佐武] SATAKE, I., Lie 群の話., 日本評論社　(1982).

[Satake] SATAKE, I., Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 18 (1963) 5–69.

[Serre] SERRE, J. P., Complex seimsimple Lie algebras., Translated from the French by G. A. Jones. Springer-Verlag, New York, (1987). x+74 pp. Springer.

[高橋] 高橋哲也, p 進体上の簡約代数群の admissible 表現論入門 Rokko Lectures in Mathematics vol.4 (1998).

[Wallach] WALLACH, N., Real reductive groups I, Academic Press.

[Wallach-2] WALLACH, N., On the constant term of an L2-automorphic form, Operator Algebras and Group Representations.II (Momog. Stud. Math., Vol. 18), Pittman, London, 1984, 227-237.

[Warner] WARNER, F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.*, Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. ix+272 pp.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITYMACHIKANEYAMA-CHO 1-1, TOYONAKA, OSAKA, 560-0043, JAPAN

E-mail address: `moriyama[at]math.sci.osaka-u.ac.jp`

セルバーグ跡公式,
セルバーグゼータ関数

九州大学・数理学研究院　　権　寧魯

2011 年 1 月 29 日

はじめに

このノートは２０１０年度整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」において行われた二つの講演「Selberg 跡公式」,「Selberg ゼータ関数」の際に配布された講演資料に加筆，修正を行ったものです．これらのテーマに関心を持たれる方にとって何かのお役に立てば幸いです．世話人の金沢大学の若槻聡さん，京都大学の平賀郁さんには，サマースクールの期間を通して大変お世話になりました．講演の機会を与えてくださった世話人のお二人をはじめ，講演者の皆様，講演中およびそのあとで有益な質問やコメントを下さった方等，サマースクールの参加者皆様に深く感謝します．

目次

1 トレースクラス作用素

以下では H を可分なヒルベルト空間とし，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積，$\|\cdot\|$ でノルムを表すとする.

定義 1.1 (有界作用素，コンパクト作用素)**.** $T\in\mathrm{End}(H)$ とする.

1. $C>0$ が存在して，任意の $v\in H$ に対して，$\|Tv\|\le C\|v\|$ となるとき，T は有界作用素であるという．H 上の有界作用素全体を $B(H)$ とおく.
2. 任意の有界部分集合 $S\subset H$ に対し, $T(S)$ が相対コンパクトになるとき, T をコンパクト作用素という．H 上のコンパクト作用素全体を $K(H)$ とおく.

• $K(H)\subset B(H)$ である.

$T\in K(H)$ に対して，$|T|:=(TT^*)^{1/2}$ とおく．$|T|$ は正値で対称なコンパクト作用素になる.（T^* は T の随伴作用素で，TT^* が対称なコンパクト作用素だから，そのスペクトル分解を用いて $|T|$ を定義する.）$|T|$ の固有値を大きい順に重複度を込めて $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ とする.

定義 1.2 (p-Schatten class)**.** $p \geq 1$ とする.

$$B_p(H) := \left\{ T \in K(H) \,\middle|\, ||T||_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \Big)^{1/p} < \infty \right\}$$

定義 1.3 (trace class，Hilbert-Schmidt class)**.** $T \in K(H)$ とする.

1. $T \in B_1(H)$ のとき，T は trace class （跡族）であるという．$||T||_1$ を trace norm という.
2. $T \in B_2(H)$ のとき，T は Hilbert-Schmidt class であるという．$||T||_2$ を Hilbert-Schmidt norm という.

定義 1.4 (T の trace)**.** $T \in K(H)$ を trace class とする．$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の正規直交基底とする．T の trace（跡）を以下で定義する.

$$\operatorname{tr} T := \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle. \tag{1.1}$$

- $\operatorname{tr} T$ は絶対収束し，基底 $\{e_n\}$ の取り方によらない．$\operatorname{tr}|T| = ||T||_1$, $||T||_2 \leq ||T||_1$ である.

補題 1.5. *$T, A, B \in K(H)$ とする．A, B が Hilbert-Schmidt class で，$T = AB$ とかけるならば，T は trace class となる.*

定理 1.6 (Hilbert-Schmidt 型積分作用素)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とし，$L^2(\Omega)$ 上の積分作用素

$$L\phi(x) = \int_{\Omega} k(x,y)\phi(y)\,dy$$

の積分核について

$$\iint_{\Omega\times\Omega} |k(x,y)|^2\,dxdy < \infty$$

を満たすとする.（このとき，L は *Hilbert-Schmidt* 型積分作用素という.）以下が成り立つ.

1. L は *Hilbert-Schmidt class* となり，$||L||_2^2 = \iint_{\Omega\times\Omega} |k(x,y)|^2\,dxdy.$
2. さらに，L が *trace class* であると仮定する．（一般には成立しない）L の積分核 $k(x,y)$ が連続ならば，

$$\mathrm{tr}(L) = \int_\Omega k(x,x)\,dx. \tag{1.2}$$

• trace class であるような積分作用素 L の "跡公式"(1.2) は積分核が連続な場合は Duflo [9] によって示された．必ずしも連続とは限らない積分核を持つような trace class 積分作用素については [5], [6] を参照のこと．

2 ポアソン和公式

$\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,|\, a,b\in\mathbb{Z},\, a\geq 0$ に対して，$x^a(\frac{d}{dx})^b f$ が有界 $\}$ とおく．

定理 2.1 (ポアソン和公式)．$f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ とし，f の *Fourier* 変換を

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx$$

とおく．このとき，以下が成り立つ．

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m). \tag{2.1}$$

Proof. $F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ とおき，Fourier 展開すると

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)e^{2\pi imx}$$

となるので，$x=0$ とすればよい． $\square$

$f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ とする．f を試験関数とする $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = L^2([0,1))$ に作用する

作用素 $R(f)$ を考える．

$$\begin{aligned}[R(f)\,\phi](x) &:= \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(x+y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y-x)\phi(y)\,dy \\ &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(y+n-x)\,\phi(y)\,dy \\ &= \int_0^1 K_f(x,y)\,\phi(y)\,dy.\end{aligned}$$

ここで，$K_f(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(y+n-x)$ とおいた．$R(f)$ は $K_f(x,y)$ を積分核とする積分作用素となる．$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の正規直交基底として，$\{e_m := e^{2\pi imx} \,|\, m\in\mathbb{Z}\}$ がとれる．$R(f)$ の定義より，

$$R(f)\,e_m = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{2\pi im(x+y)}\,dy = \hat{f}(-m)\,e_m$$

となり，

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \|R(f)\,e_m\| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| < \infty$$

なので，$R(f)$ は trace class 作用素となる． よって，$R(f)$ の trace は以下で与えられる．

$$\operatorname{tr}(R(f)) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle R(f)\,e_m, e_m\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m). \tag{2.2}$$

$R(f)$ が積分作用素であることを用いて，$R(f)$ のトレースの別の表示を求める．$K_f(x,y)$ は $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ 上の連続関数より有界なので，$K_f(x,y) \in L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$ である．積分作用素 $R(f)$ が Hilbert-Schmidt 型になり，$R(f)$ は trace class だったので，定理 1.6 より

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(R(f)) &= \int_0^1 K_f(x,x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n-x)\,dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n). \end{aligned}\tag{2.3}$$

これらの $\mathrm{tr}(R(f))$ のふたつの表示式 (2.2), (2.3) からポアソンの和公式が証明される．局所コンパクトなアーベル群とその離散部分群の組 $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ に対して行った今の手続を，**非可換な位相群**とその離散部分群の組 (G, Γ) に対して行い実行したものが**セルバーグの跡公式**である．

3 ココンパクトな場合のセルバーグ跡公式

G を半単純実リー群で中心の位数が有限とする．G 上のハール測度をひとつ固定し，dg とする．Γ を G の離散部分群で，商空間 $\Gamma\backslash G$ がコンパクトであるとする．$\Gamma\backslash G$ 上の自乗可積分関数のなす空間を考える：

$$L^2(\Gamma\backslash G) := \left\{ \phi\colon G \to \mathbb{C}\ \text{可測関数} \,\middle|\, (i)\ \phi(\gamma g) = \phi(g), \forall(\gamma, g) \in \Gamma \times G, \right.$$
$$\left. (ii)\ \int_{\Gamma\backslash G} |f(g)|^2\, dg < \infty \right\}.$$

$L^2(\Gamma\backslash G)$ は内積 $\langle f_1, f_2 \rangle := \int_{\Gamma\backslash G} f_1(g)\overline{f_2(g)}\, dg$ に関して可分なヒルベルト空間になる．G 上のコンパクト台を持つ滑らかな関数全体の空間を $C_c^\infty(G)$ とおく．$f \in C_c^\infty(G)$ を試験関数とし，$L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用する作用素 $R(f) \in \mathrm{End}(L^2(\Gamma\backslash G))$ を考える．

$$\begin{aligned}
[R(f)\,\phi](x) &:= \int_G f(g)\phi(xg)\, dg \\
&= \int_G f(x^{-1}g)\phi(g)\, dg \\
&= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma g)\, \phi(g)\, dg \\
&= \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x, g)\, \phi(g)\, dg.
\end{aligned}$$

ここで，$K_f(x, y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)$ とおいた．$R(f)$ は $K_f(x, y)$ を積分核とする積分作用素となる．仮定より，$\Gamma\backslash G$ はコンパクトなので，$K_f(x, y)$

は $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$ 上の連続で有界な関数になる．よって，

$$\int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} |K_f(x,y)|^2 \, dxdy < \infty$$

が示される．これより，$R(f)$ は Hilbert-Schmidt 型積分作用素になるので，$R(f)$ は Hilbert-Schmidt class 作用素になる．さらに，以下の命題により，$R(f)$ は $L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用する trace class 作用素となる．

命題 3.1 (Dixmier-Malliavin [8])**.** G を半単純リー群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ が与えられたとき，$f_1, f_2 \in C_c^\infty(G)$ が存在して，

$$f = f_1 * f_2$$

が成り立つ．

命題 3.2. Γ をココンパクトな G の離散部分群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ に対して，$R(f)$ は $L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用する *trace class* 作用素となる．

Proof. 命題 3.1 より，$R(f) = R(f_1)\,R(f_2)$ となり，Hilbert-Schmidt class 作用素二つの合成でかける．補題 1.5 より，$R(f)$ は trace class となる． □

補題 3.3. Γ をココンパクトな G の離散部分群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ に対して，$R(f)$ の *trace* は以下で与えられる．

$$\mathrm{tr}(R(f)) = \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,x)\, dx.$$

Proof. $L^2(\Gamma\backslash G)$ の正規直交基底（完全正規直交系）を $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ とすると，$K_f(x,y) \in L^2((\Gamma\backslash G)^2)$ より，$L^2((\Gamma\backslash G)^2)$ の正規直交基底 $\{\phi_m(x)\cdot\overline{\phi_n(y)}\}$ を用いて展開できる：

$$K_f(x,y) = \sum_{m,n} c_{mn}\,\phi_m(x)\,\overline{\phi_n(y)}.$$

再び，$R(f)$ の定義より

$$R(f)\,\phi_n = \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,y)\phi_n(y)\,dy = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn}\,\phi_m.$$

$R(f)$ は trace class だったので，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R(f)) &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle R(f)\phi_n, \phi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nn} \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,x)\,dx.\end{aligned}$$

□

以下では，$\mathrm{tr}(R(f))$ を二通りに計算する．

- スペクトルサイド（表現の分解）：

R_Γ を $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上の右正則表現とする．すなわち，$g \in G$ に対して，

$$[R_\Gamma(g)\phi](x) := \phi(xg)$$

とおく．作り方から，R_Γ は G のユニタリ表現になる．$\hat{G}$ を G の既約ユニタリ表現の同値類の集合とする．

定理 3.4 (Gel'fand, Graev, Piatetski-Shapiro [13])**.** Γ をココンパクトな G の離散部分群とする．R_Γ は G の既約ユニタリ表現の直和に分解し，各重複度は有限である．$\pi \in \hat{G}$ に対して，$L^2(\Gamma\backslash G)$ における重複度を $m_\Gamma(\pi)$ とおくと，G の表現として

$$R_\Gamma = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi)\,\pi, \quad (m_\Gamma(\pi) < \infty) \tag{3.1}$$

とかける．

定義 3.5. $(\pi, H_\pi) \in \hat{G}$, $f \in C_c^\infty(G)$ に対して，$\pi(f) \in \mathrm{End}(H_\pi)$ を以下で定義する．

$$\pi(f)\,v := \int_G f(g)\pi(g)v\,dg \quad (v \in H_\pi).$$

補題 1.5 を用いると，$\pi(f)$ が trace class であることが示せる．この事実と

$$R(f)=\int_G f(g)R_\Gamma(g)\,dg\ \in \mathrm{End}(L^2(\Gamma\backslash G))$$

において，定理 3.4 を用いれば，

定理 3.6. Γ をココンパクトな G の離散部分群とする．このとき，

$$\mathrm{tr}(R(f))=\sum_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi)\,\mathrm{tr}(\pi(f))$$

が成り立つ．右辺の和は絶対収束する．

- 幾何サイド（$\int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,x)\,dx$ の計算）:

$\mathrm{Conj}(\Gamma)$ を Γ の共役類の集合とする．G_γ, Γ_γ をそれぞれ，γ の G, Γ における中心化群とする．

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,x)\,dx &= \int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)\,dx \\
&= \int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\mathrm{Conj}(\Gamma)}\sum_{\delta\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x)\,dx \\
&= \sum_{\gamma\in\mathrm{Conj}(\Gamma)}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\,dx \\
&= \sum_{\gamma\in\mathrm{Conj}(\Gamma)}\int_{G_\gamma\backslash G} d\dot{x}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma} f(x^{-1}y^{-1}\gamma y x)\,d\dot{y} \\
&= \sum_{\gamma\in\mathrm{Conj}(\Gamma)} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma)\int_{G_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\,d\dot{x} \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

定義 3.7 (軌道積分)**.**

$$I(\gamma,f):=\int_{G_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\,d\dot{x}$$

ここで，$d\dot{x}$ は $G_\gamma\backslash G$ 上の不変測度である．

定理 3.8 (Selberg 跡公式)**.** G を半単純リー群，Γ を G のココンパクトな離散部分群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ に対して，

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} m_\Gamma(\pi)\,\mathrm{tr}(\pi(f)) = \sum_{\gamma \in \mathrm{Conj}(\Gamma)} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash \mathrm{G}_\gamma) I(\gamma, f) \tag{3.3}$$

が成立する．両辺は絶対収束する．

4 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対するセルバーグ跡公式

$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，$G$ の極大コンパクト部分群 $K = \mathrm{SO}(2)$ とする．G は一次分数変換で上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に作用し，G/K と上半平面 $\mathbb{H}$ が同一視される．

• $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の元の分類. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の中心に属さない元 γ に対して，

1. γ が双曲的 (hyperbolic) $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$
2. γ が楕円的 (elliptic) $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| < 2$
3. γ が放物的 (parabolic) $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| = 2$

この節では，$\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ とする．コンパクトな場合と同様に，$f \in C_c^\infty(G)$ に対し，$L^2(\Gamma\backslash G)$ 上の G の右正則表現 $R(f)$ を考えて，$\mathrm{tr}(R(f))$ を計算したいが，$R(f)$ は **trace class にならない**．実際，ココンパクトのときと同様な積分核 $K_f(x,y)$ で定義される積分作用素を考えて，幾何サイドを計算しようとしても放物元の寄与が発散する．また，$R(f)$ が G の既約ユニタリ表現の離散直和にならず，G の主系列表現の “直積分” が現れる．

• [“跡” を計算する方針] : (1)　$L^2(\Gamma\backslash G)$ の G の表現空間としての離散直和部分への $R(f)$ の制限 $R_d(f)$ を考え，$\mathrm{tr}(R_d(f))$ を考える．

(2)　$L^2(\Gamma\backslash G)$ の直積分部分への $R(f)$ の制限 $R_c(f)$ の “跡” と放物元の幾何サイドへの寄与の双方の発散部分を相殺させる．

$f \in C_c^\infty(G)$ に対し，下記の L^2-空間への右正則表現 $R(f)$ を考える：

$$L^2(\Gamma\backslash G) = L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G) \oplus L^2_{\mathrm{con}}(\Gamma\backslash G)$$

ここで，$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)$ は 離散スペクトルの空間，$L^2_{\mathrm{con}}(\Gamma\backslash G)$ は連続スペクトルの空間であり，それぞれ，R_Γ 不変部分空間になる．$R(f)$ の $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)$ への制限を $R_d(f)$ とおけば，$R_d(f) \in \mathrm{End}(L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G))$ は trace class になることが証明できる．$\mathrm{tr}(R_d(f))$ を以下では計算する．

以降，簡単のため試験関数 f を両側 K-不変とする．

定義 4.1 (class one 表現)**.** π を G の既約ユニタリ表現とする．π の K への制限が K の自明表現 1_K を含むとき，π を class one 表現，または spherical 表現という．つまり，$0 \neq v_0 \in H_\pi$ が存在して，$\forall k \in K$ に対して，$\pi(k)v_0 = v_0$ となるときをいう．

- $\hat{G}_1 := \{\pi \in \hat{G} \,|\, \pi$ は class one 表現 $\}$ とおく．

命題 4.2. *$f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とし，(π, H_π) を G の既約ユニタリ表現とする．π が class one でないならば，$\pi(f) = 0$ となる．*

Proof. $k \in K$, $\alpha, \beta \in H_\pi$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
&\langle \pi(k)\pi(f)\alpha, \beta\rangle = \langle \pi(f)\alpha, \pi(k)^*\beta\rangle \\
&= \int_G f(x)\langle \pi(x)\alpha, \pi(k)^*\beta\rangle\, dx = \int_G f(x)\langle \pi(kx)\alpha, \beta\rangle\, dx \\
&= \int_G f(k^{-1}x)\langle \pi(x)\alpha, \beta\rangle\, dx \int_G f(x)\langle \pi(x)\alpha, \beta\rangle\, dx \\
&= \langle \pi(f)\alpha, \beta\rangle.
\end{aligned}$$

よって，$\pi(k)\pi(f) = \pi(f)$ となり，$\pi(f) \neq 0$ ならば π は class one になる． $\square$

命題 4.3. *$f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とする．$(\pi, H_\pi) \in \hat{G}$ を class one，$v_0 \in H_\pi$*

を K で固定される単位ベクトルとする．このとき，

$$\mathrm{tr}(\pi(f)) = \langle \pi(f)v_0, v_0 \rangle$$

が成り立つ．

$\bullet \pi_{ir} := \mathrm{Ind}_{MAN}^{G}(1_M \otimes a^{\frac{1}{2}+ir} \otimes 1_N)$ を G の spherical なユニタリ主系列表現とする．$(r \in \mathbb{R})$

定義 4.4 (アイゼンスタイン級数)**.** $g \in G$, $s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$E(g,s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\mathrm{Im}(\gamma g.i))^s$$

で定義する．ここで，$\Gamma_\infty = \pm N \cap \Gamma$ である．

$\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様絶対収束し，s に関して解析接続した関数を同じ記号で表す．$z = g.i \in \mathbb{H}$ の関数と見るときは $E(z,s)$ とかく．以下はよく知られている．

命題 4.5 (アイゼンスタイン級数のフーリエ展開)**.**

$$E(z,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y,s)\, e^{2\pi i n x}$$

のようにフーリエ展開されて，フーリエ係数は以下で与えられる．

$$a_n(y,s) = \begin{cases} y^s + \phi(s)\, y^{1-s} & n = 0 \\ \frac{2|n|^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{y}\, K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)\, \sigma_{1-2s}(|n|)}{\Lambda(s)} & n \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで，$\phi(s) := \frac{\Lambda(1-s)}{\Lambda(s)}$ であり，$\Lambda(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$ である．また，$\sigma_{1-2s}(n) := \sum_{d|n} d^{1-2s}$，$K_{s-\frac{1}{2}}(z)$ は K-ベッセル関数である．

定理 4.6.

$$K_f^c(g_1,g_2) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) E(g_1, \tfrac{1}{2}+ir) \overline{E(g_2, \tfrac{1}{2}+ir)}\, dr$$

とおく．このとき，修正された積分核：

$$K_f^d(g_1,g_2) := K_f(g_1,g_2) - K_f^c(g_1,g_2)$$

で定義される $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)$ 上の積分作用素 $R_d(f)$ は *trace class* になる．

以下では，$R_d(f)$ の作用する空間：

$$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi) H_\pi$$

の K-不変部分空間：

$$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) := L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)^K = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi) H_\pi^K$$

を考える．

命題 4.7. $f\in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とする．

$$\mathrm{tr}(R_d(f)) = \mathrm{tr}\big(R_d(f)\big|_{L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\big) = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}_1} m_\Gamma(\pi)\,\mathrm{tr}(\pi(f)).$$

Proof. 命題 4.2，4.3 より従う． □

以降では，$R_d(f)$ の $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ への制限を同じ記号で表す．

補題 4.8 (Maass-Selberg relation)**.** 十分大きい $Y>0$ に対して，

$$(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y := \{z = x+iy\in\mathbb{H},\,|\,|z|\geq 1,\,|x|\leq \tfrac{1}{2},\, y\leq Y\}$$

とおく．（切断された基本領域）このとき，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} |E(z,\tfrac{1}{2}+it)|^2\,\frac{dxdy}{y^2}\\ &= 2\log Y - \frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+it) + \frac{1}{2it}\Big\{Y^{2it}\phi(\tfrac{1}{2}-it) - Y^{-2it}\phi(\tfrac{1}{2}+it)\Big\}\\ &\quad +o(1)\quad (Y\to\infty).\end{aligned}$$

Proof. $h, t \in \mathbb{R}$ $(0 < h \leq 1,\, t \neq 0)$ に対して，$s = \frac{1}{2} + h + it$ とおく．$u(z) = v(z) = \tilde{E}(z, s)$ を “切断された”アイゼンスタイン級数として，以下の積分を 2 通りに計算する．ここで，

$$\tilde{E}(z,s) := \begin{cases} E(z,s) & z \in (\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y \\ E(z,s) - y^s - \phi(s)\, y^{1-s} & z \in (\Gamma\backslash\mathbb{H}) \setminus (\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y \end{cases} \tag{4.2}$$

とおく．$\Delta_0 := -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ を $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ に作用するラプラシアンとする．次の積分を考える：

$$\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} (u\Delta_0\bar{v} - \bar{v}\Delta_0 u)\,\frac{dxdy}{y^2}. \tag{4.3}$$

u, v はともに Δ_0 の固有関数なので，積分 (4.3) は

$$\big\{\bar{s}(1-\bar{s}) - s(1-s)\big\}\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} u\bar{v}\,\frac{dxdy}{y^2} \tag{4.4}$$

となる．グリーンの定理より，積分 (4.3) は $(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y$ の境界上の線積分でかけて，さらに Γ で同一視される境界上の線積分が打ち消しあうので以下のように計算される．

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y}\left(\bar{v}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right)|dz| = \int_{|x|\leq 1/2,\, y=Y}\left(\bar{v}\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)|dz| \\ &= (y^{\bar{s}} + \phi(\bar{s})y^{1-\bar{s}})\frac{d}{dy}(y^s + \phi(s)y^{1-s})\Big|_{y=Y} \\ &\quad -(y^s + \phi(s)y^{1-s})\frac{d}{dy}(y^{\bar{s}} + \phi(\bar{s})y^{1-\bar{s}})\Big|_{y=Y}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.4), (4.5) より，

$$\begin{aligned}
&\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} |\tilde{E}(z,s)|^2 \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \frac{Y^{s+\bar{s}-1} - |\phi(s)|^2 Y^{1-s-\bar{s}}}{s+\bar{s}-1} + \frac{\phi(s)Y^{\bar{s}-s} - \phi(\bar{s})Y^{s-\bar{s}}}{\bar{s}-s} \\
&= \frac{Y^{2h} - |\phi(\frac{1}{2}+h+it)|^2 Y^{-2h}}{2h} \\
&\quad + \frac{\phi(\frac{1}{2}+h-it)\, Y^{2it} - \phi(\frac{1}{2}+h+it)\, Y^{-2it}}{2it}
\end{aligned}$$

となるので，あとは $|\phi(\frac{1}{2}+it)| = 1$ に注意して，$h \to 0$ とすればよい． □

命題 4.9 (連続スペクトルの寄与)**.**

$$\begin{aligned}
E(Y) &:= \int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} K_f^c(z,z) \frac{dxdy}{y^2} \\
&= \frac{\log Y}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\, dr + \frac{1}{4}\, \mathrm{tr}(\pi_0(f))\phi(\tfrac{1}{2}) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) \frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir)\, dr + o(1) \quad (Y \to \infty).
\end{aligned}$$

Proof. Maass-Selberg relation を用いると，連続スペクトルの寄与

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) \Bigg[2\log Y - \frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir) \\
&\qquad + \frac{Y^{2ir}\phi(\frac{1}{2}-ir) - Y^{-2ir}\phi(\frac{1}{2}+ir)}{2ir} \Bigg] dr + o(1) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) \left\{ 2\log Y - \frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir) \right\} dr \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) \left\{ \frac{Y^{2ir}\phi(\frac{1}{2}-ir) - Y^{-2ir}\phi(\frac{1}{2}+ir)}{2ir} \right\} dr \\
&\quad + o(1) \quad (Y \to \infty)
\end{aligned}$$

となる．２行目の積分を評価する．$\phi(\frac{1}{2}) = -1$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))\left\{\frac{Y^{2ir}\phi(\frac{1}{2}-ir) - Y^{-2ir}\phi(\frac{1}{2}+ir)}{2ir}\right\}dr \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))\left\{\frac{\phi(\frac{1}{2}-ir)Y^{2ir} - \phi(\frac{1}{2}) + \phi(\frac{1}{2}) - \phi(\frac{1}{2}+ir)Y^{-2ir}}{2ir}\right\}dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))\left\{\frac{\phi(\frac{1}{2}) - \phi(\frac{1}{2}+ir)Y^{-2ir}}{2ir}\right\}dr
\end{aligned}
$$

となる．$\frac{1}{2} < \beta < 1$ に対して，$\phi(s)$ は $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(s) \leq \beta$ で一様有界だから実軸上の積分を $\operatorname{Im}(r) = \frac{1}{2} - \beta$ まで動かして留数定理を用いると

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi i}\int_{\operatorname{Im}(r)=\frac{1}{2}-\beta} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))\left\{\frac{\phi(\frac{1}{2}) - \phi(\frac{1}{2}+ir)Y^{-2ir}}{r}\right\}dr \\
&= \frac{\phi(\frac{1}{2})}{4\pi i}\int_{\operatorname{Im}(r)=\frac{1}{2}-\beta} \frac{\operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))}{r}\,dr + O(Y^{1-\beta}) \\
&= \frac{1}{4}\phi(\tfrac{1}{2})\operatorname{tr}(\pi_0(f)) + o(1) \quad (Y \to \infty)
\end{aligned}
$$

となる． □

- $(\Gamma_\infty\backslash\mathbb{H})^Y := \{z \in \mathbb{H}, |\, 0 < x \leq 1,\, 0 < y \leq Y\}$ とおいて，“切断された放物元の寄与”を計算しよう．

命題 4.10 (放物元の寄与)**.** $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対して，跡公式の幾何サイドへの放物元の寄与を以下で定義する．

$$
P(Y) := \int_0^Y \int_0^1 \sum_{n \neq 0} f(a_y^{-1} n_x^{-1} \gamma_n n_x a_y)\,\frac{dxdy}{y^2} \tag{4.6}
$$

とおく．ここで，$\gamma_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_y = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$ であ

る．このとき，

$$P(Y) = (\log Y + c_E)\int_N f(n)\,dn \\ + \int_N f(n)\log|\log n|\,dn + o(1) \quad (Y\to\infty)$$

となる．C_E はオイラー定数である．また，$n_x = \left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in N$ に対して，$\log n_x = x$ とおいた．

Proof. $a_y^{-1}n_x^{-1}\gamma_n n_x a_y$ を計算して，

$$\begin{aligned} P(Y) &= \sum_{n\neq 0}\int_0^Y\int_0^1 f(\begin{pmatrix}1 & \frac{n}{y}\\ 0 & 1\end{pmatrix})\,\frac{dxdy}{y^2} = \sum_{n\neq 0}\int_0^Y \tilde{f}\left(\frac{n}{y}\right)\frac{dy}{y^2} \\ &=: P_+(Y) + P_-(Y)\end{aligned}$$

により, $P_+(Y)$, $P_-(Y)$ を定義し, 変数変換すると,

$$P_+(Y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{n/Y}^{\infty}\tilde{f}(u)\,du, \quad P_-(Y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{n/Y}^{\infty}\tilde{f}(-u)\,du.$$

ここで，$\tilde{f}(u) := f(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix})$ とおいた．積分区間を分割して，

$$\begin{aligned} P_+(Y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{n/Y}^{\infty}\tilde{f}(u)\,du = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=n}^{\infty}\int_{m/Y}^{(m+1)/Y}\tilde{f}(u)\,du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\int_{m/Y}^{(m+1)/Y}\tilde{f}(u)\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\right)du \\ &= \int_{1/Y}^{\infty}\tilde{f}(u)\left(\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\leq Yu}\frac{1}{n}\right)du. \end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\leq Yu}\frac{1}{n} = C_E + \log(Yu) + O(\frac{1}{Yu})$$

を用いると，（$C_E = 0.577215665\cdots$ はオイラー定数）

$$P_+(Y) = (C_E + \log Y)\int_{1/Y}^{\infty} \tilde{f}(u)\,du + \int_{1/Y}^{\infty} \tilde{f}(u)\log u\,du + O(\frac{\log Y}{Y}) \quad (Y \to \infty).$$

$\square$

定理 4.11 (SL$(2,\mathbb{Z})$ のセルバーグ跡公式)**.** $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ とする．$f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対し，下記の L^2-空間への右正則表現 $R(f)$ を考える：

$$L^2(\Gamma\backslash G) = L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G) \oplus L^2_{\mathrm{con}}(\Gamma\backslash G).$$

$R(f)$ の $L^2_{dis}(\Gamma\backslash G)$ への制限を $R_d(f)$ とおけば，$R_d(f) \in \mathrm{End}(L^2_{dis}(\Gamma\backslash G))$ は *trace class* になり，その跡は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R_d(f)) = &\sum_{\gamma\in Z(\Gamma)\cup\Gamma_{\mathrm{hyp}}\cup\Gamma_{\mathrm{ell}}} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma) I(\gamma, f) \\ &+ c_E \int_N f(n)\,dn + \int_N f(n)\log|\log n|\,dn \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir)\,dr - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\pi_0(f))\phi(\tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

ここで，$Z(\Gamma)$ は Γ の中心，Γ_{hyp} は Γ の双曲共役類の集合，Γ_{ell} は Γ の楕円共役類の集合である．

Proof.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R_d(f)) &= \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \Big\{K_f(z,z) - K_f(z,z)\Big\}\frac{dxdy}{y^2} \\ &= \lim_{Y\to\infty}\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} \Big\{K_f(z,z) - K_f(z,z)\Big\}\frac{dxdy}{y^2} \\ &= \sum_{\gamma\in Z(\Gamma)\cup\Gamma_{\mathrm{hyp}}\cup\Gamma_{\mathrm{ell}}} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma) I(\gamma, f) \\ &\qquad + \lim_{Y\to\infty}\Big\{P(Y) - E(Y)\Big\}.\end{aligned}$$

ここで次節で示す命題 5.3 の証明の最後の式で $t \to 0$ とした式

$$\int_N f(n)\,dn = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\,dr$$

より，命題 4.9，4.10 に現れる $E(Y), P(Y)$ の $\log Y$ の係数が一致するから，

$$\begin{aligned}
&\lim_{Y\to\infty}\Big\{P(Y)-E(Y)\Big\}\\
&= c_E\int_N f(n)\,dn + \int_N f(n)\log|\log n|\,dn\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir)\,dr - \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\pi_0(f))\phi(\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}$$

□

● 次の課題は跡公式の幾何サイドに現れる，軌道積分や（重みつき）ユニポテント軌道積分の Fourier 変換（$\mathrm{tr}(\pi(f))$ で表示する）である．

5 hyperbolic 軌道積分の Fourier 変換

$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，$G$ の極大コンパクト部分群 $K = \mathrm{SO}(2)$ とする．G/K と上半平面 $\mathbb{H}$ を同一視する．Γ を G のココンパクトな離散部分群で楕円元を持たないとする．このとき，単位元と異なる Γ の任意の元 γ は双曲元,（つまり，$|\,\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$）となる．双曲元は G において以下の元と共役である：

$$\gamma \sim \pm\begin{pmatrix} N(\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(\gamma)^{-1/2}\end{pmatrix} \quad \text{ただし，} N(\gamma) > 1 \text{ とする．}$$

$G = NAK$ を岩澤分解とする．G の部分群 A, N は以下で与えられる．

$$N := \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle|\, x\in\mathbb{R}\right\},\quad A := \left\{ a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix} \middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}.$$

G 上のハール測度を $g = n_x a_t k$ となるとき，$dg := e^{-t}dxdtdk$ で定義する．（$\int_K dk = 1$ になるように正規化しておく）

定義 5.1. $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対して，f のアーベル変換 $F_f(a_t)$ $(t>0)$ を以下で定義する．

$$F_f(a_t) := e^{-t/2}\int_N f(na_t)\,dn = e^{-t/2}\int_{\mathbb{R}} f(n_x a_t)\,dx.$$

- $\pi_{ir} := \mathrm{Ind}_{MAN}^G(1_M \otimes a^{\frac{1}{2}+ir} \otimes 1_N)$ を G の spherical な主系列表現とする．$r \in \mathbb{R} \cup i[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ とする．

命題 5.2. $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とする．G の *spherical* な主系列表現 π_{ir} に対して，*trace class* 作用素 $\pi_{ir}(f)$ の *trace* は以下で与えられる．

$$\mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) = \int_{\mathbb{R}} F_f(a_t)e^{irt}dt. \tag{5.1}$$

Proof. [20, (11.29), p.395] を見よ． □

命題 5.3. $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とする．双曲元 a_t $(t>0)$ に対して，軌道積分 $I(a_t, f)$ の *Fourier* 変換は以下で与えられる．

$$I(a_t, f) = \frac{1}{(e^{t/2} - e^{-t/2})}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))e^{-itr}dr. \tag{5.2}$$

Proof. アーベル変換の定義より，

$$F_f(a_t) = e^{t/2}\int_N f(a_t n)\,dn = (e^{t/2} - e^{-t/2})\int_N f(n^{-1}a_t n)\,dn.$$

a_t の G における中心化群は A より，$t>0$ のとき，

$$I(a_t, f) = \frac{1}{(e^{t/2} - e^{-t/2})}F_f(a_t)$$

この式に，(5.1) の両辺を Fourier 逆変換した式：

$$F_f(a_t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))e^{-itr}dr$$

を代入すればよい． □

以上より，Γ がココンパクトで楕円元を含まない場合はセルバーグ跡公式（定理 3.8）は以下のように書き直せる．

$$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = L^2(\Gamma\backslash G)^K = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}_1} m_\Gamma(\pi) H_\pi^K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} m_\Gamma(\pi_{ir_n}) H_{\pi_{ir_n}}^K$$

のように直和分解されているとする． ここで，π_{ir_0} は G の trivial 表現とする．

定理 5.4 (セルバーグ跡公式，Γ : ココンパクト，f : 両側 K-不変)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_\Gamma(\pi_{ir_n}) \operatorname{tr}(\pi_{ir_n}(f)) = \frac{\operatorname{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))\, r\tanh(\pi r)\, dr + \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}} \frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f)) N(\gamma)^{-ir}\, dr.$$

ここで，Γ_{hyp} は Γ の双曲元の共役類の集合であり，双曲元 γ に対して，中心化群 Γ_γ の生成元を γ_0 とした．

Proof. 単位元の寄与については，Plancherel formula ：

$$f(e) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))\, r\tanh(\pi r)\, dr$$

を用いる．（[20, Theorem 11.6, p.401] を参照）次に，$[\gamma] \in \Gamma_{\mathrm{hyp}}$ とする．

$$\gamma = \begin{pmatrix} N(\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(\gamma)^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad N(\gamma) > 1$$

としてよい．このとき，Γ_γ の生成元 γ_0 も対角行列で，$G_\gamma = A$ なので，

$$\operatorname{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma) = \operatorname{vol}(\langle\gamma_0\rangle\backslash \mathrm{A}) = \int_1^{\log N(\gamma_0)} \frac{da}{a} = \log N(\gamma_0)$$

となる．これと命題 5.3 より，双曲共役類の寄与が計算される． □

6　セルバーグゼータ関数

Γ を $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ のココンパクトな離散部分群で楕円元を持たないとする．このとき，商空間 $X:=\Gamma\backslash\mathbb{H}$ はコンパクトなリーマン面になりその種数を $g>2$ とする．（このとき，$\mathrm{vol}(X)=4\pi(g-1)$ である．）

$\gamma\in\Gamma$ を双曲元，（つまり，$|\operatorname{tr}(\gamma)|>2$）とする．このとき，$\gamma$ の Γ における中心化群 Γ_γ は無限巡回群となり，γ は G において以下の元と共役である：

$$\gamma\sim\pm\begin{pmatrix} N(\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(\gamma)^{-1/2}\end{pmatrix}\quad \text{ただし，}N(\gamma)>1\text{ とする．}$$

$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の原始的な双曲元の Γ-共役類の集合とする．（原始的とは他の双曲元のべきとならないときをいう）離散部分群 Γ (または リーマン面 X) のセルバーグゼータ関数は，$\mathrm{Re}(s)>1$ において絶対収束する以下のオイラー積で定義される：

定義 6.1 (セルバーグゼータ関数)**.** $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s)>1$ に対して，

$$Z_\Gamma(s):=\prod_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)}\prod_{k=0}^{\infty}\Big(1-N(p)^{-(k+s)}\Big).$$

セルバーグはこのゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ について以下の定理を証明した：

定理 6.2 (Selberg 1956 [25])**.**

1. $\mathrm{Re}(s)>1$ において定義される $Z_\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に正則な関数として解析接続される．
2. $Z_\Gamma(s)$ は $s=-k$ $(k\in\mathbb{N})$ において位数 $(2g-2)(2k+1)$ の零点を，$s=0$ において 位数 $2g-1$ の零点を， $s=1$ に一位の零点を持つ． *:* 自明零点
3. $Z_\Gamma(s)$ は $s=\frac{1}{2}\pm ir_n$ において零点をもち，そこでの位数は $m_\Gamma(\pi_{ir_n})$ に一致する．$(n=1,2,3,\cdots)$　 *:* 非自明零点

ここで，π_{ir_n} は $L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用する $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の右正則表現 R_Γ を既約分解したときに現れる $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の spherical な既約ユニタリ表現であり，（ユニタリ主系列表現，または補系列表現で G の trivial 表現は除く）その重複度を $m_\Gamma(\pi_{ir_n})$ とおいた．上記の定理はコンパクトリーマン面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ に対するセルバーグ跡公式を用いて証明される．このゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ は以下の関数等式をみたす：

定理 6.3 (関数等式，Selberg 1956 [25])**.**

$$Z_\Gamma(1-s)=Z_\Gamma(s)\exp\Big(-4(g-1)\pi\int_0^{s-\frac{1}{2}}r\,\tan(\pi r)\,dr\Big). \tag{6.1}$$

上記関数等式は二重ガンマ関数 $\Gamma_2(s)$ を用いて対称な形に書くことも出来る．ここで，二重ガンマ関数 $\Gamma_2(z):=\exp(\zeta_2'(0,z))$ で定義される．$\zeta_2(s,z)=\sum_{n,m\geq 0}(n+m+z)^{-s}$ は二重フルビッツゼータ関数である．関数等式 (6.1) に現れる $r\tan(\pi r)$ を含む積分が二重三角関数 $S_2(s):=\Gamma_2(2-s)\Gamma_2(s)^{-1}$ を用いて表示できることに注意すると（[19] 参照）上記関数等式は

$$Z_\Gamma(1-s)=Z_\Gamma(s)\big(S_2(s)^{-1}S_2(s+1)^{-1}\big)^{2g-2}$$

となり，

$$Z_\Gamma(1-s)\big(\Gamma_2(1-s)\Gamma_2(2-s)\big)^{2g-2}=Z_\Gamma(s)\big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\big)^{2g-2}$$

となるので，対称な関数等式

$$\hat{Z}_\Gamma(1-s)=\hat{Z}_\Gamma(s):=Z_\Gamma(s)\big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\big)^{2g-2}. \tag{6.2}$$

を得る．

以下ではセルバーグゼータ関数の解析接続や関数等式など（定理 6.2，定理 6.3）をセルバーグ跡公式を用いて証明しよう．まず，定理 5.4 において，$h(r):=\mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))$ とおき，f の代わりに h を新たに “試験関数” とみなすと，定理 5.4 は次のようになる：

定理 6.4 (セルバーグ跡公式，両側 K-不変，試験関数 h)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r h(r)\tanh(\pi r)\,dr$$
$$+\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}}\frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2}-N(\gamma)^{-1/2}}g(\log N(\gamma)).$$

ここで，$g(u)$ は $h(r)$ の Fourier 変換で，上記跡公式は下記の条件を満たす $h(r)$ に対して成り立つことが証明できる．

- $h(r)=h(-r)$: 試験関数，$|\operatorname{Im}(r)|<\frac{1}{2}+\delta$ において解析的 $(\exists\delta>0)$，$h(r)=O\big((1+|r|)^{-2-\delta}\big)$ $(\mathrm{Re}(r)\to\infty)$.
- $g(u):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(r)e^{-iru}\,dr$

定理 6.4 を用いて，セルバーグゼータ関数の解析的性質（定理 6.2）や関数等式（定理 6.3）が証明できる．以下ではそれを説明する．実数 $\beta\geq 2$ を固定する．試験関数として，

$$h(r)=\frac{1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{r^2+\beta^2}$$

をとるとこれを試験関数の条件をみたすので，セルバーグ跡公式に適用できる．このとき，

$$g(u)=\frac{1}{2s-1}e^{-(s-\frac{1}{2})|u|}-\frac{1}{2\beta}e^{-\beta\,|u|}$$

になるので，以下の命題を得る．

命題 6.5. $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して，以下が成立する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{r_n^2+(s-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{r_n^2+\beta^2}\Big] \\
&\quad = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{s+k}-\frac{1}{\beta+\frac{1}{2}+k}\Big] \\
&\qquad + \frac{1}{2s-1}\frac{Z_\Gamma'(s)}{Z_\Gamma(s)}-\frac{1}{2\beta}\frac{Z_\Gamma'(\frac{1}{2}+\beta)}{Z_\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Proof. 跡公式の右辺の単位元の寄与を

$$I(s) := \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{r^2+\beta^2}\right]r\tanh(\pi r)\,dr$$

とおく．$\tanh(\pi r) = \frac{1-e^{-2\pi r}}{1+e^{-2\pi r}}$ に注意して，留数定理と部分分数分解の公式

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left[\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right]$$

を用いて計算すれば，

$$I(s) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{s+k}-\frac{1}{\beta+\frac{1}{2}+k}\Big]$$

となる．次に

$$H(s) := \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}}\frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2}-N(\gamma)^{-1/2}}e^{-(s-\frac{1}{2}\log N(\gamma))}$$

とおけば，双曲共役類の寄与は

$$\frac{1}{2s-1}H(s)-\frac{1}{2\beta}H(\beta+\tfrac{1}{2})$$

となる．$H(s)$ を計算する．

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}} \frac{\log N(\gamma_0)}{1-N(\gamma)^{-1}} N(\gamma)^{-s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \frac{\log N(p)}{1-N(p)^{-k}} N(p)^{-ks} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \log N(p)\cdot N(p)^{-k(s+m)} \\
&= \frac{d}{ds} \sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \sum_{m=0}^{\infty} \log\Bigl(1-N(p)^{-(s+m)}\Bigr) \\
&= \frac{d}{ds} \log Z_\Gamma(s)
\end{aligned}
$$

となり，示された． □

この命題を用いて，セルバーグゼータ関数の解析接続や零点の位置と位数が導かれる（定理 6.2）．また，(6.3) の左辺は s と $1-s$ を入れ替えても不変なので，(6.3) において s を $1-s$ と置き換えた式との差を取ると

$$
\frac{Z_\Gamma'(s)}{Z_\Gamma(s)} + \frac{Z_\Gamma'(1-s)}{Z_\Gamma(1-s)} = -(2s-1)\frac{4\pi(g-1)}{2\pi}\pi\cot(\pi s)
$$

が得られる．これから関数等式 (6.1) が得られる（定理 6.3）．

セルバーグゼータ関数は階数 1 の局所対称空間に対しても定義され，調べられている．それらについては [11], [12], [14], [15] 等を参照のこと．

7　実二次体の類数の分布

判別式の集合 $\mathcal{D} := \{d>0 \,|\, d\equiv 0,1\,(4),\ \text{平方数でない}\,\}$ とおく．$d\in\mathcal{D}$ に対して，実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の基本単数を $\varepsilon_d>1$，類数を $h(d)$ とおく．以下の漸近公式が知られている．

定理 7.1 (Gauss/Siegel)**.**

$$\sum_{d \le x} h(d) \log \varepsilon_d = \frac{\pi^2}{18\zeta(3)} x^{3/2} + O(x \log x) \quad (x \to \infty).$$

上記とは異なるタイプの "類数 $h(d)$ の和の漸近公式" がセルバーグゼータ関数の数論的表示と素測地線定理を用いて証明される．

命題 7.2 ($Z_\Gamma(s)$ の数論的表示)**.** $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ とする．$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対するセルバーグゼータ関数は次の表示を持つ：

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{d \in \mathcal{D}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon_d^{-2(s+k)})^{h(d)}.$$

Proof. [24] を参照． $\square$

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の非零領域を調べることによって，素数定理：

$$\pi(x) := \#\{p : \text{素数} \,|\, p \le x\} \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \to \infty)$$

が導かれるようにセルバーグゼータ関数の $Z_\Gamma(s)$ の非零領域を調べることによって素測地線定理が導かれる．

定理 7.3 (素測地線定理 [16], [17])**.** Γ を $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の $\mathrm{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}) < \infty$ なる離散部分群とし，$\pi_\Gamma(x) := \#\{p \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \,|\, N(p) \le x\}$ とおく．$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ とする．以下が成り立つ．

$$\pi_\Gamma(x) = \mathrm{li}(x) + \sum_{\frac{3}{4} < t_k < 1} \mathrm{li}(x^{t_k}) + O(x^{3/4} (\log x)^{-1/2}) \quad (x \to \infty).$$

ここで，$\lambda_k = t_k(1 - t_k)$ は $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ に作用するラプラシアン $\Delta := -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有値で $(0, \frac{3}{16}]$ の範囲にある "例外固有値の集合" である．

上の素測地線定理（素双曲共役類定理）とセルバーグゼータ関数の数論的表示（命題 7.2）より以下が示される．

系 7.4.

$$\sum_{\varepsilon_d \le x} h(d) = \mathrm{li}(x^2) + O(x^{3/2}(\log x)^{-1/2}) \quad (x \to \infty).$$

参考文献

[1] 織田孝幸，Selberg Trace Formula 入門．

[2] 加藤敏夫，位相解析，共立出版，1957 年．

[3] 権 寧魯，保型形式とゼータ，数理科学，2011 年 1 月号．

[4] 若山正人，$SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ の跡公式とセルバーグゼータ関数，第 9 回整数論サマースクール報告集「ゼータ関数」，2002 年．

[5] C. Brislawn, Kernels of trace class operators. Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), no. 4, 1181-1190.

[6] C. Brislawn, Traceable integral kernels on countably generated measure spaces. Pacific J. Math. **150** (1991), no. 2, 229–240.

[7] A. Deitmar and W. Hoffmann, Asymptotics of class numbers. Invent. Math. **160** (2005), no. 3, 647–675.

[8] J. Dixmier and P. Malliavin, Factorisations de fonctions et de vecteurs indefiniment differentiables. (French) Bull. Sci. Math. (2) **102** (1978), no. 4, 307–330.

[9] M. Duflo, Généralités sur les représentations induites, Représentations des groupes de Lie résolubles, Monographies de la Soc. Math. de France, No. 4. Dunod, Paris, (1972), 93–119.

[10] J. Fischer, An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta-function. Lecture Notes in Mathematics, **1253**. Springer-Verlag, Berlin, 1987. iv+184 pp.

[11] R. Gangolli, Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math. **21** (1977), no. 1, 1–41.

[12] R. Gangolli and G. Warner, Zeta functions of Selberg's type for some noncompact quotients of symmetric spaces of rank one. Nagoya Math. J. **78** (1980), 1–44.

[13] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and I. I. Piatetski-Shapiro, Representation theory and automorphic functions. Translated from the Russian by K. A. Hirsch W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa.-London-Toronto, Ont. 1969 xvi+426 pp.

[14] Y. Gon, Gamma factors of Selberg zeta functions and functional equation of Ruelle zeta functions. Math. Ann. **308** (1997), no. 2, 251–278.

[15] Y. Gon and J. Park, The zeta functions of Ruelle and Selberg for hyperbolic manifolds with cusps. Math. Ann. **346** (2010), no. 3, 719–767.

[16] D. A. Hejhal, The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Vol. 1. Lecture Notes in Mathematics, **548**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. vi+516 pp.

[17] D. A. Hejhal, The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Vol. 2. Lecture Notes in Mathematics, **1001**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983. viii+806 pp.

[18] W. Hoffmann, The Fourier transforms of weighted orbital integrals on semisimple groups of real rank one. J. Reine Angew. Math. **489** (1997), 53–97.

[19] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions. Forum Math. **15** (2003), no. 6, 839–876.

[20] A. W. Knapp, Representation theory of semisimple groups. An

overview based on examples. Princeton Mathematical Series, **36**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. xviii+774.

[21] A. W. Knapp, Theoretical aspects of the trace formula for GL(2). Representation theory and automorphic forms (Edinburgh, 1996), 355–405, Proc. Sympos. Pure Math., 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[22] M. S. Osborne and G. Warner, Multiplicities of the integrable discrete series: the case of a nonuniform lattice in an R-rank one semisimple group. J. Funct. Anal. **30** (1978), no. 3, 287–310.

[23] P. J. Sally and G. Warner, The Fourier transform on semisimple Lie groups of real rank one. Acta Math. **131** (1973), 1–26.

[24] P. Sarnak, Class numbers of indefinite binary quadratic forms. J. Number Theory **15** (1982), no. 2, 229–247.

[25] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87.

[26] A. Selberg, Harmonic analysis. Collected papers. Vol. I. Springer-Verlag, (Berlin, 1989), 626–674.

[27] G. Warner, Selberg's trace formula for nonuniform lattices: The R-rank one case. Adv. Math. Suppl. Stud. **6** (1979), 1–142.

[28] F. Williams, Lectures on the spectrum of $L^2(\Gamma\backslash G)$. Pitman Research Notes in Mathematics Series, **242**. Longman Scientific & Technical, 1991, xiv+348.

Yasuro Gon
Faculty of Mathematics, Kyushu University
744 Motooka, Fukuoka 819-0395, Japan
E-mail: ygon[at]math.kyushu-u.ac.jp

GL(2) **の跡公式**

都築 正男 AND 若槻 聡

導入：Selberg は論文 [36] において、不連続群の作用を持つ弱対称リーマン空間という非常に広汎な枠組みの中で、L^2-保型函数のなす無限次元ヒルベルト空間に作用する積分作用素の「跡公式」を定式化した。一つの基本的な場合に Selberg の跡公式を述べると次のようになる。$X = G/K$ が連結半単純リー群 G に付随する非コンパクト型リーマン対称空間、Γ が G の離散部分群で、基本領域 $\Gamma\backslash X$ がコンパクトなものとする。L^2-空間 $L^2(\Gamma\backslash X)$ 上には、G 上のコンパクト台を持つ両側 K-不変 smooth 函数 (= point-pair invariant) φ の合成積として積分作用素 $R_\Gamma(\varphi)$ が定義される。この作用素の跡 $\mathrm{tr}R_\Gamma(\varphi)$ は２通りの異なった方法で与えられる：

$$\sum_{\pi} m(\pi)\, J(\pi,\varphi) = \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} a(\gamma)\, J(\gamma,\varphi) \tag{0.1}$$

左辺は spectral side と呼ばれ、G のユニタリー表現 $L^2(\Gamma\backslash G)$ の既約分解（或いは、X 上の不変微分作用素環の同時スペクトル分解）による $\mathrm{tr}R_\Gamma(\varphi)$ の表示であり、既約ユニタリー表現 π の指標 $J(\pi,\varphi)$ の線型和で表される。右辺は geometric side と呼ばれ、Γ の共役類分割による $\mathrm{tr}R_\Gamma(\varphi)$ の幾何的な表示であり、Γ-共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ の決める G-共役類 $\{\gamma\}_G$ に沿った φ の軌道積分 $J(\gamma,\varphi)$ の線型和で表される。Selberg の定式化では、群の既約表現（不変微分作用素のスペクトル）集合と、群の共役類集合の間の「双対性」が等式 (0.1) を介して顕れており、この「指標と共役類の双対性」という観点はその後の跡公式や表現論の発展において非常に重要であった。

$\Gamma\backslash X$ がコンパクトでない場合、公式 (0.1) の両辺は「適切に」修正されなければならない。Selberg は、上半平面に作用する第一種フックス群に対して跡公式を明示的に計算し、それを Riemann zeta 函数に対する Weil の明示公式と対置的に考察することによって有名な Selberg zeta 函数を導入した (権 [16] 参照)。リーマン面 $\Gamma\backslash X$ に対する Selberg 跡公式は、その後、[9] や [22] によって代数群 GL(2) のアデール化の枠組みに拡張された。これらの公式において「テスト函数」φ を特別なものに選べば、正則楕円保型形式の空間の次元公式やヘッケ作用素の跡を計算する公式なども導かれる。

X のランクが大きくなるにつれて、状況は著しく困難さを増す。まず、spectral side の導出に必要不可欠な $L^2(\Gamma\backslash G)$ の分解は、Langlands による一般 Eisenstein 級数の理論構築の結果として達成された ([28])。これを出発点とし、Langlands が提出した「函手性予想」([30]) や志村多様体の Hasse-Weil zeta 函数の計算などがおそらく強い動機付けとなり、１９７０年代終わり以降約３０年間に亘って James Arthur は跡公式に関する一連の研究を行った。その恩恵として、今や、代数体上定義された簡約代数群とそのアデール化の枠組みの中で、等式 (0.1) に対する一群の「適切な修正形」が得られており、これらは Arthur-Selberg の跡公式と総称されることが多い。(「適切な修正形」がいかにあるべきかは、研究過程で次第に認識されていき、目的に応じて「不変跡公式」([4], [5]) や「安定化跡公式」([29]) など様々なバージョンが派生した。詳しくは、[6] およびその文献表をご参照いただきたい。)

さて、この小論の目的は、トーラスついで最も基本的な簡約代数群 GL(2) に対する Arthur-Selberg の跡公式を解説することである。 各章の詳しい内容は次のとおりである。

- 第１章では、基本的な記号を準備した後、代数体の局所化とアデール化に伴う様々な位相群上のハール測度を固定する。

- 第２章では、局所コンパクトアーベル群とその格子に対する Poisson 和公式を復習する。この公式を代数体 F のイデール群 $\mathbb{A}^\times$ に特殊化したものが、上で述べた枠組みの中では F-代数群 GL(1) の Selberg 跡公式と見做せることを説明する。
- 第３章では、４章以下で展開される GL(2) のスペクトル理論と跡公式の導出に際して基本となる群やその上のハール測度を導入する。特に、アデール群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ のハール測度を岩澤分解に伴う積分公式によって固定する。
- 第４章では、$L^2(\mathrm{GL}(2,F)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})^1)$ の既約分解の連続スペクトルをアイゼンスタイン級数と大域絡作用素の理論を使って具体的に記述する。主結果は 4.4 節で述べられる。副産物として、アデール的な「基本領域」$\mathrm{GL}(2,F)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})^1$ の体積の明示公式が得られる（系５０）。
- 第５章は、第４章で使われたアイゼンシュタイン級数の基本性質を導出する。いろいろな方法が知られているが、ここでは、所謂、Iwasawa-Tate 理論に帰着させる方法を紹介する。
- 第６章では、GL(2) に対する Arthur-Selberg の跡公式を導出する。Gelbart-Jacquet のサーベイ論文 [13] や Gelbart の MSRI 講義録 [12] などがあるが、ここではこれらをベースにしつつも、一般の場合の Arthur の論文 [2], [3] により自然に接続されるように配慮した。
- 第７章は、第６章で得られた一般の跡公式から、テスト函数を特殊化することによって、応用上有用な公式をいくつか紹介する。応用に関しては本報告集の伊吹山 [20] と都築 [39] を参照されたい。

謝辞. 今回の「GL(2) の跡公式」の講演および原稿の作成において色々と協力してくださったサマースクールの講演者の方々に感謝を申し上げます。

Contents

1. 基本的な記号とハール測度

- $\mathbb{Z}$ を整数環、$\mathbb{Q}$ を有理数体、$\mathbb{R}$ を実数体、$\mathbb{C}$ を複素数体とする。$\mathbb{C}$ 上の絶対値を $|\ |$ とする: $|z|^2 = z\,\bar{z}$. 可換環 R に対して、その可逆元全体のなす群を $R^\times$ と書く。$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$ に対して $(\mathbb{R}^\times)^0$ を正の実数全体 ($\mathbb{R}^\times$ の 1 を含む連結成分) とする.
- F を有限次代数体、その整数環を $\mathfrak{O}$ とする。F のアルキメデス素点全体の集合を $\Sigma_\infty = \Sigma_\mathbb{R} \cup \Sigma_\mathbb{C}$, 有限素点全体の集合を Σ_{fin}、$\Sigma = \Sigma_\infty \cup \Sigma_{\mathrm{fin}}$ を素点全体の集合とする。
- 有限素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対し、$\mathfrak{O}_v$ を完備化 F_v の整数環、$\mathfrak{p}_v$ を $\mathfrak{O}_v$ の極大イデアル、ϖ_v を $\mathfrak{p}_v$ の生成元とし、剰余体 $\mathfrak{O}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数を q_v とかく: $q_v = \sharp(\mathfrak{O}_v/\mathfrak{p}_v)$.
- 完備化 $F_v\,(v \in \Sigma_\infty)$ の直積環を F_∞ とする: $F_\infty = \prod_{v\in\Sigma_\infty} F_v$. F のアデール環を $\mathbb{A}$ とすれば、$\mathbb{A}$ は有限アデール全体の環 $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ と F_∞ の直積に分解される: $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$.
- $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ の非自明指標 $\psi_\mathbb{Q}$ を Tate に従って固定して、$\psi_F = \psi_\mathbb{Q} \circ \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}$ とおく。$\psi_{F,v}$ に関する F_v の自己双対的ハール測度を $\mathrm{d}x_v$ とする。$F_v/\mathbb{Q}_p$ の diffenrential exponent d_v を
$$\{\xi \in F_v \,|\, \psi_{F,v}(\xi\mathfrak{O}_v) = \{1\}\} = \mathfrak{p}_v^{-d_v}$$
で定義すると、$\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v) = q_v^{-d_v/2}$ となる。$\mathbb{A}$ のハール測度 $\mathrm{d}x$ は ψ_F に関する自己双対的なものを固定する。すると、$\mathrm{d}x = \otimes_v \mathrm{d}x_v$ である。Δ_F を拡大 $F/\mathbb{Q}$ の絶対判別式とする。$\Delta_F = \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} q_v^{d_v}$ である。
- 素点 $v \in \Sigma$ に対して $|\ \ |_v$ を正規付値とする。ハール測度 $\mathrm{d}x_v$ と $a \in F_v^\times$ に対して $\mathrm{d}(ax_v) = |a|_v\,\mathrm{d}x_v$ が成り立つ。
- イデール群 $\mathbb{A}^\times$ 上のイデールノルムを $|\ \ |_\mathbb{A} = \prod_v |\ \ |_v$ で定める。任意の $t \in \mathbb{A}^\times$ について $\mathrm{d}(tx) = |t|_\mathbb{A}\,\mathrm{d}x$ が成り立つ。そして、
$$\mathbb{A}^1 = \{x \in \mathbb{A}^\times \mid |x|_\mathbb{A} = 1\}$$
と置く。このとき、$F^\times \subset \mathbb{A}^1$ であり、商群 $F^\times\backslash\mathbb{A}^1$ はコンパクトである。また、$\mathbb{A}^\times \cong \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{R}^\times)^0$ が成り立つ。
- 離散集合については、counting measure により測度を定める。
- 素点 $v \in \Sigma_\infty$ についての $F_v^\times$ 上のハール測度 $\mathrm{d}^\times x_v$ を $\dfrac{\mathrm{d}x_v}{|x|_v}$ により定める。
- 素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ についての $F_v^\times$ 上のハール測度 $\mathrm{d}^\times x_v$ を $(1-q_v^{-1})^{-1}\dfrac{\mathrm{d}x_v}{|x|_v}$ により定める。
- イデール群 $\mathbb{A}^\times$ 上の測度は $F_v^\times$ のハール測度の積測度により定める. $\mathbb{A}^1$ 上の測度を $\mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^\times/(\mathbb{R}^\times)^0$ による商測度によって定める。

集合 X 上の 2 つの正値函数 $f(x), g(x)$ に対して、定数 $C > 0$ が存在して $f(x) \leqslant C\,g(x)\ (\forall x \in X)$ が成り立つとき $f(x) \ll g(x)\ (x \in X)$ と書く。$f(x) \ll g(x)$, $g(x) \ll f(x)$ が同時に成り立つならば、$f(x) \asymp g(x)\ (x \in X)$ と書く。

2. ポアソン和公式と GL(1) の跡公式

まず、局所コンパクトアーベル群の枠組みにおいて、ポアソン和公式を想起しよう。

H を局所コンパクトアーベル群、$\Gamma \subset H$ をその格子（即ち、離散部分群であって商群 $\Gamma\backslash H$ がコンパクトなもの）とする。$\mathrm{d}h$ を H のハール測度とすれば、$\Gamma\backslash H$ の H-不変測度 $\mathrm{d}\dot{h}$ で
$$\int_H f(h)\,\mathrm{d}h = \int_{\Gamma\backslash H} \left\{\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma h)\right\} \mathrm{d}\dot{h}, \qquad f \in L^1(H)$$

を満たすものが決まる。$\int_{\Gamma\backslash H}\mathrm{d}\dot{h}=1$ となるようにハール測度 $\mathrm{d}h$ を正規化することが出来る。

$\hat{H}$ を H のポントリャーギン双対群とする。これは、開コンパクト位相によって局所コンパクトアーベル群になり、

$$\Gamma^{\perp}=\{\chi\in\hat{H}|\,\chi(\gamma)=1\,(\forall\gamma\in\Gamma)\,\}$$

は $\hat{H}$ の格子である。

可積分函数 $f\in L^1(H)$ の指標 $\chi\in\hat{H}$ におけるフーリエ変換 $\hat{f}(\chi)$ は

$$\hat{f}(\chi)=\int_H f(h)\,\chi(h)\,\mathrm{d}h$$

で定義される。以上の準備のもとで、Poisson の和公式は次のように述べられる。

$f:H\to\mathbb{C}$ は連続函数であって、次の条件を満たすとする。

- $\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(\gamma h)|$ は $h\in H$ に関して広義一様収束する。
- $\sum_{\chi\in\Gamma^{\perp}}|\hat{f}(\chi)|<+\infty.$

このとき、ポアソン和公式

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}f(\gamma)=\sum_{\chi\in\Gamma^{\perp}}\hat{f}(\chi)$$

が成り立つ。特に $H=\mathbb{A}$ かつ $\Gamma=F$ の場合は、$y\in F$ に対して

$$\hat{f}(y)=\int_F f(x)\,\psi_F(xy)\,\mathrm{d}x$$

とすると、$f\in C_c^{\infty}(\mathbb{A})$ に対してポアソン公式

$$\sum_{x\in F}f(x)=\sum_{y\in F}\hat{f}(y) \tag{2.1}$$

を得る。

$\mathrm{GL}(1,\mathbb{A})=\mathbb{A}^{\times}$ の跡公式は $H=\mathbb{A}^1$ かつ $\Gamma=F^{\times}$ の場合のポアソン和公式である。$L^2(F^{\times}\backslash\mathbb{A}^1)$ 上の右正則表現 $R_{F^{\times}}$ を $(R_{F^{\times}}(a)\Phi)(x)=\Phi(xa),\ a\in\mathbb{A}^1,\ \Phi\in L^2(F^{\times}\backslash\mathbb{A}^1)$ によって定める。このとき、$R_{F^{\times}}$ の既約分解（スペクトル分解）

$$R_{F^{\times}}\cong\hat{\bigoplus}_{\chi\in(F^{\times})^{\perp}}\mathbb{C}\cdot\chi$$

が成り立ち、さらに、$f\in C_c^{\infty}(\mathbb{A}^1)$ について $\mathrm{GL}(1)$ の跡公式

$$\sum_{\gamma\in F^{\times}}\mathrm{vol}(F^{\times}\backslash\mathbb{A}^1)\cdot f(\gamma)=\sum_{\chi\in(F^{\times})^{\perp}}\hat{f}(\chi) \tag{2.2}$$

が成り立つ。ただし、等式の $\mathrm{vol}(F^{\times}\backslash\mathbb{A}^1)$ はすでに固定したハール測度に依存して現れた。等式の左側が幾何サイド、右側がスペクトルサイドと呼ばれる。

3. GL(2) に関する記号とハール測度

F 上の代数群 G, P, M, N, Z を、任意の可換 F-代数 R に対して R-有理点が

$$G(R) = \mathrm{GL}(2, R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R,\ ad - bc \in R^{\times} \right\},$$

$$Z(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R^{\times} \right\},$$

$$M(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R^{\times} \right\},$$

$$N(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in R \right\},$$

$$P(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R^{\times},\ b \in R \right\}$$

となるものとして定める。Z は G の中心である。$P(R) = M(R)N(R)$ が成り立ち、P は G の放物的部分群と呼ばれる。M を P の Levi 部分群、N を P の unipotent radical と呼ぶ。

アルキメデス素点 $v_0 \in \Sigma_\infty$ を一つ固定して、$y > 0$ に対して、$\underline{y}$ を $\underline{y}_{v_0} = y$, $\underline{y}_v = 1$ $(\forall v \neq v_0)$ なるイデールとする。そして、$G(\mathbb{A})$ の部分群 Z_∞^+ と M_∞^+ を

$$Z_\infty^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{y} & 0 \\ 0 & \underline{y} \end{pmatrix} \mid y \in (\mathbb{R}^{\times})^0 \right\}, \quad M_\infty^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{y} & 0 \\ 0 & \underline{y'} \end{pmatrix} \mid y,\, y' \in (\mathbb{R}^{\times})^0 \right\}$$

とする。H を $\mathbb{Q}$ 上の代数群としたとき、A_H を H の maximal $\mathbb{Q}$-split central torus とする。スカラーの制限により $G(F)$ も $M(F)$ も $\mathbb{Q}$ 上の代数群として見ることができ、A_G と A_M が定義される。位相群 L に対して、その単位元の連結成分を L^0 で表す。特に

$$A_G(\mathbb{R})^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G(F_\infty) \mid a \in (\mathbb{R}^{\times})^0 \right\} \cong (\mathbb{R}^{\times})^0 \cong Z_\infty^+,$$

$$A_M(\mathbb{R})^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G(F_\infty) \mid a, d \in (\mathbb{R}^{\times})^0 \right\} \cong (\mathbb{R}^{\times})^0 \times (\mathbb{R}^{\times})^0 \cong M_\infty^+$$

となる。ただし、$(\mathbb{R}^{\times})^0$ を対角埋め込みで $F_\infty^{\times}$ の部分群と見ている。

$G(\mathbb{A})$, $M(\mathbb{A})$ の閉部分群 $G(\mathbb{A})^1$, $M(\mathbb{A})^1$ を

$$G(\mathbb{A})^1 = \{ g \in G(\mathbb{A}) \mid |\det g|_{\mathbb{A}} = 1 \}, \qquad M(\mathbb{A})^1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M(\mathbb{A}) \mid |a|_{\mathbb{A}} = |d|_{\mathbb{A}} = 1 \right\}$$

で定義する。このとき、$G(\mathbb{A}) \cong G(\mathbb{A})^1 \times A_G(\mathbb{R})^0 \cong G(\mathbb{A})^1 \times Z_\infty^+$ と $M(\mathbb{A}) \cong M(\mathbb{A})^1 \times A_M(\mathbb{R})^0 \cong M(\mathbb{A})^1 \times M_\infty^+$ が成り立つ。

$G(F_v)$ の極大コンパクト部分群として

$$\mathbf{K}_v = \begin{cases} \mathrm{GL}(2, \mathfrak{O}_v), & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}), \\ \mathrm{O}(2) := \{ g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid g\, {}^t g = I_2 \}, & (v \in \Sigma_\infty,\ F_v \cong \mathbb{R}), \\ \mathrm{U}(2) := \{ g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \mid g\, {}^t \bar{g} = I_2 \}, & (v \in \Sigma_\infty,\ F_v \cong \mathbb{C}) \end{cases}$$

と定める。$\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$ は $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群である。このとき、岩澤分解

$$G(F_v) = P(F_v)\mathbf{K}_v \quad \text{and} \quad G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})\mathbf{K}$$

が成り立つ。

$g \in G(\mathbb{A})$ について、

$$g = nmak, \quad n \in N(\mathbb{A}),\ m \in M(\mathbb{A})^1,\ a \in M_\infty^+,\ k \in \mathbf{K}$$

と分解できる。特に、a は一意的に定まる。$a=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & \underline{a_2} \end{pmatrix} \in M_\infty^+$, a_1, $a_2 \in (\mathbb{R}^\times)^0$ として、

$$H(g) := \log \frac{a_1}{a_2}$$

により連続写像 $H : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}$ を定義する。$H(g) = H(nma) = H(ma) = H(a)$ に注意する。

$$\delta_P(g) = e^{H(g)} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad (g \in G(\mathbb{A}))$$

によって $G(\mathbb{A})$ 上の関数 δ_P を定義する。δ_P を $P(\mathbb{A})$ に制限した関数は P の module と呼ばれる。自然な埋め込みにより、H と δ_P は $G(F)$ や $G(F_v)$ 上の関数となる。

$N(F_v)$, $M(F_v)$ のハール測度 $\mathrm{d}n$, $\mathrm{d}h$ を同型 $N(F_v) \cong F_v$, $M(F_v) \cong F_v^\times \times F_v^\times$ によって

$$\begin{aligned} \mathrm{d}n &= \mathrm{d}b, \qquad \text{if}\, n = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in N(F_v), \\ \mathrm{d}h &= \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2, \qquad \text{if}\, h = \left[\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right] \in M(F_v), \end{aligned}$$

として定める。(ただし、$\mathrm{d}b$ は F_v のハール測度, $\mathrm{d}^\times t_1$, $\mathrm{d}^\times t_2$ は $F_v^\times$ のハール測度である。いずれも上で決めたように正規化されたもの。)そして、$P(F_v)$ 上の左ハール測度 $\mathrm{d}p$ が

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p &= \mathrm{d}h\mathrm{d}n = \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2\, \mathrm{d}b, \qquad \text{if}\, p = hn \in P(F_v) \\ &= \delta_P(p)^{-1}\, \mathrm{d}n\mathrm{d}h = \left|\frac{t_2}{t_1}\right|_v \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2, \qquad \text{if}\, p = nh \in P(F_v) \end{aligned}$$

によって定められる。

$G(F_v)$ 上のハール測度を定めよう。$\mathrm{vol}(\mathbf{K}_v) = 1$ により正規化された $\mathbf{K}_v$ 上のハール測度を $\mathrm{d}k$ とする。元 $g \in G(F_v)$ は

$$g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} k, \quad b \in F_v, \quad t_1, t_2 \in F_v^\times, \quad k \in P(F_v) \cap \mathbf{K}_v \backslash \mathbf{K}_v$$

と一意的に岩澤分解されるので,

$$\mathrm{d}g = \left|\frac{t_2}{t_1}\right|_v \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2\, \mathrm{d}k'$$

($\mathrm{d}k'$ は $\mathrm{d}k$ と $P(F_v) \cap \mathbf{K}_v$ 上の $\mathrm{vol}(P(F_v) \cap \mathbf{K}_v) = 1$ により正規化されたハール測度による $P(F_v) \cap \mathbf{K}_v \backslash \mathbf{K}_v$ 上の商測度)により $G(F_v)$ 上のハール測度 $\mathrm{d}g$ が定まる。このとき、$G(F_v)$ 上のテスト関数 f について、

$$\int_{G(F_v)} f(g)\, \mathrm{d}g = \int_{\mathbf{K}_v} \int_{F_v^\times} \int_{F_v^\times} \int_{F_v} f(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} k) \left|\frac{t_2}{t_1}\right|_v \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2\, \mathrm{d}k$$

が成り立つことが分かる。

局所的な場合と同様にして、$N(\mathbb{A})$, $M(\mathbb{A})$ には同型 $N(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}$, $M(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times$ によって、$\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times$ の測度を移送する。他の $Z(\mathbb{A})$ や $A_M(\mathbb{R})^0$ や $M(\mathbb{A})^1$ などに関しても同様である。さらに Z_∞^+ や M_∞^+ にも同様に $(\mathbb{R}^\times)^0$ の測度を移送する。$\mathbf{K}$ 上のハール測度をその $\mathbf{K}_v$ のハール測度の積測度によって定める。明らかに $\mathrm{vol}(\mathbf{K}) = 1$ である。$G(\mathbb{A})$ 上の測度は上述で定めた $G(F_v)$ の測度による積測度で定める。$G(\mathbb{A})^1$ については $G(\mathbb{A})^1 \cong G(\mathbb{A})/Z_\infty^+$ による商測度によって測度 $\mathrm{d}^1 g$ を定める。$M(\mathbb{A})^1$ についても $M(\mathbb{A})^1 \cong M(\mathbb{A})/M_\infty^+$ による商測度によって測度 $\mathrm{d}^1 m$ を定める。$a \in (\mathbb{R}^\times)^0$ についてアンダーラインを略して $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_\infty^+/Z_\infty^+$

とする。すると、岩澤分解に関して次の積分公式が成立する：$G(\mathbb{A})$ 上のテスト関数 f について、

$$\int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\,\mathrm{d}^1 g$$
$$= \int_{n\in N(\mathbb{A})}\int_{a>0}\int_{m\in M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}} f(n \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m\,k)\; a^{-1}\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}^1 m\,\mathrm{d}k$$

となる。以後、似たような $g\in G(\mathbb{A})$ についての分解においては、特に断らない限り $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in M_\infty^+/Z_\infty^+$ とする。

最後に普遍包絡環に関する記号を定めておこう。$\mathfrak{g}$ を $G(F_\infty)$ の Lie 環の複素化とし、$U(\mathfrak{g})$ をその普遍包絡環とし、$Z(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{g})$ の中心とする。$U(\mathfrak{g})$ の詳細については [24] など実 Lie 群の表現論の本を参照されたい。

4. GL(2) のスペクトル理論

4.1. **準備.** • 直積分解 $G(\mathbb{A}) = Z_\infty^+\,G(\mathbb{A})^1$ から得られる同一視 $Z_\infty^+\backslash G(\mathbb{A})\cong G(\mathbb{A})^1$ によって $G(\mathbb{A})^1$ 上の函数を対応する $G(\mathbb{A})$ 上の Z_∞^+-不変函数と区別しないで考える。

• 任意の $q>1$ に対して、$\mathcal{L}^q = L^q(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1;\mathrm{d}^1 g)$ を次の条件を満たす可測函数 $f: G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ の同値類（零集合の補集合上一致するものを同一視）全体のなす空間とする：

(i) $f(\gamma z g) = f(g), \qquad \gamma\in G(F),\, z\in Z_\infty^+,\, g\in G(\mathbb{A})^1,$

(ii) $\|f\|_{G,q} := \left(\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |f(g)|^q\,\mathrm{d}^1 g\right)^{1/q} < +\infty.$

函数 $f_1,\, f_2 : G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1\to\mathbb{C}$ のエルミート pairing$\langle f_1|f_2\rangle_G$ を

$$\langle\, f_1\,|\,f_2\,\rangle_G = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f_1(g)\bar{f}_2(g)\,\mathrm{d}^1 g \tag{4.1}$$

で定義する。付随するノルムは $\|f\|_G = \langle\, f\,|\,f\,\rangle_G^{1/2}$ である。

• 函数 $f: G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ は次の条件を満たすとき smooth であるといわれる：

(i) ある開部分群 $K\subset\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ が存在して、$f(gk) = f(g)$ $(\forall k\in K, \forall g\in G(\mathbb{A}))$ となる。
(ii) 任意の $g_{\mathrm{fin}}\in G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ に対して、$G(F_\infty)$ 上の函数 $g_\infty\mapsto f(g_\infty g_{\mathrm{fin}})$ は C^∞-級である。

• 函数 $f: G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ の $g\in G(\mathbb{A})$ による右移動 $R(g)f: G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$, 左移動 $L(g)f: G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ をそれぞれ次で定義する：

$$[R(g)f](h) = f(hg), \quad [L(g)f](h) = f(g^{-1}h), \qquad h\in G(\mathbb{A})^1$$

$H\subset G(\mathbb{A})$ を閉部分群とする。函数 $f: G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ が条件

$$\dim_{\mathbb{C}}\langle R(h)f\,|\, h\in H\,\rangle_{\mathbb{C}} < \infty$$

を満たすとき右 H-有限であるという。同様に左 H-有限性は条件 $\dim_{\mathbb{C}}\langle L(h)f\,|\,h\in H\,\rangle_{\mathbb{C}}<\infty$ で定義される。

• $\mathrm{vol}_G = \mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$, $\mathrm{vol}_M = \mathrm{vol}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1)$ とおく。

4.1.1. *Hecke* 環. $v \in \Sigma$ とする。左 $\mathbf{K}_v$-有限かつ右 $\mathbf{K}_v$-有限な、コンパクト台を持つ smooth 函数 $\varphi : G(F_v) \to \mathbb{C}$ 全体 $\mathcal{H}(G(F_v))$ は合成積によって (単位元を持たない) $\mathbb{C}$-代数になる。これを v における局所 Hecke 環と呼ぶ。$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば $\mathbf{K}_v$ の特性函数 φ_v° は $\mathcal{H}(G(F_v))$ の冪等元になる。

$$\varphi(g) = \prod_v \varphi_v(g_v), \qquad g = (g_v) \in G(\mathbb{A}),$$
$$(\varphi_v \in \mathcal{H}(G(F_v)) \text{ で、殆ど全ての素点では } \varphi_v = \varphi_v^\circ)$$

の形を持つ $G(\mathbb{A})$ 上の函数 φ の有限 $\mathbb{C}$-線型結合全体を $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ とすると、これは $G(\mathbb{A})^1$ 上の合成積によって $L^1(G(\mathbb{A})^1)$ の部分 $\mathbb{C}$-代数になる。$\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を $G(\mathbb{A})$ の大域ヘッケ環と呼ぶ。$\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して、$\varphi^* \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を

$$\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g^{-1})} \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

で定義する。$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は単位元を持たないことに注意しよう。

• 左 $Z_\infty^+ G(F)$-不変かつ右 $\mathbf{K}$-有限な smooth 函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 全体の空間を $\mathcal{C}_G$ とする。この空間にはヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ が右移動 R によって自然に作用する：

$$[R(\varphi)f](g) = \int_{G(\mathbb{A})^1} f(gx)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}^1x = f * \check{\varphi}(g), \qquad \varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})), \quad g \in G(\mathbb{A}) \tag{4.2}$$

4.1.2. ジーゲル領域. 相対コンパクト集合 $\omega \subset N(\mathbb{A})\,M(\mathbb{A})^1$ と正数 t に対して、

$$\mathfrak{S}(\omega, t) = \omega \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right] \in A_M(\mathbb{R})^0 \middle|\, a_1/a_2 > t \right\} \mathbf{K}$$

の形をもつ $G(\mathbb{A})$ の部分集合をジーゲル領域と呼ぶ。ω を $P(F)\,\omega = N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^1$ となるようにとるとき、次の性質を満たす t_0 の存在が知られている ([23, Corollary 7.9, Proposition 7.10], [22, §10])：

(1) $G(\mathbb{A}) = G(F)\,\mathfrak{S}(\omega, t_0)$
(2) $\sharp\{\gamma \in G(F) \,|\, \gamma\mathfrak{S}(\omega, t_0) \cap \mathfrak{S}(\omega, t_0) \neq \varnothing\} < +\infty$

以下、このような $\mathfrak{S}(\omega, t_0)$ を固定して簡単に $\mathfrak{S}$ と書く。

補題 1. 左 $Z_\infty^+ G(F)$-不変可側函数 $f : G(\mathbb{A}) \to [0, \infty)$ が、ある定数 $b \in \mathbb{R}$ に対して評価

$$f(g) \ll \delta_P(g)^b, \qquad g \in \mathfrak{S}$$

を満たすとする。$b < 1$ であれば $f \in \mathcal{L}^1$ である。

Proof : $\eta_\mathfrak{S}$ を $\mathfrak{S}$ の特性函数として、$\Phi(g) = \sum_{\gamma \in G(F)} \eta_\mathfrak{S}(\gamma g)$ とおく。上の性質 (a), (b) から $\Phi(g)$ は有限和であって $\Phi(g) \geqslant 1\,(\forall g \in G(\mathbb{A}))$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
\int_{Z_\infty^+ G(F)\backslash G(\mathbb{A})} f(g)\,\mathrm{d}g &\leqslant \int_{Z_\infty^+ G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \Phi(g)\,f(g)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_{Z_\infty^+ \backslash \mathfrak{S}} f(g)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_{u \in \omega} \int_{t_0}^\infty \int_{k \in \mathbf{K}} f\left(u \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] k\right)\, a^{-1}\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k \ll \int_{t_0}^\infty a^{b-1}\,\mathrm{d}^\times a
\end{aligned}$$

最後の積分は $b < 1$ ならば収束する。□

とくに、体積 $\mathrm{vol}(Z_\infty^+ G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ は有限になる。この値は系 52 で決定される。

4.2. L^2**-空間.** L^2-空間 $\mathcal{L}^2$ は内積 (4.1) に関して可分ヒルベルト空間になり、$G(\mathbb{A})$ を右移動 R

$$[R(g)f]\,(x) = f(xg), \qquad g \in G(\mathbb{A}),\ f \in \mathcal{L}^2.$$

によって作用させることによって、$(R, \mathcal{L}^2)$ は $G(\mathbb{A})$ のユニタリー表現を与える。当面の目標は、ユニタリー表現 $(R, \mathcal{L}^2)$ を $G(\mathbb{A})$ の既約表現の直和に分解することである。

さて、$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は (4.2) によって $\mathcal{L}^2$ に作用する。

命題 2. $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $f \in \mathcal{L}^2$ に対して、

$$\|R(\varphi)f\|_G \leqslant \|\varphi\|_{G(\mathbb{A})^1,1}\, \|f\|_G$$

が成り立つ。ただし、$\|\varphi\|_{G(\mathbb{A})^1,1} = \int_{G(\mathbb{A})^1} |\varphi(g)|\,\mathrm{d}g$ である。$R(\varphi) : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ は有界線型作用素になる。

$$K^\varphi(g,h) = \sum_{\gamma \in G(F)} \varphi(g^{-1}\gamma h), \qquad g,\ h \in G(\mathbb{A}) \tag{4.3}$$

は局所一様絶対収束して、任意の $g \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$[R(\varphi)f](g) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} K^\varphi(g,h)\, f(h)\, \mathrm{d}^1 h, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

Proof : Cauchy-Schwartz 不等式を使うと、

$$\begin{aligned}
\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |\,[R(\varphi)f]\,(g)\,|^2\, \mathrm{d}^1 g &\leqslant \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \left| \int_{G(\mathbb{A})^1} |f(gh)\,\varphi(h)|\, \mathrm{d}^1 h \right|^2 \mathrm{d}^1 g \\
&\leqslant \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \left(\int_{G(\mathbb{A})^1} |f(gh)|^2 |\varphi(h)|\, \mathrm{d}^1 h \right) \left(\int_{G(\mathbb{A})^1} |\varphi(h)|\, \mathrm{d}^1 h \right) \mathrm{d}^1 g \\
&= \|\varphi\|_{G(\mathbb{A})^1,1} \int_{G(\mathbb{A})^1} \left(\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |f(gh)|^2\, \mathrm{d}^1 g \right) |\varphi(h)|\, \mathrm{d}^1 h \\
&= \|\varphi\|^2_{G(\mathbb{A})^1,1}\, \|f\|^2_G
\end{aligned}$$

これより、命題の前半部分が従う。

$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset G(\mathbb{A})^1$ をコンパクト集合とする。$\omega_\varphi = \mathrm{supp}(\varphi)$ とおくと、$\mathcal{U}_1 \omega_\varphi \mathcal{U}_2^{-1}$ は $G(\mathbb{A})^1$ でコンパクトだから、$I = G(F) \cap \mathcal{U}_1\, \omega_\varphi\, \mathcal{U}_2^{-1}$ は有限集合であり、

$$K^\varphi(g,h) = \sum_{\gamma \in I} \varphi(g^{-1}\gamma h), \quad (g,h) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$$

となる。よって、特に (4.3) は広義一様絶対収束である。次の変形より命題の最後の主張が従う：

$$\begin{aligned}
[R(\varphi)f]\,(g) &= \int_{G(\mathbb{A})^1} f(gh)\varphi(h)\, \mathrm{d}^1 h \\
&= \int_{G(\mathbb{A})^1} f(h)\varphi(g^{-1}h)\, \mathrm{d}^1 h \\
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma h)\varphi(g^{-1}\gamma h)\, \mathrm{d}^1 h \\
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \{ \sum_{\gamma \in G(F)} \varphi(g^{-1}\gamma h) \}\, f(h)\, \mathrm{d}^1 h \qquad (\because f \text{ は左 } G(F)\text{-不変})
\end{aligned}$$ □

定義 3. $K^\varphi(g,h)$ を $\varphi\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対する核函数と呼ぶ。$\square$

4.3. **連続スペクトラムの構成.** 次の条件を満たす smooth 函数 $f:G(\mathbb{A})^1\to\mathbb{C}$ 全体の空間を $\mathcal{C}_P$ とする：

(i) 左 $N(\mathbb{A})\,P(F)$-不変である。
(ii) 右 $\mathbf{K}$-有限である。

ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は右移動 (4.2) によってベクトル空間 $\mathcal{C}_P$ に自然に作用する。

4.3.1. アイゼンシュタイン級数とその定数項. $s\in\mathbb{C}$ に対して、次の条件を満たす函数 $f:G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ 全体の集合を $\mathbf{H}^0(s)$ とする：

(a) $f\in\mathcal{C}_P$
(b) f は左 $M(\mathbb{A})^1$-有限である。
(c) $f\left(\left[\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]g\right)=a^{(s+1)/2}f(g),\qquad a\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ g\in G(\mathbb{A}).$

$\mathbf{H}^0(s)$ は $\mathcal{C}_P$ の部分 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-加群であり、エルミート形式 $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}}:\mathbf{H}^0(s)\times\mathbf{H}^0(-\bar{s})\to\mathbb{C}$,

$$\langle f_1,f_2\rangle_{\mathbf{K}}=\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}f_1(m\,k)\;\bar{f}_2(m\,k)\;\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k,\quad f_1\in\mathbf{H}^0(s),\ f_2\in\mathbf{H}^0(-\bar{s})$$

は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-不変 pairing になる。i.e.,

$$\langle R(\varphi)f_1,f_2\rangle_{\mathbf{K}}=\langle f_1,R(\varphi^*)f_2\rangle_{\mathbf{K}},\quad\varphi\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

$s\in i\mathbb{R}$ ならば、この pairing $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}}$ は $\mathbf{H}^0(s)$ のエルミート内積を与える。

定義 4. $\mathrm{Re}(s)>1,\ g\in G(\mathbb{A})$ とする。

- $f\in\mathbf{H}^0(s)$ に対して、

$$[M(s)f](g)=\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}f(w_0ng)\,\mathrm{d}n\tag{4.4}$$

  と定義する。ただし、$w_0=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ とする。

- $f\in\mathbf{H}^0(s)$ に対して、

$$E(f:g)=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}f(\gamma g),\qquad g\in G(\mathbb{A})\tag{4.5}$$

  とおき、f に対応するアイゼンシュタイン級数と呼ぶ。$\square$

命題 5. (1) $\mathrm{Re}(s)>1$ ならば級数 (4.5) は $g\in G(\mathbb{A})$ に関して広義一様絶対収束する。$E(f;-)\in\mathcal{C}_G$ である。対応 $f\mapsto E(f:-)$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素:

$$E:\mathbf{H}^0(s)\longrightarrow\mathcal{C}_G$$

を定める。

(2) $\mathrm{Re}(s)>1$ ならば、$g\in G(\mathbb{A})$ を変数と見たとき、積分 (4.4) は広義一様に絶対収束して $\mathbf{H}^0(-s)$ に属する函数を定める。対応 $f\mapsto M(s)f$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素

$$M(s):\mathbf{H}^0(s)\longrightarrow\mathbf{H}^0(-s)$$

になる。更に、$f_1\in\mathbf{H}^0(s),\ f_2\in\mathbf{H}^0(\bar{s})$ $(\mathrm{Re}(s)>1)$ に対して

$$\langle M(s)f_1,f_2\rangle_{\mathbf{K}}=\langle f_1,M(\bar{s})f_2\rangle_{\mathbf{K}}\tag{4.6}$$

が成り立つ。$\square$

Proof : (1) 第5章の命題61および補題63から従う。$\square$
函数 $\varphi \in \mathcal{C}_G$ に対して、その（フーリエ展開の）定数項は

$$\varphi_P(g) = \int_{F\backslash\mathbb{A}} \varphi\left(\left[\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] g\right) \mathrm{d}x, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

で定義される。

命題 6. $f \in \mathbf{H}^0(s)$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ とすると、アイゼンシュタイン級数 $E(f; -)$ の定数項は

$$E(f)_P(g) = f(g) + [M(s)f](g), \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

で与えられる。$\square$

Proof : [38, 命題 6] を参照せよ。$\square$

4.3.2. 擬アイゼンシュタイン級数. 次の条件を満たす函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathcal{D}_P$ とする：

(a) $\phi \in \mathcal{C}_P$
(b) ϕ は左 $M(\mathbb{A})^1$-有限である。
(c) ϕ は $\mathrm{mod}\ Z_\infty^+ N(\mathbb{A}) P(F)$ でコンパクト台をもつ。つまり、コンパクト集合 $\omega_\phi \subset G(\mathbb{A})$ が存在して、

$$g \notin Z_\infty^+ N(\mathbb{A}) P(F) \omega_\phi \implies \phi(g) = 0 \quad \square$$

同様に、$\mathrm{mod}\ Z_\infty^+ G(F)$ でコンパクト台を持つ函数 $\varphi \in \mathcal{C}_G$ の空間を $\mathcal{D}_G$ と定義する。
注意 : $\mathcal{D}_P, \mathcal{D}_G$ はそれぞれ $\mathcal{C}_P, \mathcal{C}_G$ の部分 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-加群になる。写像 $\varphi \mapsto \varphi_P$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素 $\mathcal{C}_G \longrightarrow \mathcal{C}_P$ である。

定義 7. $\phi \in \mathcal{D}_P$ に対して、

$$\theta_\phi(g) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \phi(\gamma g), \qquad g \in G(\mathbb{A}) \tag{4.7}$$

を ϕ に対応する擬アイゼンシュタイン級数と呼ぶ。$\square$

命題 8. (1) 級数 (4.7) は局所的には有限和である。即ち、$\mathcal{U} \subset G(\mathbb{A})$ を任意のコンパクト集合とすると、有限部分集合 $I(\mathcal{U}) \subset P(F)\backslash G(F)$ が存在して、

$$\theta_\phi(g) = \sum_{\gamma \in I(\mathcal{U})} \phi(\gamma g), \qquad g \in \mathcal{U}$$

となる。
(2) 函数 $\theta_\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ は函数空間 $\mathcal{D}_G$ に属する。特に、$\theta_\phi \in \mathcal{L}^q$ $(\forall q > 0)$ である。対応 $\phi \mapsto \theta_\phi$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素 $\theta : \mathcal{D}_P \to \mathcal{D}_G$ を与える。$\square$

Proof : コンパクト集合 $\omega_\phi \subset G(\mathbb{A})$ が存在して $\mathrm{supp}(\phi) \subset Z_\infty^+ P(F) N(\mathbb{A}) \omega_\phi$ となる。更に、$N(\mathbb{A}) = N(F)\mathcal{U}_N$ なるコンパクト集合 $\mathcal{U}_N$ をとれば、$\mathrm{supp}(\phi) \subset Z_\infty^+ P(F)\mathcal{U}_N\omega_\phi$ となる。$\pi : G(\mathbb{A}) \to Z_\infty^+ P(F)\backslash G(\mathbb{A})$ を自然な射影として

$$I(\mathcal{U}) = \pi\left[G(F) \cap (Z_\infty^+ P(F)\mathcal{U}_N\omega_\phi\mathcal{U}^{-1})\right]$$

とおくと、$I(\mathcal{U})$ は、$Z_\infty^+ P(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の離散部分集合 $P(F)\backslash G(F)$ と相対コンパクト部分集合 $\pi(\mathcal{U}_N\omega_\phi\mathcal{U}^{-1})$ の共通部分に一致する。よって、$I(\mathcal{U})$ は有限集合である。明らかに $\phi(\gamma g) = 0$ $(\forall g \in \mathcal{U}, \forall \gamma \notin I(\mathcal{U}))$ なので、(1) が従う。θ_ϕ が左 $Z_\infty^+ G(F)$-不変な smooth 函数なことは (1) より明らか。$\mathrm{supp}(\theta_\phi) \subset Z_\infty^+ G(F)\omega_\phi$ なので、$\theta_\phi \in \mathcal{D}_G$ が分かる。(2) の残りの主張は自明である。$\square$

定義 9. $\phi \in \mathcal{D}_P$ のフーリエ・ラプラス変換を

$$\hat{\phi}(s:g) = \int_0^{+\infty} \phi\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right) \, y^{-(s+1)/2} \, \mathrm{d}^\times y, \qquad g \in G(\mathbb{A}),\, s \in \mathbb{C} \tag{4.8}$$

で定義する。$\square$

命題 10. (1) 任意のコンパクト集合 $\mathcal{U} \subset G(\mathbb{A})$ に対して、ある数 $t_{\mathcal{U}} > 1$ が存在して、

$$\phi\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right) = 0, \qquad \forall g \in Z_\infty^+ \mathcal{U}, \quad \forall y \notin [t_{\mathcal{U}}^{-1}, t_{\mathcal{U}}]$$

となる。特に、積分 (4.8) は (s, g) について広義一様収束する。

(2) $g \in G(\mathbb{A})$ を固定すると、$\hat{\phi}(s:g)$ は s について整型函数である。任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して、$\hat{\phi}(s:-) \in \mathbf{H}^0(s)$ である。$\square$

Proof: (1) コンパクト集合 $\omega_\phi \subset G(\mathbb{A})$ を $\mathrm{supp}(\phi) \subset Z_\infty^+ N(\mathbb{A}) \, P(F) \, \omega_\phi$ となるようにとる。このとき、

$$\phi\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right) \neq 0 \quad \Longrightarrow \left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g \in Z_\infty^+ N(\mathbb{A}) P(F) \omega_\phi \quad \Longrightarrow y \in H(\omega_\phi) \, H(g)^{-1}$$

g がコンパクト集合 $\mathcal{U}$ を走るとき、$H(\omega_\phi) \, H(g)^{-1}$ は $(0, +\infty)$ 一定のコンパクト集合にとどまる。これより (1) が従う。

(2) の最初の主張は (1) より自明である。$\hat{\phi}(s:-) \in \mathbf{H}^0(s)$ を示そう。2.2.1 節の最初に述べた条件 (a), (b), (c) を確かめればよい。(c) は定義式 (4.8) から容易に従う。部分群 $T_\infty^+ = \{\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \mid y > 0\}$ が部分群 $N(\mathbb{A})$ を正規化し $M(\mathbb{A})^1$ とは可換なことから、左 $N(\mathbb{A})P(F)$-不変性と条件 (b) は積分変換 (4.8) の前後で保たれる。積分変換 (4.8) は群 T_∞^+ の左作用を経由して定義しているので、右 $\mathbf{K}$-有限性を保つ。$\square$

命題 11. $\phi \in \mathcal{D}_P$ とする。任意の $m \in \mathbb{N}$ および任意の 2 つの実数 $\sigma_1 < \sigma_2$ に対して、

$$|\hat{\phi}(s:g)| \ll_{m, \sigma_1, \sigma_2} \delta_P(g)^{(\mathrm{Re}(s)+1)/2} \, (1 + |\mathrm{Im}(s)|)^{-m}, \qquad g \in G(\mathbb{A}),\, s \in [\sigma_1, \sigma_2] + i\,\mathbb{R}.$$

Proof: ϕ は右 $\mathbf{K}$-有限だから有限個の函数 $\phi_j \in \mathcal{D}_P$ および連続函数 $c_j : \mathbf{K} \to \mathbb{C}$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$ が存在して $R(k)\phi = \sum_{j=1}^d c_j(k) \, \phi_j$ $(\forall k \in \mathbf{K})$ となる。よって、

$$\phi\left(\left[\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] k\right) = \sum_{j=1}^d c_j(k) \, \phi_j\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right), \qquad t \in \mathbb{A}^\times,\, k \in \mathbf{K} \tag{4.9}$$

$g \in G(\mathbb{A})$ を岩澤分解によって

$$g = \left[\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} az & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right] m \, k, \qquad (x \in \mathbb{A},\, t \in \mathbb{A}^\times,\, a, z > 0,\, m \in M(\mathbb{A})^1,\, k \in \mathbf{K})$$

と書き、$\phi_j \in \mathcal{D}_P$ に注意しながら、(4.9) を使って積分を変形すると、

$$\hat{\phi}(s:g) = \sum_{j=1}^d c_j(k) \, a^{(s+1)/2} \, \alpha_j(s:m), \tag{4.10}$$

$$\text{ただし、} \qquad \alpha_j(s;m) = \int_0^\infty \phi_j\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] m\right) \, y^{-(s+1)/2} \, \mathrm{d}^\times y$$

となる。さて、微分作用素 $D = y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$ は、$D y^{-(s+1)/2} = -\frac{s+1}{2} \, y^{-(s+1)/2}$ を満たすので、部分積分を m 回繰り返すことにより、

$$\left(-\frac{s+1}{2}\right)^m \alpha_j(s;m) = (-1)^m \int_0^{+\infty} \left\{D_y^m \phi_j\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] m\right)\right\} \, y^{-(s+1)/2} \, \mathrm{d}^\times y$$

を得る。ここで、部分積分の「留数項」は命題 10(1) より消滅することに注意せよ。これより、任意の帯領域 $[\sigma_1, \sigma_2] + i\,\mathbb{R}$ に対して、評価

$$|\alpha_j(s;m)| \ll_{\sigma_1,\sigma_2,m} (1+|\mathrm{Im}(s)|)^{-m}, \quad m \in M(\mathbb{A})^1,\ s \in [\sigma_1,\sigma_2]+i\,\mathbb{R} \tag{4.11}$$

が従う。$a = \delta_P(g)$ に注意すると、(4.10), (4.11) から

$$|\hat{\phi}(s:g)| \ll \sum_j |c_j(k)|\, a^{(\mathrm{Re}(s)+1)/2}\,(1+|\mathrm{Im}(s)|)^{-m} \ll \delta_P(g)^{(\mathrm{Re}(s)+1)/2}\,(1+|\mathrm{Im}(s)|)^{-m}$$

を得る。□

注意 ：命題 11 はあとで精密化される（命題 20)。

命題 12. $\phi \in \mathcal{D}_P$ とすると、次の「反転公式」が成立する：

$$\phi(g) = \frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\phi}(s:g)\,\mathrm{d}s, \qquad g \in G(\mathbb{A}) \tag{4.12}$$

ただし、$c \in \mathbb{R}$ は任意の実数で、積分路は垂直線 $\mathrm{Re}(s) = c$ に虚数部分が増加するように向き付ける。

Proof : $s = 4\pi i\tau$ $(\tau \in \mathbb{R})$ とすると、

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(s:g) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \phi\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] g\right)\, y^{-(s+1)/2}\,\mathrm{d}^\times y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\left[\begin{smallmatrix} e^r & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] g\right)\, e^{-(s+1)r/2}\mathrm{d}r \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(r)\, \exp(2\pi i r\tau)\,\mathrm{d}r = \hat{f}(\tau)
\end{aligned}$$

ただし、$f(r) = e^{-r/2}\,\phi\left(\left[\begin{smallmatrix} e^r & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] g\right)$ とおいた。Fourier 反転公式から

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(r)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(s:g)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \hat{\phi}(s:g)\,\mathrm{d}s$$

矩形領域 $Q_R = \{s \in \mathbb{C} |\, |\mathrm{Im}(s)| \leqslant R,\ 0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant c\}$ の周を半時計回りに周回する道に対して Cauchy の積分定理を使い、$R \to +\infty$ とする。命題 11 から実軸に水平な辺からの寄与は消滅するので、最後の線積分の積分路は虚軸から $\mathrm{Re}(s) = c$ に shift される。□

命題 13. $\phi \in \mathcal{D}_P$ とすると、任意の $c > 1$ に対して、

$$\theta_\phi(g) = \frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(\hat{\phi}(s):g)\,\mathrm{d}s, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

が成立する。右辺の積分は絶対収束する。

Proof :

$$\begin{aligned}
\theta_\phi(g) &= \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \phi(\gamma g) \\
&= \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\phi}(s:\gamma g)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\phi}(s:\gamma g)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(\hat{\phi}(s):g)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

命題 5(1) および命題 11 から

$$\int_{\mathrm{Re}(s)=c}\{\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}|\hat{\phi}(s;\gamma g)|\}\,\mathrm{d}|s|$$
$$\ll \sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\delta_P(\gamma g)^{(c+1)/2}\int_{\mathrm{Re}(s)=c}(1+|\mathrm{Im}(s)|)^{-m}\,\mathrm{d}|s|<+\infty$$

なので、上の計算における積分順序の交換は Fubini の定理で正当化される。□

4.3.3. 内積に関する随伴公式. エルミート pairing $\langle\,|\,\rangle_P:\mathcal{D}_P\times\mathcal{C}_P\to\mathbb{C}$ を

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle_P=\int_0^{+\infty}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}\phi_1\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\bar{\phi}_2\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\,y^{-1}\,\mathrm{d}^{\times}y\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$

で定義する。$M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1\times\mathbf{K}$ はコンパクトなので、命題 10(1) よりこの積分は絶対収束する。

命題 14. (1) $\phi\in\mathcal{D}_P$, $\varphi\in\mathcal{C}_G$ のとき、

$$\langle\,\theta_\phi\,|\,\varphi\,\rangle_G=\langle\,\phi\,|\,\varphi_P\,\rangle_P$$

(2) $\phi\in\mathcal{D}_P$, $f\in\mathbf{H}^0(s)$ のとき、

$$\langle\,f\,|\,\phi\,\rangle_P=\mathrm{vol}_M\,\langle\,f,\hat{\phi}(-\bar{s})\,\rangle_{\mathbf{K}}$$

Proof: (1) は次のように示せる。

$$\langle\,\theta_\phi\,|\,\varphi\,\rangle_G=\int_{Z_\infty^+G(F)\backslash G(\mathbb{A})}\{\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\phi(\gamma g)\}\,\bar{\varphi}(g)\,\mathrm{d}^1g=\int_{Z_\infty^+P(F)\backslash G(\mathbb{A})}\phi(g)\,\bar{\varphi}(g)\,\mathrm{d}^1g$$
$$=\int_{n\in N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_0^{+\infty}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}\phi\left(n\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\bar{\varphi}\left(n\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\,\mathrm{d}n\,y^{-1}\mathrm{d}^{\times}y\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}\phi\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\bar{\varphi}_P\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\,y^{-1}\mathrm{d}^{\times}y\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k=\langle\phi|\varphi_P\rangle_P$$

$\theta_{|\phi|}\in\mathcal{D}_G$ より積分 $\langle\,\theta_{|\phi|}\,|\,\varphi\,\rangle_G$ は絶対収束するから、上の計算は Fubini の定理によって正当化される。

(2) は次のように示せる。

$$\langle\,f\,|\,\phi\,\rangle_P=\int_0^{+\infty}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}f\left(m\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]k\right)\bar{\phi}\left(m\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]k\right)\,y^{-1}\,\mathrm{d}^{\times}y\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$
$$=\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}f(mk)\left\{\int_0^{+\infty}\bar{\phi}\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\,y^{(s-1)/2}\,\mathrm{d}^{\times}y\right\}\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$
$$=\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}f(mk)\,\overline{\hat{\phi}(-\bar{s}:mk)}\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$
$$=\mathrm{vol}_M\,\langle\,f,\hat{\phi}(-\bar{s})\,\rangle_{\mathbf{K}}$$

積分 $\langle\,f\,|\,\phi\,\rangle_G$ の絶対収束性から、Fubini の定理によって上の計算は正当化される。□

4.3.4. 内積公式 *I.*

命題 15. $\phi_1,\,\phi_2 \in \mathcal{D}_P$ に対して、$c>1$ であれば

$$\langle\,\theta_{\phi_1}\,|\,\theta_{\phi_2}\,\rangle_G = \frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\{\langle\hat{\phi}_1(s),\hat{\phi}_2(-\bar{s})\rangle_{\mathbf{K}} + \langle M(s)\hat{\phi}_1(s),\hat{\phi}_2(\bar{s})\rangle_{\mathbf{K}}\}\,\mathrm{d}s \tag{4.13}$$

が成立する。

Proof :

$$\begin{aligned}\langle\,\theta_{\phi_1}\,|\,\theta_{\phi_2}\,\rangle_G &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\left\{\frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}E(\hat{\phi}_1(s),g)\,\mathrm{d}s\right\}\overline{\theta_{\phi_2}(g)}\,\mathrm{d}^1 g \qquad (\because \text{命題 } 13)\\ &= \frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\langle\,E(\hat{\phi}_1(s))\,|\,\theta_{\phi_2}\,\rangle_G\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

ここで、命題 8 (1) (θ_{ϕ_2} が $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ でコンパクト台を持つ) および命題 13 に注意すると、積分順序交換は正当化される。非積分函数は次のように変形される：

$$\begin{aligned}\langle\,E(\hat{\phi}_1(s))\,|\,\theta_{\phi_2}\,\rangle_G &= \langle\,E(\hat{\phi}_1(s))_P\,|\,\phi_2\,\rangle_P \qquad (\because \text{命題 } 14(1))\\ &= \langle\,\hat{\phi}_1(s) + M(s)\,\hat{\phi}_1(s)\,|\,\phi_2\,\rangle_P \qquad (\because \text{命題 } 6)\\ &= \mathrm{vol}_M\,\{\langle\,\hat{\phi}_1(s),\hat{\phi}_2(-\bar{s})\,\rangle_{\mathbf{K}} + \langle\,M(s)\hat{\phi}_1(s),\hat{\phi}_2(\bar{s})\,\rangle_{\mathbf{K}}\} \qquad (\because \text{命題 } 14(2))\end{aligned}$$

□

4.3.5. 大域絡作用素の解析接続. ● $\mathfrak{X}^M$ をコンパクトアーベル群

$$M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1 \cong (F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\times(F^\times\backslash\mathbb{A}^1) \tag{4.14}$$

のポントリャーギン双対群とする:

$$\mathfrak{X}^M = \{\eta : M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1 \to \mathbb{C}^1 |\ \text{連続準同型写像}\}.$$

$N(\mathbb{A})$ が $M(\mathbb{A})$ で正規化されることに注意すると、群 (4.14) は、剰余類空間 $N(\mathbb{A})\,P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ に左乗法で矛盾無く作用し、従って、函数空間 $\mathcal{C}_P$ にも自然に作用する：

$$[L(m)\phi](\dot{g}) = \phi(m^{-1}\dot{g}), \quad m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1, \quad \dot{g}\in N(\mathbb{A})\,P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$$

$\mathcal{C}_P$ の定義に含まれる左 $M(\mathbb{A})^1$-有限性の条件から、この表現は $M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1$ の 1 次元表現の（代数的な）直和に分解する。具体的に分解を記述するには次のようにする。函数 $\phi\in\mathcal{C}_P$ と指標 $\mu\in\mathfrak{X}^M$ に対して、

$$\phi_\mu(g) = \mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\phi(mg)\,\mu(m)\,\mathrm{d}^1 m, \qquad g\in G(\mathbb{A})^1$$

と定義すると、対応 $\phi\mapsto\phi_\mu$ は $\mathcal{C}_P$ からその部分空間

$$\mathcal{C}_P(\mu) = \{\phi\in\mathcal{C}_P |\ L(m)\phi = \mu(m)\,\phi,\ m\in M(\mathbb{A})^1\}$$

の上への射影になり、

$$\mathcal{C}_P = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\mathcal{C}_P(\mu)$$

と分解される. この分解は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の右作用 R によって保たれる。同様に、$\mathcal{C}_P$ の部分空間 $\mathcal{D}_P$, $\mathbf{H}^0(s)$ も、

$$\mathcal{D}_P(\mu) = \mathcal{C}_P(\mu)\cap\mathcal{D}_P, \qquad \mathbf{H}^0(\mu,s) = \mathcal{C}_P(\mu)\cap\mathbf{H}^0(s)$$

と定義すると、

$$\mathcal{D}_P = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\mathcal{D}_P(\mu), \qquad \mathbf{H}^0(s) = \bigoplus_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\mathbf{H}^0(\mu,s)$$

と$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-加群として代数的直和に分解される。

• $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0(0)$, $s \in \mathbb{C}$ に対して、$\mathsf{f}^{(s)} : G(\mathbb{A})^1 \to \mathbb{C}$ を

$$\mathsf{f}^{(s)}(g) = \delta_P(g)^{s/2}\,\mathsf{f}(g), \qquad g \in G(\mathbb{A})^1,\ s \in \mathbb{C}$$

で定義すると、$\mathsf{f}^{(s)} \in \mathbf{H}^0(s)$ であり、$\mathsf{f}|\mathbf{K} = \mathsf{f}^{(s)}|\mathbf{K}$ が分かる。対応 $\mathsf{f} \mapsto \mathsf{f}^{(s)}$ は $\mathbf{K}$-同型写像 $\mathbf{H}^0(0) \cong \mathbf{H}^0(s)$ を導く。そこで、この同型によって $\mathbf{H}^0(s)$ 上の $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の右作用を $\mathbf{H}^0(0)$ に移送したものを π_s と書く：

$$[\pi_s(\varphi)\mathsf{f}](g) = [R(\varphi)\mathsf{f}^{(s)}](g)\,\delta_P(g)^{-s/2}, \quad \varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})),\ g \in G(\mathbb{A})^1$$

すると、pairing $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}}$ の $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-不変性は、

$$\langle \pi_s(\varphi)\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} = \langle \mathsf{f}_1, \pi_{-\bar{s}}(\varphi^*)\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}, \quad \mathsf{f}_1,\, \mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0(0),\ \varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

と読み替えられる。

• 同一視 (4.14) によって、μ は２つのイデール類群指標 $\mu_1, \mu_2 : F^\times\backslash\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ の組 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ と見做せる。このとき、

$$\check{\mu} = (\mu_2, \mu_1)$$

と定義する。すると、$M(s) : \mathbf{H}^0(s) \longrightarrow \mathbf{H}^0(-s)$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ は $\mathbf{H}^0(\mu, s)$ を $\mathbf{H}^0(\check{\mu}, -s)$ に写す：

$$M(s)\,\mathbf{H}^0(\mu, s) \subset \mathbf{H}^0(\check{\mu}, -s)$$

以下では、簡単のため $\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}^0(0)$, $\mathbf{H}^0_\mu = \mathbf{H}^0(\mu, 0)$ とおく。内積公式 (4.13) における積分路 $\mathrm{Re}(s) = c$ を虚軸（= unitary axis) にまで shift させたい。そのため、$M(s)$ の定義域を $i\mathbb{R}$ の近傍まで解析接続する必要がある。

命題 16. 可算な補集合をもつある開稠密部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された線型作用素の族 $\mathsf{M}(s) : \mathbf{H}^0 \longrightarrow \mathbf{H}^0$ $(s \in D)$ で次のようなものが存在する。

(1) $\mathrm{Re}(s) > 1$ であれば、任意の $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$ に対して

$$(\mathsf{M}(s)\mathsf{f})^{(-s)} = M(s)\mathsf{f}^{(s)}$$

(2) $\mathsf{M}(s)$ は $(\pi_s, \mathbf{H}^0)$ から $(\pi_{-s}, \mathbf{H}^0)$ への $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$)-絡作用素である。

(3) $\mathsf{M}(s)$ は有理型である。即ち、任意の $\mathsf{f}_1,\, \mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0$ に対して、$s \mapsto \langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}$ は $\mathbb{C} - D$ に極を持つ有理型函数である。

(4) $\mathsf{M}(s)$ は右半平面 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ では $s = 1$ を除いて整型である。$D \cap \{\mathrm{Re}(s) \geqslant 0,\ s \neq 1\} = \varnothing$

(5) $\mathsf{f}_1,\, \mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0$ とすると、 任意の $\sigma > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$|\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}| \ll (1 + |\mathrm{Im}(s)|)^N, \quad s \in [0, \sigma] + i\,\mathbb{R}$$

(6) $s \in i\mathbb{R}$ ならば

$$\begin{aligned} &\mathsf{M}(-s) \circ \mathsf{M}(s) = \mathrm{Id}, \\ &\langle \mathsf{M}(s)\,\mathsf{f}_1, \mathsf{M}(s)\,\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} = \langle \mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}, \quad (\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0). \end{aligned} \qquad \square$$

Proof : 証明は 3.2.1 節を参照せよ。$\square$

命題 17. (1) $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0_\mu$, $\mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0_\nu$ とする。$s \mapsto \langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}$ は $s = 1$ で高々１位の極を持ち、

$$\mathrm{Res}_{s=1}\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \check{\mu} = \mu,\ \mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0_\mu$$

(2) イデール類群指標 $\eta : F^\times\backslash\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ に対して、$G(\mathbb{A})$ 上の函数 $\eta\circ\det$ は $\mathbf{H}^0(-1)$ に属する。$r_2 = \sharp\Sigma_{\mathbb{C}}$,

$$C = \mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\,\Delta_F^{-1/2}\,\pi^{-r_2}\,\zeta_F(2)^{-1}$$

とおくと、任意の $\mu = (\eta, \eta)$ および任意の $\mathsf{f}_1,\,\mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0_\mu$ に対して、

$$\mathrm{Res}_{s=1}\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} = C\,\langle \mathsf{f}, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}\,\overline{\langle \mathsf{f}_2, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}}$$

が成り立つ。□

Proof : この証明の中では、第 3 章の結果や記号を自由に使う。

$\check{\mu} \neq \nu$ ならば $\mathbf{H}^0_{\check{\mu}}\perp\mathbf{H}^0_\nu$ だから、$\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} = 0$ である。以下、$\check{\mu} = \nu$ を仮定する。一般性を失わずに、

$$\mathsf{f} = \prod_v \mathsf{f}_v, \qquad \mathsf{f}_2 = \prod_v \mathsf{f}_{2,v},$$

($\mathsf{f}_v \in \mathbf{H}^0_v(\mu_v, 0)$, $\mathsf{f}_{2,v} \in \mathbf{H}^0_v(\check{\mu}_v, 0)$ で、有限個の素点の v を除いては f_v, $\mathsf{f}_{2,v}$ は不分岐)

の形であるとしてよい。S を素点の有限集合で、全てのアルキメデス素点を含み、しかも $v \notin S$ ならば μ_v, $\psi_{F,v}$ は不分岐かつ $\mathsf{f}_v = \mathsf{f}^\circ_v(\mu_v, 0)$, $\mathsf{f}_{2,v} = \mathsf{f}^\circ_v(\check{\mu}_v, 0)$ なるものとする。すると、定義 57 および系 58 によれば

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} &= \prod_v \langle M_v(s)\mathsf{f}^{(s)}_v, \mathsf{f}^{(\bar{s})}_{2,v}\rangle_{\mathbf{K}_v}\\ &= \epsilon(s, \mu_1\mu_2^{-1})^{-1}\,\frac{L(s, \mu_1\mu_2^{-1})}{L(s+1, \mu_1\mu_2^{-1})}\,\prod_{v\in S}\langle R_v(\mu_v, s)\mathsf{f}^{(s)}_v, \mathsf{f}^{(\bar{s})}_{2,v}\rangle_{\mathbf{K}_v}\end{aligned}$$

で最後の内積因子は $\mathbb{C}$ で整型である。よって、この表示全体の $s = 1$ での極は $L(s, \mu_1\mu_2^{-1})$ からのみ生じ、実際に極がでるには $\mu_1\mu_2^{-1}$ が自明指標が必要。これで (1) が示せた。以下、$\mu_1 = \mu_2$ とする。従って、$\epsilon(s, \mu_1\mu_2^{-1}) = \Delta_F^{1/2-s}$, $L(s, \mu_1\mu_2^{-1}) = \zeta_F(s)$ である。上の等式の $s = 1$ での留数をとって、命題 59 を使うと、

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{s=1}\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} &= \Delta_F^{1/2}\frac{1}{\zeta_F(2)}\,\{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s)\}\,\prod_{v\in S}\langle R_v(\mu_v, 1)\mathsf{f}^{(1)}_v, \mathsf{f}^{(1)}_{2,v}\rangle_{\mathbf{K}_v}\\ &= \Delta_F^{1/2}\frac{\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)}{\zeta_F(2)}\,\prod_{v\in S} C_v\,\langle \mathsf{f}^{(1)}_v, \eta_v\circ\det\rangle_{\mathbf{K}_v}\,\langle \eta_v\circ\det, \mathsf{f}^{(1)}_{2,v}\rangle_{\mathbf{K}_v}\\ &= \frac{\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)}{\zeta_F(2)}\,\Delta_F^{-1/2}\,\pi^{-r_2}\langle \mathsf{f}, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}\,\overline{\langle \mathsf{f}_2, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}}\end{aligned}$$

□

4.3.6. *Paley-Wiener 切断*. 整型函数 $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が次の評価を満たすとき Paley-Wiener 函数と呼ぶ：

$$(\exists R \in \mathbb{R})\,(\forall m \in \mathbb{N}) \quad |\alpha(s)| \ll e^{R|\mathrm{Re}s|}\,(1 + |s|)^{-m}, \quad s \in \mathbb{C}$$

$\mathrm{PW}(\mathbb{C})$ をこのような函数全体の空間とする。ここで、Paley-Wiener の定理を想起しよう：

定理 18. $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ に対して、そのフーリエ・ラプラス変換

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{2\pi ixs}\,\mathrm{d}x, \qquad s \in \mathbb{C}$$

は $\mathrm{PW}(\mathbb{C})$ に属する。対応 $f \mapsto \hat{f}$ は線型同型 $C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}) \to \mathrm{PW}(\mathbb{C})$ を与える。

Proof : [40, IV §4 (p.161)] を参照せよ。□

定義 19. 写像 $\mathcal{F} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}_P$ が次ぎの条件を満たすとき Paley-Wiener 切断とよぶ。

(1) 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して $\mathcal{F}(s) \in \mathbf{H}^0(s)$ である。
(2) $\mathbf{H}^0$ の有限函数族 $\{\mathsf{f}_j\}_{j=1}^d$ および $\mathbb{C}$ 上の Paley-Wiener 函数の有限族 $\{c_j(s)\}_{j=1}^d$ が存在して

$$\mathcal{F}(s) = \sum_{j=1}^{d} c_j(s)\, \mathsf{f}_j^{(s)}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

Paley-Wiener 切断全体の空間を $\mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ と書く。$\square$

命題 20. $\phi \in \mathcal{D}_P$ ならば、その Fourier-Laplace 変換 $\hat{\phi} : s \mapsto \hat{\phi}(s; -)$ は $\mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ に属する。対応 $\phi \mapsto \hat{\phi}$ は $\mathcal{D}_P$ から $\mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ の上への線型同型である。

Proof : $\phi \in \mathcal{D}_P$ は右 $\mathbf{K}$-有限かつ左 $M(\mathbb{A})^1$-有限だから、$\mathbf{K}$ の有限次元連続表現 (τ, W) と有限個の指標の集合 $\mathfrak{X}_0\,(\subset \mathfrak{X}^M)$ が存在して $\phi \in \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{X}_0} \mathcal{D}_P(\mu)[\tau]$ となる。ただし、任意の $\mathbf{K}$-加群 X に対して、$X[\tau]$ は τ-等型成分 (自然な線型写像 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(W, X) \otimes W \to X$ の像) である。$\phi \mapsto \hat{\phi}(s)$ は $\mathcal{D}_P(\mu)$ から $\mathbf{H}^0(\mu, s)$ への $\mathbf{K}$-絡作用素であり、更に $\mathbf{H}^0(\mu, s) \cong \mathbf{H}^0_\mu$ は $\mathbf{K}$-同型だから

$$\hat{\phi}(s) \in \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{X}_0} \mathbf{H}^0(\mu, s)[\tau] \cong \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{X}_0} \mathbf{H}^0_\mu[\tau]$$

となる。$\mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ は有限次元（$\mathbf{K}$-許容可能性) なので、$\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{X}_0} \mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ は有限正規直交基底 $\{\mathsf{f}_j\}$ を持つ。よって

$$\hat{\phi}(s) = \sum_j c_j(s)\, \mathsf{f}_j^{(s)}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

ただし、$c_j(s) = \langle \hat{\phi}(s), \mathsf{f}_j \rangle_{\mathbf{K}}$ である。$\mathsf{f}_j \in \mathbf{H}^0_{\mu_j}$ とすると、

$$c_j(s) = \int_0^\infty a_j(r)\, e^{-sr/2}\, \mathrm{d}r,$$
$$a_j(r) = e^{-r/2} \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1} \int_{\mathbf{K}} \phi\left(\left[\begin{smallmatrix} e^r & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] mk\right) \bar{\mathsf{f}}_j(k)\, \mu_j(m)\, \mathrm{d}^1 m\, \mathrm{d}k$$

となる。命題 10 より $a_j \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ であるから、定理 18 から $c_j(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の Paley-Wiener 函数になる。これで、$\hat{\phi} \in \mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ が示された。

命題の後半を示すには逆写像 $\mathfrak{P}^0(\mathbb{C}) \to \mathcal{D}_P$ を構成すればよい。任意の $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ に対して、

$$\tilde{\mathcal{F}}(g) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathcal{F}(s)(g)\, \mathrm{d}s, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

と定義すると、Fourier 反転公式と定理 (18) から $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{D}_P$ および $\hat{\tilde{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$ が容易に確かめられる。一方、命題 12 は $\tilde{\hat{\phi}} = \phi$ を示している。$\square$

4.3.7. 内積公式 *II.*

定義 21. (1) $\phi \in \mathcal{D}_P$ に対して、$\mathsf{a}_\phi : \mathbb{R} \to \mathbf{H}^0$ を

$$(\mathsf{a}_\phi(y))^{(iy)} = \hat{\phi}(iy) + M(-iy)\, \hat{\phi}(-iy), \qquad y \in \mathbb{R}$$

と定義する。
(2) イデール類指標 $\eta : F^\times \backslash \mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ に対して、

$$\varphi_\eta(g) = \mathrm{vol}_G^{-1/2}\, \eta(\det g), \quad g \in G(\mathbb{A})$$

と定義する。函数 φ_η は $\mathcal{L}^2$ の単位ベクトルになる。$\square$

補題 22. 任意の $\phi \in \mathcal{D}_P$ に対して、

$$\langle \theta_\phi | \varphi_\eta \rangle_G = \langle\, \phi \,|\, \varphi_\eta \,\rangle_P = \mathrm{vol}_G^{-1/2}\, \mathrm{vol}_M\, \langle \hat{\phi}(1), \eta \circ \det \rangle_{\mathbf{K}} \qquad \square$$

Proof :

$$\begin{aligned} \langle\, \theta_\phi \,|\, \varphi_\eta \,\rangle_G &= \langle \phi | (\varphi_\eta)_P \rangle_P \qquad (\because \text{命題 } 14(1)) \\ &= \langle\, \phi \,|\, \varphi_\eta \,\rangle_P \qquad (\because (\varphi_\eta)_P = \varphi_\eta) \\ &= \mathrm{vol}_M\, \langle \hat{\phi}(1), \varphi_\eta \rangle_{\mathbf{K}} \qquad (\because \text{命題 } 14(2)) \qquad \square \end{aligned}$$

命題 23. $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}_P$ のとき、

$$\langle \theta_{\phi_1} | \theta_{\phi_2} \rangle_G = \frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle \mathsf{a}_{\phi_1}(y), \mathsf{a}_{\phi_2}(y) \rangle_{\mathbf{K}}\, \mathrm{d}y + \frac{C}{2} \frac{\mathrm{vol}_G}{\mathrm{vol}_M} \sum_\eta \langle \theta_{\phi_1} | \varphi_\eta \rangle_G\, \overline{\langle \theta_{\phi_2} | \varphi_\eta \rangle_G}$$

が成り立つ。$C = \mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)\, \Delta_F^{-1/2}\, \pi^{-r_2}\, \zeta_F(2)^{-1}$ $(r_2 = \sharp \Sigma_{\mathbb{C}})$ である。

Proof : $c > 1$ を固定する。$R > 0$ に対して Q_R を矩形領域 $\{s \in \mathbb{C} |\, 0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant c,\, |\mathrm{Im}(s)| \leqslant R\}$ とする。命題 16(3), (4) および命題 17 より、s の函数

$$\Xi(s) = \langle \hat{\phi}_1(s), \hat{\phi}_2(-\bar{s}) \rangle_{\mathbf{K}} + \langle M(s) \hat{\phi}_1(s), \hat{\phi}_2(\bar{s}) \rangle_{\mathbf{K}}$$

は $\mathbb{C}$ 上有理型であり Q_R の周および内部に存在する極は $s = 1$ における高々 1 位の極のみである。留数定理より、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} \Xi(s)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR}^{iR} \Xi(s)\, \mathrm{d}s + I(R) + \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \tag{4.15}$$

となる。ただし、$I(R)$ は水平線分 $[0, c] \pm iR$ 上の線積分である。命題 16 (5) および命題 11 から、任意の $m > 0$ に対して帯領域 $[0, c] + i\mathbb{R}$ において一様な評価 $|\Xi(s)| \ll (1 + |\mathrm{Im}(s)|)^{-m}$ が成立する。よって、$R \to +\infty$ のとき $I(R)$ はゼロに収束する。虚軸上で $M(iy)$ がユニタリー作用素であることと $\mathsf{M}(iy) \mathsf{a}_\phi(iy) = \mathsf{a}_\phi(-iy)$ であることを使うと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} \Xi(s)\, \mathrm{d}s &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \Xi(iy)\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \langle \hat{\phi}_1(iy), \hat{\phi}_2(iy) \rangle_{\mathbf{K}} + \langle \hat{\phi}_1(iy), M(-iy) \hat{\phi}_2(-iy) \rangle_{\mathbf{K}} \}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \langle \hat{\phi}_1(iy), \mathsf{a}_{\phi_2}(iy) \rangle_{\mathbf{K}} \}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \langle \hat{\phi}_1(iy) + M(-iy) \hat{\phi}_1(-iy), \mathsf{a}_{\phi_2}(iy) \rangle_{\mathbf{K}} \}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \langle \mathsf{a}_{\phi_1}(iy), \mathsf{a}_{\phi_2}(iy) \rangle_{\mathbf{K}} \}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \end{aligned}$$

あとは $\Xi(s)$ の留数を計算すればよい。命題 20 より $\hat{\phi}_1(s), \hat{\phi}_2(s)$ は

$$\hat{\phi}_1(s) = \sum_j a_j(s)\, \mathsf{f}_j^{(s)}, \qquad \hat{\phi}_2(s) = \sum_j b_j(s)\, \mathsf{f}_j^{(s)}$$

とかける。ただし、$\{\mathsf{f}_j\}$ は $\mathbf{H}^0$ の函数の有限族であって、各 f_j は適当な指標 $\mu_j \in \mathfrak{X}^M$ に対する $\mathbf{H}^0_{\mu_j}$ に属し、$a_j(s), b_j(s) \in \mathrm{PW}(\mathbb{C})$ である。さて、命題 17 から、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=1}\Xi(s) &= \sum_{i,j} \mathrm{Res}_{s=1}\{a_i(s)\, b_j(s)\, \langle\, M(s)\mathsf{f}_i^{(s)}, \mathsf{f}_j^{(s)}\rangle_{\mathbf{K}}\} \\
&= \sum_{i,j} a_i(1)\, b_j(1)\, \mathrm{Res}_{s=1}\langle\, M(s)\mathsf{f}_i^{(s)}, \mathsf{f}_j^{(s)}\rangle_{\mathbf{K}} \\
&= C \sum_{i,j}\sum_{\eta} a_i(1)\, b_j(1)\, \langle \mathsf{f}_i, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}\, \overline{\langle \mathsf{f}_j, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}} \\
&= C \sum_{\eta} \langle \hat{\phi}_1(1), \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}\, \overline{\langle \hat{\phi}_2(1), \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}} \\
&= C\, \mathrm{vol}_G\, \mathrm{vol}_M^{-1} \sum_{\eta} \langle\, \theta_{\phi_1} \,|\, \varphi_\eta\, \rangle_G\, \overline{\langle\, \theta_{\phi_2} \,|\, \varphi_\eta\, \rangle_G}
\end{aligned}$$

最後の等式は補題 22 による。□

4.3.8. *L^2-空間の分解.* $\mathbf{H}^0$ を内積 $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}}$ によって完備化して得られるヒルベルト空間を $\mathbf{H}$ とする。$y \in \mathbb{R}$ のとき $\mathsf{M}(iy) : \mathbf{H}^0 \to \mathbf{H}^0$ はユニタリー作用素だったから、完備化 $\mathbf{H}$ のユニタリー作用素に連続延長される。ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の $\mathbf{H}^0$ への作用 $\pi_{iy}(\varphi)$ から自然に $G(\mathbb{A})$ のユニタリー表現 $(\pi_{iy}, \mathbf{H})$ が定まる。

$\mu \in \mathfrak{X}^M$, $\tau \in \hat{\mathbf{K}}$ に対して、τ-等型成分 $\mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ の正規直交基底 $\mathcal{B}_\mu[\tau]$ を固定する。$\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}_\mu[\tau]$ ($\mu \in \mathfrak{X}^M$, $\tau \in \hat{\mathbf{K}}$) 全体の合併集合とすると、$\mathcal{B}$ は $\mathbf{H}$ の可算正規直交基底であり、$\mathcal{B} = \{\mathsf{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と番号付けることが出来る。以下このような基底を一つ固定しておく。

定義 24. 函数 $\mathsf{a} : \mathbb{R} \to \mathbf{H}$ で次の条件を満たすもの全体（の同値類）の空間を $\mathfrak{H}$ とする：

(1) $\mathsf{a}(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(y)\, \mathsf{f}_n$ と表すとき、係数函数 c_n はすべて可測函数である。
(2) 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathsf{M}(iy)\, \mathsf{a}(y) = \mathsf{a}(-y)$
(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \|\mathsf{a}(y)\|^2_{\mathbf{K}}\, \mathrm{d}y < +\infty$

内積

$$(\mathsf{a}_1|\mathsf{a}_2)_{\mathfrak{H}} = \frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi} \int_0^{+\infty} \langle \mathsf{a}_1(y), \mathsf{a}_2(y)\rangle_{\mathbf{K}}\, \mathrm{d}y$$

によって、$\mathfrak{H}$ はヒルベルト空間になり、しかも次の公式で定義される群 $G(\mathbb{A})$ の作用 ρ によってユニタリー表現になる。

$$[\rho(g)\mathsf{a}](y) = \pi_{iy}(g)(\mathsf{a}(y)), \qquad \text{a.e in } y \in \mathbb{R}, \quad (\mathsf{a} \in \mathfrak{H}) \quad \square$$

注意：普通、ユニタリー表現 $(\rho, \mathfrak{H})$ は $(\pi_{iy}, \mathbf{H})$ のヒルベルト直和と呼ばれ、

$$\int^{\hat{\oplus}}_{y\in\mathbb{R}_+^\times} (\pi_{iy}, \mathbf{H})\, \frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\, \mathrm{d}y$$

と書かれる。□

定義 25. (1) θ_ϕ ($\phi \in \mathcal{D}_P$) 全体の空間を Θ、 $\mathcal{L}^2$ におけるその閉包を $\bar{\Theta}$ と定義する：

$$\Theta = \{\theta_\phi |\, \phi \in \mathcal{D}_P\,\}, \qquad \bar{\Theta} = \mathcal{L}^2\text{-Closure of } \Theta$$

(2) イデール類指標 $\eta : F^\times\backslash\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ に対して、$\Theta(\eta) = \mathbb{C}\,\varphi_\eta$ とおく。

$$\mathrm{P}_\eta : \mathcal{L}^2 \longrightarrow \Theta(\eta), \qquad \mathrm{P}_\eta(f) = \langle\, f \,|\, \varphi_\eta \,\rangle_G\, \varphi_\eta$$

を直交射影子とする。$\square$

$R(g)\varphi_\eta = \eta(\det g)\,\varphi_\eta$ だから、$\Theta(\eta)$ は $G(\mathbb{A})$ が 1 次元表現 $\eta \circ \det$ で作用する $\mathcal{L}^2$ の $G(\mathbb{A})$-部分空間である。また、部分空間 $\Theta(\eta)$ 達は L^2-内積に関して互いに直交する。

補題 26. 有限個の L^2-函数 $c_j \in L^2(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$ と有限個のスカラー $a_j\,(1 \leqslant j \leqslant d)$ を与える。任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\alpha_j \in \mathrm{PW}(\mathbb{C})$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |c_j(y) - \alpha_j(iy)|^2\,\mathrm{d}y < \epsilon, \qquad \alpha_j(1) = a_j, \qquad (1 \leqslant j \leqslant d)$$

となる。

Proof: [8, Lemma 17.3(p.172)] を参照せよ。$\square$

補題 27. $\{(\mathsf{a}_\phi,\, \{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\}_\eta) \,|\, \phi \in \mathfrak{D}_P\,\}$ は $\mathfrak{H}\hat{\oplus}\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)$ の稠密部分空間である。

Proof: $\mathsf{a} \in \mathfrak{H}^0$ および有限個の異なる指標 η_j $(1 \leqslant j \leqslant d)$ とスカラー $a_j \in \mathbb{C}$ を任意にとる。$N \in \mathbb{N}$ を十分大きく選べば $\mathsf{a}(s) = \sum_{n=0}^{N} c_n(s)\,\mathsf{f}_n$ $(c_j \in L^2(\mathbb{R}))$ と表せる。さらに、十分大きく N をとることで $n > N$ のとき $\langle \mathsf{f}_n, \eta_j \circ \det\rangle_{\mathbf{K}} = 0\,(1 \leqslant j \leqslant d)$ であるとしてもよい。イデール類群指標 η に対して、$\tilde{\eta} = \eta \circ \det|\mathbf{K}$ で 1 次元表現 $\tilde{\eta} \in \hat{\mathbf{K}}$ を定義すると、$\mathbf{H}^0[\tilde{\eta}]$ は 1 次元である。$\eta_j\,(1 \leqslant j \leqslant d')$ を $\mathsf{f}_{n_j} \in \mathbf{H}^0[\tilde{\eta}_j]$ となる $0 \leqslant n_j \leqslant N$ が存在するような指標 η 全体とする。N のとり方から $d \leqslant d'$ である。スカラー $b_n\,(0 \leqslant n \leqslant N)$ を

$$b_{n_j} = \mathrm{vol}_M\, \mathrm{vol}_G^{-1/2}\, a_j, \quad (1 \leqslant j \leqslant d'),$$
$$b_n = 0, \quad (n \not\in \{n_1, \ldots, n_{d'}\})$$

で決める。$\epsilon > 0$ を任意に与えるとき、補題 26 より、$\alpha_n \in \mathrm{PW}(\mathbb{C})$ $(0 \leqslant n \leqslant N)$ であって

$$\int_{\mathbb{R}} |c_n(y) - \alpha_n(iy)|^2\,\mathrm{d}y < \epsilon(4N)^{-1}, \quad \alpha_n(1) = b_n$$

となるものが存在する。$\mathcal{F}(s) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(s)\,\mathsf{f}_n^{(s)}$ によって Paley-Wiener 切断 $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ がきまり、さらに命題 20 を適用すると、$\mathcal{F} = \hat{\phi}$ となる $\phi \in \mathfrak{D}_P$ が定まる。このとき、

$$\|\mathsf{a}_\phi - \mathsf{a}\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \epsilon,$$
$$\mathrm{P}_{\eta_j}(\theta_\phi) = a_j\, \varphi_{\eta_j}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant d')$$

が確かめられる。$\eta \neq \eta_j\,(1 \leqslant j \leqslant d')$ ならば、$\langle \mathsf{f}_n, \eta \circ \det\rangle_{\mathbf{K}} = 0\,(0 \leqslant n \leqslant N)$ なので、$\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi) = 0$ となる。よって、$(\mathsf{a}_\phi, \{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\})$ は $\mathsf{a} + \sum_{j=1}^{d} a_j\varphi_{\eta_j}$ の ϵ-近傍に含まれる。従って、$\mathfrak{H}^0 \oplus \bigoplus_\eta \mathbb{C}\varphi_\eta$ の任意の元は $\{(\mathsf{a}_\phi,\, \{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\}_\eta) \,|\, \phi \in \mathfrak{D}_P\,\}$ の点列の極限になることが示された。一方、$\mathfrak{H}^0 \oplus \bigoplus_\eta \mathbb{C}\varphi_\eta$ は $\mathfrak{H}\hat{\oplus}\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)$ で稠密なので証明終わり。$\square$

$\mathfrak{H}\hat{\oplus}\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)$ の内積を

$$\langle\, (\mathsf{a}, \{a_\eta\varphi_\eta\}) \,|\, (\mathsf{b}, \{b_\eta\,\varphi_\eta\}) \,\rangle = (\mathsf{a}|\mathsf{b})_{\mathfrak{H}} + \frac{C}{2}\,\frac{\mathrm{vol}_G}{\mathrm{vol}_M}\,\sum_\eta a_\eta \bar{b}_\eta$$

で定義する。(注意：実は、$\frac{C}{2}\frac{\mathrm{vol}_G}{\mathrm{vol}_M} = 1$ が後で (系 52) 分かるので、この内積は自然なものである。)

定理 28. $G(\mathbb{A})$ の作用と可換な等長同型写像

$$\mathrm{T}:\bar{\Theta}\xrightarrow{\cong}\mathfrak{H}\,\hat{\oplus}\,\left(\hat{\bigoplus}_{\eta}\Theta(\eta)\right)$$

で、任意の $\phi\in\mathcal{D}_P$ に対して

$$\mathrm{T}(\theta_\phi)=(\mathsf{a}_\phi,\,\{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\}_\eta) \tag{4.16}$$

となるものがただ一つ存在する。

Proof : 命題 14 より、

$$\|\theta_\phi\|_G^2=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\|\mathsf{a}_\phi(y)\|_{\mathbf{K}}^2\,\mathrm{d}y+\frac{C}{2}\,\frac{\mathrm{vol}_G}{\mathrm{vol}_M}\sum_\eta\|\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\|_G^2 \tag{4.17}$$

となる。これより、$\theta_\phi=0$ となる必要十分条件は $\mathsf{a}_\phi(iy)=0\,(\text{a.e.}\,y\in\mathbb{R})$ かつ $\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)=0\,(\forall\eta)$ である。これは線型写像 $\mathrm{T}:\Theta\to\mathfrak{H}\,\hat{\oplus}\,\left(\bigoplus_\eta\Theta(\eta)\right)$ が (4.16) によって矛盾無く定義されることを示している。(4.17) よりこの線型写像は等長写像 $\mathrm{T}:\bar{\Theta}\to\mathfrak{H}\,\hat{\oplus}\,\left(\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)\right)$ に延長される。同様に、補題 27 から等長写像 $\mathrm{T}':\mathfrak{H}\,\hat{\oplus}\,\left(\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)\right)\to\mathfrak{H}$ で $\mathrm{T}'((\mathsf{a}_\phi,\,\{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\}_\eta))=\theta_\phi$ なるものが存在する。$\mathrm{T}\circ\mathrm{T}'=\mathrm{Id}$, $\mathrm{T}'\circ\mathrm{T}=\mathrm{Id}$ はそれぞれ稠密部分空間上で成立するので、T, T$'$ は互いに逆写像になる。

定義 29. T による $\mathfrak{H}$ の逆像を $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$, $\bar{\Theta}$ の $\mathcal{L}^2$ における直交補空間を $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ と定義する。更に、１次元空間 $\Theta(\eta)$ $(\eta\in\widehat{F^\times\backslash\mathbb{A}^1})$ 全体の生成する閉部分空間を $\mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}$ と定義する。□

命題 30. (1) $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}=\{f\in\bar{\Theta}|\,\langle\, f\,|\,\varphi_\eta\,\rangle_G=0\,(\forall\eta\in\widehat{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times})\,\}$

(2) $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}=\left\{f\in\mathcal{L}^2|\,\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}f(ng)\,\mathrm{d}n=0\quad\text{a.e. in }g\in G(\mathbb{A})\right\}$

Proof : (1) T の定義から、任意の $f\in\bar{\Theta}$ に対して $\mathrm{T}(f)=(\mathrm{S}(f),\{\langle f|\varphi_\eta\rangle_G\varphi_\eta\}_\eta)$ と書ける。定義 29 から、$f\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$ は $\langle f|\varphi_\eta\rangle_G=0$ $(\forall\eta)$ と同値である。

(2) 命題 14 (1) (と同様な変形) から $f\in\mathcal{L}^1$ に対して $\langle\,\theta_\phi\,|\,f\,\rangle_G=\langle\,\phi\,|\,f_P\,\rangle_P$ である。よって、$f\in\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ は、$\langle\,\phi\,|\,f_P\,\rangle_P=0$ $(\forall\phi\in\mathcal{D}_P)$ と同値。$\mathcal{D}_P$ は $C_{\mathrm{c}}^\infty(N(\mathbb{A})\,P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の稠密部分空間であるから、これは、$f_P(g)=0$ (a.e. $g\in G(\mathbb{A})$) と同値である。□

4.4. L^2-函数のスペクトル分解.

4.4.1. 高さ函数と函数の増大度条件. $v\in\Sigma$ とする。群 $G(F_v)$ 上の高さ関数 $||\ ||_v$ を与えよう。もし $v\in\Sigma_\infty$ ならば $g\in G(F_v)$ について

$$||g||_v=\sqrt{\mathrm{tr}(g\,\overline{{}^tg})+\mathrm{tr}(g^{-1}\,\overline{{}^tg^{-1}})}=\sqrt{1+|\det(g)|^{-2}}\sqrt{\mathrm{tr}(g\,\overline{{}^tg})}$$

と定義する。もし $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば $g\in G(F_v)$ について

$$||g||_v=\max_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\{\,|g_{ij}|_v\,,\ |g_{ij}|_v/|\det(g)|_v\,\},\quad g=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}$$

と定義する。そして、$G(\mathbb{A})$ 上の高さ関数 $||\ ||$ を $g=(g_v)\in G(\mathbb{A})$ に対して

$$||g||=\prod_{v\in\Sigma}||g_v||_v$$

と定義する。ここで、$v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば $\|k\|_v=1\,(\forall k\in\mathbf{K}_v)$ であることから、右辺の積は実質的に有限積になることに注意する。

補題 31. 任意の $g,\, h \in G(\mathbb{A})$ に対して次が成り立つ。

(1) $||g|| \geqslant 1$.
(2) $||gh|| \leqslant ||g||\,||h||$.
(3) $||g|| = ||g^{-1}||$.
(4) $||kgk'|| = ||g||,\ {}^\forall k,\, {}^\forall k' \in \mathbf{K}$.

任意の $t \in (\mathbb{R}^\times)^0$ について、$G_t = \{g \in G(\mathbb{A}) \,|\, ||g|| < t\}$ と置く。

(5) G_t はコンパクト。
(6) ある定数 C_0 と N_0 が存在して $\sharp(G(F) \cap G_t) \leqslant C_0 t^{N_0}$ が成り立つ。
(7) 定数 $C > 0$ が存在して、任意の $g \in \mathfrak{S} \cap G(\mathbb{A})^1$ および任意の $\gamma \in G(F)$ に対して $\|g\| \leqslant C\,\|\gamma g\|$ が成り立つ。

Proof. (1) 各素点 $v \in \Sigma$ と $g \in G(F_v)$ について $||g||_v \geqslant 1$ を示せばよい。$v \in \Sigma_{\rm fin}$ の場合は自明なので、$v \in \Sigma_\infty$ の場合のみを考える。$\mathrm{tr}(g\,\overline{{}^t g}) = r$ と置く。そのとき、

$$|\det(g)|^2 \leqslant (|g_{11}|\,|g_{22}| + |g_{12}|\,|g_{21}|)^2 \leqslant r^2$$

が成り立つので、

$$||g||_v \geqslant \sqrt{1+r^{-2}}\,\sqrt{r} = \sqrt{r+r^{-1}} \geqslant 1$$

が得られる。

(2) 各素点 $v \in \Sigma$ と $g,\, h \in G(F_v)$ について $||gh||_v \leqslant ||g||_v\,||h||_v$ を示せばよい。まずは $v \in \Sigma_\infty$ の場合を考えよう。

$$\mathrm{tr}(gh\,\overline{{}^t(gh)}) = \mathrm{tr}(\overline{{}^t g}g\,h\,\overline{{}^t h})$$

となるので、正値エルミート行列 $S,\, T$ について、$\mathrm{tr}(ST) \leqslant \mathrm{tr}(S)\,\mathrm{tr}(T)$ となることを示せばよい。ある $k \in \mathbf{K}_v$ について

$$kS\,{}^t k = \begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}, \quad kT\,{}^t k = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

として良い。正値性から、対角成分は全て正の数であることに注意しよう。

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(S)\mathrm{tr}(T) - \mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(kS\,{}^t k)\mathrm{tr}(kT\,{}^t k) - \mathrm{tr}(kS\,{}^t k kT\,{}^t k) \\ &= (s_1+s_2)(t_1+t_2) - (s_1t_1+s_2t_2) = s_2t_1 + s_1t_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

これで求める不等式が示された。

次に $v \in \Sigma_{\rm fin}$ の場合を考える。gh の (i,j) 成分について

$$\begin{aligned} &|g_{i1}h_{1j} + g_{i2}h_{2j}|_v \leqslant \max\{|g_{i1}h_{1j}|_v\,,\ |g_{i2}h_{2j}|_v\} \\ &\leqslant \max\{|g_{i1}|\,,\ |g_{i2}|_v\}\max\{|h_{1j}|_v\,,\ |h_{2j}|_v\} \leqslant ||g||_v\,||h||_v \end{aligned}$$

となるので、明らかに不等式が従う。

(3) これは定義より自明。

(4) 各素点 $v \in \Sigma$ と $g \in G(F_v)$ について示そう。$v \in \Sigma_\infty$ の場合は定義より自明なので、$v \in \Sigma_{\rm fin}$ とする。各 $k \in \mathbf{K}_v$ について $||kg||_v = ||g||_v$ となることを示せばよい。$\|k\|_v = \|k^{-1}\|_v = 1$ に注意すると、(2) から次の 2 つの不等式がえられる：

$$\|kg\|_v \leqslant \|k\|_v\,\|g\|_v = \|g\|_v = \|k^{-1}\,kg\|_v \leqslant \|k^{-1}\|_v\,\|kg\|_v = \|kg\|_v$$

従って、$\|kg\|_v = \|g\|_v$ である。

(5) 元 $g = (g_v) \in G(\mathbb{A})$ について (1) より $||g|| < t$ ならば各 $v \in \Sigma$ について $1 \leqslant ||g_v||_v < t$ を得る。そのため、すべての $v \in \Sigma$ について G_t の $G(F_v)$ への射影 $G_{t,v}$ はコンパクトになるのだから、G_t もコンパクトである。

(6) 環 R に対して $\mathrm{Mat}(2,R)$ を R を成分としてもつ 2 次の正方行列全体の集合とする。(5) の証明より

$$\sharp(G(F)\cap G_t)\leqslant\sharp\left\{g\in\mathrm{Mat}(2,F)\;\middle|\;\begin{array}{c}||g||_v<t\quad(\forall v\in\Sigma_\infty)\\ {}^\exists m\in\mathbb{Z}_{>0}\text{ s.t. }g\in\mathrm{Mat}(2,m^{-1}\mathcal{O})\text{ and }m<t\end{array}\right\}$$
$$\leqslant\sum_{m=1}^{[t]}\sharp\{g\in\mathrm{Mat}(2,m^{-1}\mathcal{O})\mid\max\{|g_{11}|,|g_{12}|,|g_{21}|,|g_{22}|\}\leqslant t\}$$

が成り立つので (6) が従う。

(7) $\mathfrak{S}\cap G(\mathbb{A})^1$ の任意の要素は $g=\left(\begin{smallmatrix}x_{11}&x_{12}\\0&x_{22}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{smallmatrix}\right)k$、ただし $\left(\begin{smallmatrix}x_{11}&x_{12}\\0&x_{22}\end{smallmatrix}\right)\in\omega\cap G(\mathbb{A})^1$, $a\in(\mathbb{R}^\times)^0$ $(a^2>t)$, $k\in\mathbf{K}$ と書ける。$\gamma\in G(F)$ を任意にとる。すると、

$$\gamma gk^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma_{11}ax_{11}&*\\\gamma_{21}ax_{11}&*\end{pmatrix}$$

となる。ここで、$\gamma_{11}\neq0$ または $\gamma_{21}\neq0$ である。$\gamma_{11}\neq0$ ならば、$|\gamma_{11}|_\mathbb{A}=1$ により、

$$\|\gamma gk^{-1}\|\geqslant|\gamma_{11}ax_{11}|_\mathbb{A}=|a|_\mathbb{A}\,\|x_{11}|_\mathbb{A}$$

x_{11} は $\mathbb{A}^\times$ のコンパクト集合を走る。更に、$\mathfrak{S}\cap G(\mathbb{A})^1$ 上で $\|g\|\asymp|a|_\mathbb{A}$ であるから、γ, g に無関係なある定数 $C>0$ が存在して $\gamma_{11}\neq0$ ならば常に $\|\gamma g\|\geqslant C\,\|g\|$ $(\forall g\in\mathfrak{S}\cap G(\mathbb{A})^1)$ である。$\gamma_{21}\neq0$ のときも同様。 □

高さ関数 $\|\ \|$ を使って緩増大関数、急減少関数と一様緩増大関数を定義しよう。まず $\mathfrak{S}^1=\mathfrak{S}\cap G(\mathbb{A})^1$ と置く。

定義 32. (1) $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数 f が緩増大関数であるとは、ある定数 $N\in\mathbb{R}$ および $C>0$ が存在して

$$|f(g)|\leqslant C\,\|g\|^N,\qquad g\in G(\mathbb{A})^1$$

が成り立つことと定義する。

(2) 関数 $f\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ が一様緩増大であるとは、ある定数 $N_0\geqslant0$ が存在して、任意の $D\in U(\mathfrak{g})$ に対して、不等式

$$|(R(D)f)(g)|\;\leqslant\;C_D\,||g||^{N_0}\,,\quad{}^\forall g\in G(\mathbb{A})^1$$

を満たす定数 C_D が存在することと定義する。

(3) 関数 $f\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ が $\mathfrak{S}^1$ 上急減少関数であるとは、任意の $N>0$ に対して、不等式

$$|f(g)|\;\leqslant\;C_N\,||g||^{-N}\,,\quad g\in\mathfrak{S}^1$$

を満たす定数 C_N が存在することと定義する。□

4.4.2. 保型形式. 関数 $f:G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき、$G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の保型形式であるといい、その全体の空間を $\mathcal{A}_G$ と書く：

- $f\in\mathcal{C}_G$
- f は右 $Z(\mathfrak{g})$-有限である。
- f は $G(\mathbb{A})^1$ 上で緩増大である。

さらに、カスプ条件

- $f_P(g)=0\qquad(\forall g\in G(\mathbb{A}))$

を満たす $f\in\mathcal{A}_G$ をカスプ形式といい、その全体を $\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ と定義する。

命題 33. $f\in\mathcal{A}_G$ ならば f は $G(\mathbb{A})^1$ 上一様緩増大函数である。

Proof : f が右 $\mathbf{K}$-有限かつ右 $Z(\mathfrak{g})$-有限であることから、ある函数 $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ が存在して $f = R(\check{\varphi})f$ が成り立つ ([18, §8, Theorem 1], [8, Theorem 2.14 (p.22)])。f は緩増大だから、ある定数 $N \in \mathbb{R}$, $C_1 > 0$ が存在して $|f(g)| \leqslant C_1 \|g\|^N$ $(\forall g \in G(\mathbb{A})^1)$ が成り立つ。補題 31 (1) より $N > 0$ としてもよい。$\mathcal{U} = \mathrm{supp}(\varphi)$ とすると、$\mathcal{U}$ は $G(\mathbb{A})^1$ のコンパクト集合であり、任意の $D \in U(\mathfrak{g})$ に対して $C_2 = \sup_{h \in \mathcal{U}} |R(D)\varphi(h^{-1})|$ は有限である。

$$\begin{aligned} |R(D)f\,(g)| &\leqslant \int_{G(\mathbb{A})^1} |f(gh)|\,|[R(D)\varphi](h^{-1})|\,\mathrm{d}^1h \\ &= \int_{\mathcal{U}} |f(gh)|\,|[R(D)\varphi](h^{-1})|\,\mathrm{d}^1h \\ &\leqslant C_1\,C_2 \int_{\mathcal{U}} \|gh\|^N\,\mathrm{d}^1h \\ &\leqslant \{C_1\,C_2 \int_{\mathcal{U}} \|h\|^N\,\mathrm{d}^1h\} \times \|g\|^N \qquad (\because \text{補題 } 31(2)) \end{aligned}$$

N は D に無関係だから、この評価から一様緩増大性がわかる。□

命題 34. $f \in \mathcal{C}_G$ が次ぎの 2 条件を満たすとすると、f はジーゲル領域上 $\mathfrak{S}$ 上で急減少関数である。

(1) f は $\mathfrak{S}$ 上一様緩増大である。
(2) 定数項が消える, i.e., $f_P(g) = 0$ $(\forall g \in G(\mathbb{A})^1)$ □

Proof : [25, 命題 1.10] を参照せよ。□

系 35. $f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ はジーゲル領域 $\mathfrak{S}$ 上で急減少関数である。特に、$\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}} \subset \mathcal{L}^q$ $(\forall q > 1)$ である。

Proof : 命題 34、命題 33 および補題 1 より自明である。□

ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は右作用によって保型形式の空間 $\mathcal{A}_G$ に作用し、$\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ は部分 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-加群になることが分かる。

4.4.3. カスプ的保型表現.

命題 36. (Gelfand-Graev-Piatetsuki Shapiro) : $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ は既約閉部分空間のヒルベルト直和に分解される。i.e., $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ の既約閉部分空間の族 $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ が存在して、$\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}} = \hat{\bigoplus}_\alpha \mathcal{V}_\alpha$ となる。更に、既約ユニタリー表現の各同値類 $\pi \in \widehat{G(\mathbb{A})}$ に対して、$\pi \cong \mathcal{V}_\alpha$ となる α の濃度 $m_{\mathrm{cus}}(\pi)$(=π の重複度) は有限である。

Proof : [25, 定理 1.13] を参照せよ。□

命題 37. (重複度 1 定理): $m_{\mathrm{cus}}(\pi) \leqslant 1$ $(\forall \pi \in \widehat{G(\mathbb{A})})$

Proof ：[25, 定理 4.5] を参照せよ。□

定義 38. $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ の既約部分表現をカスプ的保型表現と呼ぶ。□

補題 39. $q \geqslant 1$, $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ とする。このとき、定数 $c_\varphi > 0$ が存在して、任意の $f \in \mathcal{L}^q$ に対して

$$|\,[f * \varphi](g)\,| \leqslant c_\varphi\,\|f\|_{G(\mathbb{A})^1,q}\,\|g\|^{2/q}, \quad g \in G(\mathbb{A})^1 \tag{4.18}$$

が成り立つ。ここで、$\|f\|_{G(\mathbb{A})^1,q} = \left(\int_{G(\mathbb{A})^1} |f(g)|^q\,\mathrm{d}^1g\right)^{1/q}$ である。□

Proof : (*cf.* [8, Proposition 5.7]) $T_\infty^+=\{[\begin{smallmatrix} t & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}]\in G(F_\infty)\,|\,t\in(\mathbb{R}^\times)^0\}$ とおくと、岩澤分解は $G(\mathbb{A})^1=N(\mathbb{A})\,M(\mathbb{A})^1\,T_\infty^+\,\mathbf{K}$ となる。$\mathcal{U}=\mathrm{supp}(\varphi)$ はコンパクト集合なので、

$$\mathbf{K}\,\mathcal{U}^{-1}\subset\mathcal{U}_P\,\mathcal{U}_{T,\infty}\,\mathbf{K}$$

を満たすコンパクト集合 $\mathcal{U}_P\subset N(\mathbb{A})\,M(\mathbb{A})^1$ および $\mathcal{U}_{T,\infty}\subset T_\infty^+$ が存在する。$g\in G(\mathbb{A})^1$ に対して $t(g)\in T_\infty^+$ を $g\in N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^1\,t(g)\,\mathbf{K}$ で定義する。$g\in\mathfrak{S}$ とすると、

$$g\,\mathcal{U}^{-1}\subset\omega\,t(g)\,\mathbf{K}\,\mathcal{U}^{-1}\subset\omega\,t(g)\,\mathcal{U}_P\,\mathcal{U}_{T,\infty}\,\mathbf{K}\subset t(g)\,\{t(g)^{-1}\,\omega\,t(g)\,\mathcal{U}_P\}\,t(g)^{-1}\cdot t(g)\,\mathcal{U}_{T,\infty}\cdot\mathbf{K}$$

$g\in\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(\omega,t_0)$ より、$t(g)\geqslant t_0$ である。したがって、$t(g)^{-1}\,\omega\,t(g)\,\mathcal{U}_P$ $(g\in\mathfrak{S})$ は一定のコンパクト集合 $D\subset N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^1$ に含まれる。

$$\begin{aligned}
|[f*\varphi](g)| &= \left|\int_{G(\mathbb{A})^1} f(x)\,\varphi(x^{-1}g)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{g\,\mathcal{U}^{-1}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{h\in t(g)\,D\,t(g)^{-1}}\int_{a\in t(g)\,\mathcal{U}_{T,\infty}}\int_{k\in\mathbf{K}} |f(hak)|\,\delta_P(a)^{-1}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}k
\end{aligned}\tag{4.19}$$

$\mathcal{P}(g)=\{\delta\in P(F)\,|\,\delta\omega\cap t(g)\,D\,t(g)^{-1}\neq\varnothing\}$ とおくと、$t(g)\,D\,t(g)^{-1}$ は $\delta\omega$ $(\delta\in\mathcal{P}(g))$ で被覆される。f は左 $P(F)$ 不変だから、

$$\int_{h\in t(g)\,D\,t(g)^{-1}}|f(hak)|\,\mathrm{d}h\ll\{\sharp\mathcal{P}(g)\}\int_{h\in\omega}|f(hak)|\,\mathrm{d}h$$

更に、$\sharp\mathcal{P}(g)\ll\mathrm{vol}(t(g)\,D\,t(g)^{-1})\asymp\delta_P(g)$ は容易に分かる。故に、$Q(g)=\omega\,t(g)\,\mathcal{U}_{T,\infty}\,\mathbf{K}$ とおくと、(4.19) から、

(4.20)
$$|[f*\varphi](g)|\ll\delta_P(g)\int_{h\in\omega}\int_{a\in t(g)\,\mathcal{U}_{T,\infty}}\int_{k\in\mathbf{K}}|f(hak)|\,\delta_P(a)^{-1}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}k=\delta_P(g)\int_{Q(g)}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

となる。$1/q+1/r=1$ で指数 $r>1$ を決めよう。すると、Hölder の不等式から

$$\begin{aligned}
\int_{Q(g)}|f(x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{Q(g)}|f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\left(\int_{Q(g)}\mathrm{d}x\right)^{1/r} \\
&\leqslant \|f\|_{G(\mathbb{A})^1,q}\,\mathrm{vol}(Q(g))^{1/r}\asymp\|f\|_{G(\mathbb{A})^1,q}\,\delta_P(g)^{-1/r}
\end{aligned}\tag{4.21}$$

$\mathfrak{S}^1$ 上で $\delta_P(g)\asymp\|g\|^2$ となることが容易に分かるので、(4.20), (4.21) より不等式 (4.18) が $\mathfrak{S}^1$ 上では成り立つ。$f*\varphi$ は左 $G(F)$-不変なので、補題 31 (7) より不等式 (4.18) は $G(\mathbb{A})^1$ 全体に拡張される。□

命題 40. (1) 任意のカスプ的保型表現 $(\pi,\mathcal{V}_\pi)$ に対して、$\mathcal{V}_\pi$ に含まれる右 $\mathbf{K}$-有限函数全体の空間を V_π とおくと、$V_\pi\subset\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ であり、V_π は $\mathcal{V}_\pi$ で稠密である。特に、V_π に含まれる $\mathcal{V}_\pi$ の正規直交基底 $\mathcal{B}_\pi$ が存在する。
(2) $\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ は $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ において稠密である。□

Proof ： (1) $f\in V_\pi$ がカスプ形式の条件を満たすことを確かめる。まず、π は既約ユニタリー表現なので許容可能 ([10, Theorem 4]) である。これと [24, Proposition 8.5] により、f は $G(\mathbb{A})$ 上の smooth 函数になる。左 $Z_\infty^+G(F)$-不変性は明らかなので $f\in\mathcal{C}_G$ となる。また、カスプ条件は明らか。$Z(\mathfrak{g})$ は V_π にスカラーで作用する ([24, Corollary 8.14]) ので、f は $Z(\mathfrak{g})$-有限になる。f は $\mathbf{K}$-有限かつ $Z(\mathfrak{g})$-有限なので、$f=R(\check{\varphi})f$ を満たす $\varphi\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ が存在する ([18, §8 Theorem 1], [8, Theorem 2.14 (p.22)])。従って、補題 39 から f は緩増大になる。

$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の元は両側 $\mathbf{K}$-有限なので、包含 $R(\mathcal{H}(G(\mathbb{A})))\,\mathcal{V}_\pi \subset V_\pi$ は明らかである。$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ はデルタ近似列（即ち、正の函数列 φ_n であって、$\mathrm{supp}(\varphi_n) \to \{e\}$ かつ $\int_{G(\mathbb{A})^1} \varphi_n(g)\,\mathrm{d}^1 g = 1$ となるもの）を含む。$\lim_{n\to\infty} \|R(\varphi_n)f - f\|_G = 0$ となるので、$R(\mathcal{H}(G(\mathbb{A})))\,\mathcal{V}_\pi$ は $\mathcal{V}_\pi$ で稠密である。

(2) は (1) と命題 36 から従う。$\square$

補題 41. $f \in \mathcal{L}^q$ $(q > 1)$ がカスプ的、即ち、$\langle\, f \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G = 0$ $(\forall \phi \in \mathfrak{D}_P)$ とする。このとき、任意の $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して $R(\varphi)f$ はジーゲル領域 $\mathfrak{S}$ 上で急減少である。特に、$R(\varphi)f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ である。

Proof: 任意の $D \in U(\mathfrak{g})$ に対して $R(D)\,(f * \varphi) = f * R(D)\varphi$ だから、補題 39 より

$$|\,[R(D)(R(\varphi)f)](g) \ll_{D,\varphi,f} \|g\|^{2/q}, \quad g \in G(\mathbb{A})^1$$

となり、$R(\varphi)f$ は一様緩増大となる。一方、$\langle\, R(\varphi)f \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G = \langle\, f \,|\, R(\varphi^*)\theta_\phi \,\rangle_G = \langle\, f \,|\, \theta_{R(\varphi^*)\phi} \,\rangle_G = 0$ より $R(\varphi)f$ もカスプ的である。命題 30(3) の証明より、これは $(R(\varphi)f)_P = 0$ $(\forall g \in G(\mathbb{A})^1)$ と同値。従って、函数 $R(\varphi)f$ に補題 34 を適用すれば結論を得る。$\square$

命題 42. 任意の $q > 1$ に対して、$\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}} + \Theta$ は $\mathcal{L}^q$ の稠密部分空間である。

Proof: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ となる $r > 1$ をとると、pairing $\langle\,|\,\rangle_G$ によって $\mathcal{L}^r$ は $\mathcal{L}^q$ 位相的双対空間となる。よって、Hahn-Banach の定理から、$f \in \mathcal{L}^r$ に対して、

$$\langle \Theta + \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}} \,|\, f \rangle_G = \{0\} \tag{4.22}$$

のもとで $f = 0$ を示せばよい。条件 (4.22) より、$\langle \theta_\phi \,|\, f \,\rangle_G = 0$ $(\forall \phi \in \mathfrak{D}_P)$ となるので、補題 41 によれば、任意の $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して $R(\varphi)f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ である。命題 40(2) より、$\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ の函数列 (f_n) で $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ において $R(\varphi)f$ に収束するものがある。$R(\varphi^*)f_n \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ なので、(4.22) より

$$\langle\, R(\varphi)f \,|\, f_n \,\rangle_G = \langle\, f \,|\, R(\varphi^*)f_n \,\rangle_G = 0$$

となる。$n \to \infty$ として、$\|R(\varphi)f\|_G^2 = 0$、つまり、$R(\varphi)f = 0$ を得る。$\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は任意なので、デルタ函数近似列を使うと $f = 0$ が従う。$\square$

4.4.4. アイゼンシュタイン級数の波束. $\mathcal{L}^2$ から $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$ への射影を記述するためには、アイゼンシュタイン級数 $E(\mathsf{f}^{(s)} : g)$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ を虚軸まで解析接続することが必要になる。必要とされる結果は次のようにまとめられる：

定理 43. 各 $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$ に対して、次のような函数 $\mathsf{E}(\mathsf{f}) : D \times G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が存在する。

(1) $g \in G(\mathbb{A})^1$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ ならば、$\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g) = E(\mathsf{f}^{(s)} : g)$ である。
(2) $\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g)$ は s に関して $\mathbb{C}$ 上有理型函数であり、極は D の補集合に含まれる。
(3) $s \in D$ を固定すると、$\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -) \in \mathcal{A}_G$ である。
(4) $g \in G(\mathbb{A})^1$ を固定すると、$s \mapsto \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g)$ は右半平面 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ では $s = 1$ を除いて整型である。
(5) 函数等式が成り立つ：

$$\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g) = \mathsf{E}(\mathsf{M}(s)\mathsf{f}; -s, g), \qquad \mathsf{f} \in \mathbf{H}^0,\ s \in D,\ g \in G(\mathbb{A})$$

Proof: 3.2.2 節を参照せよ。$\square$

命題 44. $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$, $s \in D$ とすると、

$$\langle\, \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -) \,|\, f \rangle_G = 0, \qquad \forall f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$$

Proof : 定理 43(3)) より $E(|\mathsf{f}^{(s)}|,-)\in\mathcal{A}_G$ なので、ある $N\in\mathbb{R}$ が存在して、

$$E(|\mathsf{f}^{(s)}|,g)\ll\delta_P(g)^N,\quad g\in\mathfrak{S}$$

$f\in\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ なので命題 35 より

$$|f(g)|\ll\delta_P(g)^{-N},\qquad g\in\mathfrak{S}$$

なる評価が存在する。従って、$\mathrm{Re}(s)>1$ であれば

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|f(g)|\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}|\mathsf{f}^{(s)}(\gamma g)|\,\mathrm{d}^1g\ll\int_{\mathfrak{S}}|f(g)|\,E(|\mathsf{f}^{(s)}|,g)\,\mathrm{d}g\ll\int_{\mathfrak{S}}\mathrm{d}g=\mathrm{vol}(\mathfrak{S})<+\infty$$

よって、命題 (14)(1) と同じ積分変形で

$$\langle\,E(\mathsf{f}^{(s)},-)\,|\,f\,\rangle_G=\langle\,\mathsf{f}^{(s)}\,|\,f_P\,\rangle_P$$

が示されるが、$f\in\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ ゆえ、収束域 $\mathrm{Re}(s)>1$ において右辺は消える。収束域の外では、解析接続によって $\langle\,\mathsf{E}(\mathsf{f};s,-)\,|\,f\,\rangle_G=0$ が成立する。□

$\mathrm{P}_{\mathrm{cont}}:\mathcal{L}^2\to\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$ を直交射影子とする。等長同型写像 $\mathrm{T}:\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}\cong\mathfrak{H}$ との合成として

$$\mathrm{S}=\mathrm{T}\circ\mathrm{P}_{\mathrm{cont}}:\mathcal{L}^2\longrightarrow\mathfrak{H}$$

を定義する。この写像 S を具体的に記述したい。定義から、$\phi\in\mathcal{D}_P$ に対しては $\mathrm{S}(\theta_\phi)=\mathsf{a}_\phi$ であることを注意しよう。

補題 45. 任意の $\epsilon>0$ に対して、$\mathcal{L}^{2+\epsilon}\subset\mathcal{L}^2$ であり、包含写像は連続である。□

Proof : $0<q_1<q_2$ として、$\mathcal{L}^{q_2}\subset\mathcal{L}^{q_1}$ を示せばよい。$l=q_2/q_1$ として、$1/l+1/m=1$ によって $m>1$ を決めると、Hölder の不等式から

$$\|f\|_{G,q_1}\leqslant\|1\|_{G,m}^{1/m}\,\||f|^{q_1}\|_{G,l}^{1/l}=\mathrm{vol}_G^{1/m}\,\|f\|_{G,q_2}^{1/l}$$

これより包含 $\mathcal{L}^{q_2}\subset\mathcal{L}^{q_1}$ とその連続性は明らか。□

さて、$\varphi\in\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ とする。$\mathrm{S}\varphi:\mathbb{R}\to\mathbf{H}$ は可側函数であった。よってこの函数を決めるには、任意の元 $f\in\mathbf{H}^0$ との内積 $\langle f,(\mathrm{S}\varphi)(y)\rangle_{\mathbf{K}}$ を記述すればよい。それは次の命題で与えられる：

命題 46. $\varphi\in\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ とする。このとき、任意の $f\in\mathbf{H}^0$ に対して、

$$\langle\mathsf{f},(\mathrm{S}\varphi)(y)\rangle_{\mathbf{K}}=\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\mathsf{E}(\mathsf{f};iy,g)\,\overline{\varphi(g)}\,\mathrm{d}g,\qquad(\text{for a.e. in }y\in\mathbb{R})\tag{4.23}$$

右辺の積分は任意の $y\in\mathbb{R}$ に対して絶対収束する。□

Proof : $m=(2+\epsilon)/(1+\epsilon)$ とおくと $1/m+1/(2+\epsilon)=1$ となる。従って、Hölder の不等式から

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|\mathsf{E}(\mathsf{f};s,g)|\,|\varphi(g)|\,\mathrm{d}^1g\leqslant\|\mathsf{E}(\mathsf{f};s,-)\|_{G,m}\,\|\varphi\|_{G,2+\epsilon}$$

ここで、$s\in i\mathbb{R}$ なので、ジーゲル領域 $\mathfrak{S}$ 上での評価 $|\mathsf{E}(\mathsf{f};s,g)|\ll\delta_P(g)^{1/2}$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}\|\mathsf{E}(\mathsf{f};s,-)\|_{G,m}^m&\leqslant\int_{\mathfrak{S}}\delta_P(g)^{m/2}\,\mathrm{d}g\\&\ll\int_{t_0}^{+\infty}a^{m/2-1}\,\mathrm{d}^\times a\\&<+\infty\qquad(\because\ \frac{m}{2}-1=\frac{-\epsilon}{2(1+\epsilon)}<0)\end{aligned}$$

これで、(4.23) 右辺の積分は絶対収束し、φ の汎函数としては $\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ 上連続なことも示された。一方、左辺は φ の汎函数としては $\mathcal{L}^2$ 上連続であり、補題 45 より、その $\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ への制限も連続になる。故に、等式 (4.23) を、$\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ の稠密部分空間 $\Theta + \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ (命題 42) 上で示せば十分である。$\varphi \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ ならば、(4.23) の左辺は S の定義からゼロである。右辺は、命題 44 により、やはりゼロとなって等号が成立する。次に、$\varphi = \theta_\phi$ ($\phi \in \mathcal{D}_P$) とする。任意の $\beta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ および任意の $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$ に対して、$\mathsf{b}(y) = b(y)\,\mathsf{f}$ によって函数 $\mathsf{b} : \mathbb{R} \to \mathbf{H}$ を定義すると、命題 15 の証明と同様に、命題 14 および命題 6 を使って

$$\mathrm{vol}_M^{-1} \langle\, \mathsf{E}(\mathsf{b}(y); iy) \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G = \langle\, \mathsf{b}(y), \hat{\phi}_1(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} + \langle\, \mathsf{M}(iy)\mathsf{b}(y), \hat{\phi}(-iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \tag{4.24}$$

が示せる。命題 11 および命題 16(5) から右辺は急減少、特に、可積分であることを注意しよう。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\mathrm{vol}_M^{-1} \int_{\mathbb{R}} \langle\, \mathsf{E}(\mathsf{b}(y); iy) \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \{\langle\, \mathsf{b}(y), \hat{\phi}(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} + \langle\, \mathsf{M}(iy)\,\mathsf{b}(y), \hat{\phi}(-iy) \,\rangle_{\mathbf{K}}\} \,\mathrm{d}y \qquad (\because (4.24)) \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle \mathsf{b}(y),\, \hat{\phi}(iy) + M(-iy)\hat{\phi}(-iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y \qquad (\because \text{命題 } 16\ (6)) \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle \mathsf{b}(y),\, \mathsf{a}_\phi(y) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle\, \mathsf{b}(y),\, [\mathrm{S}(\theta_\phi)]\,(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

故に、

$$\frac{1}{8\pi}\mathrm{vol}_M^{-1} \int_{\mathbb{R}} \beta(y) \,\langle\, \mathsf{E}(\mathsf{f}; iy) \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G \,\mathrm{d}y = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \beta(y) \,\langle\, \mathsf{f},\, [\mathrm{S}(\theta_\phi)]\,(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y \tag{4.25}$$

となる。$\beta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ は任意なので、$\varphi = \theta_\phi$ に対して (4.23) が従う。□

$\mathbf{K}$-有限かつコンパクト台 (i.e., ある $T > 0$ が存在して、$\mathbb{R} - [-T, T]$ 上殆ど至るところ $\mathsf{a}(y) = 0$) をもつ元 $\mathsf{a} \in \mathfrak{H}$ 全体のなす $\mathfrak{H}$ の部分空間を $\mathfrak{H}^0$ とする。随伴作用素 $\mathrm{S}^* : \mathfrak{H} \to \mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$ は次の命題で与えられる。

命題 47. $\mathsf{a} \in \mathfrak{H}^0$ のとき、

$$[\mathrm{S}^*(\mathsf{a})](g) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}(\mathsf{a}(y) : iy : g) \,\mathrm{d}y \qquad (\text{a.e. in } g \in G(\mathbb{A})^1) \tag{4.26}$$

Proof : $\mathbf{H}$ の正規直交基底 $\{\mathsf{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $(\subset \mathbf{H}^0)$ を固定してあることを想起しよう（定義 24）。$\mathsf{a} \in \mathfrak{H}^0$ とすると、有限集合 $I \subset \mathbb{N}$ とコンパクト台のスカラー値可側函数の族 c_n $(n \in I)$ が存在して

$$\mathsf{a}(y) = \sum_{n \in I} c_n(y)\,\mathsf{f}_n, \qquad (\text{a.e. in } y \in \mathbb{R})$$

となる。命題 46 の証明中で、任意の $\beta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ 任意の $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$ に対して、(4.25) を示した。極限移行によって、この等式は β を任意のコンパクト台の可側函数としても成立する。従って、

$$\frac{1}{8\pi}\mathrm{vol}_M^{-1} \int_{\mathbb{R}} \langle\, \mathsf{E}(\mathsf{a}(y); iy) \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G \,\mathrm{d}y = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle\, \mathsf{a}(y),\, [\mathrm{S}(\theta_\phi)]\,(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y$$

が成り立つ。(4.26) 右辺を g の函数として $\varphi(g)$ とすれば、これは、次のように書きなおせる。

$$\langle\, \varphi \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G = \langle\, \mathrm{S}^* \mathsf{a} \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G$$

従って、$\varphi - \mathrm{S}^*(\mathsf{a})$ は Θ と直交する。命題 44 より、$\varphi - \mathrm{S}^*(\mathsf{a})$ は $\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ とも直交することが容易に分かる。さて、虚軸上の評価 $|\mathsf{E}(\mathsf{f}; iy, g)| \ll \delta_P(g)^{1/2}$ $(g \in \mathfrak{S})$ を積分することで、φ もジーゲル領域上 $\delta_P(g)^{1/2}$ で上から評価される。特に、補題 1 より、$\varphi \in \mathcal{L}^{1+\epsilon}$ $(\exists \epsilon \in (0,1))$ である。また、命題 45 より、$\mathrm{S}^*\mathsf{a} \in \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^{1+\epsilon}$ だから $\varphi - \mathrm{S}^*\mathsf{a} \in \mathcal{L}^{1+\epsilon}$ となる。したがって、命題 42 から、$\varphi - \mathrm{S}^*(\mathsf{a})$ は殆どいたるところでゼロなことが結論される。$\square$

命題 48. $\varphi \in \mathcal{L}^2$ が $\mathbf{K}$-有限であれば、$\mathsf{a}_\varphi \in \mathfrak{H}$ が存在して

$$\mathrm{P}_{\mathrm{cont}}(\varphi) = \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{8\pi} \int_{-T}^{T} \mathsf{E}(\mathsf{a}_\varphi(y); iy, -)\, \mathrm{d}y \right) \qquad (\text{in } \mathcal{L}^2) \tag{4.27}$$

となる。更に、φ が $\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ に属するならば、

$$\mathsf{a}_\varphi(y) = \mathrm{vol}_M^{-1} \sum_n \left\{ \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \varphi(g)\, \mathsf{E}(\bar{\mathsf{f}}_n; -iy, g)\, \mathrm{d}g \right\} \mathsf{f}_n$$

と与えられる。

Proof: $\mathsf{a}_\varphi = \mathrm{S}(\varphi) \in \mathfrak{H}$ とおく。任意の正数 T に対して、$\mathsf{a}_\varphi^T(y)$ を $\mathsf{a}_\varphi(y)$ と区間 $[-T, T]$ の特性函数の積とすれば、$\mathsf{a}_\varphi = \lim_{T\to\infty} \mathsf{a}_\varphi^T$ ($\mathfrak{H}$ での収束）となる。よって、

$$\mathrm{P}_{\mathrm{cont}}(\varphi) = \mathrm{S}^* \circ \mathrm{S}(\varphi) = \mathrm{S}^*(\mathsf{a}_\varphi) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{S}^*(\mathsf{a}_\varphi^T)$$

ここで命題 47 を使えば最初の主張が従う。$\mathsf{a}_\varphi(y) = \sum_n \langle \mathsf{a}_\varphi(y), \mathsf{f}_n \rangle_{\mathbf{K}}\, \mathsf{f}_n$ (a.e. $y \in \mathbb{R}$) と展開される。$\varphi \in \mathcal{L}^{2+\epsilon}$ ならば命題 46 より、$\langle \mathsf{a}_\varphi(y), \mathsf{f}_n \rangle_{\mathbf{K}}$ が与えられる。$\square$

4.4.5. 留数形式.

命題 49. η をユニタリーなイデール類群指標として、$\mu = (\eta, \eta) \in \mathfrak{X}^M$ とする。任意の $\mathsf{f} \in \mathbf{H}_\mu^0$ に対して、

$$\mathrm{Res}_{s=1} \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g) = -\frac{\mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)}{\Delta_F^{1/2}\, \zeta_F(2)} \langle \mathsf{f}^{(1)}, \eta \circ \det \rangle_{\mathbf{K}}\, \mathrm{vol}_G^{1/2}\, \varphi_\eta(g), \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

Proof: 補題 63 より $\mathsf{f}^{(s)} = B(s)\, f_\Phi(\mu, s)$ となる $\Phi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ と $\mathrm{Re}(s) > -1$ でゼロを持たない整型関数 $B(s)$ が存在する。従って、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=1} \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g) &= B(1)\, \zeta_F(2)\, \mathrm{Res}_{s=1} E(\Phi, \mu, s; g) \\
&= -B(1)\, \mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)\, \eta(\det g))\, \hat{\Phi}(0) \qquad (\because \text{命題 } 61(2)) \\
&= -B(1)\, \mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)\, \eta(\det g)\, \Delta_F^{-1/2} \langle f_\Phi(\mu, 1), \eta \circ \det \rangle_{\mathbf{K}} \qquad (\because (5.7)) \\
&= -\frac{\mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)}{\Delta_F^{1/2}\, \zeta_F(2)} \langle \mathsf{f}^{(1)}, \eta \circ \det \rangle_{\mathbf{K}}\, \eta(\det g) \quad \square
\end{aligned}$$

系 50. η をユニタリーなイデール類群指標とすると、$\langle\, \varphi_\eta \,|\, f \,\rangle_G = 0\, (\forall f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}})$ である。

Proof: $f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ とする。命題 44 より $\langle\, \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -) \,|\, f \,\rangle_G = 0$ である。この式で $s = 1$ における留数を考える。f がジーゲル領域の上で急減少なことから積分と留数操作は可換であり、結論は命題 49 から従う。$\square$

4.4.6. スペクトル分解.

命題 51. $\mathcal{L}^2_{\rm cus}$, $\mathcal{L}^2_{\rm cont}$, $\mathcal{L}^2_{\rm res}$ は $G(\mathbb{A})$-不変な閉部分空間であって、直交直和分解

$$\mathcal{L}^2=\mathcal{L}^2_{\rm cus}\hat{\oplus}\mathcal{L}^2_{\rm cont}\hat{\oplus}\mathcal{L}^2_{\rm res} \tag{4.28}$$

が成立する。$f\in\mathcal{L}^2$ を直交分解 (4.28) に沿って $f={\rm P}_{\rm cus}(f)+{\rm P}_{\rm res}(f)+{\rm P}_{\rm cont}(f)$ と書くとき、

$$ {\rm P}_{\rm cus}(f)=\sum_{\pi\in\Pi_{\rm cus}(G)}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_\pi}\langle f\,|\,\phi\rangle_G\,\phi, \tag{4.29}$$

$$ {\rm P}_{\rm res}(f)=\sum_{\eta}\langle f\,|\,\varphi_\eta\rangle_G\,\varphi_\eta \tag{4.30}$$

であり、${\rm P}_{\rm cont}(f)$ は命題 48 で与えられる。ここで、$\Pi_{\rm cus}(G)$ はカスプ保型表現全体の集合であり、$\mathcal{B}_\pi$ は V_π の正規直交基底である（命題 40)。

Proof: 定義 29 から、$\mathcal{L}^2_{\rm res}=\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp$ を示せばよい。系 50 より $\mathcal{L}^2_{\rm cus}\perp\mathcal{L}_{\rm res}$、従って、$\mathcal{L}_{\rm res}\subset(\mathcal{L}^2_{\rm cus})^\perp=\bar{\Theta}$ となる。命題 30 から $\mathcal{L}^2_{\rm cont}\perp\mathcal{L}^2_{\rm res}$ である。これで、$\mathcal{L}^2_{\rm res}\subset\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp$ が分かった。逆の包含を示すため、任意に $f\in\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp$ をとり、$f_0=f-\sum_\eta\langle f\,|\,\varphi_\eta\rangle_G\,\varphi_\eta$ とおく。一方で、$\langle f_0\,|\,\varphi_\eta\rangle_G=0$ $(\forall\eta)$ は明らかであり、他方で、前半で示した包含より $f_0\in\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp$ となる。故に、${\rm T}(f_0)=0$ である。T の単射性から $f_0=0$ であるが、これは $f\in\mathcal{L}^2_{\rm res}$ を意味する。これで、$\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp\subset\mathcal{L}^2_{\rm res}$ が示された。□

系 52. Δ_F を $F/\mathbb{Q}$ の判別式、$\zeta_F(s)$ をガンマ因子で完備化した Dedekind ゼータ函数、$r_2=\sharp\Sigma_{\mathbb{C}}$ とすると、

$${\rm vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)=2\,\Delta_F^{1/2}\,\pi^{r_2}\,\zeta_F(2)\,{\rm vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)$$

Proof: T の等長性から、$f\in\bar{\Theta}$ に対して、

$$\|f\|^2_G=\frac{{\rm vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\|[{\rm S}(f)](y)\|^2_{\mathbf{K}}\,{\rm d}y+\frac{C}{2}\frac{{\rm vol}_G}{{\rm vol}_M}\sum_\eta\|{\rm P}_\eta(f)\|^2_G$$

である。命題 51 から $\mathcal{L}^2_{\rm res}\subset\bar{\Theta}$ だから、特に、$f=\varphi_\eta$ とることができて、$1=\frac{C}{2}\frac{{\rm vol}_G}{{\rm vol}_M}$ となる。${\rm vol}_M={\rm vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)^2$ であることと、命題 17(2) で与えられている C の値から結論が出る。□

注意：一般には、(4.29), (4.30), (4.27) は $\mathcal{L}^2$ のノルムの意味でしか収束していない。しかし、$\mathbf{K}$-有限かつ smooth な函数 f が、任意の $m\in\mathbb{N}$ および任意の $v\in\Sigma_\infty$ に対して $R(\Omega_v^m)f\in\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ $(\exists\epsilon>0)$（ただし、Ω_v は $G(F_v)$ のカシミール作用素）を満たせば、そのスペクトル展開

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\rm cus}(G)}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_\pi}\langle f\,|\,\phi\rangle_G\,\phi(g)+\sum_\eta\langle f\,|\,\varphi_\eta\rangle_G\,\varphi_\eta(g)+\frac{{\rm vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle f\,|\,\mathsf{E}(\mathsf{f}_n;iy)\rangle_G\,\mathsf{E}(\mathsf{f}_n;iy,g)\,{\rm d}y$$

における和と積分は、$g\in G(\mathbb{A})$ に関して広義一様絶対収束して、この表示は全ての g で函数の値 $f(g)$ に一致することが示せる。

4.5. **カスピダルデータ.** $\mathfrak{X}^M$ への群 $W_0=\{1,w_0\}$ の作用を ${}^{w_0}\mu=\check{\mu}$ で定義し、$\mu\in\mathfrak{X}^M$ の軌道を $[\mu]$ と書こう。従って、$\mu=(\mu_1,\mu_2)$ としたとき、$\mu_1\neq\mu_2$ ならば $[\mu]=\{\mu,\check{\mu}\}$ であり、$\mu_1=\mu_2$ ならば $[\mu]=\{\mu\}$ である。次のような形を持った対 χ を G のカスピダルデータとよび、その全体を $\mathfrak{X}^G$ と書く：

$$\chi=(G,\pi)\ (\pi\text{ はカスプ保型表現})\ \text{または}\ \chi=(P,[\mu])\ ([\mu]\in\mathfrak{X}^M/W_0)$$

$\chi\in\mathfrak{X}^G$ に対して、$\mathcal{L}^2$ の閉部分空間 $\mathcal{L}^2_\chi$ を次のように定義する。

- $\chi=(G,\pi)$ の場合、$\mathcal{L}^2_\chi=\mathcal{V}_\pi$（重複度 1 定理より、これは $\mathcal{L}^2_{\rm cus}$ における π-等型成分と等しい）

- $\chi = (P, [\mu])$ の場合、

$$\mathcal{L}^2_\chi = \text{Closure of } \{\theta_\phi |\, \phi \in \mathcal{D}_P(\mu) + \mathcal{D}_P(\check{\mu})\}$$

$\bar{\Theta} = \mathcal{L}^2_{\rm cont} \hat{\oplus} \mathcal{L}^2_{\rm res}$ が部分空間 $\mathcal{L}^2_{(P,[\mu])}$ ($[\mu] \in \mathfrak{X}^M/W_0$) の直交直和になることに注意すれば、命題 51 は次のように言い換えられる。

命題 53. *$\mathcal{L}^2$ は $G(\mathbb{A})$-不変閉部分空間 $\mathcal{L}^2_\chi$ ($\chi \in \mathfrak{X}^G$) の直和に分解される：*

$$\mathcal{L}^2 = \hat{\bigoplus}_{\chi \in \mathfrak{X}^G} \mathcal{L}^2_\chi$$

4.6. **中心指標付きの場合.** ユニタリー指標 $\omega : Z^+_\infty Z(F) \backslash Z(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^1$ に対して、

$$\mathcal{L}^2(G, \omega) = \{\phi \in \mathcal{L}^2 |\, \phi(zg) = \omega(z)\, \phi(g)\, (\forall\, z \in Z(\mathbb{A}))\, \}$$

と定義する。これは $G(\mathbb{A})$-不変閉部分空間であって、$\mathcal{L}^2$ は $\mathcal{L}^2(G,\omega)$ 全体の直和に分解される。$\mathcal{L}^2_{\rm cus}(G,\omega) = \mathcal{L}^2_{\rm cus} \cap \mathcal{L}^2(G,\omega)$, $\mathcal{L}^2_{\rm cont}(G,\omega) = \mathcal{L}^2_{\rm cont} \cap \mathcal{L}^2(G,\omega)$, $\mathcal{L}^2_{\rm res}(G,\omega) = \mathcal{L}^2_{\rm res} \cap \mathcal{L}^2(G,\omega)$ とおくと、命題 51 から容易に $\mathcal{L}^2(G,\omega)$ の分解が得られる：

$$\mathcal{L}^2(G,\omega) = \mathcal{L}^2_{\rm cus}(G,\omega) \hat{\oplus} \mathcal{L}^2_{\rm cont}(G,\omega) \hat{\oplus} \mathcal{L}^2_{\rm res}(G,\omega)$$

5. アイゼンシュタイン級数の基本性質

5.1. **局所絡作用素.** $v \in \Sigma$ とする。$\mathfrak{X}^M_v$ を $M(F_v) \cong F_v^\times \times F_v^\times$ のポントリャーギン双対群とする。$\mathfrak{X}^M_v$ は $F_v^\times$ のユニタリー指標の組 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ 全体からなる。$\mu \in \mathfrak{X}^M_v$, $s \in \mathbb{C}$ に対して、$\mathbf{H}^0_v(\mu, s)$ を主系列表現 $\mathrm{Ind}^{G(F_v)}_{P(F_v)}(\mu_1 |\,|_v^{s/2} \boxtimes \mu_2 |\,|_v^{-s/2})$ の $\mathbf{K}_v$-有限ベクトル全体の空間とすると、これは自然に Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F_v))$ 上の加群になる。$\mathcal{H}(G(F_v))$-不変な非退化 pairing $\langle\, ,\, \rangle_{\mathbf{K}_v} : \mathbf{H}^0_v(\mu, s) \times \mathbf{H}^0_v(\check{\mu}, -s) \to \mathbb{C}$ が次のように定義される：

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbf{K}_v} = \int_{\mathbf{K}_v} f_1(k)\, \bar{f}_2(k)\, \mathrm{d}k$$

$\mathsf{f}_v \in \mathbf{H}^0_v(\mu, 0)$ に対して、

$$\mathsf{f}_v^{(s)}(g_v) = \delta_P(g_v)^{s/2}\, \mathsf{f}_v(g_v), \qquad s \in \mathbb{C},\, g_v \in G(F_v)$$

として $\mathsf{f}_v^{(s)} \in \mathbf{H}^0_v(\mu, s)$ を定義する。

$F_v^2 = \{[x,y] |\, x,\, y \in F_v\, \}$ 上の Schwartz-Bruhat 函数全体の空間 $\mathcal{S}(F_v^2)$ には群 $G(F_v)$ が自然に作用する：

$$(g\Phi)([x,y]) = \Phi([x,y]g), \qquad \Phi \in \mathcal{S}(F_v^2),\, g \in G(F_v)$$

次で定義される函数は $\mathcal{S}(F_v^2)$ の $\mathbf{K}_v$-不変ベクトルであることが容易にわかる：

$$\Phi^0_v([x,y]) = \begin{cases} \exp(-\pi(|x|^2_{\mathbb{R}} + |y|^2_{\mathbb{R}})), & v \in \Sigma_{\mathbb{R}}, \\ \exp(-2\pi(|x|_{\mathbb{C}} + |y|_{\mathbb{C}})), & v \in \Sigma_{\mathbb{C}}, \\ \mathfrak{O}_v^2 \text{ の特性函数}, & v \in \Sigma_{\rm fin} \end{cases}$$

$\mathbf{K}_v$-有限函数全体のなす $\mathcal{S}(F_v^2)$ の部分空間を $\mathcal{S}_0(F_v^2)$ とする。$v \in \Sigma_{\rm fin}$ の場合は、$\mathcal{S}(F_v^2) = \mathcal{S}_0(F_v^2)$ であることに注意する。$G(F_v)$ の表現から $\mathcal{S}_0(F_v^2)$ には自然に $\mathcal{H}(G(F_v))$-加群構造が決まる。

$\Phi \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathfrak{X}^M_v$, $s \in \mathbb{C}$ ($\mathrm{Re}(s) > -1$) に対して、

$$(5.1) \qquad f_{\Phi,v}(\mu, s : g) = \frac{\mu_1 |\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L(\mu_1\mu_2^{-1} |\,|_v^{s+1})} \int_{F_v^\times} \Phi([0,t]g)\, (\mu_1\mu_2^{-1} |\,|_v^{s+1})(t)\, \mathrm{d}^\times t, \qquad g \in G(F_v)$$

と定義する。擬指標 $\eta : F_v^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して、$Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta) : \mathcal{S}(F_v) \to \mathbb{C}$ を Tate の局所ゼータ distribution

$$Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta;\varphi) = \int_{F_v^\times} \eta(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}^\times t, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(F_v)$$

とすれば、

$$f_{\Phi,v}(\mu, s : g)\,\mu_1|\;|_v^{(s+1)/2}(\det g^{-1}) = \frac{Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_1\mu_2^{-1}|\;|_v^{s+1};\Phi([0,\bullet]g)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\;|_v^{s+1})} \tag{5.2}$$

と書ける。ただし、擬指標 $\eta : F_v^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して、$L_v(\eta)$ を局所 L 因子、$\epsilon_v(\eta, \psi_{F,v})$ を局所 ϵ-因子とする。$Z_v^{\mathrm{GL}(1)}$ に関して必要な結果を引用しておく：

命題 54. η をユニタリー指標とする。

(1) $\mathrm{Re}(s) > 0$ ならば、任意の $\varphi \in \mathcal{S}(F_v)$ について積分 $Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta|\;|_v^s;\varphi)$ は絶対収束して s の整型函数を定める。

(2) $\varphi \in \mathcal{S}(F_v)$ に対して、$Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta|\;|_v^s;\varphi)/L_v(\eta|\;|_v^s)$ は $s \in \mathbb{C}$ の整型函数に延長されて次の「局所函数等式」を満たす：

$$\frac{Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta^{-1}|\;|_v^{1-s};\hat{\varphi})}{L_v(\eta^{-1}|\;|_v^{1-s})} = \epsilon_v(\eta|\;|_v^s, \psi_{F,v})\,\frac{Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta|\;|_v^s;\varphi)}{L_v(\eta|\;|_v^s)}$$

ただし、$\hat{\varphi}(t) = \int_{F_v} \varphi(u)\,\psi_{F,v}(tu)\,\mathrm{d}u$ はフーリエ変換である。また、$L_v(\eta|\;|_v^s)$, $\epsilon_v(\eta|\;|_v^s;\psi_{F,v})$ はそれぞれ擬指標 $\eta|\;|_v^s$ に対する局所 L-因子および局所 ϵ-因子である。

Proof : [37], [35] を参照せよ。$\square$

命題 55. (1) $f_{\Phi,v}(\mu, s; g)$ は変数 $g \in G(F_v)$ および s ($\mathrm{Re}(s) > -1$) に関して広義一様に絶対収束して $\mathbf{H}_v^0(\mu, s)$ の要素を決める。

(2) $g \in G(F_v)$ を固定するとき、$s \mapsto f_{\Phi,v}(\mu, s; g)$ ($\mathrm{Re}(s) > -1$) は $\mathbb{C}$ 上の整型函数に延長される。

(3) μ が不分岐 (i.e., μ_1, μ_2 が $\mathfrak{O}_v^\times$ 上で自明）とすると、$\mathrm{Re}(s) > -1$ なる任意の $s \in \mathbb{C}$ について

$$f_{\Phi_v^0,v}(\mu, s; g_v) = 1, \qquad g_v \in \mathbf{K}_v$$

(4) $\Phi \mapsto f_{\Phi,v}(\mu, s; -)$ は $\mathcal{H}(G(F_v))$-絡作用素 $\mathcal{S}_0(F_v^2) \longrightarrow \mathbf{H}_v^0(\mu, s)$ を定義する。$\mathrm{Re}(s) > -1$ の範囲で、$\mathcal{H}(G(F_v))$-絡作用素 $\mathcal{S}_0(F_v^2) \longrightarrow \mathbf{H}_v^0(\mu, s)$ は全射である。

$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば、任意の $\mathsf{f}_v \in \mathbf{H}_v^0(\mu_v, 0)$ に対して、$\Phi \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$ が存在して、

$$f_{\Phi,v}(\mu, s; g_v) = \frac{1}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\;|_v^{s+1})}\,\mathsf{f}_v^{(s)}(g_v), \qquad g_v \in G(F_v), \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

となる。$v \in \Sigma_\infty$ ならば、$\mathbf{K}_v$ の任意の既約表現 τ と任意の $\mathsf{f}_v \in \mathbf{H}_v^0(\mu_v, 0)[\tau]$ に対して、$\Phi \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$ および τ のみに依存し $\mathrm{Re}(s) > -1$ で零点を持たない多項式 $P_\tau(s)$ が存在して、

$$f_{\Phi,v}(\mu, s; g_v) = P_\tau(s)\,\mathsf{f}_v^{(s)}(g_v), \qquad g_v \in G(F_v), \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

となる。

Proof : コンパクト集合 $\mathcal{U} \subset G(F_v)$ に依存して、ある Schwrtz-Bruhat 函数 $\varphi \in \mathcal{S}(F_v)$ が存在して、

$$|\Phi([0,t]g)| \ll \varphi(t), \qquad t \in F_v,\ g \in \mathcal{U}$$

となることが容易に分かる。(1) は $\sigma>0$ に対して $\int_0^{+\infty}\varphi(t)|t|_v^{\sigma+1}\,\mathrm{d}^\times t<+\infty$ であることより従う。

(2) は 公式 (5.2) および命題 54(2) から従う。

$v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して、主張 (3), (4) の証明は [25, 命題 3.10, 3.11] を参照。以下 $v\in\Sigma_{\mathbb{R}}$ とする。$\mu_1\mu_2^{-1}(t)=\mathrm{sgn}(t)^\epsilon$ ($\epsilon\in\{0,1\}$ とかける。$L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\ |_v^s)=\pi^{-(s+\epsilon)/2}\Gamma((s+\epsilon)/2)$ である。各 $m\in 2\mathbb{Z}+\epsilon$ に対して、$\mathsf{f}_m(k_\theta)=e^{m\pi i\theta}$ ($\forall k_\theta=\left[\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right]\in\mathrm{SO}(2)$) となる函数 $\mathsf{f}_m\in\mathbf{H}_v^0(\mu_v,0)$ がただ一つに決まり、$\{\mathsf{f}_m|\,m\in 2\mathbb{Z}+\epsilon\}$ が $\mathbf{H}_v^0(\mu_v,0)$ の基底になる。$\Phi_m([x,y])=(ix+y)^m\exp(-\pi(x^2+y^2))$ と定義すると、

$$f_{\Phi_m}(\mu,s;k_\theta)=\frac{1}{\pi^{-(s+\epsilon+1)/2}\Gamma((s+\epsilon+1)/2)}\int_{\mathbb{R}^\times}e^{mi\theta}\exp(-\pi t^2)\,|t|^{s+1}\,t^m\,\mathrm{sgn}(t)^\epsilon\,\mathrm{d}^\times t$$
$$=2\frac{\pi^{-(s+m+1)/2}\,\Gamma((s+m+1)/2)}{\pi^{-(s+\epsilon+1)/2}\Gamma((s+\epsilon+1)/2)}\,\mathsf{f}_m(k_\theta)$$

よって、$P_m(s)=2\pi^{-(m-\epsilon)/2}\prod_{j=0}^{[(m-\epsilon)/2]-1}\left(\frac{s+\epsilon+1}{2}+j\right)$ とおけば $P_m(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>-1$ で零点を持たず、$f_{\Phi_m}(\mu,s)=P_m(s)\,\mathsf{f}_m$ となる。$v\in\Sigma_{\mathbb{C}}$ のときも同様の議論で示される。$\square$

$\Phi\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$ のフーリエ変換 $\hat{\Phi}\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$ は

$$\hat{\Phi}(Y)=\int_{F_v^2}\Phi(X)\,\psi_{F,v}(X\,{}^tY)\,\mathrm{d}Y,\quad Y\in F_v^2$$

で定義される。

$\mu\in\mathfrak{X}_v^M$, $s\in\mathbb{C}$ ($\mathrm{Re}(s)>0$) とする。函数 $f\in\mathbf{H}_v^0(\mu,s)$ に対して、積分

$$[M_v(s)f]\,(g)=\int_{F_v}f\left(w_0\left[\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]g\right)\,\mathrm{d}x,\qquad g\in G(F_v)\tag{5.3}$$

を考える。

命題 56. (1) $\mathrm{Re}(s)>0$ とする。(5.3) は $g\in G(F_v)$ に関して広義一様絶対収束して $\mathbf{H}_v^0(\check{\mu},-s)$ に属する函数を定める。対応 $f\mapsto M_v(s)f$ は絡作用素

$$M_v(s):\mathbf{H}_v^0(\mu,s)\longrightarrow\mathbf{H}_v^0(\check{\mu},-s)$$

を定める。

(2) $\Phi\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$, $g\in G(F_v)$ に対して、

$$\varphi_{\Phi,g}(t)=\int_{F_v}\Phi([x,t]w_0g)\,\mathrm{d}x,\qquad t\in F_v$$

とおくと $\varphi_{\Phi,g}\in\mathcal{S}(F_v)$ であり、

$$[M_v(s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g)=\frac{\mu_1|\ |_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\ |_v^{s+1})}\,Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_1\mu_2^{-1}|\ |_v^s;\varphi_{\Phi,g}),\quad\mathrm{Re}(s)>0$$

(3) $\Phi\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$ とする。$s\mapsto M_v(s)\Phi$ ($\mathrm{Re}(s)>0$) は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続されて、

$$[M_v(s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g)=\epsilon_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\ |_v^s,\psi_{F,v})^{-1}\frac{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\ |_v^s)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\ |_v^{s+1})}\,f_{\hat{\Phi},v}(\check{\mu},-s;gw_0)\tag{5.4}$$

Proof : (2) は次の計算によって示される。

$$\begin{aligned}
[M_v(s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g) &= \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\int_F \left\{\int_{F_v^\times} \Phi([0,t]w_0\left[\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right]g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\int_F \left\{\int_{F_v^\times} \Phi([-tx,t]w_0 g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\int_F \left\{\int_{F_v^\times} \Phi([x,t]w_0 g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s})(t)\,\mathrm{d}^\times t\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\,Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s};\varphi_{\Phi,g})
\end{aligned}$$

(1) の証明およびこの計算の正当化には、$\mathcal{U}\subset G(F_v)$ を任意のコンパクト集合とるとき、$\mathrm{Re}(s)>0$ において

$$\sup_{g\in\mathcal{U}}\int_{x\in F_v}\int_{t\in F_v^\times}|\Phi([x,t]w_0g)|\,|t|_v^{\mathrm{Re}(s)}\,\mathrm{d}^\times t\,\mathrm{d}x<+\infty$$

を示せばよい。正値の $\Psi\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$ が存在して、

$$|\Phi([x,t]w_0g)|\ll\Psi(x,t),\qquad g\in\mathcal{U},\,(x,t)\in F_v^2$$

が成り立つ。よって、上の積分は $g\in\mathcal{U}$ に関して一様に

$$\int_{F_v^2}\Psi(x,t)\,|t|_v^{\mathrm{Re}(s)-1}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

で上から押さえられる。この積分は $\mathrm{Re}(s)>0$ ならば有限である。

(3) 命題 54 と (2) から、(3) の最初の主張が従う。局所函数等式より

$$\begin{aligned}
[M_v(s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g) =&\frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\,\epsilon_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s},\psi_{F,v})^{-1}\,\frac{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s})}{L_v(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})} \\
&\times Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1};\hat{\varphi}_{\Phi,g})
\end{aligned}$$

であり、更に、$\mathrm{Re}(s)<1$ のとき、

$$\begin{aligned}
&Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1};\hat{\varphi}_{\Phi,g}) \\
&=\int_{t\in F_v^\times}\hat{\varphi}_{\Phi,g}(t)\,(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t \\
&=\int_{t\in F_v^\times}\left\{\int_{y\in F_v}\varphi_{\Phi,g}(y)\,\psi_{F,v}(yt)\,\mathrm{d}y\right\}(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t \\
&=\int_{t\in F_v^\times}\left\{\int_{y\in F_v}\int_{x\in F_v}\Phi([x,y]w_0g)\,\psi_{F,v}(yt)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t \\
&=\int_{t\in F_v^\times}|\det g|_v^{-1}\,\hat{\Phi}([0,t]^t(w_0g)^{-1})\,(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t \\
&=|\det g|_v^{-1}\int_{t\in F_v^\times}\hat{\Phi}([0,t](\det g)^{-1}gw_0)\,(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\qquad(\because\ w_0^{-1}gw_0=(\det g)\,{}^tg^{-1}) \\
&=(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s})(\det g)\int_{t\in F_v^\times}\hat{\Phi}([0,t]gw_0)\,(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t \\
&=(\mu_1^{-1}|\,|_v^{-(s+1)/2})(\det g)\,L_v(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})\,f_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s;gw_0)
\end{aligned}$$

なので (5.4) が従う。$\square$

定義 57. 正規化された $G(F_v)$-絡作用素 $R_v(\mu,s):\mathbf{H}_v^0(\mu,s)\longrightarrow \mathbf{H}_v^0(\check{\mu},-s)$ を

$$R_v(\mu,s)=\epsilon_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^s,\psi_{F,v})\frac{L_v(\mu_1\mu_2|\,|_v^{s+1})}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^s)}\,M_v(s)$$

で定義する。

系 58. $\Phi\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$, $g\in G(F_v)$ に対して、$s\mapsto[R_v(\mu,s)f_{\Phi,v}(\mu,s)](g)$ は $\mathbb{C}$ 上整型である。また、$v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ かつ μ, $\psi_{F,v}$ が不分岐ならば、$\mathsf{f}_v^\circ(\mu,s)|\mathbf{K}_v=1$ なる $\mathbf{K}_v$-不変函数 $f_v^\circ(\mu,s)\in\mathbf{H}^0(\mu,s)$ に対して、

$$R_v(\mu,s)\mathsf{f}_v^\circ(\mu,s)=\mathsf{f}_v^\circ(\check{\mu},-s)$$

Proof: 命題 56 および命題 55(2) より従う。$\square$

補題 59. η を $F_v^\times$ のユニタリー指標として、$\mu=(\eta,\eta)\in\mathfrak{X}_v^M$ とおく。$f\in\mathbf{H}^0(\mu,1)$, $g\in G(F_v)$ に対して、

$$R_v(\mu,1)f=C_v\,\langle f,\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}_v}\,\eta(\det g) \tag{5.5}$$

ただし、

$$C_v=\begin{cases}q_v^{-d_v} & (v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}),\\ 1 & (v\in\Sigma_{\mathbb{R}}),\\ \pi^{-1} & (v\in\Sigma_{\mathbb{C}})\end{cases}$$

Proof: 命題 55 (4) より $f=f_\Phi(\mu,1)$ $(\Phi\in\mathcal{S}_0(F_v^2))$ として示せばよい。$\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})$ が $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば $q_v^{-d_v/2}$ であり、$v\in\Sigma_\infty$ ならば 1 であることに注意すると、(5.5) は次の２式から従う。

$$[R_v(\mu,1)f_\Phi(\mu,1)]\,(g)=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\hat{\Phi}(0)\,\eta(\det g), \tag{5.6}$$

$$\langle f_\Phi(\mu,1),\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}_v}=\hat{\Phi}(0)\times\begin{cases}q_v^{d_v/2} & (v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}),\\ 1 & (v\in\Sigma_{\mathbb{R}}),\\ \pi & (v\in\Sigma_{\mathbb{C}})\end{cases} \tag{5.7}$$

(5.6) の証明：

$$\begin{aligned}
&[R_v(\mu,1)f_\Phi(\mu,1)](g)\\
&=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\frac{\zeta_{F,v}(2)}{\zeta_{F,v}(1)}\cdot\frac{\eta(\det g)|\det g|_v}{\zeta_{F,v}(2)}\,Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(|\,|_v;\varphi_{\Phi,g})\\
&=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\frac{\eta(\det g)|\det g|_v}{\zeta_{F,v}(1)}\int_{F_v^\times}\left\{\int_{F_v}\Phi([x,t]w_0g)\,\mathrm{d}x\right\}|t|_v\,\mathrm{d}^\times t\\
&=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\eta(\det g)|\det g|_v\int_{F_v^2}\Phi([x,t]w_0g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\qquad(\because\ \mathrm{d}^\times t=\zeta_{F,v}(1)\,\frac{\mathrm{d}t}{|t|_v})\\
&=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\eta(\det g)\hat{\Phi}(0)
\end{aligned}$$

(5.7) の証明： $F_v^2-\{(0,0)\}$ は $G(F_v)$ の軌道になっており、対応 $g\mapsto[0,1]g$ によって $N(F_v)T(F_v)\backslash G(F_v)\cong F_v^2-\{(0,0)\}$ である。任意の $X\in F_v^2-\{(0,0)\}$ は $X=[0,t]k\,(t\in F_v^\times,\,k\in\mathbf{K}_v)$ と表せる。このとき、F_v^2 のハール測度 $\mathrm{d}X$ と $F_v\times\mathbf{K}_v$ 上の積測度 $|t|_v^2\mathrm{d}^\times\mathrm{d}k$ は比例する：

$$c_v\,\mathrm{d}X=|t|_v^2\,\mathrm{d}^\times t\,\mathrm{d}k$$

ここで、比例定数 $c_v>0$ はこれら 2 つの測度による函数 Φ_v^0 の積分を比較することで決められる。実際、$v\in\Sigma_{\rm fin}$ の場合

$$\int_{F_v^2}\Phi_v^0(X)\,\mathrm{d}X=\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v^2)=q_v^{-d_v},$$

$$\begin{aligned}\int_{F_v^\times}\int_{\mathbf{K}_v}\Phi_v^0([0,t]k)\,|t|_v^2\mathrm{d}^\times t\,\mathrm{d}k&=\mathrm{vol}(\mathbf{K}_v)\int_{\mathfrak{O}_v}|t|_v^2\mathrm{d}^\times t\\&=\zeta_{F,v}(2)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v^\times)=\zeta_{F,v}(2)\,q_v^{-d_v/2}\end{aligned}$$

より、$c_v=\zeta_{F,v}(2)\,q_v^{d_v/2}$ を得る。$v\in\Sigma_{\mathbb{R}}$ のとき $c_v=\zeta_{F,v}(2)$, $v\in\Sigma_{\mathbb{C}}$ のとき $c_v=\zeta_{F,v}(2)\,\pi$ も同様にしめせる。さて、

$$\begin{aligned}\langle f_\Phi(\mu,1),\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}_v}&=\frac{1}{\zeta_{F,v}(2)}\int_{\mathbf{K}_v}\int_{F_v^\times}\Phi([0,t]k)\,|t|_v^2\mathrm{d}^\times t\,\mathrm{d}k\\&=\frac{c_v}{\zeta_{F,v}(2)}\int_{F_v^2}\Phi(X)\,\mathrm{d}X=\frac{c_v}{\zeta_{F,v}(2)}\hat{\Phi}(0)\end{aligned}$$

だから、(5.7) が従う。$\square$

5.2. **アイゼンシュタイン級数と大域絡作用素.** $\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ を次の形をもつ函数の有限線型結合全体とする：

$$\Phi(g)=\prod_v\Phi_v(g_v),\qquad g\in G(\mathbb{A})$$

$$(\Phi_v\in\mathcal{S}_0(F_v^2)\text{ で有限個の素点以外では }\Phi_v=\Phi_v^\circ)$$

$\Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\mathfrak{X}^M$, $s\in\mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$ に対して、

$$f_\Phi(\mu,s;g)=\frac{\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2}(\det g)}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\int_{\mathbb{A}^\times}\Phi([0,t]g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t,\qquad g\in G(\mathbb{A})\tag{5.8}$$

とおく。(ユニタリーな) イデール類群指標 $\eta=\otimes_v\eta_v$ に対して、$L(s,\eta)=\prod_v L_v(\eta_v|\,|_v^s)$ は（完備化された）Hecke L 函数である。

命題 60. (1) $\mathrm{Re}(s)>0$ とする。変数 $g\in G(\mathbb{A})$ に関して積分 (5.8) は広義一様絶対収束して $\mathbf{H}^0(\mu,s)$ の要素を定める。対応 $\Phi\mapsto f_\Phi(\mu,s)$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素 $\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)\to\mathbf{H}^0(\mu,s)$ を与える。

(2) 各 $g\in G(\mathbb{A})$ に対して、$s\mapsto f_\Phi(\mu,s;g)$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$ は $\mathbb{C}$ 上の整型函数に延長される。

Proof : $\mathcal{U}\subset G(\mathbb{A})$ をコンパクト集合とすると、ある非負値 $\Psi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ が存在して、

$$|\Phi(gh)|\ll_{\mathcal{U}}\Psi(g),\qquad g\in G(\mathbb{A}),\,h\in\mathcal{U}$$

となる。しかも、$\Psi=\prod_v\Psi_v$, $(\Psi_v\in\mathcal{S}_0(F_v^2))$ の形であるとしてよい。ただし、ある有限集合 $S\subset\Sigma$ の外で $\Psi_v=\Phi_v^\circ$ である。S を十分大きくとって $v\notin S$ のとき, μ_v, $\psi_{F,v}$ が不分岐になるようにすると、

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}^\times}|\Psi([0,t])|\,|t|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times t&=\prod_v\int_{F_v^\times}|\Psi_v([0,t])|\,|t|_v^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times t\\&=\{\prod_{v\in S}\int_{F_v^\times}|\Psi_v([0,t])|\,|t|_v^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times t\}\,\{\prod_{v\notin S}(1-q_v^{-(\mathrm{Re}(s)+1)})^{-1}\}\end{aligned}$$

右辺の第一因子は $\mathrm{Re}(s)>-1$ の範囲で収束する（命題 56 (1))。第二因子のオイラー積の収束条件は $\mathrm{Re}(s)>0$ である。よって、(1) が従う。

(2) $\Phi=\prod_v \Phi_v$ の形であるとする。命題 56 (3) より、$g\in G(\mathbb{A})$ に応じて S を十分広くとれば $f_{\Phi_v,v}(\mu_v,s;g_v)=1$ $(\forall v\not\in S)$ となる。よって、

$$f_\Phi(\mu,s;g)=\prod_{v\in S} f_{\Phi_v,v}(\mu_v,s;g_v),\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

右辺は有限積なので、主張は命題 56 (2) から従う。□

$f_\Phi(\mu,s)\in \mathbf{H}^0(\mu,s)$ 対してアイゼンシュタイン級数

$$E(\Phi,\mu,s;g)=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} f_\Phi(\mu,s;\gamma g),\qquad g\in G(\mathbb{A}) \tag{5.9}$$

を考察する。

$$E^*(\Phi,\mu,s;g)=L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})\,E(\Phi,\mu,s;g)$$

とおく。また、$\Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ のフーリエ変換を

$$\hat{\Phi}(X)=\int_{\mathbb{A}^2}\Phi(Y)\psi_F(X^tY)\,\mathrm{d}Y,\qquad Y\in\mathbb{A}^2$$

で定義する

命題 61. (1) $\mathrm{Re}(s)>1$ のとき、級数 (5.9) は (s,g) に関して広義一様絶対収束する。

(2) $s\mapsto E^*(\Phi,\mu,s;g)$ $(\mathrm{Re}(s)>1)$ は全複素平面に有理型に解析接続されて、$s=\pm1$ において単純な極がある可能性を除いては整型である。

$$\mathrm{Res}_{s=1}E^*(\Phi,\mu,s;g)=-\delta_{\mu_1,\mu_2}\,\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\,\mu_1(\det g)\,\hat{\Phi}(0)$$

(3) $s\neq\pm1$ に対して $E^*(\Phi,\mu,s;-)\in\mathcal{A}_G$ である。

(4) 函数等式 $E^*(\Phi,\mu,s;g)=E^*(\hat{\Phi};\check{\mu},-s;gw_0)$ が成立する。

Proof: (1) まず、形式的に積分変形を行う：

(5.10)

$$\begin{aligned}
E^*(\Phi,\mu,s;g)&=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det\gamma g)\int_{\mathbb{A}^\times}\Phi([0,t]\gamma g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\sum_{\xi\in F^\times}\Phi([0,t\xi]\gamma g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\left\{\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\sum_{\xi\in F^\times}\Phi([0,t\xi]\gamma g)\right\}(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\Theta(\Phi;g,t)(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t
\end{aligned}$$

ここで、

$$\Theta(\Phi;g,t)=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\sum_{\xi\in F^\times}\Phi([0,t\xi]\gamma g)=\sum_{X\in F^2-\{(0,0)\}}\Phi(Xgt)$$

とおいた。よって、$\mathcal{U}\subset G(\mathbb{A})$ を任意のコンパクト集合、$c\,(>[F:\mathbb{Q}])$ を任意定数とするとき、

$$\sup_{g\in\mathcal{U}}\Theta\left(|\Phi|;\left[\begin{smallmatrix} r&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]g,t\right)\ll_c \sup(r^{2c},r^{-2c-1})\,\inf(|t|_{\mathbb{A}}^{-2c},|t|_{\mathbb{A}}^{-2}),\quad r\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ t\in\mathbb{A}^\times, \tag{5.11}$$

$$\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\Theta\left(|\Phi|;g,t\right)\,|t|_{\mathbb{A}}^{(\sigma+1)}\,\mathrm{d}^\times t<+\infty\qquad g\in\mathcal{U}\quad \text{if } \sigma>1 \tag{5.12}$$

であることを示せば、(5.10) における変形の正当化と同時に級数 (5.9) の絶対収束性も証明される。Φ は分解可能、即ち $\Phi=\prod_v \Phi_v$ の形であるとしてよい。ここで、, $\Phi_v\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$ であり、有限個の例外を除いては $\Phi_v=\Phi_v^0$ である。直積分解 $G(\mathbb{A})=G(F_\infty)\,G(\mathbb{A}_{\rm fin})$ に応じて $\mathcal{U}=\mathcal{U}_\infty\mathcal{U}_{\rm fin}$ と分解しているとしてもよい。すると、$\Phi,\mathcal{U}_{\rm fin}$ のみに依存したある $\mathfrak{O}_F$-格子 $L\subset F_\infty^2$ が存在して、任意の $c>0$ に対して

$$|\Phi\,(Xm_\infty g)\,|\ll_{\mathcal{U},c}(1+\|Xm_\infty\|^2)^{-c}\,\delta_L(X),\qquad X\in F^2,\,g\in\mathcal{U},\,m_\infty\in M(F_\infty)$$

なる評価がある。ただし, $\|X\|$ は F_∞^2 上の適当なユークリッドノルムである。$\delta_L(X)\in\{0,1\}$ は $X\in L$ のときに限り 1 を表すとする。$c>[F:\mathbb{Q}]$ としておくことで $\sum_{X\in L}(1+\|X\|^2)^{-c}<+\infty$ となって、$a\in(\mathbb{R}^\times)^0$ に関する遠方評価

(5.13)

$$\Theta(|\Phi|;\left[\begin{smallmatrix} r&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]g,a)\ll_{\mathcal{U},c}\sum_{X\in L-\{(0,0)\}}\left(1+\|X\left[\begin{smallmatrix} r&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]a\|^2\right)^{-c}\ll(1+r^2)^c\,a^{-2c},\quad a>1,\,r\in(\mathbb{R}^\times)^0,\,g\in\mathcal{U}$$

が従う。Poisson 和公式から

$$\sum_{X\in F^2}\Phi(Xgt)=|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}|t|_{\mathbb{A}}^{-2}\sum_{X\in F^2}\hat{\Phi}(X^tg^{-1}t^{-1}),\qquad \Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2),\,t\in\mathbb{A}^\times,\,g\in G(\mathbb{A})^1$$

これは、

$$\Theta(\Phi;g,t)=|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}|t|_{\mathbb{A}}^{-2}\,\Theta(\hat{\Phi};{}^tg^{-1},t^{-1})-\Phi(0)+|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}|t|_{\mathbb{A}}^{-2}\,\hat{\Phi}(0)\tag{5.14}$$

とかけるので、(5.13) とあわせると、a に関する微小評価

$$\Theta\,(|\Phi|;\left[\begin{smallmatrix} r&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]g,a)\ll(1+r^{-2})^cr^{-1}a^{-2},\qquad a\in(0,1],\,r\in(\mathbb{R}^\times)^0,\,g\in\mathcal{U}\tag{5.15}$$

がわかる。(5.13), (5.15) より (5.11) が従う。

$\mathbb{A}^1/F^\times$ はコンパクトなことに注意すると、(5.11) より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\Theta\,(|\Phi|;g,t)\,|t|_{\mathbb{A}}^{\sigma+1}\,\mathrm{d}^\times t&=\int_0^{+\infty}\int_{u\in\mathbb{A}^1/F^\times}\Theta\,(|\Phi|;\left[\begin{smallmatrix} u&0\\0&u\end{smallmatrix}\right]g,a)\ a^{\sigma+1}\,\mathrm{d}^\times a\\&\ll_{\mathcal{U},c}\int_0^1 a^{\sigma-1}\,\mathrm{d}^\times a+\int_1^{+\infty}a^{\sigma+1-2c}\,\mathrm{d}^\times a\end{aligned}$$

右辺最初の積分は $\sigma>1$ ならば収束、２番目の積分は $c>(\sigma+1)/2$ ならば収束する。これで (5.12) が示せた。(1) の証明おわり。

$\mathrm{Re}(s)>1$ において成立する (5.10) の最後の積分表示において、積分域を $|t|_{\mathbb{A}}\geqslant 1$, $|t|_{\mathbb{A}}\leqslant 1$ の２つに分割し、$|t|_{\mathbb{A}}\leqslant 1$ 上の積分では公式 (5.14) を代入することで、

$$E^*(\Phi,\mu,s;g)=(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\,\{J_0(\Phi,\mu,s;g)+J_1(\Phi,\mu,s;g)\}$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned}J_0(\Phi,\mu,s;g)=&\int_{a\in(0,1]}\int_{u\in\mathbb{A}^1/F^\times}\{|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}a^{-2}\,\Theta(\hat{\Phi};{}^tg^{-1},u^{-1}a^{-1})\\&\qquad-\Phi(0)+|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\,a^{-2}\,\hat{\Phi}(0)\}(\mu_1\mu_2^{-1})(u)\,\mathrm{d}^1u\,a^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times a\\J_1(\Phi,\mu,s;g)=&\int_{[1,+\infty)}\left\{\int_{u\in\mathbb{A}^1/F^\times}\Theta\,(\Phi;g,ua)\ (\mu_1\mu_2^{-1})(u)\,\mathrm{d}^1u\right\}\,a^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times a\end{aligned}$$

とおいた。評価 (5.11) から積分 $J_1(\Phi,\mu,s;g)$ は任意の s で絶対収束して $\mathbb{C}$ 上の整型函数を定める。$\mathrm{Re}(s)>1$ において $J_0(\Phi,\mu,s;g)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} J_0(\Phi,\mu,s;g) &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\int_{a\in[1,+\infty)}\left\{\int_{u\in\mathbb{A}^1/F^\times}\Theta(\hat{\Phi};{}^tg^{-1},u^{-1}a)\,(\mu_1\mu_2^{-1})(u)\mathrm{d}^1u\right\}a^{-\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times a \\ &\quad+\delta_{\mu_1,\mu_2}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\left(\frac{\Phi(0)}{s+1}-|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\frac{\hat{\Phi}(0)}{s-1}\right) \\ &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}J_1(\hat{\Phi},\mu^{-1},-s;{}^tg^{-1})+\delta_{\mu_1,\mu_2}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\left(\frac{\Phi(0)}{s+1}-|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\frac{\hat{\Phi}(0)}{s-1}\right)\end{aligned}$$

この式により、$J_0(\Phi,\mu,s;g)$ は全平面に有理型に解析接続されて、可能な極は $s=\pm1$ であることも分かる。さて、

$$\begin{aligned}(5.16)\quad & E^*(\Phi,\mu,s;g) \\ &= (\mu_1|\,|^{(s+1)/2})(\det g)\,J_1(\Phi,\mu,s;g)+(\mu_1^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{(-s+1)/2})(\det{}^tg^{-1})\,J_1(\hat{\Phi},\mu^{-1},-s;{}^tg^{-1}) \\ &\quad+\delta_{\mu_1,\mu_2}\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\left((\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\frac{\Phi(0)}{s+1}+(\mu_1^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{(-s+1)/2}(\det{}^tg^{-1})\frac{\hat{\Phi}(0)}{1-s}\right)\end{aligned}$$

これより、$E^*(\Phi,\mu,s;g)=E^*(\hat{\Phi},\mu^{-1};{}^tg^{-1})$ を得る。$f(\Phi,\mu^{-1},s;{}^tg^{-1})=f(\Phi,\check{\mu},s;w_0^{-1}gw_0)$ は容易に分かる。これより、$E^*(\hat{\Phi},\mu^{-1};{}^tg^{-1})=E^*(\hat{\Phi},\check{\mu},-s;w_0^{-1}gw_0)$ となる。

(3) を示そう。(5.11) から、コンパクト集合 $\mathcal{U}\subset G(\mathbb{A})$ と $s\in\mathbb{C}$ に応じてある定数 $C>0$ が存在して、

$$J_1\left(\Phi,\mu,s;\left[\begin{smallmatrix}r&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]g\right)\ll r^C,\qquad J_1\left(\hat{\Phi},\check{\mu},-s;\left[\begin{smallmatrix}r^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]{}^tg^{-1}\right)\ll r^C,\qquad r>1,\ g\in\mathcal{U}$$

となる。これと、(5.16) より、ある定数 C_1 があって

$$\left|E^*\left(\Phi,\mu,s;\left[\begin{smallmatrix}r&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]g\right)\right|\ll r^{C_1},\qquad g\in\mathcal{U}$$

なる評価を得る。これより、$E^*(\Phi,\mu,s;g)$ は $\mathfrak{S}$ 上緩増大であることが従う。保型形式になるための他の条件は容易に確かめられる。□

命題 62. 絡作用素 $M(s):\mathbf{H}^0(\mu,s)\longrightarrow\mathbf{H}^0(\check{\mu},-s)$ $(\mathrm{Re}(s)>1)$ の $\Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ に付随する切断 $f_\Phi(\mu,s)\in\mathbf{H}^0(\mu,s)$ への作用は

$$[M(s)f_\Phi(\mu,s)](g)=\frac{L(-s+1,\mu_2\mu_1^{-1})}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}f_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s;gw_0),\qquad \mathrm{Re}(s)>1$$

で与えられる。$g\in G(\mathbb{A})$ を固定するとき、函数 $s\mapsto[M(s)f_\Phi(\mu,s)](g)$ は全平面に有理型に解析接続される。

Proof: $f_\Phi^*(\mu,s;-)=L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})\,f_\Phi(\mu,s;-)$ とおく。命題 6 より、$\mathrm{Re}(s)>1$ において

$$(5.17)\qquad [M(s)f_\Phi^*(\mu,s)](g)=-f_\Phi^*(\mu,s;g)+\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}E^*(\Phi,\mu,s;ng)\,\mathrm{d}n$$

が成立する。$E^*(\Phi,\mu,s;g)$ の有理型性と命題 60 (2) により、左辺は s の函数として全平面に有理型に延長される。$[M(s)f_\Phi(\mu,s)](g)=L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})^{-1}[M(s)f_\Phi^*(\mu,s)](g)$ なので、Hecke L 函数の有理型性より命題の最後の主張を得る。函数等式 $E^*(\Phi,\mu,s;g)=E(\hat{\Phi},\check{\mu},-s;gw_0)$ の定数項を考えると、

$$f_\Phi^*(\mu,s;g)+[M(s)f_\Phi^*(\mu,s)](g)=f_{\hat{\Phi}}^*(\check{\mu},-s;gw_0)+[M(-s)f_{\hat{\Phi}}^*(\check{\mu},-s)](gw_0)$$

を得る。両辺の $\mathbf{H}^0(\check{\mu},-s)$ への射影を考えれば

$$[M(s)f^*_{\Phi}(\mu,s)](g)=f^*_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s;gw_0)$$

となり命題の最初の主張が従う。$\square$

$\mathbf{K}_\infty$ の既約表現 τ に対して、

$$\mathbf{H}^0_\mu[\tau]=\{\mathsf{f}\in\mathbf{H}^0_\mu|\,\langle R(\mathbf{K}_\infty)\mathsf{f}\rangle_{\mathbb{C}}\text{ は }\tau\text{ の有限個のコピーの直和に分解する }\}$$

とする。

補題 63. $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\mathfrak{X}^M$ とする。τ を $\mathbf{K}_\infty$ の既約表現として、任意の $\mathsf{f}\in\mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ をとる。S を素点の有限集合で、Σ_∞ を含み、S の外では μ_1,μ_2,ψ_F がすべて不分岐で f は $\mathbf{K}_v$-不変になるものとする。すると、τ のみに依存する $\mathrm{Re}(s)>-1$ で零点を持たない多項式 $P_\tau(s)$ および s に無関係で $\mathbf{K}$-有限な $\Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ が存在して、

$$\mathsf{f}^{(s)}(g)=\{\prod_{v\in S-\Sigma_\infty}L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\;|_v^{s+1})\}\,\frac{1}{P_\tau(s)}\,f(\Phi,\mu,s;g),\qquad g\in G(\mathbb{A}),\qquad \mathrm{Re}(s)>-1$$

となる。

Proof: f は分解可能な元の有限線型結合である。故に $\mathsf{f}=\prod_{v\in S}\mathsf{f}_v\prod_{v\notin S}\mathsf{f}^\circ_v$ の形であるとして証明すればよい。$\tau=\bigotimes_{v\in\Sigma_\infty}\tau_v$ と書ける。ここで、各素点 $v\in S$ に対して、$\mathsf{f}_v\in\mathbf{H}^0(\mu_v,0)[\tau_v]$ であり、$\mathsf{f}^\circ_v\in\mathbf{H}^0_v(\mu_v,0)$ $(v\notin S)$ は $\mathsf{f}^\circ_v(1)=1$ なる $\mathbf{K}_v$-不変ベクトルとする。そこで命題 56 (3), (4) を使えばよい。$\square$

5.2.1. 命題 *16* の証明. $\mathsf{f}\in\mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ を補題 63 のとおりとする。補題 63、命題 62 より任意の $\mathsf{f}_2\in\mathbf{H}^0_\nu$ に対して、$\mathrm{Re}(s)>1$ において

$$\langle\mathsf{M}(s)\mathsf{f},\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}=\{\prod_{v\in S-\Sigma_\infty}L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\;|_v^{s+1})\}\,\frac{1}{P_\tau(s)}\,\frac{L(-s+1,\mu_1^{-1}\mu_2)}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\,\langle f_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s),\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}\tag{5.18}$$

が成り立つ。これにより $s\mapsto\langle\mathsf{M}(s)\mathsf{f},\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}$ は全複素平面上の有理型函数に延長される。(極集合 $\mathbb{C}-D$ は $s=\pm1$ および次の 3 集合の合併に含まれる： (i) $L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})$ の零点集合 (ii) $\prod_{v\in S-\Sigma_\infty}L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\;|_v^{s+1})$ の極集合 (iii) $P_\tau(s)$ の零点集合。) $w_0^2=-1_2$, $(\hat{\Phi})\check{}(X)=\Phi(-X)$ に注意すれば、等式 (5.18) から $\mathsf{M}(-s)\mathsf{M}(s)\mathsf{f}=\mathsf{f}$ がわかる。$\mathsf{M}(s)$ の虚軸におけるユニタリー性は $\mathsf{M}(-s)\mathsf{M}(s)=\mathrm{Id}$ と (4.6) から従う。命題 16 の主張のうち、あとは (5) を示せばよい。(他は容易であるか、或いは自明。) $\sigma>0$ を任意にあたえる。$\mathsf{f}_2=\prod_v\mathsf{f}_{2,v}$ と分解されると仮定し、S_1 を $\mathsf{f}_{2,v}\neq\mathsf{f}^\circ_v(\nu_v,0)$ または $\hat{\Phi}_v\neq\Phi^\circ_v$ なる v を全て含む素点の集合としておくと、命題 56 (3) より

$$\langle f_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s),\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}=\prod_{v\in S_1}\int_{\mathbf{K}_v}f_{\hat{\Phi}_v,v}(\check{\mu}_v,-s;k_v)\,\mathsf{f}_{2,v}(k_v)\mathrm{d}k_v$$

となる。積分表示 (5.1) より右辺の各 v 因子は $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上有界である。よって、(5.18) 右辺の最後の内積は $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上有界。第 1 および第 2 因子も $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上有界になることは見やすい。第 3 因子は Hecke L 函数の関数等式から

$$WD^{s-1/2}\,\frac{L(s,\mu_1\mu_2^{-1})}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}$$

に等しい。(ここで、W はある絶対値 1 の複素数、D はある正の数である。) この函数のガンマ因子は Stirling 公式から $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上有界な寄与しか生まない。有限部分に関しては、de la Vallée Poussin の議論から示される

$$|L_{\mathrm{fin}}(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})^{-1}|\ll\log(2+|\mathrm{Im}s|),\qquad s\in[0,\sigma]+i\mathbb{R}$$

と合わせて、(例えば「凸評価」などの) 多項式評価

$$|L_{\mathrm{fin}}(s,\mu_1\mu_2^{-1})| \ll (1+|\mathrm{Im}s|)^N, \qquad s\in[0,\sigma]+i\mathbb{R}$$

を援用すれば $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上で $\ll (1+|\mathrm{Im}(s)|)^{N+\epsilon}$ が分かる。□

5.2.2. 定理 *43* の証明. 補題 63 より $\mathrm{Re}(s)>1$ において

(5.19)

$$E(\mathsf{f}^{(s)}:g)=\{\prod_{v\in S-\Sigma_\infty} L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})\}\,\frac{1}{P_\tau(s)}\,\frac{1}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\,E^*(\Phi,\mu,s;g),\quad g\in G(\mathbb{A}),$$

となる。これと命題 61 から、函数 $s\mapsto E(\mathsf{f}^{(s)}:g)$ は全複素平面に有理型に解析接続されることが分かる。この解析接続を $\mathsf{E}(\mathsf{f};s,g)$ と書くと、定理 43 は命題 61 から従う。例えば主張 (5) (函数等式) を導いてみる。命題 61 (4)、命題 62 から

$$\begin{aligned} E(f_\Phi(\mu,s):g) &= \frac{L(-s+1,\mu_2\mu_1^{-1})}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\,E(f_{\hat\Phi}(\check\mu,-s):gw_0)\\ &= E(M(s)f_{\hat\Phi}(\check\mu,-s):g) \end{aligned}$$

これと (5.18), (5.19) より函数等式 $\mathsf{E}(\mathsf{f};s,g)=\mathsf{E}(\mathsf{M}(s)\mathsf{f};-s,g)$ を得る。□

6. GL(2) の跡公式

6.1. Modified kernel. **まずテスト関数 $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ を任意に一つ固定する。以下、サブセクション 6.1, 6.2, 6.3 を通じて f を固定したまま話を進めていく。**

関数 f に対して関数 $K_P(g,h)$ を

$$K_P(g,h)=\int_{N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M(F)} f(g^{-1}\gamma nh)\mathrm{d}n\,,\quad g,\,h\,\in N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})$$

と定義する。もし R_P をヒルベルト空間 $L^2(N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 上の右正則表現とするならば、$K_P(g,h)$ は $R_P(f)$ に関する核関数である。次に $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ に対して関数 $K_G(g,h)$ を

$$K_G(g,h)=\sum_{\gamma\in G(F)} f(g^{-1}\gamma h)\,,\quad g,\,h\,\in G(F)\backslash G(\mathbb{A})$$

と定義する。(4.3) で定義された $K^f(g,h)$ と $K_G(g,h)$ は同じであるが、便宜上記号を変更する。$\mathbb{R}$ 上の関数 $\widehat{\tau}_P$ を

$$\widehat{\tau}_P(H)=\begin{cases}1\,, & H>0\,,\\ 0\,, & H\leqslant 0\end{cases}$$

と定める。パラメーター $T\in\mathbb{R}$ に対して、次のように Modified kernel $k^T(g,f)$ が定義される。

$$k^T(g,f)=K_G(g,g)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} K_P(\delta g,\delta g)\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T).$$

T は正の実数であると仮定する。そして積分 $J^T(f)$ を

$$J^T(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k^T(g,f)\,\mathrm{d}^1 g$$

と定める。

定理 64. T を十分大きい正の実数とする。このとき、積分 $J^T(f)$ は絶対収束する。つまり、

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |k^T(g,f)|\,\mathrm{d}^1 g < +\infty$$

が成り立つ。ただし、T の大きさは f のサポートにのみ依存している。

この定理を証明する前に、以下の補題を証明しておこう。

補題 65. 任意の $g \in G(\mathbb{A})$ と $h \in G(F)$ について、もし $h \notin P(F)$ ならば $H(hg) \leqslant -H(g)$ が成り立つ。

Proof. まず次のように記号を定める。

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G(F) \cap \mathbf{K}, \quad n \in N(\mathbb{A}),\ m \in M(\mathbb{A})^1,\ a \in A_M(\mathbb{R})^0,\ k \in \mathbf{K}.$$

任意の $g = nmak \in G(\mathbb{A})$ について、$n' = (ma)^{-1}nma \in N(\mathbb{A})$ と置くと、

$$H(wg) = -H(a) + H(wn')$$

が成り立つ。これより、もし任意の $n \in N(\mathbb{A})$ について $H(wn) \leqslant 0$ であることを示せば、$H(wg) \leqslant -H(g)$ が示せる。そして Bruhat 分解 $G(F) = P(F) \cup (P(F)wN(F))$ よりこの命題が従う。したがって後は、任意の素点 $v \in \Sigma$ と $n_v \in N(F_v)$ について $H(wn_v) \leqslant 0$ であることを示せば良い。

$$wn_v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \omega \end{pmatrix} k, \quad n_v = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{K}_v,\ \alpha, \omega \in F_v^\times,\ \beta, u \in F_v$$

と置くと、

$$wk^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha u & -u\beta + \omega \end{pmatrix}$$

を得る。$wk^{-1} \in \mathbf{K}_v$ だから、$v \in \Sigma_\infty$ の場合は $|\alpha|^2 + |\alpha u|^2 = 1$ を得て、$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ の場合は $\alpha \in \mathfrak{O}_v$ を得る。また $\det(wn) = 1$ なのだから、$|\alpha\omega|_v = 1$ となり、$H(wn) = \log|\alpha|_v^2$ を得る。これらより $H(wn) \leqslant 0$ がすぐに従う。 □

ジーゲル領域 $\mathfrak{S}$ に対して、$g \in G(\mathbb{A})$ についての関数 $F^G(g,T)$ を

$$\left\{ g \in G(\mathbb{A}) \mid {}^\exists \delta \in G(F) \text{ s.t. } \delta g \in \mathfrak{S} \text{ and } H(\delta g) \leqslant T \right\}$$

の特性関数とする。

補題 66. 任意の $g \in G(\mathbb{A})$ について、等式

$$F^G(g,T) + \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(H(\delta g) - T) = 1$$

が成り立つ。

Proof. $g \in G(\mathbb{A})$ を一つ固定して考えよう。

$F^G(g,T) = 1$ を仮定する。つまり、ある $\delta \in G(F)$ について $\log t_0 < H(\delta g) \leqslant T$ が成り立つ。さらに、ある $\delta' \in G(F)$ について $H(\delta' g) > T$ と仮定する。もし $\delta\delta'^{-1} \in P(F)$ ならば

$$H(\delta' g) = H(\delta\delta'^{-1}\delta' g) = H(\delta g) \leqslant T$$

となり矛盾する。もし $\delta\delta'^{-1} \notin P(F)$ ならば補題 65 より

$$H(\delta' g) \leqslant -H(\delta\delta'^{-1}\delta' g) = -H(\delta g) < \log t_0 < T$$

となりこれも矛盾する。しかがって任意の $\gamma \in P(F)\backslash G(F)$ について $H(\gamma g) \leqslant T$ が成り立つため、$\sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(H(\delta g) - T) = 0$ となる。

$F^G(g,T)=0$ を仮定する。$G(\mathbb{A})=G(F)\mathfrak{S}$ なので、ある $\delta\in G(F)$ について $\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)=1$ となる。$\delta'\neq\delta$ であるような $\delta'\in G(F)$ について $\widehat{\tau}_P(H(\delta' g)-T)=1$ となるとしよう。そして、$\delta\delta'^{-1}\notin P(F)$ と仮定すると、

$$T<H(\delta' g)\leqslant -H(\delta\delta'^{-1}\delta' g)=-H(\delta g)<-T$$

となり、T が正の実数であることに矛盾する。つまり、$\delta'\in\delta P(F)$ となる。
以上より、この補題は示された。

□

Proof. 定理 64 の証明を始めよう。まず記号を次の様に定める。

$$k_G(g,f)=K_G(g,g),\quad k_P(g,f)=K_G(g,g)-K_P(g,g).$$

補題 66 より

$$k^T(g,f)=k_G(g,f)\,F^G(g,T)\,+\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}k_P(\delta g,f)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

を得る。したがって、

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k^T(x,f)|\,\mathrm{d}^1g\leqslant\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_G(g,f)|\,F^G(g,T)\,\mathrm{d}^1g+\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_P(g,f)|\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1g \tag{6.1}$$

となる。つまり右辺の二つの項をそれぞれ評価すれば良い。
(6.1) の右辺の第一項を評価しよう。$G(\mathbb{A})$ のコンパクト集合と $G(F)$ との共通部分は有限集合であることに気をつける。C を $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の任意のコンパクト集合とする。定義より $g,\,h\in C$ に対して $K_G(g,h)$ の $G(F)$ に関する和は有限和なので、$K_G(g,h)$ は C 上有界となる。$F^G(g,T)$ の $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上のサポートはコンパクトなのだから、

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_G(g,f)|\,F^G(g,T)\,\mathrm{d}^1g<+\infty$$

が従う。
(6.1) の右辺の第二項を評価しよう。元 $g\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ が $\widehat{\tau}_P(H(g)-T)=1$ を満たすとする。つまり $H(g)>T$ となる。次の様に記号を定める。

$$\gamma=\begin{pmatrix}* & * \\ c & *\end{pmatrix}\in G(F)-P(F)\,,\quad g=\begin{pmatrix}u_1 & * \\ 0 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}k\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1\,,$$
$$u_1,\,u_2\in F^\times\backslash\mathbb{A}^1,\ a\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ k\in\mathbf{K}\,.$$

そして

$$g^{-1}\gamma g=k^{-1}\begin{pmatrix}* & * \\ au_1u_2^{-1}c & *\end{pmatrix}k \tag{6.2}$$

となる。条件より $c\neq 0$ かつ $\log a>T$ なので、(6.2) の $(2,1)$ 成分は $|au_1u_2^{-1}c|_{\mathbb{A}}=a>e^T$ となる。よって、任意の $\gamma\in G(F)-P(F)$ について、(6.2) の $(2,1)$ 成分が f のサポートから外れるような正の実数 T が存在することが分かる。以下、T をそのような十分大きい実数とする。これより任意の $\gamma\in G(F)-P(F)$ について

$$f(g^{-1}\gamma g)\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)=0$$

が成り立つ。ゆえに、後は

$$\left| \sum_{\gamma\in P(F)} f(g^{-1}\gamma g) - \int_{N(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in M(F)} f(g^{-1}\gamma n g)\,\mathrm{d}n \right| \tag{6.3}$$

が $\{g\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \mid H(g)>T\}$ 上の積分で収束することを示せばよい。まず $N(F)$ の和にポアソン和公式 (2.1) を用いると、

$$(6.3) \leqslant \sum_{\gamma\in M(F)} \left| \sum_{\xi\in F} \int_{\mathbb{A}} f(g^{-1}\gamma\exp(x)g)\,\psi_F(x\xi)\mathrm{d}x - \int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma n g)\,\mathrm{d}n \right|$$

を得る。ここで

$$h_{g,\gamma}(y) = \int_{\mathbb{A}} f(g^{-1}\gamma\exp(x)g)\,\psi_F(xy)\mathrm{d}x$$

と置くと、

$$(6.3) \leqslant \sum_{\gamma\in M(F)} \Big| \sum_{\xi\in F^\times} h_{g,\gamma}(\xi) \Big|$$

と整理できる。記号を次の様に定める。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} mk \in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1, \quad u\in F\backslash\mathbb{A},\ a\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ m\in M(\mathbb{A})^1,\ k\in\mathbf{K}.$$

このとき

$$h_{g,\gamma}(\xi) = a\, h_{g',\gamma}(a\xi), \quad g' = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} mk$$

が成り立つ。その結果、(6.3) の $\{g\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \mid H(g)>T\}$ 上の積分は

$$\int_{F\backslash\mathbb{A}} \mathrm{d}u \int_{e^T}^\infty \mathrm{d}^\times a \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1} \mathrm{d}^1 m \int_{\mathbf{K}} \mathrm{d}k \sum_{\gamma\in M(F)} \Big| \sum_{\xi\in F^\times} h_{g',\gamma}(a\xi) \Big| \tag{6.4}$$

で押さえられる。この積分において g' の動く範囲は明らかにコンパクト集合に含まれる。また f のサポートはコンパクト集合に含まれるのだから、$\gamma\in M(F)$ の動く範囲を有限個として良い。そして $h_{g',\gamma}(y)$ は y の関数として Schwartz 関数であり、$a\xi$ は $\xi\in F^\times$ より F_{v_0} において十分に大きいことに注意しよう。ゆえに、任意の正の整数 N に対して、f のサポートに依存する形で T を十分に大きくとると、ある定数 c_N が存在して、

$$(6.4) \leqslant c_N \times \int_{e^T}^\infty a^{-N}\mathrm{d}^\times a \leqslant c_N \times \frac{e^{-TN}}{N}$$

となり収束が示される。

以上より (6.1) の右辺の収束が示されたので、定理 64 の証明が完了した。

□

定理 64 より $J^T(f)$ が意味を持った。これより $J^T(f)$ を幾何サイドとスペクトルサイドに展開していこう。

6.2. **幾何サイド.** まず $G(F)$ を分割するための同値類を導入しよう。元 $\gamma\in G(F)$ のジョルダン分解における半単純部分を γ_s とし、ユニポテント部分を γ_u とする。このとき $\gamma=\gamma_s\gamma_u=\gamma_u=\gamma_s$ が成り立つ。二つの元 γ, $\gamma'\in G(F)$ について、γ と γ' が $\mathcal{O}$-同値であるとは、γ_s と γ'_s が $G(F)$-共役であることを意味する。$\mathcal{O}$ を $G(F)$ の $\mathcal{O}$-同値類の集合とする。

$G(F)=\mathrm{GL}(2,F)$ なので、$G(F)$ の元たちは三つの場合: (1)(F-) 楕円、(2)(F-) 双曲、(3)(F-) ユニポテント、に分類される。γ を $G(F)$ の元としよう。γ に対して $\{\gamma\}_{G(F)}$ を γ の $G(F)$-共役類とする。

(1) γ が楕円であるとは、γ の属する $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ について $\mathfrak{o}\cap P(F)=\emptyset$ が成り立つことを意味する。この場合、$\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ となり、$\gamma=\gamma_s$ である。
(2) γ が双曲であるとは、γ の属する $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ について $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ であり、かつ $\mathfrak{o}\cap P(F)\neq\emptyset$ を意味する。この場合、$\gamma=\gamma_s$ であり、もし $\gamma\in P(F)$ ならば $\gamma=\begin{pmatrix}\alpha & *\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ と置くと $\alpha\neq\beta$ が成り立つ。
(3) γ がユニポテントであるとは、γ の属する $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ について、ある $z\in Z(F)$ が存在して $\mathfrak{o}=\{z\}\cup\{z\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}_{G(F)}$ が成り立つことをいう。この場合のみ、$\gamma\neq\gamma_s$ となる。

$\mathfrak{o}\in\mathcal{O}$ について、

$$K_{G,\mathfrak{o}}(g,h)=\sum_{\gamma\in\mathfrak{o}}f(g^{-1}\gamma h)\ ,\quad K_{P,\mathfrak{o}}(g,h)=\int_{N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M(F)\cap\mathfrak{o}}f(g^{-1}\gamma nh)\mathrm{d}n$$

と定義する。そして、$f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ とパラメーター T について

$$k_{\mathfrak{o}}^T(g,f)=K_{G,\mathfrak{o}}(g,g)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}K_{P,\mathfrak{o}}(\delta g,\delta g)\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T),$$
$$J_{\mathfrak{o}}^T(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}k_{\mathfrak{o}}^T(g,f)\,\mathrm{d}^1g$$

と定める。定理 64 の証明と同様の議論によって次の定理を得る。

定理 67. T を十分大きい正の実数とする。このとき、

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_{\mathfrak{o}}^T(g,f)|\,\mathrm{d}^1g<+\infty$$

が成り立つ。ただし、T の大きさは f のサポートにのみ依存している。

この定理により、

$$J^T(f)=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}J_{\mathfrak{o}}^T(f)$$

を得る。この等式の右側の和は有限和であることに気をつけよう。これより各 $J_{\mathfrak{o}}(f)$ を詳しく記述していく。

群 H と元 $\gamma\in H$ に対して、H_γ を H における γ の中心化群とする。つまり $H_\gamma=\{h\in H\,|\,h\gamma=\gamma h\}$ と定める。元 $\gamma\in G(F)$ について、$\mathrm{d}g_\gamma$ を $G(\mathbb{A})_\gamma$ 上のハール測度としよう。$G(\mathbb{A})_\gamma^1\cong G(\mathbb{A})_\gamma/Z_\infty^+$ により定まる商測度を d^1g_γ とし、$\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})_\gamma^1)=\int_{G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})_\gamma^1}\mathrm{d}^1g_\gamma$ と置く。また $\mathrm{d}\dot{g}$ を $G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})$ 上の商測度とする。

命題 68. 楕円元 $\gamma\in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ について、

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f)=\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})_\gamma^1)\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f(g^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}$$

が成り立つ。

Proof. Z_∞^+ が $G(\mathbb{A})_\gamma$ の部分群であることと定理 64 の証明より和と積分の交換が可能であることに注意すると次のように証明できる。

$$\begin{aligned}
J_{\mathfrak{o}}^T(f) &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\delta\in\{\gamma\}_{G(F)}} f(g^{-1}\delta g)\mathrm{d}^1 g = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\delta\in G(F)_\gamma\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\mathrm{d}^1 g \\
&= \sum_{\delta\in G(F)_\gamma\backslash G(F)} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\mathrm{d}^1 g = \sum_{\delta\in G(F)_\gamma\backslash G(F)} \int_{\delta\, G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}^1 g \\
&= \int_{G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}^1 g = \int_{G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma} \mathrm{d}g_\gamma \int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}\dot{g}.
\end{aligned}$$

□

次に双曲元について次の命題を得る。

命題 69. 双曲元 $\gamma\in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ について、

$$\begin{aligned}
J_{\mathfrak{o}}^T(f) =& \frac{1}{2}\sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}} \mathrm{vol}_M \int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1}n^{-1}\delta nk)\,(-H(wn))\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k \\
&+ T\sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}} \mathrm{vol}_M \int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1}\delta nk)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}k
\end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof.

$$k_{G,\mathfrak{o}}(g,f) = K_{G,\mathfrak{o}}(g,g)\,,\quad k_{P,\mathfrak{o}}(g,f) = K_{G,\mathfrak{o}}(g,g) - K_{P,\mathfrak{o}}(g,g)$$

と置く。このとき、

$$k_{\mathfrak{o}}^T(g,f) = k_{G,\mathfrak{o}}(g,f)F^G(g,T) + \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} k_{P,\mathfrak{o}}(\delta g,f)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

が成り立ち、そして、定理 64 の証明より

$$\begin{aligned}
&\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |k_{G,\mathfrak{o}}(g,f)|\,F^G(g,T)\,\mathrm{d}^1 g < +\infty\,, \\
&\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |k_{P,\mathfrak{o}}(g,f)|\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g < +\infty
\end{aligned}$$

が従う。

まず積分

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} k_{P,\mathfrak{o}}(n_1 g)\mathrm{d}n_1 \tag{6.5}$$

について考えよう。$\gamma=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, $\alpha\neq\beta$, $\alpha,\,\beta\in F^\times$ と仮定しても一般性は失わない。この場合

$$M(F)\cap\mathfrak{o} = \{\,\gamma\,,\,w\gamma w\,\}$$

となる。また $G(F)_\gamma = M(F)$ が成り立つ。こうすると、(6.5) は

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}n_1^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta n_1 g)\,\mathrm{d}n_1 - \sum_{\gamma_1\in\{\gamma,\, w\gamma w\}} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}n_1^{-1}\gamma_1 n n_1 g)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}n_1$$

と等しくなる。

$$\begin{pmatrix}1 & -u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & (1-\alpha^{-1}\beta)u\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

と $1-\alpha^{-1}\beta \in F^\times$ より、上の式の第二項の積分は変数変換によって

$$\begin{aligned}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}n_1^{-1}\gamma_1 n n_1 g)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}n_1 &= \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}n_1^{-1}n^{-1}\gamma_1 n n_1 g)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}n_1\\ = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\mathrm{d}n_1 \int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}n^{-1}\gamma_1 n g)\,\mathrm{d}n &= \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\sum_{\nu\in N(F)} f(g^{-1}n^{-1}\nu^{-1}\gamma_1\nu n g)\,\mathrm{d}n\end{aligned}$$

となる。$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\mathrm{d}n = 1$ であることに注意しよう。この (6.5) の式変形と変数変換より

$$\begin{aligned}(6.6)\qquad &\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{P,\mathfrak{o}}(g,f)\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g\\ &\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} k_{P,\mathfrak{o}}(n_1 g,f)\mathrm{d}n_1\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g\\ &= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\Big\{\sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}n_1^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta n_1 g)\\ &\qquad - \sum_{\gamma_1\in\{\gamma,\, w\gamma w\}}\sum_{\nu\in N(F)} f(g^{-1}n_1^{-1}\nu^{-1}\gamma_1\nu n_1 g)\Big\}\,\mathrm{d}n_1\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g\\ &= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\Big\{\sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\\ &\qquad - \sum_{\gamma_1\in\{\gamma,\, w\gamma w\}}\sum_{\nu\in N(F)} f(g^{-1}\nu^{-1}\gamma_1\nu g)\Big\}\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g\\ &= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F),\, \delta^{-1}\gamma\delta\notin P(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g\end{aligned}$$

を得る。ただし、$\delta^{-1}\gamma\delta\in P(F)$ と $\delta\in P(F)\cup wP(F)$ は必要十分である。定理 64 の証明での議論により、T が十分に大きいので最後の積分の値は 0 である。このことからも積分 (6.6) は絶対収束し、その値が 0 であることが分かる。

$$\tilde{k}_{\mathfrak{o}}^T(g,f) = \sum_{\gamma\in\mathfrak{o}} f(g^{-1}\gamma g) - \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\sum_{\gamma_1\in\{\gamma,\, w\gamma w\}}\sum_{\nu\in N(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\nu^{-1}\gamma_1\nu\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

と置く。等式 (6.6) と $k_G(x,f)$ の役割とそれぞれの積分の収束性より、

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\tilde{k}_{\mathfrak{o}}^T(g,f)\,\mathrm{d}^1 g$$

が成り立ち、積分は絶対収束する。明らかに

$$\tilde{k}_{\mathfrak{o}}^T(g,f)=\sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\left\{1-\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)-\widehat{\tau}_P(H(w\delta g)-T)\right\}$$

成り立つので、

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f)=\int_{M(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g^{-1}\gamma g)\{1-\widehat{\tau}_P(H(g)-T)-\widehat{\tau}_P(H(wg)-T)\}\mathrm{d}^1 g$$

となる。$g\in G(\mathbb{A})^1$ について

$$g=m\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}nk,\quad m\in M(\mathbb{A})^1,\ a\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ n\in N(\mathbb{A}),\ k\in\mathbf{K}$$

と分解すると、

$$H(g)=\log|a|\,,\quad H(wg)=-\log|a|+H(wn)$$

が成りつのだから、

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{o}}^T(f)=&\mathrm{vol}_M\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})}\int_0^\infty f(k^{-1}n^{-1}\gamma nk)\{1-\widehat{\tau}_P(H(g)-T)-\widehat{\tau}_P(H(wg)-T)\}\mathrm{d}^\times a\mathrm{d}n\mathrm{d}k\\=&\mathrm{vol}_M\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1}n^{-1}\gamma nk)\{2T-H(wn)\}\mathrm{d}n\mathrm{d}k\end{aligned}$$

を得る。後は γ を $w\gamma w$ に入れ替えても同じ議論になることに気をつければ、この命題がすぐに得られる。 □

最後にユニポテント元について次の命題を得る。

命題 70. 中心元 $z\in Z(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{z\}\cup\{z\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\}_{G(F)}$ について、

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{o}}^T(f)=&\mathrm{vol}_G\,f(z)+\mathrm{vol}_Z\,\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\int_{\mathbb{A}^\times}F_z(a)\,|a|_{\mathbb{A}}^s\,\mathrm{d}^\times a\\&+T\,\mathrm{vol}_M\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})}f(k^{-1}znk)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}k\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、$Z(\mathbb{A})^1=Z(\mathbb{A})/Z_\infty^+$ 上のハール測度 d^1z を $\mathbb{A}^1$ の測度で定めて $\mathrm{vol}_Z=\int_{Z(F)\backslash\mathbb{Z}(\mathbb{A})^1}\mathrm{d}^1z$ と置き、$C_c^\infty(\mathbb{A})$ に属する関数 $F_z(u)$ を

$$F_z(u)=\int_{\mathbf{K}}f(k^{-1}z\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}k)\mathrm{d}k$$

で定めた。

Proof.

$$\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}_{G(F)}=\left\{\delta^{-1}\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\delta\,\middle|\,u\in F^\times\,,\ \delta\in P(F)\backslash G(F)\right\}$$

となるのだから、

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{o}}^T(f)=&\mathrm{vol}_G\,f(z)+\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\left\{\sum_{u\in F^\times}f(g^{-1}\delta^{-1}z\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\delta g)\right.\\&\left.-\int_{N(\mathbb{A})}f(g^{-1}\delta^{-1}zn\delta g)\mathrm{d}n\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\right\}\mathrm{d}^1g\end{aligned}$$

となる。ここで、$g \in G(\mathbb{A})^1$ に対して

$$g = nz_1 z_\infty^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} k,\ n \in N(\mathbb{A}),\ z_1 \in Z(\mathbb{A})^1,\ a \in \mathbb{A}^\times,\ z_\infty^+ \in Z_\infty^+,\ H(z_\infty^+) = \log |a|_\mathbb{A},\ k \in \mathbf{K}$$

と分解すると、

$$J_\mathfrak{o}^T(f) = \mathrm{vol}_G\, f(z) + \mathrm{vol}_Z\, U_z,$$

$$U_z = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \left\{ \sum_{u \in F^\times} F_z(au) - \int_\mathbb{A} F_z(au) \mathrm{d}u\, \widehat{\tau}_P(-\log |a|_\mathbb{A} - T) \right\} |a|_\mathbb{A} \mathrm{d}^\times a$$

を得る。

ポアソン和公式 (2.1) より

$$\sum_{u \in F} F_z(au) = \sum_{u \in F} \hat{F}_z(a^{-1}u)\, |a|_\mathbb{A}^{-1}$$

が成り立つので、

$$\sum_{u \in F^\times} F_z(au) = \sum_{u \in F^\times} \hat{F}_z(a^{-1}u)\, |a|_\mathbb{A}^{-1} + \hat{F}_z(0)\, |a|_\mathbb{A}^{-1} - F(0)$$

を得る。これを用いると、等式

$$\begin{aligned} U_z = &\int_{|a|_\mathbb{A} \leqslant 1} \sum_{u \in F^\times} \hat{F}_z(a^{-1}u)\, \mathrm{d}^\times a\, + \int_{e^T \leqslant |a|_\mathbb{A} \leqslant 1} \mathrm{d}^\times a \times \hat{F}_z(0) \\ &- \int_{|a|_\mathbb{A} \leqslant 1} |a| \mathrm{d}^\times a \times F_z(0) + \int_{1 \leqslant |a|_\mathbb{A}} \sum_{u \in F^\times} F(au)\, |a| \mathrm{d}^\times a \end{aligned}$$

が得られる。これより U_z の収束性も分かる。続いて、$s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ について、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}^\times} F_z(a) |a|_\mathbb{A}^s \mathrm{d}^\times a &= \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \sum_{u \in F^\times} F(au) |a|_\mathbb{A}^s \mathrm{d}^\times a \\ &= \int_{|a|_\mathbb{A} \leqslant 1} \sum_{u \in F^\times} \hat{F}_z(a^{-1}u) |a|_\mathbb{A}^{s-1}\, \mathrm{d}^\times a\, + \int_{|a|_\mathbb{A} \leqslant 1} |a|_\mathbb{A}^{s-1} \mathrm{d}^\times a \times \hat{F}_z(0) \\ &\quad - \int_{|a|_\mathbb{A} \leqslant 1} |a|^s \mathrm{d}^\times a \times F_z(0) + \int_{1 \leqslant |a|_\mathbb{A}} \sum_{u \in F^\times} F(au)\, |a|^s \mathrm{d}^\times a \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\int_{|a|_\mathbb{A} \leqslant 1} |a|_\mathbb{A}^{s-1} \mathrm{d}^\times a \times \hat{F}_z(0) = \frac{1}{s-1} \mathrm{vol}(F^\times) \times \hat{F}_z(0)$$

であり、他の項は $s = 1$ で解析的なので、上の二つの等式から

$$U_z = \lim_{s \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (s-1) \int_{\mathbb{A}^\times} F(a) |a|^s \mathrm{d}^\times a + \int_{e^{-T} \leqslant |a|_\mathbb{A} \leqslant 1} \mathrm{d}^\times a$$

が得られる。これより命題が従う。 □

6.3. **スペクトルサイド.** スペクトルサイドはカスピダルデータによって展開する。Modified kernel から Truncated kernel に移行することによってスペクトルサイドの詳細が記述される。

このサブセクションを通じて、これより $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を仮定する。

6.3.1. *Modified kernel* の分解. まずカスピダルデータ $\chi \in \mathfrak{X}^G$ について R_χ を $\mathcal{L}^2_\chi$ への $(R, \mathcal{L}^2)$ の制限とする。そして、カスピダルデータ $\chi = (G, \pi) \in \mathfrak{X}^G$ について、$\mathcal{B}_{G,\chi}$ を $\mathcal{L}^2_\chi$ の $\mathbf{K}$-有限な元のみから成る正規直交基底として、

$$K_{G,\chi}(g,h) = \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\,, \quad K_{P,\chi}(g,h) = 0$$

と定義する。続いてカスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu \neq \check{\mu}$ について考える。$\mathbf{H}_\mu$ を内積 $\langle\ \rangle_{\mathbf{K}}$ によって $\mathbf{H}^0_\mu$ を完備化して得られるヒルベルト空間とする。$\mathcal{B}_\mu$ を $\mathbf{H}^0_\mu$ の元から成る $\mathbf{H}_\mu$ の正規直交基底とする。$\mathcal{B}_{P,\chi} = \mathcal{B}_\mu \cup \mathcal{B}_{\check{\mu}}$ は $\mathbf{H}^0_\mu \oplus \mathbf{H}^0_{\check{\mu}}$ の元から成る $\mathbf{H}_\mu \oplus \mathbf{H}_{\check{\mu}}$ の正規直交基底であり、

$$\begin{aligned}
K_{G,\chi}(g,h) &= \frac{1}{8\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi; is, g)\,\overline{\mathsf{E}(\phi; is, h)}\,\mathrm{d}s,\\
K_{P,\chi}(g,h) &= \frac{1}{4\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} (\pi_{is}(f)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

と定義する。最後にカスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu = (\mu_1, \mu_1)$ について、$\mathcal{B}_{P,\chi} = \mathcal{B}_\mu$ として、

$$\begin{aligned}
K_{G,\chi}(g,h) =& \frac{1}{8\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi; is, g)\,\overline{\mathsf{E}(\phi; is, h)}\,\mathrm{d}s\\
&+ \mathrm{vol}_G^{-1}\,\mu_1(\det g)\,\overline{\mu_1(\det h)} \int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\mu_1(\det g)\,\mathrm{d}^1 g,\\
K_{P,\chi}(g,h) =& \frac{1}{4\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} (\pi_{is}(f)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

と定義する。$K_{G,\chi}(g,h)$ の s に関する積分の収束は、定理 76 の証明の中で示される。特に (6.9) に注意されたい。$K_{P,\chi}(g,h)$ の積分 $\int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} (\pi_{is}(f)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\,\mathrm{d}s$ の収束も同様の議論で示される。

カスピダルデータ $\chi = (G, \phi) \in \mathfrak{X}^G$ の場合、$K_{G,\chi}(g,h)$ は明らかに $R_\chi(f)$ に関する核関数である。カスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$ の場合の $K_{G,\chi}(g,h)$ について考えよう。

$$\mathrm{P}_{\mathrm{cont}} \circ R(f) \circ \mathrm{P}_{\mathrm{cont}} = S^* \circ \rho(f) \circ S$$

が成り立つので、命題 46 と合わせて、$\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}_P$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{P}_{\mathrm{cont}}\circ R(f)\circ \mathrm{P}_{\mathrm{cont}}(\theta_{\varphi_1})\,|\,\theta_{\varphi_2}\rangle_G=\langle S^*\circ\rho(f)\circ S(\theta_{\varphi_1})\,|\,\theta_{\varphi_2}\rangle_G=\langle\rho(f)\circ S(\theta_{\varphi_1})\,|\,S(\theta_{\varphi_2})\rangle_{\mathfrak{H}}\\
&=\langle\rho(f)\circ S(\theta_{\varphi_1})\,|\,S(\theta_{\varphi_2})\rangle_{\mathfrak{H}}=\langle\rho(f)\mathsf{a}_{\varphi_1}\,|\,\mathsf{a}_{\varphi_2}\rangle_{\mathfrak{H}}=\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\int_0^\infty\langle\pi_{is}(f)\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle\pi_{is}(f)\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}'\in\mathcal{B}}\langle\pi_{is}(f)\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\,,\,\mathsf{f}'\rangle_{\mathbf{K}}\,\langle\mathsf{f}'\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f},\mathsf{f}'\in\mathcal{B}}\langle\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\,,\,\mathsf{f}\rangle_{\mathbf{K}}\,\langle\pi_{is}(f)\mathsf{f}\,,\,\mathsf{f}'\rangle_{\mathbf{K}}\,\langle\mathsf{f}'\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}\overline{\langle\mathsf{f}\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\rangle_{\mathbf{K}}}\,\langle\pi_{is}(f)\mathsf{f}\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{8\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\overline{E(\mathsf{f},is,h)}\,\theta_{\varphi_1}(h)\mathrm{d}^1h\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}E(\pi_{is}(f)\mathsf{f},is,g)\,\overline{\theta_{\varphi_2}(g)}\,\mathrm{d}^1g\,\mathrm{d}s\\
&=\langle\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\frac{1}{8\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}E(\pi_{is}(f)\mathsf{f},is,*)\,\overline{E(\mathsf{f},is,h)}\,\mathrm{d}s\,\theta_{\varphi_1}(h)\,\mathrm{d}^1h\,|\,\theta_{\varphi_2}\rangle_G
\end{aligned}
$$

を得る。つまり、カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ について $K_{G,\chi}(g,h)$ は $R_\chi(f)$ に関する核関数となっている。続いて、カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ についての $K_{P,\chi}(g,h)$ を考えよう。このとき、上の計算とほぼ同じ手順によって、$\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}_P$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\langle R(f)\varphi_1\,|\,\varphi_2\rangle_P=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle R(f)\hat{\varphi}_1(is)\,|\,\varphi_2\rangle_P\,\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle\pi_{is}(f)\hat{\varphi}_1(is)\,,\,\hat{\varphi}_2(is)\rangle_{\mathbf{K}}\,\mathrm{d}s\\
&=\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}\overline{\langle\mathsf{f}\,,\,\hat{\varphi}_1(is)\rangle_{\mathbf{K}}}\,\langle\pi_{is}(f)\mathsf{f}\,,\,\hat{\varphi}_2(is)\rangle_{\mathbf{K}}\,\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{4\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}\overline{\langle\mathsf{f}\,|\,\varphi_1\rangle_P}\,\langle\pi_{is}(f)\mathsf{f}\,|\,\varphi_2\rangle_P\,\mathrm{d}s\\
&=\langle\int_{N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\frac{1}{4\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}(\pi_{is}(f)\mathsf{f})(*)\overline{\mathsf{f}(h)}\mathrm{d}s\,\varphi_1(h)\,\mathrm{d}h\,|\,\varphi_2\rangle_P
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって、$L^2(N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ における $\mathcal{D}_P(\mu)+\mathcal{D}_P(\check{\mu})$ で張られる空間の閉包への R_P の制限を $R_{P,\chi}$ とすると、カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ についての $K_{P,\chi}(g,h)$ は $R_{P,\chi}$ に関する核関数となる。したがって、R_P が $N(\mathbb{A})M(F)$ の自明な表現から $G(\mathbb{A})^1$ への誘導表現であることに注意すれば、スペクトル分解より、

$$K_G(g,h)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}K_{G,\chi}(g,h)\,,\quad K_P(g,h)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}K_{P,\chi}(g,h)$$

が従う。

$$k_\chi^T(g,f)=K_{G,\chi}(g,g)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}K_{P,\chi}(\delta g,\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

と置いて、

$$J_\chi^T(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}k_\chi^T(g,f)\mathrm{d}^1g$$

と定める。スペクトルサイドとして $J^T(f)=\sum_\chi J_\chi^T(f)$ と展開することが目的である。そのために、$\sum_\chi\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_\chi^T(g,f)|\mathrm{d}^1g<+\infty$ を示すことが目標になる。

6.3.2. *Truncation operator.* まずは Truncation opeator を定義しよう。$\mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ を $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の局所有界な可測関数から成る空間とする。十分大きい正の実数 T と関数 $\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ に対して、$\mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の関数 $\Lambda^T\phi$ を

$$(\Lambda^T\phi)(g) = \phi(g) - \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n\delta g)\,\mathrm{d}n\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g) - T)$$

によって定義する。もし $\phi \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ ならば定義より $\Lambda^T\phi = \phi$ が明らかに成り立つ。

$\Lambda^T\phi$ が $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の関数になることを示しておこう。ある $\alpha \in G(F)$ について $H(\alpha g) > T$ となる場合に等式 $\Lambda^T\phi(\delta g) = \Lambda^T\phi(g)$, $({}^\forall\delta \in G(F))$ が成り立つことを示せばよい。補題 65 より $\delta \notin P(F)$ について $H(\delta\alpha g) \leqslant -H(\alpha g) < -T < T$ となるので、

$$(\Lambda^T\phi)(\alpha g) = \phi(\alpha g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n\alpha g)\,\mathrm{d}n = \phi(g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n\alpha g)\,\mathrm{d}n = (\Lambda^T\phi)(g)$$

が成り立つ。よって示せた。

補題 71. 任意の $\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ と $H(g) > T$ を満たす任意の $g \in G(\mathbb{A})^1$ について次が成り立つ。

$$(\Lambda^T\phi)_P(g) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} (\Lambda^T\phi)(ng)\mathrm{d}n = 0.$$

Proof. 上述と同様に補題 65 より $\delta \notin P(F)$ について $H(\delta g) < T$ となるので、

$$(\Lambda^T\phi)(g) = \phi(g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n_1 g)\,\mathrm{d}n_1$$

となり、

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} (\Lambda^T\phi)(nx)\mathrm{d}n = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(nx)\mathrm{d}n - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n_1 nx)\mathrm{d}n_1\mathrm{d}n = 0$$

を得る。 □

この補題と命題 34, 43 によって、$\Lambda^T\mathsf{E}(\mathsf{f}; s)$ が急減少関数になることが分かる。

次の 2 つの命題は後で使うことはないが、Truncation operator の基本的な性質なので、紹介する。

命題 72. $\Lambda^T \circ \Lambda^T = \Lambda^T$.

Proof. $\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ と $H(g) > T$ を満たす $g \in G(\mathbb{A})^1$ について $(\Lambda^T(\Lambda^T\phi))(g) = (\Lambda^T\phi)(g)$ となることを示しさえすればよい。補題 71 より

$$(\Lambda^T(\Lambda^T\phi))(g) = (\Lambda^T\phi)(g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} (\Lambda^T\phi)(ng)\mathrm{d}n = (\Lambda^T\phi)(g)$$

となり、命題が従う。 □

命題 73. 任意の $\phi_1 \in \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ と $\phi_2 \in C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ について

$$\langle\, \Lambda^T\phi_1 \,|\, \phi_2 \,\rangle_G = \langle\, \phi_1 \,|\, \Lambda^T\phi_2 \,\rangle_G$$

が成り立つ。

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\langle\,\Lambda^T\phi_1\,|\,\phi_2\,\rangle_G\\
&=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\Big\{\phi_1(g)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\phi_1(n\delta g)\mathrm{d}n\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\Big\}\,\overline{\phi_2(g)}\mathrm{d}^1g\\
&=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\phi_1(g)\,\overline{\phi_2(g)}\,\mathrm{d}^1g-\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\phi_1(ng)\,\overline{\phi_2(g)}\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}^1g\\
&=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\phi_1(g)\,\overline{\phi_2(g)}\,\mathrm{d}^1g-\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\phi_1(g)\,\overline{\phi_2(ng)}\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}^1g\\
&=\langle\,\phi_1\,|\,\Lambda^T\phi_2\,\rangle_G.
\end{aligned}
$$

□

これら 2 つの命題より $\langle(1-\Lambda^T)\phi_1\,|\,\Lambda^T\phi_2\rangle=0,\ {}^\forall\phi_1,\,\phi_2\in\mathcal{L}^2$ が成り立つので、Truncation operator Λ^T は $\mathcal{L}^2$ 上の直交射影であることが分かる。また、命題 73 とその証明より、truncation operator Λ^T は $\mathcal{L}^2$ 上の hermitian operator であることが分かる。

K を $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の開コンパクト部分群とすると、$G(\mathbb{A})^1$ のある有限部分集合 $\{g_1,g_2,\dots,g_l\}$ が存在して

$$
G(\mathbb{A})^1=\bigcup_{t=1}^{l}G(F)\,g_t\,G(F_\infty)^1K\quad\text{(disjoint union)}
$$

が成り立つことに注意しよう。そのため、$\phi\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の $G(F_\infty)$ での性質は $G(F_\infty)^1$ についてのみ定めれば良いことが分かる。そして、

$$
C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)=\varinjlim_K C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1/K)
$$

であることにも気をつけよう。

正の整数 r に対して $C^r(G(\mathbb{A}))$ を $G(F_\infty)$ 上 C^r 級であり $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 上 smooth であるような $G(\mathbb{A})$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数全体の空間とする。

補題 74. 定数 $N,\,N_0\in\mathbb{Z}_{>0}$ と $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の開コンパクト部分群 K を任意に固定する。このとき、$G(F_\infty)$ 上のある左不変微分作用素の有限集合 $\{X_t\}$ とある定数 $r\in\mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、もし $(\Omega,\mathrm{d}\omega)$ が可測空間で

$$
\phi\,:\,\Omega\to C^r(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1/K)\,,\quad \phi(\omega):g\mapsto\phi(\omega,g)
$$

が任意の可測関数ならば

$$
\sup_{g\in\mathfrak{S}^1}\Big(||g||^N\int_\Omega|(\Lambda^T\phi)(\omega,g)|\mathrm{d}\omega\Big)<\sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\Big(||h||^{-N_0}\sum_t\int_\Omega|(X_t\phi)(\omega,h)|\mathrm{d}\omega\Big)
$$

が成り立つ。

Proof. 定義と補題 66 より

$$
\begin{aligned}
(\Lambda^T\phi(\omega))(g)=&\,\phi(\omega,g)F^G(g,T)\\
&+\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\Big(\phi(\omega,\delta g)-\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\phi(\omega,n\delta g)\mathrm{d}n\Big)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。$F^G(g,T)$ のサポートは $\mathfrak{S}^1$ 上コンパクトなのだから上の式の第一項の評価に関しては明らかである。補題 65 を思い出せば上の式の第二項に関する評価について

$$\begin{aligned}&\sup_{g\in\mathfrak{S}^1}\Big|||g||^N\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\Big(\phi(\omega,\delta g)-\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\phi(\omega,n\delta g)\mathrm{d}n\Big)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\Big|\\ &=\sup_{g\in\mathfrak{S}^1,\,H(g)>T}\Big|||g||^N\Big(\phi(\omega,g)-\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\phi(\omega,ng)\mathrm{d}n\Big)\Big|\end{aligned}$$

を得る。評価すべき上の式の関数がだいたいカスプ形式であることから、命題 34 を思い出せば、いかにも同じような議論で証明できそうである。命題 34 と同様、この式の評価に関しては、[25, 命題 1.10] の証明を参照されたい。 □

命題 75. もし $\phi\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ が一様緩増大ならば $\Lambda^T\phi$ は急減少である。

Proof. $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ のある開コンパクト部分群 K について $\phi\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1/K)$ として良い。$(\Omega,\mathrm{d}\omega)$ を自明にして補題 74 を適用すると、

$$\sup_{g\in\mathfrak{S}^1}\big(||g||^N|(\Lambda^T\phi)(g)|\big)<\sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\big(||h||^{-N_0}\sum_t|(X_t\phi)(h)|\big)$$

を得る。ϕ は一様緩増大なのだから N_0 を適切にとれば右辺は定数で押さえられる。N は任意なので命題が従う。 □

6.3.3. 収束性. 二変数 (g,h) の関数 $f_1(g,h)\in\mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1\times G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の変数 g に関して Λ^T を作用させたものを $(\Lambda_1^Tf_1)(g,h)$ と書き、変数 h について Λ^T を作用させたものを $(\Lambda_2^Tf_1)(g,h)$ と書く。

定理 76. T を正の実数とする。

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|(\Lambda_2^TK_{G,\chi})(g,g)|\,\mathrm{d}^1g<+\infty$$

が成り立つ。

Proof. 正の整数 r に対して $f_1\in C_c^r(G(\mathbb{A}))$ として、$\sum_{\gamma\in G(F)}f_1(g^{-1}\gamma h)$ について考える。和における γ の動く範囲は $g\,\mathrm{supp}(f_1)\,h^{-1}$ であるので、補題 31 の (2)(3)(6) より、ある定数 $N_1\in\mathbb{Z}_{>0}$ と f_1 に依存した定数 $c(f_1)>0$ によって

$$\Big|\sum_{\gamma\in G(F)}f_1(g^{-1}\gamma h)\Big|\leqslant c(f_1)\,||g||^{N_1}\,||h||^{N_1},\quad {}^\forall g,\,{}^\forall h\in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \tag{6.7}$$

が成り立つ。

r を十分大きい正の整数と仮定する。このとき、f は右かつ左 $\mathbf{K}$-有限な関数 $f_1,\ f_2\in C_c^r(G(\mathbb{A}))$ の畳み込み f_1*f_2 の有限和で表せることが知られている。(cf. [9] and [2, p.928–929])。ただし、$(f_1*f_2)(g)=\int_{G(\mathbb{A})^1}f_1(gh)f_2(h^{-1})\mathrm{d}^1h$ とする。そして、$t=1$ or 2 として、

$$K_{G,t}(g,h)=\sum_{\gamma\in G(F)}(f_t*f_t^*)(g^{-1}\gamma h)$$

と置く。X を左不変微分作用素として、$(X_1K_{G,t})(g,h)$ を X を変数 g に作用させたもの、$(X_2K_{G,t})(g,h)$ を X を変数 h に作用させたものとする。

テスト関数 f, f_1, f_2 や Xf が $\mathbf{K}$-有限であるので、それぞれの核関数の定義における基底の和は有限和になることに注意する。$\mathcal{B}'_{G,\chi}$ を $\mathcal{B}_{G,\chi}$ の十分大きい有限部分集合とする。そして、

$$v_g(h)=\sum_{\phi\in\mathcal{B}'_{G,\chi}}\overline{\phi(g)}\,\phi(h)$$

と置く。明らかに $\mathcal{B}'_{G,\chi}$ で張られる部分空間に属する元 ψ に対して、$\langle \psi \,|\, v_g \rangle_G = \psi(g)$ となる。また左不変微分作用素 X^* を $\langle \psi_1\,,\, X\psi_2 \rangle_G = \langle X^*\psi_1\,,\, \psi_2 \rangle_G$ で定める。このとき、

$$\begin{aligned}
&\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1 * f_2)\phi)(g)\,\overline{(X\phi)(h)} = \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} \langle \phi | R_\chi((f_1*f_2)^*)v_g\rangle_G \, \langle v_h \,|\, X\phi\rangle_G \\
&= \langle \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} \langle X^* v_h \,|\, \phi\rangle_G \phi \,|\, R_\chi((f_1*f_2)^*)v_g\rangle_G = \langle X^* v_h | R_\chi((f_1*f_2)^*)v_g\rangle_G \\
&= \langle R_\chi(f_2)X^*v_h | R_\chi(f_1^*)v_g\rangle_G
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって Hölder の不等式と上の等式より、$\chi = (G,\pi) \in \mathfrak{X}^G$ のときは、

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1 * f_2)\phi)(g)\,\overline{(X\phi)(h)}\Big| = \big|\langle R_\chi(f_2)X^*v_h | R_\chi(f_1^*)v_g\rangle_G\big| \\
&\leqslant \langle R_\chi(f_1*f_1^*)v_g \,|v_g\rangle_G^{1/2} \, \langle R_\chi(f_2^* * f_2)X^*v_h \,|X^*v_h\rangle_G^{1/2} \\
&= \Big(\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1*f_1^*)\phi)(g)\overline{\phi(g)}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} (XR_\chi(f_2^* * f_2)\phi)(h)\overline{(X^*\phi)(h)}\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

が成り立つ。最後の等式は上の等式を逆にたどれば得られる。さらに Hölder の不等式から $a_k,\, b_l \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ の収束可算和について

$$\sum (a_k b_k)^{1/2} \leqslant \big(\sum a_k\big)^{1/2}\big(\sum b_l\big)^{1/2}$$

が成り立つのだから、上の結果をまとめると、

(6.8)

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi=(G,\pi)\in\mathfrak{X}^G}\Big|\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1 * f_2)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\Big| &\leqslant \Big(\sum_{\chi=(G,\pi)\in\mathfrak{X}^G}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1*f_1^*)\phi)(g)\overline{\phi(g)}\Big)^{1/2} \\
&\times \Big(\sum_{\chi=(G,\pi)\in\mathfrak{X}^G}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{G,\chi}} (XR_\chi(f_2^* * f_2)\phi)(h)\overline{(X^*\phi)(h)}\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

を得る。

$\chi = (P,[\mu]) \in \mathfrak{X}^G$ に対して不等式 (6.8) と同様のものを証明しよう。$\mathcal{B}'_{P\chi}$ を $\mathcal{B}_{P,\chi}$ の十分大きい有限部分集合とする。さっきと同様に

$$w_g(h) = \sum_{\phi\in\mathcal{B}'_{P,\chi}} \overline{\phi(g)}\phi(h)$$

と置く。もし ψ が $\mathcal{B}'_{P,\chi}$ で張られる部分空間に属するならば $\langle \psi\,,\, w_g\rangle_{\mathbf{K}} = \psi(g)$ である。さらに

$$E(w_g,s,h) = \sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} w_{\gamma g}(h)\overline{\delta_P(\gamma g)^{s/2}} = \sum_{\phi\in\mathcal{B}'_{P,\chi}} \phi(h)\,\overline{E(\phi^{(s)}:g)}$$

と置くと、

$$\langle \psi\,,\, E(w_g,s)\rangle_{\mathbf{K}} = E(\psi^{(s)}:g)\,, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

が成り立つ。よって、$\mathsf{E}(\phi;s,g)$, $\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}$ と $\mathsf{E}(\psi;s,g)$ の性質から有理型関数

$$\mathsf{E}(w_g,s,h) = \sum_{\phi\in\mathcal{B}'_{P,\chi}} \phi(h)\,\overline{\mathsf{E}(\phi;s,g)}$$

について、

$$\langle \psi\,,\, \mathsf{E}(w_g,is)\rangle_{\mathbf{K}} = \mathsf{E}(\psi;is,g)\,, \quad s\in\mathbb{R}$$

が成り立つとして良い。また X に対して $R(D)=X,\ D\in U(\mathfrak{g})$ とすると、$X\mathsf{E}(\psi;s,g)=\mathsf{E}(\pi_s(D)\psi;is,g)$ が成り立つ。そして、$(\pi_s(D))^*$ を $\langle\psi_1\,,\,\pi_s(D)\psi_2\rangle_{\mathbf{K}}=\langle(\pi_s(D))^*\psi_1\,,\,\psi_2\rangle_{\mathbf{K}}$ で定め、X^* を $X^*\mathsf{E}(\psi;s,g)=\mathsf{E}((\pi_s(D))^*\psi;is,g)$ で定める。こうすると、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f_1*f_2)\phi;is,g)\overline{X\mathsf{E}(\phi;is,h)}\\
&=\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\langle\pi_{is}(f_1*f_2)\phi\,,\,\mathsf{E}(w_g,is)\rangle_{\mathbf{K}}\,\langle\mathsf{E}(w_h,is)\,,\,\pi_{is}(D)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\\
&=\langle\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\langle\mathsf{E}(w_h,is)\,,\,\pi_{is}(D)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\phi\,,\,\pi_{is}((f_1*f_2)^*)\mathsf{E}(w_g,is)\rangle_{\mathbf{K}}\\
&=\langle(\pi_{is}(D))^*\mathsf{E}(w_h,is)\,,\,\pi_{is}((f_1*f_2)^*)\mathsf{E}(w_g,is)\rangle_{\mathbf{K}}\\
&=\langle\pi_{is}(f_2)(\pi_{is}(D))^*\mathsf{E}(w_h,is)\,,\,\pi_{is}(f_1^*)\mathsf{E}(w_g,is)\rangle_{\mathbf{K}}
\end{aligned}
$$

を得る。Hölder の不等式と上の等式より、

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f_1*f_2)\phi;is,g)\overline{X\mathsf{E}(\phi;is,h)}\Big|\\
&\leqslant\langle\pi_{is}(f_1*f_1^*)\mathsf{E}(w_g,is)\,,\,\mathsf{E}(w_g,is)\rangle_{\mathbf{K}}^{1/2}\,\langle\pi_{is}(f_2^**f_2)(\pi_{is}(D))^*\mathsf{E}(w_h,is)\,,\,(\pi_{is}(D))^*\mathsf{E}(w_h,is)\rangle_{\mathbf{K}}^{1/2}\\
&=\Big(\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f_1*f_1^*)\phi;is,g)\overline{\mathsf{E}(\phi;is,g)}\Big)^{1/2}\\
&\quad\times\Big(\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\mathsf{E}(\pi_{is}(D)\pi_{is}(f_2^**f_2)\phi;is,h)\overline{\mathsf{E}((\pi_{is}(D))^*\phi;is,h)}\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

を得る。もう一回 Hölder の不等式を使って、

$$
\begin{aligned}
(6.9)\qquad&\sum_{\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G}\int_{\mathbb{R}}\Big|\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f_1*f_2)\phi;is,g)\overline{X\mathsf{E}(\phi;is,h)}\Big|\mathrm{d}s\\
&=\Big(\sum_{\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f_1*f_1^*)\phi;is,g)\overline{\mathsf{E}(\phi;is,g)}\mathrm{d}s\Big)^{1/2}\\
&\quad\times\Big(\sum_{\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\mathsf{E}(\pi_{is}(D)\pi_{is}(f_2^**f_2)\phi;is,h)\overline{\mathsf{E}((\pi_{is}(D))^*\phi;is,h)}\mathrm{d}s\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

が導ける。したがって、(6.8) と (6.9) と $\mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}$ の部分と Hölder の不等式によって次の不等式を得る。

$$
\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|(X_2K_{G,\chi})(g,h)|\ \leqslant\ \sum_{(f_1,f_2)}\Big(K_{G,1}(g,g)\Big)^{1/2}\Big((X_1X_2^*K_{G,2})(h,h)\Big)^{1/2}.
$$

ただし、和 $\sum_{(f_1,f_2)}$ は有限和である。さらに、(6.7) によって、ある正の整数 N_1 と定数 $c_X(f)$ について、

$$
\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|(X_2K_{G,\chi})(g,h)|\ \leqslant\ c_X(f)\,||g||^{N_1}\,||h||^{N_1}
$$

が成り立つ。そして、補題 74 より

$$\begin{aligned}\sup_{h\in\mathfrak{S}^1}\Big(||h||^N\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,h)|\Big) &< \sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\Big(||h||^{-N_0}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|\sum_l((X_l)_2K_{G,\chi})(g,h)|\Big)\\ &\leqslant \sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\Big(\sum_l||h||^{-N_0}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|((X_l)_2K_{G,\chi})(g,h)|\Big)\\ &\leqslant \sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\Big(\sum_l||h||^{-N_0}\,c_{X_l}(f)\,||g||^{N_1}\,||h||^{N_1}\Big)\\ &\leqslant (\sum_l c_{X_l}(f))\,||g||^{N_1}\end{aligned}$$

を得る。最後に $g=h$ とすれば、

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,g)|\leqslant \mathrm{constant}\times||g||^{N_1-N}\,,\quad {}^\forall g\in\mathfrak{S}^1$$

が成り立つ。N は任意なので十分大きい自然数とすれば、この定理が従う。 □

補題 77. T を十分大きい正の実数とする。任意の $\chi\in\mathfrak{X}^G$ について、

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|\,k_\chi^T(g,f)-(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,g)\,|\,\mathrm{d}^1g=0$$

が成り立つ。ただし、T の大きさは f のサポートにのみ依存している。

Proof. まず $\chi=(G,\pi)$ のときは、定義より明らかに成り立つ。そのため、$\chi=(P,[\mu])$ として等式を証明しよう。定義より、$K_{G,\chi}(\delta g,h)=K_{G,\chi}(g,h)$, ${}^\forall\delta\in G(F)$ と $K_{P,\chi}(g,h)=\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}K_{P,\chi}(g,nh)\mathrm{d}n$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}&k_\chi^T(g,f)-(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,g)\\ &=\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\{\,K_{G,\chi}(\delta g,n\delta g)-K_{P,\chi}(\delta g,n\delta g)\,\}\mathrm{d}n\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\end{aligned}$$

を得る。もし $\mu\neq\check{\mu}$ ならば $\sigma=\mu+\check{\mu}$ と置き、もし $\mu=\check{\mu}$ ならば $\sigma=\mu$ と置く。指標の直交性より

$$K_{P,\chi}(g,h)=\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}K_P(g,mh)\,\sigma(m)\,\mathrm{d}m$$

が成り立つ。命題 6 から $\phi\in\mathbf{H}_\mu^0$ について $\phi_1=M(s)\phi\in\mathbf{H}_{\check{\mu}}^0$ とおくと

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\mathsf{E}(\phi,is,ng)\,\mathrm{d}n=\phi^{(is)}(g)+\phi_1^{(-is)}(g)\,,\quad g\in G(\mathbb{A})^1$$

が成り立つのだから、g, $h\in G(\mathbb{A})^1$ を固定した状態で $m\in M(\mathbb{A})^1$ について

$$\begin{aligned}&\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{\mathbb{R}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is,g)\,\overline{\mathsf{E}(\phi;is,nmh)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}n\\ &=\int_{\mathbb{R}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is,g)\,\overline{\phi^{(is)}(h)}\,\mathrm{d}s\times\overline{\mu(m)}+\int_{\mathbb{R}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is,g)\,\overline{\phi_1^{(-is)}(h)}\,\mathrm{d}s\times\overline{\check{\mu}(m)}\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、これらの等式と指標の直交性とカスプ条件より

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}K_{G,\chi}(g,nh)\mathrm{d}n=\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}K_{G,\chi}(g,nmh)\,\sigma(m)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}m$$

を得る。つまり

$$k_\chi^T(g,f)-(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,g)=\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}$$
$$\{\,K_G(\delta g,nm\delta g)-K_P(\delta g,nm\delta g)\,\}\,\sigma(m)\mathrm{d}n\mathrm{d}^1m\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

が導ける。そして、

$$K_P(g,nh)=\sum_{n_2\in N(F)}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M(F)}f(g^{-1}\gamma n_2n_1nh)\mathrm{d}n_1$$

となるから、変数変換 $n_1\to n_1n^{-1}$ により

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\{\,K_G(g,nh)-K_P(g,nh)\,\}\mathrm{d}n=\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in G(F)-P(F)}f(g^{-1}\gamma nh)\mathrm{d}n$$

と変形できる。これらの等式より

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|\,k_\chi^T(g,f)-(\Lambda_2^TK_{G,\chi})(g,g)\,|\,\mathrm{d}^1g$$
$$\leqslant\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\left|\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in G(F)-P(F)}f(g^{-1}\gamma nmg)\,\sigma(m)\mathrm{d}n\mathrm{d}^1m\right|$$
$$\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1g$$

を得る。この不等式と定理64の証明での (6.2) に関する議論から、この補題がすぐに従う。 □

補題77より十分大きい T について

$$J_\chi^T(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}k_\chi^T(g,f)\mathrm{d}^1g=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}(\Lambda_2^TK_{G,\chi})(g,g)\mathrm{d}^1g$$

が成り立つ。そのため、定理76と補題77より次の定理を得る。

定理 78. T を十分大きい正の実数とする。このとき、

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_\chi^T(g,f)|\,\mathrm{d}^1g<+\infty$$

が成り立つ。ただし、T の大きさは f のサポートにのみ依存している。

この定理により、

$$J^T(f)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}J_\chi^T(f)$$

を得る。

6.3.4. 明示的公式. $\mu\in\mathfrak{X}^M$ に対して $\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}$ 上の線型作用素 $\pi_{is}(f)$ のトレースは

$$\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}})=\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\phi\rangle_{\mathbf{K}}$$

と定義される。他のトレースも同様に定義される。

命題 79. T を十分大きい正の実数とする。$\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\neq\mu_2$ のとき、

$$J_\chi^T(f)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}})\mathrm{d}s+\frac{T}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}})\mathrm{d}s$$

が成り立つ。

Proof. 補題 77 より十分大きい T について

$$J_\chi^T(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \frac{1}{8\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi; is, g)\overline{\Lambda^T\mathsf{E}(\phi; is, g)}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}^1 g$$

となることに注意して、内積

$$\langle \mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi; is) \,|\, \Lambda^T\mathsf{E}(\phi; is)\rangle_G\,, \quad \phi\in\mathbf{H}^0$$

を計算することから始めよう。$\mathrm{Re}(s)>1$ の場合、

$$\Lambda^T E(\phi^{(s)}:g) = E(\phi^{(s)}:g) - \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} E(\phi^{(s)})_P(\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

となるので、$E(\phi^{(s)}:g)$ の定義と命題 6 より

$$\Lambda^T E(\phi^{(s)}:g) = \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \{\phi^{(s)}(\delta g)\{1-\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\} - (M(s)\phi^{(s)})(\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\}$$

が従う。さらに命題 14 の証明より、$\mathrm{Re}(s_2)>\mathrm{Re}(s_1)>1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\langle E(R(f)\phi^{(s_1)}) \,|\, \Lambda^T E(\phi^{(\overline{s_2})})\rangle_G \times \mathrm{vol}_M^{-1}\\
&= \langle E(R(f)\phi^{(s_1)})_P \,|\, \phi^{(\overline{s_2})}\,\{1-\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\}\rangle_P \times \mathrm{vol}_M^{-1}\\
&\quad - \langle E(R(f)\phi^{(s_1)})_P \,|\, (M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})})\,\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\rangle_P \times \mathrm{vol}_M^{-1}\\
&= \langle R(f)\phi^{(s_1)} \,|\, \phi^{(\overline{s_2})}\,\{1-\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\}\rangle_P \times \mathrm{vol}_M^{-1}\\
&\quad + \langle M(s_1)R(f)\phi^{(s_1)} \,|\, \phi^{(\overline{s_2})}\,\{1-\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\}\rangle_P \times \mathrm{vol}_M^{-1}\\
&\quad - \langle R(f)\phi^{(s_1)} \,|\, (M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})})\,\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\rangle_P \times \mathrm{vol}_M^{-1}\\
&\quad - \langle M(s_1)R(f)\phi^{(s_1)} \,|\, (M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})})\,\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\rangle_P \times \mathrm{vol}_M^{-1}\\
&= \langle R(f)\phi^{(s_1)} \,|\, \phi^{(\overline{s_2})}\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{2^{-1}(s_1+s_2)T}}{2^{-1}(s_1+s_2)} + \langle M(s_1)R(f)\phi^{(s_1)} \,|\, \phi^{(\overline{s_2})}\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{2^{-1}(-s_1+s_2)T}}{2^{-1}(-s_1+s_2)}\\
&\quad - \langle R(f)\phi^{(s_1)} \,|\, M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})}\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{-2^{-1}(-s_1+s_2)T}}{2^{-1}(-s_1+s_2)} - \langle M(s_1)R(f)\phi^{(s_1)} \,|\, M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})}\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{-2^{-1}(s_1+s_2)T}}{2^{-1}(s_1+s_2)}
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで解析接続を用いると、$s_1=-s_2=is\neq 0$, $s\in\mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\langle \mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi; is) \,|\, \Lambda^T\mathsf{E}(\phi; is)\rangle_G \times \mathrm{vol}_M^{-1}\\
&= \lim_{t\to 0}\langle \frac{e^{itT}\mathsf{M}(-it+is) - e^{-itT}\mathsf{M}(it+is)}{it}\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(-it+is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\\
&\quad - \langle \mathsf{M}(is)\pi_{is}(f)\phi\,,\phi\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{-isT}}{is} + \langle \pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{isT}}{is}\\
&= 2T\,\langle \pi_{is}(f)\phi\,,\phi\rangle_{\mathbf{K}} - 2\,\langle \mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)\phi\,,\phi\rangle_{\mathbf{K}}\\
&\quad + \frac{e^{isT}}{is}\,\langle \pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}} - \frac{e^{-isT}}{is}\,\langle \pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

を得る。この命題の $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ と $\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}$ に対して、$\mu\neq\check{\mu}$ なので $M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1$ 上の積分と指標の直交性を用いれば、$\langle \pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}} = \langle \pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}} = 0$ が従う。よって、等式 (6.10) よりこの命題の等式が得られる。 □

命題 80. T を十分大きい正の実数とする。$\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1=\mu_2$ のとき、

$$J_\chi^T(f)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\mathrm{d}s+\frac{T}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathsf{M}(0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})+\int_{G(\mathbb{A})^1}f(g)\,\mu_1(\det g)\,\mathrm{d}^1g$$

が成り立つ。

Proof. 等式 (6.10) より $\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}$ に対して

$$\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\Big\{\frac{e^{isT}}{is}\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\frac{e^{-isT}}{is}\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\Big\}\mathrm{d}s=2\pi\,\mathrm{tr}(\mathsf{M}(0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})$$

を十分大きい T に対して示せば、この命題が従う。この等式の左辺の有限和の中を

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{isT}-e^{-isT}}{is}\,\langle\mathsf{M}(-is)\pi_{is}(f)\phi\,,\,\phi\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s \tag{6.11}$$
$$+\int_{\mathbb{R}}\big\{\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\big\}\,\frac{e^{-isT}}{is}\,\mathrm{d}s$$

と補題 81 より変形できる。この第一項について考えよう。

$$v_1(\phi;s)=\langle\mathsf{M}(-is)\pi_{is}(f)\phi\,,\,\phi\rangle_{\mathbf{K}}$$

とする。補題 81 より $v_1(s)$ は連続かつ可積分である。ここで、$\mathbb{R}$ 上の Schwartz 関数 $v(s)$ で $v_1(0)=v(0)$ となるものを考える。

$$w(\phi;t)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ist}-e^{-ist}}{is}v(\phi;(2\pi)^{-1}s)\,\mathrm{d}s$$

と置く。よって、

$$w'(\phi;t)=\int_{\mathbb{R}}(e^{ist}+e^{-ist})\,v(\phi;(2\pi)^{-1}s)\,\mathrm{d}s=2\pi\int_{\mathbb{R}}(e^{2\pi ist}+e^{-2\pi ist})\,v(\phi;s)\,\mathrm{d}s$$
$$=2\pi\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}$$

となる。そして、

$$w(\phi;T)=2\pi\int_0^T\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s=2\pi v(\phi;0)-2\pi\int_T^\infty\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s$$

となる。$v(\phi;0)=v_1(\phi;0)=\langle\mathsf{M}(0)\pi_0(f)\phi\,,\phi\rangle_{\mathbf{K}}$ なので、

$$\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}v_1(\phi;s)\frac{e^{isT}-e^{-isT}}{is}\mathrm{d}s \tag{6.12}$$
$$=2\pi\,\mathrm{tr}(\mathsf{M}(0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})+\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\{v_1(\phi;s)-v(\phi;s)\}\frac{e^{isT}-e^{-isT}}{is}\mathrm{d}s$$
$$-2\pi\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_T^\infty\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s$$

が成り立つ。一方、T とは別の任意の十分大きい T_0 について、定義より

$$\begin{aligned}
J_\chi^T(f)-J_\chi^{T_0}(f)=&\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} K_{P,\chi}(g,g)\{-\widehat{\tau}_P(H(g)-T)+\widehat{\tau}_P(H(g)-T_0)\}\,\mathrm{d}^1 g\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\mathrm{d}s\times(T-T_0)
\end{aligned}$$

を得る。したがって、この差と (6.10) と (6.11) と (6.12) から、任意の十分大きい T と T_0 について

$$\begin{aligned}
0=&\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\big\{\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\big\}\,\frac{e^{-isT}-e^{-isT_0}}{is}\,\mathrm{d}s\\
&+\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\{v_1(\phi;s)-v(\phi;s)\}\frac{e^{isT}-e^{-isT}-e^{isT_0}+e^{-isT_0}}{is}\mathrm{d}s\\
&-2\pi\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_T^{T_0}\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

を得る。補題 81 と $v_1(0)=v(0)$ より、関数

$$\frac{\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}}{is}\,,\quad\frac{v_1(\phi;s)-v(\phi;s)}{is}$$

はどちらも $\mathbb{R}$ 上に拡張でき、$\mathbb{R}$ 上の可積分関数である。可積分関数 $w_1(s)$ について、そのフーリエ変換 $\int_{\mathbb{R}}w_1(s)e^{isT_0}\mathrm{d}s$ は $T_0\to\infty$ とすると 0 に収束することが知られている。その結果、上の等式において、$T_0\to\infty$ とすることができて、十分大きい任意の T について

$$\begin{aligned}
0=&\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\big\{\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\big\}\,\frac{e^{-isT}}{is}\,\mathrm{d}s\\
&+\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\{v_1(\phi;s)-v(\phi;s)\}\frac{e^{isT}-e^{-isT}}{is}\mathrm{d}s-2\pi\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_T^{\infty}\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、命題の等式を示すことができた。 □

補題 81. $\phi\in\mathbf{H}_\mu^0$ について $v_1(s)=\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}$, $v_2(s)=\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}$ とおく。$\mathbb{R}$ 上の関数 $v_1(s)$ と $v_2(s)$ は $\mathbb{R}$ 上連続である。さらに、任意の $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して、ある正の定数 c_m が存在して $|v_1(s)|<c_m\times(1+|s|)^{-m}$, $|v_2(s)|<c_m\times(1+|s|)^{-m}$ が成り立つ。

Proof. 関数 $v_1(s)$ と $v_2(s)$ が連続であることは命題 16 から明らかなので、可積分であることを示そう。どちらも同様に示せるので $v_1(s)$ についてのみ証明する。素点 $v\in\Sigma_\infty$ を一つ固定して、その素点 v 上のカシミール元を $\Omega\in U(\mathfrak{g})$ とする。カシミール元については [33] を参照されたい。このとき、$\pi_{is}(\Omega)\phi^{(is)}=\lambda(is)\,\phi^{(is)}$ を満たす 2 次の多項式 $\lambda(s)$ が存在する。したがって、$M(\mathbb{A})^1\mathbf{K}$ 上 $\phi^{(is)}=\phi$ なので、任意の $l,\,m\in\mathbb{Z}_{>0}$ について

$$\begin{aligned}
\lambda(is)^m v_1(s)=&\lambda(is)^m\,\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}=\langle\pi_{is}(f)\,\lambda(is)^m\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\,\phi\rangle_{\mathbf{K}}\\
=&\langle\pi_{is}(f)\pi_{is}(\Omega)^m\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}
\end{aligned}$$

を得る。よって、$v_1(s)=\lambda(is)^{-m}\,\langle\pi_{is}(f_m)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}$ が成り立つ。ただし、$f_m=R(\Omega^m)f$ である。π_{is} はユニタリー表現だから $\|\pi_{is}(f_m)\phi\|_{\mathbf{K}}\leqslant\|f_m\|_{G(\mathbb{A})^1,1}\|\phi\|_{\mathbf{K}}$ である。更に、作用素

$\mathsf{M}(is)$ もユニタリー (命題 16 (6)) だから、

$$\begin{aligned}|\lambda(is)^{-m}\, v_1(s)| &= |\langle \pi_{is}(f_m)\phi, \mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}| \\ &\leqslant \|\pi_{is}(f_m))\phi\|_{\mathbf{K}}\, \|\mathsf{M}(is)\phi\|_{\mathbf{K}} \\ &\leqslant \|f_m\|_{G(\mathbb{A})^1,1}\|\phi\|_{\mathbf{K}}^2\end{aligned}$$

となり s について有界になる。従って、任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ について $|v_1(s)| < \mathrm{constant}\times(1+|s|)^{-m}$ が従う。 □

6.4. **まとめ.** テスト関数 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を任意に一つ固定する。定理 64、67、78 を合わせると、十分大きい T について

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} J_\chi^T(f)$$

と幾何サイドの展開とスペクトルサイドの展開の等式が得られる。この等式と $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ と $J_\chi^T(f)$ の明示的公式 (命題 68、69、70、79、80) を合わせて GL(2) の跡公式が完成した。これよりこの公式の意味や使い方や改良について考えよう。

R_{cus} は $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ への $(R, \mathcal{L}^2)$ の制限とする。ある $\mu \in \mathfrak{X}^M$ によって $\chi = (P, [\mu])$ となるような $\mathfrak{X}^G$ の元全体を $\mathfrak{X}_P$ と書く。このとき、等式

$$\mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f) - \sum_{\chi\in\mathfrak{X}_P} J_\chi^T(f) \tag{6.13}$$

を得る。GL(2) の跡公式を使う我々の主な目的は $\mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f)$ を調べることにある。そのため、以後、等式 (6.13) の右辺を応用し易い形に変形していくことになる。命題 68、69、70、79、80 により、十分大きい T に関して (6.13) の右辺は T の一次の多項式であることが分かる。(6.13) の左辺は T に関係ない定数なので、当然、右辺の T の係数はキャンセルして 0 になる。$\mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f)$ に関係する部分のみが必要なのだから T の部分は必要ない。そのため、各 $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ と $J_\chi^T(f)$ を T の多項式とみて $T = 0$ を代入したものを考えればよい。つまり、T の多項式とみて

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = J_{\mathfrak{o}}^0(f)\,, \quad J_\chi(f) = J_\chi^0(f)$$

と置く。$\mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f)$ を調べることを目的として、これまでの結果は次のようにまとめられる。

定理 82. 任意の関数 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ について等式

$$\mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f) - \sum_{\chi\in\mathfrak{X}_P} J_\chi(f)$$

が成り立つ。そして、右辺の各項は次のように与えられる。楕円元 $\gamma \in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(F)}$ について

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma) \int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}$$

である。双曲元 $\gamma \in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(F)}$ について

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \frac{1}{2} \sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}} \mathrm{vol}_M \int_{\mathbf{K}} \int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1}n^{-1}\delta n k)\,(-H(wn))\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k$$

である。中心元 $z \in Z(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{z\} \cup \{z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{G(F)}$ について

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \mathrm{vol}_G\, f(z) + \mathrm{vol}_Z \lim_{s\to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1) \int_{\mathbb{A}^\times} F_z(a)\,|a|_{\mathbb{A}}^s\,\mathrm{d}^\times a$$

である。ただし、$F_z(u)=\int_{\mathbf{K}} f(k^{-1}z\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}k)\mathrm{d}k$ と定めた。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu\neq\check{\mu}$ について

$$J_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}})\mathrm{d}s$$

である。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_1)$ について

$$\begin{aligned}J_\chi(f)=&-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\mathsf{M}(0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})+\int_{G(\mathbb{A})^1}f(g)\,\mu_1(\det g)\,\mathrm{d}^1g\end{aligned}$$

である。

T の係数について少し考えておこう。(6.13) の右辺でキャンセルして零になる理由はなんだろうか？

$$f^P(m)=\delta(m)^{1/2}\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})}f(k^{-1}mnk)\mathrm{d}n\mathrm{d}k\,,\quad m\in M(\mathbb{A})$$

により $f^P\in C_c^\infty(M(\mathbb{A}))$ を定義する。このように記号を定まると、

$$\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})=\int_{M(\mathbb{A})^1}\int_{(\mathbb{R}^\times)^0}f^P(m\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix})\,\mu(m)\,a^{is/2}\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}^\times a$$

と書けることに注意しよう。命題 69 と 70 より $\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ の T の係数は

$$\mathrm{vol}_M\sum_{\gamma\in M(F)}f^P(\gamma)$$

となる。そして、命題 79 と 80 より $\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}J_\chi^T(f)$ の T の係数は

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\int_{\mathbb{R}}\int_{(\mathbb{R}^\times)^0}\int_{M(\mathbb{A})^1}f^P(m\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix})\,\mu(m)\,a^{is/2}\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}s$$

となる。つまり s と a によるフーリエ逆変換と $M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1$ のポアソン和公式 (cf. (2.2)) によって、(6.13) の右辺の T の係数がキャンセルして零になることが分かる。逆に、T の係数のキャンセルによって得られる等式は、$M=\mathrm{GL}(1)\times\mathrm{GL}(1)$ の跡公式であることが分かった。

6.5. **テスト関数への仮定.** 定理 82 の右辺をより扱い易い形に変えていこう。

仮定 83. テスト関数 $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を $f_v\in\mathcal{H}(G(F_v))$ によって

$$f=\prod_{v\in\Sigma}f_v$$

と与える。

この仮定 83 の下では幾何サイドの $J_{\mathfrak{o}}(f)$ の積分は各素点上の積分に分解される。特にほとんどすべての有限素点において f_v は $\mathbf{K}_v$ の特性関数であることに注意しよう。

スペクトルサイドの $G(\mathbb{A})^1$ の表現を各素点に綺麗に分解するために上と異なるテスト関数への仮定を考えよう。$J^T(f)$ や $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$, $J_\chi^T(f)$ の定義を見れば分かるように、それらは f の $G(\mathbb{A})^1$ 上の値にしか依存していない。**そのため、$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の元と $G(\mathbb{A})^1$ 上で一致するような $G(\mathbb{A})$ 上の任意の関数 f について、このセクションのこれまでの結果が成り立つ。**空間 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ を

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)=\{f'|_{G(\mathbb{A})^1}\mid f'\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))\}$$

によって定義する。

仮定 84. $f_1 \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ が $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ によって $f_1 = \prod_{v\in\Sigma} f_v$ と与えられるとする。そして、テスト関数 f を

$$f(g) = \int_{Z_\infty^+} f_1(xg)\,\mathrm{d}^\times x\,, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

によって定義する。

この仮定 84 のテスト関数 f は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ に属することが次のように示せる。つまり

$$f|_{G(\mathbb{A})^1} = f'$$

を満たす $f' \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ の存在を示そう。Z_∞^+ と $(\mathbb{R}^\times)^0$ を同一視して、$r(1) = 1$ を満たす $r \in C_c^\infty(Z_\infty^+)$ を一つ取って、

$$f_1'(g) = r(|\det g|_{\mathbb{A}})\, f(g)\,, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

と置く。明らかに $f_1' \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ であり、$f' = f_1'|_{G(\mathbb{A})^1} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ とすると $f|_{G(\mathbb{A})^1} = f'$ が成り立つ。よって仮定 84 の f は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ の元と $G(\mathbb{A})^1$ 上同一視できるので、**仮定 84 を満たすテスト関数 f に対して、このセクションのこれまでの結果が成り立つ。**この仮定のメリットは $G(\mathbb{A})^1$ 上の表現を各素点 v 上の表現の積にそのまま分解できることにある。例として $\pi_s(f)$ の場合について説明しよう。$\mu = (\mu_v) \in \mathfrak{X}^M$ とする。$\mathbf{H}^0_{\mu_v}$ を $\mathbf{H}^0_\mu$ の局所類似として次のように定義する。$G(F_v)$ 上の smooth かつ右 $\mathbf{K}_v$-有限な $\mathbb{C}$ 関数 ϕ_v で等式 $\phi_v(n_v m_v g_v) = \mu_v(m_v)\delta_P(m_v)^{1/2}\phi_v(g_v)$, ${}^\forall m_v \in M(F_v)$, ${}^\forall n_v \in N(F_v)$ を満たすようなもの全体からなら空間を $\mathbf{H}^0_{\mu_v}$ と定める。もちろん、この空間は先に定義した $\mathbf{H}^0_v(\mu, 0)$ と同一である。そして、同じエルミート形式 $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}_v}$ を用いる。$\mathbf{H}_{\mu_v}$ を $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}_v}$ による $\mathbf{H}^0_{\mu_v}$ の完備化して得られるヒルベルト空間とする。次に、$f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ について、

$$[\pi_{s,v}(f_v)\phi_v](g_v) = \int_{G(F_v)} f(h_v)\phi(g_v h_v)\,\delta_P(g_v h_v)^{s/2}\,\delta_P(g_v)^{-s/2}\mathrm{d}h_v$$

と $\pi_{s,v}(f_v)$ を定める。π_s を Z_∞^+ 上の作用を自明なものとして、$G(\mathbb{A})$ 上の表現と同一視しよう。このとき、$\phi = (\phi_v) \in \mathbf{H}^0_\mu$ に対して

$$\pi_s(f)\phi = \int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\pi_s(g)\phi\,\mathrm{d}^1 g = \int_{G(\mathbb{A})} f_1(g)\pi_s(g)\phi\,\mathrm{d}g = \bigotimes_{v\in\Sigma} \pi_{s,v}(f_v)\phi_v$$

と各素点上の表現として分解される。

次のセクションで、仮定 83 または仮定 84 の下で定理 82 の式の右辺を各素点上の積分の形に変形する。大域的な部分と局所的な部分を分けて、局所的な話に持ち込める部分は局所的に調べる方が、応用上好ましい。特に大域的な量と有限個の素点上の積分との積で記述されることに注目してほしい。ただし、楕円元の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ とカスピダルデータ $\chi = (G, \pi)$ の場合に関してはこのノートでは言及しないので、本報告集の [39] を参照されたい。

6.6. $J_\mathfrak{o}(f)$ と $J_\chi(f)$ の改良.

命題 85. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。双曲元 $\gamma \in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(F)}$ を一つ固定する。素点の有限集合 S で Σ_∞ を含み、そして $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v) \neq 1$ であるような素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ も含むものを考える。f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でない、またはある $\delta \in M(F) \cap \mathfrak{o}$ について $\delta \notin \mathbf{K}_v$ となるようなすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ を含むような S が存在する。そして、そのような素点の有限集合 S に対して、

$$\begin{aligned} J_\mathfrak{o}(f) =& \frac{1}{2} \sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}} \sum_{v\in S} \mathrm{vol}_M \int_{\mathbf{K}_v}\int_{N(F_v)} f_v(k_v^{-1}n_v^{-1}\delta n_v k_v)\,(-H(wn_v))\,\mathrm{d}n_v\,\mathrm{d}k_v \\ & \times \prod_{v'\in S-\{v\}} \int_{\mathbf{K}_{v'}}\int_{N(F_{v'})} f_{v'}(k_{v'}^{-1}n_{v'}^{-1}\delta n_{v'} k_{v'})\,\mathrm{d}n_{v'}\,\mathrm{d}k_{v'} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、重み因子 $-H(wn_v)$ は、$n_v = \begin{pmatrix} 1 & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$-H(wn_v) = \begin{cases} \log(1+|x_v|^2) & \textit{if } v \in \Sigma_\infty\,, \\ \max\{0\,,\ \log|x_v|_v^2\} & \textit{if } v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} \end{cases}$$

となる。もしテスト関数 f が仮定 *84* を満たす場合は、上の等式での無限素点 $v_0 \in \Sigma_\infty$ のテスト関数 $f_{v_0}(*)$ を $\int_{Z_\infty^+} f_{v_0}(x*)\,\mathrm{d}^\times x$ に置き換えれば良い。無限素点 v_0 は Z_∞^+ を定義するときに固定した素点である。

Proof. ほとんどすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について f_v は $\mathbf{K}_v$ の特性関数であり、かつ $\delta \in M(F) \cap \mathfrak{o}$ は $\mathbf{K}_v$ に属するので、そのような S の存在は明らか。その条件下において、$v \notin S$ ならば ${}^\forall k_v \in \mathbf{K}_v$ について $f_v(k_v^{-1}n_v^{-1}\delta n_v k_v) = f_v(n_v^{-1}\delta n_v)$ となり、そして、$f_v(n_v^{-1}\delta n_v) = 1$ if $n_v \in \mathfrak{O}_v$, $f_v(n_v^{-1}\delta n_v) = 0$ if $n_v \notin \mathfrak{O}_v$ がすぐに分かる。その結果、この命題の $J_\mathfrak{o}(f)$ の等式が従う。重み因子 $-H(wn_v)$ については直接計算による。 □

命題 86. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。中心元 $z \in Z(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{z\} \cup \{z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{G(F)}$ を一つ固定する。素点の有限集合 S で Σ_∞ を含み、そして $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v) \neq 1$ であるような素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ も含むものを考える。f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でない、または $z \notin \mathbf{K}_v$ となるようなすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ を含むような S が存在する。そして、そのような素点の有限集合 S に対して、

$$\begin{aligned} J_\mathfrak{o}(f) =& \mathrm{vol}_G \prod_{v\in\Sigma} f_v(z) \\ &+ \mathrm{vol}_M \sum_{v \in S} \int_{\mathbf{K}_v} \int_{F_v} f_v(k_v^{-1} z \begin{pmatrix} 1 & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_v)\, \log|x_v|_v \,\mathrm{d}x_v\,\mathrm{d}k_v \\ &\quad \times \prod_{v' \in S-\{v\}} \int_{\mathbf{K}_{v'}} \int_{N(F_{v'})} f_{v'}(k_{v'}^{-1} z n_{v'} k_{v'})\,\mathrm{d}n_{v'}\,\mathrm{d}k_{v'} \\ &+ \mathrm{vol}_Z\, a(S) \prod_{v\in S} \int_{\mathbf{K}_v} \int_{N(F_v)} f_v(k_v^{-1} z n_v k_v)\,\mathrm{d}n_v\,\mathrm{d}k_v \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、定数 $a(S)$ は

$$\zeta_F^S(s) = \prod_{v \notin S} (1-q_v^{-s})^{-1}\,, \quad a(S) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{(s-1)\zeta_F^S(s)\}|_{s=1}}{\prod_{v\in S}(1-q_v^{-1})}$$

と定める。もしテスト関数 f が仮定 *84* を満たす場合は、上の等式での無限素点 $v_0 \in \Sigma_\infty$ のテスト関数 $f_{v_0}(*)$ を $\int_{Z_\infty^+} f_{v_0}(x*)\,\mathrm{d}^\times x$ に置き換えれば良い。

Proof. そして、命題 85 の証明と類似の議論で、

$$\int_{\mathbb{A}^\times} F_z(a)\,|a|_\mathbb{A}^s\,\mathrm{d}^\times a = \zeta_F^S(s) \prod_{v\in S} \int_{\mathbf{K}_v} \int_{F_v^\times} f_v(k_v^{-1} z \begin{pmatrix} 1 & a_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_v)\,|a_v|_v^s\,\mathrm{d}^\times a_v\,\mathrm{d}k_v$$

を得る。局所ゼータ関数 $\zeta_{F,v}(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ で正則なのだから、$\zeta_F^S(s)$ は $s=1$ に一位の極を持つことが分かる。そのため、

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\int_{\mathbb{A}^\times}F_z(a)\,|a|_{\mathbb{A}}^s\,\mathrm{d}^\times a\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{(s-1)\zeta_F^S(s)\}\big|_{s=1}\prod_{v\in S}\int_{\mathbf{K}_v}\int_{F_v^\times}f_v(k_v^{-1}z\begin{pmatrix}1&a_v\\0&1\end{pmatrix}k_v)\,|a_v|_v\,\mathrm{d}^\times a_v\,\mathrm{d}k_v\\
&\quad+\mathrm{Residue}_{s=1}\zeta_F^S(s)\sum_{v\in S}\int_{\mathbf{K}_v}\int_{F_v^\times}f_v(k_v^{-1}z\begin{pmatrix}1&a_v\\0&1\end{pmatrix}k_v)\,|a_v|_v\log|a_v|_v\,\mathrm{d}^\times a_v\,\mathrm{d}k_v\\
&\qquad\times\prod_{v'\in S-\{v\}}\int_{\mathbf{K}_{v'}}\int_{F_{v'}^\times}f_{v'}(k_{v'}^{-1}z\begin{pmatrix}1&a_{v'}\\0&1\end{pmatrix}k_{v'})\,|a_{v'}|_{v'}\,\mathrm{d}^\times a_{v'}\,\mathrm{d}k_{v'}
\end{aligned}$$

となる。あとは、$\mathrm{d}^\times a_v=(1-q_v^{-1})^{-1}\mathrm{d}a_v$ と

$$\mathrm{Residue}_{s=1}\zeta_F^S(s)\times\prod_{v\in S}(1-q_v^{-1})^{-1}=\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)$$

に気をつければ命題が従う。 □

定義 57 において、$\mu_v\in\mathfrak{X}_v^M$ について正規化された絡作用素 $R_v(\mu_v,s)$ が定義された。$\mu=(\mu_v)\in\mathfrak{X}^M$ について、

$$R(\mu,s)=\bigotimes_{v\in\Sigma}R(\mu_v,s)\,,\quad m(\mu,s)=\epsilon(\mu_1\mu_2^{-1}|\;|_{\mathbb{A}}^s\,,\,\psi_F)\,\frac{L(\mu_1\mu_2|\;|_{\mathbb{A}}^{s+1})}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\;|_{\mathbb{A}}^s)}$$

と置く。このとき、$M(\mu,s)=M(s)|_{(\pi_s,\mathbf{H}_\mu)}$ とすると、$M(\mu,s)=m(\mu,s)\,R(\mu,s)$ である。

命題 87. テスト関数 f は仮定 *84* を満たすとする。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\neq\mu_2$, $\mu_1=(\mu_{1,v})$, $\mu_2=(\mu_{2,v})$ を一つ固定する。素点の有限集合 S で Σ_∞ を含み、そして $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v)\neq1$ であるような素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ も含むものを考える。f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でない、もしくは $\mu_{1,v}$ または $\mu_{2,v}$ が分岐しているようなすべての素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ を含むような S が存在する。そして、そのような素点の有限集合 S に対して、

$$\begin{aligned}
J_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{\xi=(\xi_v)=\mu\text{ or }\check{\mu}}&\Big\{\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\xi,is)}{m(\xi,is)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})\,\mathrm{d}s\\
&+\sum_{v\in S}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,R_v(\xi_v,is)^{-1}R_v'(\xi_v,is)\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})\prod_{v'\in S-\{v\}}\mathrm{tr}(\pi_{is,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\xi_{v'}}})\,\mathrm{d}s\Big\}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. $M(\xi,s)=m(\xi,s)\otimes_{v\in\Sigma}R_v(\xi_v,s)$ と $M(\xi,-s)=\dfrac{1}{m(\xi,s)}\,R(\xi,s)^{-1}$ が成り立つので、

$$M(\xi,-s)M'(\xi,s)=\frac{m'(\xi,s)}{m(\xi,s)}\,\mathrm{id}+\sum_{v\in\Sigma}R_v(\xi_v,s)^{-1}R_v'(\xi_v,s)\otimes_{v'\neq v}\mathrm{id}_{v'}$$

が成り立つ。よって、あとは各素点 $v\notin S$ におけるトレースを考えれば良い。素点 $v\notin S$ とする。このとき、f_v は $\mathbf{K}_v$ の特性関数であり $\mu_{1,v}$ と $\mu_{2,v}$ は不分岐である。この場合、$\mathbf{H}_{\xi_v}$ における $\pi_{is,v}$ の $\mathbf{K}_v$-不変ベクトル全体の部分空間の次元は 1 であることが知られている。そこで、$\mathbf{K}_v$-不変ベクトル ϕ_0 を含むような $\mathbf{H}_{\xi_v}$ の正規直交基底 $\mathcal{B}_{\xi_v}$ を考える。任意の $\phi\in\mathcal{B}_{\xi_v}$, $\phi\neq\phi_0$ について $\pi_{is,v}(f_v)\phi$ は $\mathbf{K}_v$-不変かつ $\langle\pi_{is,v}(f_v)\phi\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}=\langle\phi\,,\,\pi_{is,v}(f_v)\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}=\langle\phi\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}=0$

なので、$\pi_{is,v}(f_v)\phi=0$ となる。したがって $v\notin S$ ならば $\mathrm{tr}(\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})=1$ を得る。また系 58 より

$$\begin{aligned}&\langle R_v(\xi_v,is)^{-1}R'_v(\xi_v,is)\pi_{is,v}(f_v)\phi_0\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}=\langle R_v(\xi_v,is)^{-1}R'_v(\xi_v,is)\phi_0\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle R_v(\xi_v,is)^{-1}R_v(\xi_v,is+it)\phi_0\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle R_v(\xi_v,is)^{-1}\phi_0\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}\Big|_{t=0}=0\end{aligned}$$

を得る。これらの値よりこの命題の仮定 84 に関する部分が従う。 □

命題 88. テスト関数 f は仮定 *84* を満たすとする。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_1)$, $\mu_1=(\mu_{1,v})$ を一つ固定する。素点の有限集合 S で Σ_∞ を含み、そして $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v)\neq 1$ であるような素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ も含むものを考える。f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でない、または $\mu_{1,v}$ が分岐しているようなすべての素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ を含む S が存在する。そして、そのような素点の有限集合 S に対して、

$$\begin{aligned}J_\chi(f)=&-\frac{1}{4\pi}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\mu,is)}{m(\mu,is)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mathrm{d}s\\&\qquad+\sum_{v\in S}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,R_v(\mu_v,is)^{-1}R'_v(\mu_v,is)\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\prod_{v'\in S-\{v\}}\mathrm{tr}(\pi_{is,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\mu_{v'}}})\,\mathrm{d}s\Big\}\\&+\frac{1}{4}\,m(\mu,0)\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(R_v(\mu_v,0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})+\prod_{v\in S}\int_{G(F_v)}f_v(g)\,\mu_{1,v}(\det g_v)\,\mathrm{d}g_v\end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. 命題 87 の証明と同様の議論により証明される。 □

テスト関数 f が仮定 83 を満たす場合にも、命題 87 と 88 と同様に各素点上の積分の積の形にすることができる。そのためには、Z_∞^+ の作用を考える必要がある。$\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度 $\mathrm{d}r$ を取り、$t\in\mathbb{R}$ について

$$f_t=f_{v_0,t}\prod_{v\neq v_0}f_v\,,\quad f_{v_0,t}(g)=\int_{\mathbb{R}}f_{v_0}(e^rg)\,e^{2\pi irt}\,\mathrm{d}r$$

と関数 f_t と $f_{v_0,t}$ を定義する。次に $G(\mathbb{A})$ の $\mathbf{H}_\mu$ 上のユニタリ表現 $\pi_{is,it}$ を

$$\pi_{is,it}(\varphi)=\int_{G(\mathbb{A})}\varphi(g)e^{\pi it\,\log|\det g|_{\mathbb{A}}}\,\pi_{is}(g)\mathrm{d}g\,,\quad \varphi\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

によって定義する。また各素点 $v\in\Sigma$ についても同様に

$$\pi_{is,it,v}(\varphi_v)=\int_{G(F_v)}\varphi_v(g_v)\,e^{\pi it\,\log|\det g_v|_v}\,\pi_{is,v}(g_v)\,\mathrm{d}g_v\,,\quad \varphi_v\in\mathcal{H}(G(F_v))$$

と $\mathbf{H}_{\mu_v}$ 上のユニタリ表現 $\pi_{is,it,v}$ を定義する。こうすると、$\phi=\otimes_v\phi_v\in\mathbf{H}_\mu=\otimes_v\mathbf{H}_{\mu_v}$ について

$$\mathrm{tr}(\pi_{is}(f_t)|_{\mathbf{H}_\mu})=\prod_{v\in\Sigma}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})$$

が成り立つことがすぐにわかる。また、フーリエ逆変換により

$$\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\pi_{is}(f_t)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})$$

が成り立つことに注意する。その結果、命題 87 の証明と同様の議論で、以下の命題を得る。

命題 89. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\neq\mu_2$, $\mu_1=(\mu_{1,v})$, $\mu_2=(\mu_{2,v})$ を一つ固定する。そして、命題 *87* と同じ素点の有限集合 S に対して、

$$J_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{\xi=(\xi_v)=\mu\text{ or }\tilde{\mu}}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\xi,is)}{m(\xi,is)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{v\in S}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,R_v(\xi_v,is)^{-1}R_v'(\xi_v,is)\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})\prod_{v'\in S-\{v\}}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\xi_{v'}}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big\}$$

が成り立つ。

命題 90. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_1)$, $\mu_1=(\mu_{1,v})$ を一つ固定する。そして、命題 *88* と同じ素点の有限集合 S に対して、

$$J_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\mu,is)}{m(\mu,is)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{v\in S}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,R_v(\mu_v,is)^{-1}R_v'(\mu_v,is)\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\prod_{v'\in S-\{v\}}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\mu_{v'}}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big\}$$
$$+\frac{1}{4}\,m(\mu,0)\int_{\mathbb{R}}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(R_v(\mu_v,0)\pi_{0,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\mathbb{R}}\prod_{v\in S}\int_{G(F_v)}f_v(g)\,\mu_{1,v}(\det g_v)\,e^{\pi it\log|\det g_v|_v}\,\mathrm{d}g_v\,\mathrm{d}t$$

が成り立つ。

7. 応用に関連した公式

このセクションでは、前セクションで与えられた GL(2) の跡公式より導かれる応用上有用な公式をいくつか紹介する。特にこれらの公式は本報告集の伊吹山 [20] と都築 [39] で用いられる。

7.1. **Simple trace formula.** まず [39] の Jacquet-Langlands 対応の証明で用いられる「Simple trace formula」について説明しよう。

任意の素点 $v\in\Sigma$ と $f_v\in C_c^\infty(G(F_v))$ について

$$f_v^P(m_v)=\delta_P(m_v)^{1/2}\int_{\mathbf{K}_v}\int_{N(F_v)}f(k_v^{-1}m_vn_vk_v)\,\mathrm{d}n_v\,\mathrm{d}k_v\,,\quad m_v\in M(F_v)$$

によって $f_v^P\in C_c^\infty(M(F_v))$ が定義される。$\mu_v\in\mathfrak{X}_v^M$ と $\pi_{is,v}$ について

$$\mathrm{tr}(\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})=\int_{M(F_v)}f_v^P(m_v)\,\mu_v(m_v)\,\delta_P(m_v)^{is/2}\,\mathrm{d}m_v$$

が成り立つことに注意する。そして、f_v がカスピダルであるとは、任意の $\mu_v\in\mathfrak{X}_v^M$ について

$$\int_{M(F_v)}f_v^P(m_v)\,\mu_v(m_v)\,\mathrm{d}m_v=0$$

となることを意味する。

$\mathrm{d}\mu_v$ を $\mathfrak{X}_v^M$ 上のハール測度とする。任意の $\varphi\in C_c^\infty(M(F_v))$ についてフーリエ逆変換

$$\varphi(m_v')=\int_{\mathfrak{X}_v^M}\int_{M(F_v)}\varphi(m_v)\,\mu_v(m_v)\,\mathrm{d}m_v\,\mu_v(m_v')^{-1}\mathrm{d}\mu_v$$

が成り立つことが知られている。ただし、$\mathrm{d}\mu_v$ は上の等式が成り立つように正規化する。

補題 91. $f_v \in C_c^\infty(G(F_v))$ について次の三つの条件は同値となる。

(1) f_v はカスピダルである。
(2) $^\forall\gamma_v \in M(F_v) - Z(F_v)$ について $\int_{\mathbf{K}_v}\int_{N(F_v)} f_v(k_v^{-1}n_v^{-1}\gamma_v n_v k_v)\,\mathrm{d}n_v\,\mathrm{d}k_v = 0$ が成り立つ。
(3) $^\forall\gamma_v \in M(F_v) - Z(F_v)$ について $f_v^P(\gamma_v) = 0$ が成り立つ。

Proof. (1) ならば (3) であることは、上述のフーリエ逆変換より明らか。(3) ならば (1) は $\int_{M(F_v)-Z(F_v)}\mathrm{d}m_v = \int_{M(F_v)}\mathrm{d}m_v$ より従う。変数変換より (2) と (3) が同値であることが従う。 □

補題 92. $f_v \in C_c^\infty(G(F_v))$ がカスピダルならば、$^\forall z_v \in Z(F_v)$ について $f_v^P(z_v) = 0$ が成り立つ。

Proof. 任意の元 $z_v \in Z(F_v)$ の任意の近傍に $M(F_v)$ の元が存在するので、$f_v^P \in C_c^\infty(M(F_v))$ と補題 91 より明らか。 □

R_{res} を $\mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}$ への $(R,\mathcal{L}^2)$ の制限とする。$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ について、

$$\mathrm{tr}R_{\mathrm{res}}(f) = \sum_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\,\mu(\det g)\,\mathrm{d}^1 g$$

となる。次の定理が Simple trace formula と呼ばれる公式である。

定理 93. テスト関数 f は仮定 *83* または *84* を満たすとする。さらに二つの素点 v_1 と v_2, $(v_1 \neq v_2)$ について、f_{v_1} と f_{v_2} はカスピダルとする。このとき、

$$\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus}}(f) + \mathrm{tr}R_{\mathrm{res}}(f) = \sum_{z\in Z(F)}\mathrm{vol}_G\, f(z) + \sum_{\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)},\,\gamma\text{は楕円}} J_{\mathfrak{o}}(f)$$

が成り立つ。ただし、和において $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(F)}$ は γ が楕円であるような $\mathcal{O}$-同値類全体を走る。

Proof. 定理 82 と命題 85, 86, 87, 88, 89, 90 に補題 91, 92 を合わせれば明らか。 □

さらに、この定理を中心指標ごとの空間に分けよう。ω を $Z_\infty^+ Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})$ 上のユニタリ指標とする。仮定 84 を満たすテスト関数 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ から、関数 $f_\omega \in C^\infty(G(\mathbb{A}))$ を

$$f_\omega(g) = \int_{Z(\mathbb{A})^1} f(zg)\,\omega(z)\,\mathrm{d}^1 z$$

によって定義する。この f_ω は

$$f_\omega(zg) = \omega(z)^{-1} f(g)\,,\quad {}^\forall z \in Z(\mathbb{A})^1$$

を満たし、modulo $Z(\mathbb{A})$ でコンパクトサポートを持つ。$\tilde{G} = Z\backslash G$ と置き、$\mathrm{d}\tilde{g}$ は $Z(\mathbb{A})$ と $G(\mathbb{A})$ 上のハール測度による $\tilde{G}(\mathbb{A})$ 上の商測度とする。$R_\omega(f_\omega)$ の $\mathcal{L}^2(G,\omega)$ 上への作用が

$$R(f_\omega)\phi = \int_{\tilde{G}(F)\backslash\tilde{G}(\mathbb{A})} f_\omega(g)\,R(g)\phi\,\mathrm{d}\bar{g}\,,\quad \phi \in \mathcal{L}^2(G,\omega)$$

で定められる。$R_\omega(f_\omega)$ の $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}(G,\omega)$ への制限を $R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega)$、$\mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}(G,\omega)$ への制限を $R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega)$ とする。明らかに

$$\mathrm{tr}R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega) = \sum_{\mu\in\mathfrak{X}^M,\,\mu^2=\omega}\int_{\tilde{G}(\mathbb{A})} f_\omega(g)\,\mu(\det g)\mathrm{d}\tilde{g}$$

となる。また $\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega)$ が存在することは定理 76 より明らかである。そして、$\gamma \in G(F)$ の $\tilde{G}(F)$ への像の元を $\tilde{\gamma}$ と記述する。

定理 94. テスト関数 f は仮定 *84* を満たすとする。さらに二つの素点 v_1 と v_2, $(v_1 \neq v_2)$ について、f_{v_1} と f_{v_2} はカスピダルとする。そして、$Z_\infty^+ Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})$ 上のユニタリ指標 ω を一つ固定して、上述の通り f より f_ω を定める。このとき、

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega)+\mathrm{tr}R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega)\\ &=\mathrm{vol}(\tilde{G}(F)\backslash\tilde{G}(\mathbb{A}))\,f_\omega(I_2)+\sum_{\{\tilde\gamma\}_{\tilde{G}(F)}\,,\,\gamma\text{は楕円}}\mathrm{vol}(\tilde{G}(F)_\gamma\backslash\tilde{G}(\mathbb{A})_\gamma)\,\iota(\gamma)^{-1}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f_\omega(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}\dot g\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、和において $\{\tilde\gamma\}_{\tilde{G}(F)}$ は γ が楕円であるような $\tilde{G}(F)$ における $\tilde{G}(F)$ 共役類全体を走る。そして、

$$\iota(\gamma)=\begin{cases}1 & \mathit{if}\ -\gamma\notin\{\gamma\}_{G(F)}\\ 2 & \mathit{if}\ -\gamma\in\{\gamma\}_{G(F)}\end{cases}$$

とする。

Proof. $(\pi,\mathcal{V}_\pi)$ を $G(\mathbb{A})^1$ のユニタリー表現とする。有界作用素 $\pi(f):\mathcal{V}_\pi\to\mathcal{V}_\pi$ を

$$\pi(f)=\int_{G(\mathbb{A})^1}f(g)\,\pi(g)\,\mathrm{d}^1g$$

で定義する。π を既約とし、その中心指標を ω_π とする。

$$\pi(f)=\int_{\tilde{G}(\mathbb{A})}\int_{Z(\mathbb{A})}f_1(zg)\,\pi(zg)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tilde g=\int_{\tilde{G}(\mathbb{A})}f_{\omega_\pi}(g)\,\pi(g)\,\mathrm{d}\tilde g$$

が成り立つ。さて、定理 93 により、$m(\pi)$ を $\mathcal{L}_{\mathrm{cus}}\oplus\mathcal{L}_{\mathrm{res}}$ における π の重複度とすると、

$$\sum_{\pi\in\hat{G}(\mathbb{A})}m(\pi)\,\mathrm{tr}\pi(f)=\mathrm{vol}_G\sum_{\zeta\in Z(F)}f(\zeta)+\sum_{\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}}J_{\mathfrak{o}}(f)$$

が成り立つ。もちろん、右辺の $\mathfrak{o}$ の和は楕円のみ走る。$\mathcal{U}$ を $Z_\infty^+Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})$ の一つの基本領域として固定する。そして、$z=(z_v)\in\mathcal{U}$ に対して $f_{v,z}(g_v)=f_v(z_vg_v)$ と置く。これら $f_{v,z}$ より仮定 84 を満たすテスト関数 f_z が得られる。もちろん、$f_z(g)=f(zg)$ となる。この f_z と f を置き換えると、次の式を得る。

$$\sum_{\pi\in\hat{G}(\mathbb{A})}m(\pi)\,\mathrm{tr}\pi(f_z)=\mathrm{vol}_G\sum_{\zeta\in Z(F)}f_z(\zeta)+\sum_{\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}}J_{\mathfrak{o}}(f_z). \tag{7.1}$$

この (7.1) に $\omega(z)$ をかけて $z\in\mathcal{U}$ について積分する。その左辺は

$$\begin{aligned}&\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\{\sum_\pi m(\pi)\,\mathrm{tr}\pi(f_z)\}\,\mathrm{d}z=\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\sum_\pi m(\pi)\,\mathrm{tr}\left(\int_{G(\mathbb{A})^1}f(zg)\,\pi(g)\,\mathrm{d}^1g\right)\mathrm{d}z\\ &=\sum_\pi m(\pi)\mathrm{tr}\left(\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\int_{G(\mathbb{A})^1}f(g)\pi(z^{-1}g)\,\mathrm{d}^1g\,\mathrm{d}z\right)\\ &=\sum_\pi m(\pi)\mathrm{tr}\left(\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\omega_\pi(z^{-1})\mathrm{d}z\int_{G(\mathbb{A})^1}f(g)\pi(g)\,\mathrm{d}^1g\right)\\ &=\mathrm{vol}(\mathcal{U})\sum_{\pi\,,\,\omega_\pi=\omega}m(\pi)\,\mathrm{tr}\pi(f)=\mathrm{vol}(\mathcal{U})\,\{\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega)+\mathrm{tr}R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega)\}\end{aligned}$$

となる。

次に (7.1) に $\omega(z)$ をかけて $z\in\mathcal{U}$ について積分したものの右辺について考える。第一項は

$$\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\,\{\sum_{\zeta\in Z(F)}f(z\zeta)\}\,\mathrm{d}z=\int_{z\in\mathcal{U}}\sum_{\zeta\in Z(F)}\int_{a\in Z_\infty^+}\omega(a\zeta z)\,f_1(a\zeta z)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}z=f_\omega(I_2)$$

より明らか。第二項について考えよう。まず次の注意を与える。楕円元 γ の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ に対して、$z\in Z(F)$ を

$$z\cdot\{\gamma\}_{G(F)}=\{z\gamma\}_{G(F)}$$

と作用させる。これは楕円元からなる $\mathcal{O}$-同値類全体の集合 $\mathcal{O}_{\rm ell}$ への $Z(F)$ の作用を定義する。この作用での $\{\gamma\}_{G(F)}$ の固定部分群を $Z(F)_{\{\gamma\}}$ と書くと、

$$Z(F)_{\{\gamma\}}=\{z\in Z(F)\,|\,z\gamma \text{ と } \gamma \text{ は } G(F) \text{ 共役}\}$$

となる。$z\gamma$ と γ の行列式を比較すれば、$Z(F)_{\{\gamma\}}\subset\{I_2,-I_2\}$ で高々 2 元集合であり、$Z(F)_{\{\gamma\}}$ の位数は上で定めた $\iota(\gamma)$ と一致する。これを踏まえた上で、右辺の第二項は次の様に計算される。

$$\begin{aligned}
&\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\Big\{\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\rm ell}}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot g\Big\}\,\mathrm{d}z\\
&=\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\rm ell}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\sum_{\zeta\in Z(F)/Z(F)_{\{\gamma\}}}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f(zg^{-1}\zeta\gamma g)\,\mathrm{d}\dot g\,\mathrm{d}z\\
&=\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\rm ell}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}\int_{Z(\mathbb{A})/Z(F)_{\{\gamma\}}}\omega(z)f_1(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot g\\
&=\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\rm ell}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\,\iota(\gamma)^{-1}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}\int_{Z(\mathbb{A})}\omega(z)f_1(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot g\\
&=\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\rm ell}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\,\iota(\gamma)^{-1}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f_\omega(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot g.
\end{aligned}$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}(\mathcal{U})\,\{\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega)+\mathrm{tr}R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega)\}\\
&=\mathrm{vol}_G\,f_\omega(I_2)+\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\rm ell}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\,\iota(\gamma)^{-1}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f_\omega(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot g
\end{aligned}$$

を得る。したがって、後は両辺を $\mathrm{vol}(\mathcal{U})$ で割れば、求める公式が得られる。 □

7.2. **ヘッケ作用素の跡についての明示的公式.** このセクションでは、正則カスプ形式の空間上に作用するヘッケ作用素の跡についての明示的公式について説明する。

7.2.1. 不変跡公式. 実素点の表現が離散系列表現であるようなカスピダルデータ $\chi=(G,\pi)$ の情報を跡公式から引き出すためには、表現の指標が不変超関数であることに注目する必要がある。テスト関数 $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ と $g\in G(\mathbb{A})$ に対して関数 f^g を $f^g(h)=f(ghg^{-1})$ で定義する。このとき、$G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現 π のトレースは $\mathrm{tr}\pi(f^g)=\mathrm{tr}\pi(f)$, ${}^\forall g\in G(\mathbb{A})$ という $G(\mathbb{A})$-不変な性質を持つ。しかし、一般には $J_\mathfrak{o}(f^g)=J_\mathfrak{o}(f)$ と $J_\chi(f^g)=J_\chi(f)$ は成り立たない。そのため、各項が $G(\mathbb{A})$-不変な性質を持つように跡公式を変形しよう。

説明の簡略化のため、**このセクションでは、これよりテスト関数 f が仮定 83 を満たすと仮定する。**

楕円元 $\gamma\in G(F)$ による $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ とカスピダルデータ $\chi=(G,\pi)\in\mathfrak{X}^G$ について

$$I_\mathfrak{o}(f)=J_o(f)\,,\quad I_\chi(f)=J_\chi(f)$$

で $I_\mathfrak{o}(f)$ と $I_\chi(f)$ を定義する。

次に双曲元 $\gamma \in G(F)$ による $\mathcal{O}$ 同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(F)}$ について考える。$\widehat{M(\mathbb{A})}$ を $M(\mathbb{A})$ のポントリャーギン双対群とし、$\widehat{M(\mathbb{A})^1}$ を $M(\mathbb{A})^1$ のポントリャーギン双対群とする。$\mathrm{d}\mu$ を $\mathfrak{X}_v^M$ 上のハール測度 $\mathrm{d}\mu_v$ の積測度によって定まる $\widehat{M(\mathbb{A})}$ 上のハール測度とする。$(\mathbb{R}^\times)^0 \times (\mathbb{R}^\times)^0$ のポントリャーギン双対群上のハール測度を指標 $(a,b) \mapsto (a^{2\pi ix}, b^{2\pi iy})$ に対して $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ で与える。$\mathrm{d}^1\mu$ をそのハール測度と $\mathrm{d}\mu$ の商測度によって定まる $\widehat{M(\mathbb{A})^1}$ 上のハール測度とする。$m \in M(\mathbb{A})^1$ について

$$\phi_M^\vee(f;m) = \int_{\mu\in\widehat{M(\mathbb{A})^1}} \int_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{tr}(R(\mu,is)^{-1}R'(\mu,is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mathrm{d}s\,\mu(m)^{-1}\,\mathrm{d}^1\mu$$

と定める。そして、

$$I_\mathfrak{o}(f) = J_\mathfrak{o}(f) + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{vol}_M \sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}} \phi_M^\vee(f;\delta)$$

と $I_\mathfrak{o}(f)$ を定義する。

中心元 $z \in Z(F)$ による $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{z\} \cup \{z\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$ については、

$$I_\mathfrak{o}(f) = J_o(f) + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{vol}_M\,\phi_M^\vee(f;z)$$

と $I_\mathfrak{o}(f)$ を定義する。

カスピダルデータ $(P,[\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu \neq \check{\mu}$ については、

$$I_\chi(f) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\xi=\mu \text{ or } \check{\mu}} \int_\mathbb{R} \frac{m'(\xi,is)}{m(\xi,is)}\,\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\xi})\,\mathrm{d}s$$

と $I_\chi(f)$ を定義する。

カスピダルデータ $(P,[\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu = (\mu_1,\mu_1)$ については、

$$\begin{aligned}I_\chi(f) = &-\frac{1}{4\pi}\int_\mathbb{R} \frac{m'(\mu,is)}{m(\mu,is)}\,\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mathrm{d}s + \frac{1}{4}\,m(\mu,0)\,\mathrm{tr}(R(\mu,0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\\ &+\int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\,\mu_1(\det g)\,\mathrm{d}^1g\end{aligned}$$

と $I_\chi(f)$ を定義する。以上で、$I_\mathfrak{o}(f)$ と $I_\chi(f)$ の定義が出来た。次の定理の最初の等式が不変跡公式と呼ばれている公式である。

定理 95. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。このとき、等式

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} I_\mathfrak{o}(f) = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} I_\chi(f) \tag{7.2}$$

が成り立つ。そして、任意の $g \in G(\mathbb{A})$ について

$$I_\mathfrak{o}(f^g) = I_\mathfrak{o}(f)\,, \quad I_\chi(f^g) = I_\chi(f) \tag{7.3}$$

が成り立つ。

Proof. $M(F)$ に関する $\phi_M^\vee(f)$ のポアソン和公式を示せば $I_\mathfrak{o}(f)$ と $I_\chi(F)$ の定義と定理 82 より等式 (7.2) が従うので、$\phi_M^\vee(f)$ が $C_c^\infty(M(\mathbb{A})^1)$ に属することを証明しよう。命題 87 と 89 の周辺での議論を思い出しながら関数 f_t を使うと、$m \in M(\mathbb{A})^1$ について

$$\phi_M^\vee(f;m) = \int_{\widehat{M(\mathbb{A})^1}} \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} \mathrm{tr}(R(\mu,is)^{-1}R'(\mu,is)\pi_{is}(f_t)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mu(m)^{-1}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^1\mu$$

が成り立ち、さらに $\mu_v=(\mu_{1,v},\mu_{2,v})$ に対して

$$\mu_{s,t,v}=(\mu_{1,v}\,|\;|^{is/2}\,|\;|^{\pi it}\,,\,\mu_{1,v}\,|\;|^{-is/2}\,|\;|^{\pi it})$$

おくと, f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でないような素点の有限集合 S について

$$\begin{aligned}
(7.4)\qquad \frac{1}{4\pi}\phi_M^\vee(f;m)=&\frac{1}{4\pi}\int_{\widehat{M(\mathbb{A})^1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Big\{\sum_{v\in S}\mathrm{tr}(R(\mu_{s,t,v},0)^{-1}R'(\mu_{s,t,v},0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_{s,t,v}}})\\
&\times\prod_{v'\neq v}\mathrm{tr}(\pi_{0,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\mu_{s,t,v'}}})\Big\}\,\mu(m)^{-1}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^1\mu\\
=&\int_{\widehat{M(\mathbb{A})}}\Big\{\sum_{v\in S}\mathrm{tr}(R(\mu_v,0)^{-1}R'(\mu_v,0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\mu_v(m)^{-1}\\
&\times\prod_{v'\neq v}\mathrm{tr}(\pi_{0,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\mu_{v'}}})\,\mu_{v'}(m)^{-1}\Big\}\mathrm{d}\mu\\
=&\sum_{v\in S}\int_{\mathfrak{X}_v^M}\mathrm{tr}(R(\mu_v,0)^{-1}R'(\mu_v,0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mu_v(m)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_v\,\prod_{v'\neq v}f_{v'}^P(m)
\end{aligned}$$

を得る。ここでフーリエ逆変換を使ったことに注意する。f_v^P は $C_c^\infty(M(F_v))$ に属し、ほとんどすべての素点において $M(\mathfrak{O}_v)$ の特性関数となっている。また

$$\int_{\mathfrak{X}_v^M}\mathrm{tr}(R(\mu_v,0)^{-1}R'(\mu_v,0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mu_v(m)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_v$$

は $m\in M(F_v)$ 上の関数として明らかに smooth である。さらに固定した素点 v について C_v を $\prod_{v'\neq v}F_{v'}^\times$ の任意のコンパクト部分集合とすると、共通部分 $\mathbb{A}^1\cap(F_v^\times\times C_v)$ は $\mathbb{A}^1$ におけるコンパクト部分集合になる。その結果、$\phi_M^\vee(f)$ は $C_c^\infty(M(\mathbb{A})^1)$ に属することが分かった。よって $\mathbb{A}^1$ の跡公式 (2.2) より

$$\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\sum_{m\in M(F)}\phi_M^\vee(f;m)=\sum_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(R(\mu,is)^{-1}R'(\mu,is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mathrm{d}s$$

が成り立つ。これから等式 (7.2) が従う。

次に等式 (7.3) を証明しよう。$I_\chi(f^g)=I_\chi(f)$ は定義より明らか。$\mathfrak{o}$ の代表元が楕円元である場合も、定義より $I_{\mathfrak{o}}(f^g)=I_{\mathfrak{o}}(f)$ は明らか。そこで、$\mathfrak{o}$ の代表元は双曲元もしくはユニポテント元とする。そして、$I_{\mathfrak{o}}(f^g)=I_{\mathfrak{o}}(f)$ を示そう。$g\in G(\mathbb{A})$ について

$$f^{P,g}(m)=\delta_P(m)^{1/2}\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})}f(k^{-1}mnk)\,\{-H(kg)\}\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k\,,\quad m\in M(\mathbb{A})$$

と $C_c^\infty(M(\mathbb{A}))$ に属する関数 $f^{P,g}$ を定義する。$J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ の定義と変数変換より、

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f^g)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\big\{K_{G,\mathfrak{o}}(h,h)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}K_{P,\mathfrak{o}}(\delta h,\delta h)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta hg)-T)\big\}\,\mathrm{d}^1h$$

を得る。そして、これから

$$\begin{aligned}
(7.5)\qquad J_{\mathfrak{o}}^T(f^g)-J_{\mathfrak{o}}^T(f)=&\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}K_{P,\mathfrak{o}}(h,h)\,\{-\widehat{\tau}_P(H(hg)-T)+\widehat{\tau}_P(H(h)-T)\}\,\mathrm{d}^1h\\
=&\mathrm{vol}_M\sum_{\gamma\in M(F)\cap\mathfrak{o}}f^{P,g}(\gamma)
\end{aligned}$$

が得られる。同様にして $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$ に対して

$$(7.6)\qquad \begin{aligned} J^T_\chi(f^g) - J^T_\chi(f) &= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} K_{P,\chi}(h,h)\left\{-\widehat{\tau}_P(H(hg)-T) + \widehat{\tau}_P(H(h)-T)\right\} \mathrm{d}^1 h \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{\xi\in[\mu]}\int_{M(\mathbb{A})^1} f^{P,g}(m)\,\xi(m)\,\mathrm{d}^1 m \end{aligned}$$

を得る。等式 (7.6) と $M(\mathbb{A})^1$ 上のフーリエ逆変換と $\phi^\vee_M(f)$ の定義と命題 89 と 90 より、

$$\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\left\{\phi^\vee_M(f^g;m) - \phi^\vee_M(f;m)\right\} = -\mathrm{vol}_M \sum_{\gamma\in M(F)\cap\mathfrak{o}} f^{P,g}(\gamma)$$

が成り立つ。したがって、等式 (7.5) とこの $\phi^\vee_M(f)$ の等式から $I_\mathfrak{o}(f^g) = I_\mathfrak{o}(f)$ が従う。よって等式 (7.3) が示せた。 □

7.2.2. 離散系列表現と明示的公式. $F = \mathbb{Q}$ の場合、正則カスプ形式の空間上に作用するヘッケ作用素の跡は π の実素点の表現が離散系列表現である $\chi = (G,\pi) \in \mathfrak{X}^G$ に関する $I_\chi(f)$ の和と等しい。F が総実体の場合にも類似の公式が不変跡公式を用いて得られる。しかし、GL(2) の跡公式だと、通常考えられるカスプ形式の複数の空間上の跡の和になってしまうため、面白い公式とは思えない。そこで、記述の簡略化のため、公式については $F = \mathbb{Q}$ の場合に限定して説明する。**これ以降、$F = \mathbb{Q}$ を仮定する。** $F_\infty = \mathbb{R}$ となることに注意する。以下、∞ は実素点を意味するものとする。

まずは $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 上のハール測度を定めておく。$M'(\mathbb{R}) = M(\mathbb{R})\cap \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathbf{K}'_\infty = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ と置く。$\mathbf{K}'_\infty$ 上のハール測度を $\mathrm{d}k'$ とし、$\int_{\mathbf{K}'_\infty}\mathrm{d}k' = 1$ と正規化する。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}g'$ を

$$\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\phi(g')\mathrm{d}g' = 2\int_{\mathbb{R}^\times}\int_{N(\mathbb{R})}\int_{\mathbf{K}'_\infty}\phi(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1\end{pmatrix}k')\,\mathrm{d}^\times x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}k',\ \phi\in C_0^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$$

によって定める。このように定めると、$f_\infty \in C_0^\infty(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}))$ に対して、

$$\int_{G(\mathbb{R})} f_\infty(g_\infty)\mathrm{d}g_\infty = \int_{Z_\infty^+}\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} f_\infty(zg')\,\mathrm{d}g'\,\mathrm{d}^\times z + \int_{Z_\infty^+}\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} f_\infty(z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}g')\,\mathrm{d}g'\,\mathrm{d}^\times z$$

が成り立つことに注意しよう。

$G(\mathbb{R})^1 = G(\mathbb{R})\cap G(\mathbb{A})^1$ と置く。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 D_k^+ と D_k^- を森山 [33] と同様に定める。そして、$G(\mathbb{R})^1$ の離散系列表現 σ_k, $(k\in\mathbb{Z},\ k>1)$ を、その $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ への制限 $\sigma_k|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ が $\sigma_k|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} \cong D_k^+\oplus D_k^-$ を満たすものとして定める。$A_G(\mathbb{R})^0$ についての σ_k の作用は自明だと思うと、σ_k は $G(\mathbb{R})$ 上の表現でもある。次に $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現に対する擬係数を使って必要なテスト関数を導入しよう。擬係数と呼ばれる $C_c^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ の元 ψ_k^+ は次の性質を満たすことが知られている。

(i) $\mathrm{tr}\,D_l^+(\psi_k^+) = \begin{cases} 1 & \text{if } l = k, \\ 0 & \text{if } l\neq k \end{cases}$ が成り立つ。

(ii) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の自明な表現 $\mathrm{triv}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ について、$\mathrm{tr}\,\mathrm{triv}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(\psi_k^+) = \begin{cases} -1 & \text{if } k = 2, \\ 0 & \text{if } k>0 \end{cases}$ が成り立つ。

(iii) D_k^+ でも $\mathrm{triv}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ でもない $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の任意のユニタリ表現 π に対して、$\mathrm{tr}\,\pi(\psi_k^+) = 0$ が成り立つ。

擬係数に関しては織田 [34] を参照されたい。関数 $r_\infty \in C_c^\infty((\mathbb{R}^\times)^0)$ を一つ取って、$g_\infty \in G(\mathbb{R})$ について

$$f_{\infty,k}(g_\infty) = \begin{cases} r_\infty(|\det g_\infty|^{1/2})\,\psi_k^+(|\det g_\infty|^{-1/2}\,g_\infty) & \text{if} \quad \det g_\infty > 0\,, \\ 0 & \text{if} \quad \det g_\infty < 0 \end{cases}$$

とおいて、関数 $f_{\infty,k} \in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ を定める。

補題 96. 関数 $f_{\infty,k} \in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ は次の性質を満たす。

(1) $f_{\infty,k}$ はカスピダルである。

(2) $\mathrm{tr}\,\sigma_l(f_{\infty,k}) = \begin{cases} 1 & \textit{if } l = k\,, \\ 0 & \textit{if } l \neq k \end{cases}$ が成り立つ。

(3) $G(\mathbb{R})^1$ の自明な表現 $\mathrm{triv}_{G(\mathbb{R})^1}$ について、$\mathrm{tr}\,\mathrm{triv}_{G(\mathbb{R})^1}(f_{\infty,k}) = \begin{cases} -1 & \textit{if } k = 2\,, \\ 0 & \textit{if } k > 0 \end{cases}$ が成り立つ。

(4) 離散系列表現でも自明な表現でもない $G(\mathbb{R})^1$ の任意のユニタリ表現 π_∞ に対して、$\mathrm{tr}\,\pi_\infty(f_{\infty,k}) = 0$ が成り立つ。

Proof. 性質 (i)(ii)(iii) より (2)(3)(4) が従う。カスピダルの定義は誘導表現の指標が消えることなので (1) は (2)(3)(4) より従う。 □

重さ k の正則カスプ形式の空間上のヘッケ作用素との関係を考えよう。自然数 N を一つ固定する。素数 p_k と自然数 e_k で、$N = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_l^{e_l}$ と素因数分解を与える。有限素点 $v = p_k$ に対して、

$$K_{N,v} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Z}_v) \;\middle|\; c \in v^{e_k}\mathbb{Z}_v \right\}$$

とする。有限素点 $v \not| N$ に関しては、$K_{N,v} = G(\mathbb{Z}_v)$ とする。そして、$K_N = \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} K_{N,v}$ と置く。$G(\mathbb{R})^+ = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ とする。こうすると、K_N に対応する $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散群 $\Gamma_0(N)$ が等式

$$\Gamma_0(N) = G(\mathbb{Q}) \cap (G(\mathbb{R})^+\,K_N)$$

によって定められる。以下、

$$\Gamma = \Gamma_0(N)$$

として話を進めていく。[33] と同様に $S_k(\Gamma)$ を Γ に関する重さ k の正則カスプ形式の空間とする。そして、元 $\alpha \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{Z})$ を任意に一つ固定し、$n = \det\alpha$ と置く。自然数 n は $n > 0$ と $(N, n) = 1$ を満たすとする。$S_k(\Gamma)$ 上には両側剰余類 $\Gamma\alpha\Gamma$ により定められるヘッケ作用素 $[\Gamma\alpha\Gamma]$ が作用する。ヘッケ作用素の定義についても [33] を参照されたい。

仮定 97. 各有限素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について、f_v を

$$f_v(g_v) = \mathrm{vol}(K_{N,v})^{-1} \times \begin{cases} 1 & \textit{if } g_v \in K_{N,v}\alpha K_{N,v}\,, \\ 0 & \textit{if } g_v \notin K_{N,v}\alpha K_{N,v} \end{cases} \tag{7.7}$$

と定める。そして、$f_\infty = f_{\infty,k}$ かつ $r_\infty(n^{1/2}) = 1$ とし、k は偶数と仮定する。

もし k が奇数ならば $S_k(\Gamma) = \{0\}$ になることに気をつけよう。これら条件の下で次の補題が従う。

補題 98. 仮定 *97* を仮定する。このとき、カスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ について、$k > 2$ のとき $I_\chi(f) = 0$ であり、$k = 2$ のとき

$$I_\chi(f) = \begin{cases} -\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} \int_{G(\mathbb{Q}_v)} f_v(g_v)\,\mu_{1,v}(\det g_v)\,\mathrm{d}g_v & \textit{if } \mu_1 = \mu_2\,, \\ 0 & \textit{if } \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. 命題 89 と 90 と補題 96 より、この補題が従う。シューアの補題より $R_v(\mu_v, 0)$ は $\mathbf{H}_{\mu_v}$ 上に定数倍で作用することと、$\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v(g_v) \neq 0$ ならば $\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} |\det g_v| = n^{-1}$ に注意する。そして、$\mu = (\mu_v) \in \mathfrak{X}^M$ について

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_{G(\mathbb{R})} f_\infty(g_\infty)\,\mu_\infty(\det g_\infty)\,e^{\pi i t \log|\det g_\infty|}\,\mathrm{d}g_\infty\,e^{-\pi i t\log n}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{G(\mathbb{R})^1} f_\infty(g_\infty)\mathrm{d}g_\infty \int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty r_\infty(a)\,\mu_\infty(a^2)\,e^{2\pi i t\log a}\,\mathrm{d}^\times a\,e^{-\pi i t\log n}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{G(\mathbb{R})^1} f_\infty(g_\infty)\mathrm{d}g_\infty \times \mu_\infty(n)
\end{aligned}$$

かつ $\mu_\infty^2 = 1$ であることに注意すれば明らか。 $\square$

命題 99. 仮定 *97*を仮定する。このとき、等式

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} I_\chi(f) = \mathrm{tr}([\Gamma\alpha\Gamma]|_{S_k(\Gamma)}) \times n^{-\frac{k}{2}+1} - \begin{cases} 0 & \textit{if } k>2\,, \\ \displaystyle\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}\,,\,v|n} \mathrm{vol}(\mathbf{K}_v\alpha\mathbf{K}_v) & \textit{if } k=2 \end{cases}$$

が成り立つ。特に $\alpha = I_2$ のとき、

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} I_\chi(f) = \dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma) - \begin{cases} 0 & \textit{if } k>2\,, \\ 1 & \textit{if } k=2 \end{cases}$$

となる。

Proof. 任意の有限素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ について $K_{N,v}\cap Z(\mathbb{Q}_v) = Z(\mathbb{Z}_v)$ かつ $\det K_{N,v} = \mathbb{Z}_v^\times$ になることと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Gamma\alpha\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Gamma\alpha\Gamma$$

に注意すれば、補題 98 と [33] の内容より、この命題が得られる。 $\square$

この命題により、スペクトルサイドと正則カスプ形式の空間上のヘッケ作用素の跡との関係が明らかになった。

これより幾何サイドを計算可能な形にもっていこう。$m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \in M(\mathbb{R}) - Z(\mathbb{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
I_M(m, f_\infty) =&\delta_P(m)\,|1 - m_1^{-1}m_2| \int_{\mathbf{K}_\infty}\int_{N(\mathbb{R})} f_\infty(k^{-1}n^{-1}mnk)\,\log(1+x^2)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k \\
&+ 2\int_{\mathfrak{X}_\infty^M} \mathrm{tr}(R(\mu_\infty,0)^{-1}R'(\mu_\infty,0)\pi_{0,\infty}(f_\infty)|_{\mathbf{H}_{\mu_\infty}})\,\mu_\infty(m)^{-1}\mathrm{d}\mu_\infty
\end{aligned}$$

と定義する。ただし、$n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と置いた。そして、$z\in Z(\mathbb{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
I_M(z, f_\infty) =& \int_{\mathbf{K}_\infty}\int_{N(\mathbb{R})} f_\infty(k^{-1}znk)\,(2\,\log|x|)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k \\
&+ 2\int_{\mathfrak{X}_\infty^M} \mathrm{tr}(R(\mu_\infty,0)^{-1}R'(\mu_\infty,0)\pi_{0,\infty}(f_\infty)|_{\mathbf{H}_{\mu_\infty}})\,\mu_\infty(z)^{-1}\mathrm{d}\mu_\infty
\end{aligned}$$

と定義する。

補題 100. $f_\infty = f_{\infty,k}$ とする。元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ を双曲元として、その $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})}$ について

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}_M \sum_{\delta \in M(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}} I_M(\delta, f_\infty) \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v^P(\delta)$$

が成り立つ。また $z \in Z(\mathbb{Q})$ について、その $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{z\} \cup \{z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{G(\mathbb{Q})}$ について

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \mathrm{vol}_G\, I_G(z, f_\infty) \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v(z) + \frac{1}{2}\mathrm{vol}_M\, I_M(z, f_\infty) \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v^P(z)$$

が成り立つ。ただし、$I_G(z, f_\infty) = f_\infty(z)$ と置いた。

Proof. 命題 85 と 86 と等式 (7.4) と補題 91 と 92 と補題 96 の (1) を用いれば、すぐに得られる。 □

任意の $g_\infty \in G(\mathbb{R})$ について $f_\infty^{g_\infty}(h) = f_\infty(g_\infty h g_\infty^{-1})$ とすると、 $I_M(m, f_\infty^{g_\infty}) = I_M(m, f_\infty)$ が成り立つ。つまり $G(\mathbb{R})$-不変であることに注意する。

元 $\gamma \in G(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$-楕円であるとは、ある $|\det(\gamma)|^{1/2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \pi\mathbb{Z}$ と γ が $G(\mathbb{R})$-共役であることを意味する。元 $\gamma \in G(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$-双曲であるとは、γ の固有値が二つの異なる実数からなることを言う。$\mathbb{Q}$-楕円元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ は、$\mathbb{R}$-楕円もしくは $\mathbb{R}$-双曲である。$\mathbb{R}$-楕円元 γ に対して

$$I_G(\gamma, f_\infty) = \int_{G(\mathbb{R})^1} f_\infty(g_\infty^{-1} \gamma\, g_\infty)\, \mathrm{d}^1 g_\infty$$

と定義する。$\mathbb{R}$-双曲元 $\gamma \in M(\mathbb{R})$ に対して

$$I_G(\gamma, f_\infty) = \int_{\mathbf{K}_\infty} \int_{N(\mathbb{R})} f(k_\infty^{-1} n_\infty^{-1} \gamma n_\infty k_\infty)\, \mathrm{d}n_\infty\, \mathrm{d}k_\infty$$

$\mathbb{R}$-双曲元 γ が $\gamma \notin M(\mathbb{R})$ である場合は、$G(\mathbb{R})$ 共役により $g_\infty^{-1}\gamma g \in M(\mathbb{R})$, $g_\infty \in G(\mathbb{R})$ として、$I_G(\gamma, f_\infty) = I_G(g_\infty^{-1}\gamma g_\infty,\, f_\infty^{g_\infty})$ により $I_G(\gamma, f_\infty)$ を定義する。元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ に対して、$\{\gamma\}_\Gamma$ を γ の Γ-共役類とする。つまり、$\{\gamma\}_\Gamma = \{\delta^{-1}\gamma\delta \,|\, \delta \in \Gamma\}$ となる。そして、$\Gamma_\gamma = \{h \in \Gamma \,|\, h\gamma = \gamma h\}$ と γ の中心化群 Γ_γ を定める。γ が $\mathbb{R}$-楕円ならば Γ_γ は有限群であり、$\sharp(\Gamma_\gamma)$ をその位数とする。γ が $\mathbb{R}$-双曲ならば、$G(\mathbb{R})_\gamma \cong M(\mathbb{R})$ なので、この同型により $G(\mathbb{R})_\gamma$ 上へハール測度を移送する。$\Gamma_1 = G(\mathbb{Q}) \cap (G(\mathbb{R})K_N)$ と置き、$\{\gamma\}_{\Gamma_1}$ は γ の Γ_1-共役類とする。

補題 101. 仮定 *97* を仮定する。$\mathbb{Q}$-楕円元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})}$ を考える。$\det\gamma > 0$ を仮定する。もし γ が $\mathbb{R}$-楕円ならば

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\{\delta\}_\Gamma \subset \Gamma\alpha\Gamma \cap \mathfrak{o}} \frac{1}{2\,\sharp(\Gamma_\delta)} I_G(\delta, f_\infty)$$

が成り立つ。そして、もし γ が $\mathbb{R}$-双曲ならば、

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\{\delta\}_{\Gamma_1} \subset \Gamma\alpha\Gamma \cap \mathfrak{o}} \mathrm{vol}((\Gamma_1)_\delta \backslash G(\mathbb{R})^1_\delta)\, I_G(\delta, f_\infty)$$

が成り立つ。ただし、和は $\Gamma\alpha\Gamma \cap \mathfrak{o}$ に含まれるような Γ-共役類全体を走る。

Proof.

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1 = (\Gamma_1 \backslash G(\mathbb{R})^1)\, K_N$$

が成り立つことに注意する。定義からスタートして

$$\begin{aligned}
I_{\mathfrak{o}}(f) &= \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\delta\in\mathfrak{o}} f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}^1 g \\
&= \int_{\Gamma_1\backslash G(\mathbb{R})^1}\int_{K_N} \sum_{\delta\in\mathfrak{o}} f_\infty(g_\infty^{-1}\delta g_\infty) \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v(g_v^{-1}\delta g_v)\,\mathrm{d}^1 g_\infty \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} \mathrm{d}g_v \\
&= \int_{\Gamma_1\backslash G(\mathbb{R})^1} \sum_{\delta\in\mathfrak{o}\cap\Gamma_1\alpha\Gamma_1} f_\infty(g_\infty^{-1}\delta g_\infty)\,\mathrm{d}^1 g_\infty = \sum_{\{\delta\}_{\Gamma_1}\subset\mathfrak{o}\cap\Gamma_1\alpha\Gamma_1} \int_{(\Gamma_1)_\delta\backslash G(\mathbb{R})^1} f_\infty(g_\infty^{-1}\delta g_\infty)\,\mathrm{d}^1 g_\infty
\end{aligned}$$

となる。$\sigma=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ と置く。$\Gamma_1=\Gamma\cup\sigma\Gamma$ が成り立つので、$\{\delta\}_{\Gamma_1}=\{\delta\}_\Gamma\cup\{\sigma\delta\sigma\}_\Gamma$ となる。そして、$\sigma\Gamma\sigma=\Gamma$ であり、$\sigma\Gamma\alpha\Gamma\sigma=\Gamma\alpha\Gamma$ が成り立つので、$\Gamma_1\alpha\Gamma_1=(\Gamma\alpha\Gamma)\cup(\Gamma\alpha\sigma\Gamma)$ である。$\det(\Gamma\alpha\sigma\Gamma)<0$ より γ が $\mathbb{R}$-双曲である場合の等式は示された。

γ が $\mathbb{R}$-楕円である場合、$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-共役でないので、$\delta$ と $\sigma^{-1}\delta\sigma$ は Γ-共役に成りえない。そして、$\sigma\Gamma$ の任意の元は Γ_γ に属さない。よって補題の等式が成り立つ。 □

補題 100 と 101 により、幾何サイドの目標の公式を得るために必要なことは $I_M(\gamma,f_{\infty,k})$ と $I_G(\gamma,f_{\infty,k})$ を計算することである。これらはユニタリ表現の指標によって展開されることが知られており、そのフーリエ展開によって計算される。証明に関しては $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の場合への帰結のさせ方のみ説明する。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の軌道積分のフーリエ変換の計算に関しては、[34] を参照されたい。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の重み付き軌道積分のフーリエ変換の計算に関しては、[7] や [19] や Arthur のフーリエ変換に関する論文を参照されたい。

補題 102. $f_\infty=f_{\infty,k}$ とする。正の実数 β を一つ固定する。そして、$r_\infty(\beta)=1$ とし、k は偶数と仮定する。$m=\beta\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda^{-1}\end{pmatrix}\in M(\mathbb{R}),\ \det m>0$ について、

$$I_M(m,f_\infty)=-\frac{1}{2}\min\{|\lambda|,\,|\lambda|^{-1}\}^{k-1}$$

が成り立つ。中心元 $\beta I_2\in Z(\mathbb{R})$ について、

$$I_G(\beta I_2,f_\infty)=\frac{1}{8\pi}(k-1)$$

である。$m\in M(\mathbb{R}),\ \det m<0$ については $I_M(m,f_\infty)=0$ である。$\mathbb{R}$-楕円元 $\gamma\in G(\mathbb{R})$ について、γ が $\beta\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ と $G(\mathbb{R})$-共役ならば

$$I_G(\gamma,f_\infty)=-\frac{e^{-i(k-1)\theta}-e^{i(k-1)\theta}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}$$

となる。$\mathbb{R}$-双曲元 $\gamma\in G(\mathbb{R})$ については、$I_G(\gamma,f_\infty)=0$ である。

Proof. $\widehat{M'(\mathbb{R})}$ を $M'(\mathbb{R})$ のポントリャーギャン双対群とする。そして、$\mathrm{d}\mu'_\infty$ を $\widehat{M'(\mathbb{R})}$ 上のハール測度とする。次の計算では r_∞ への仮定と $\mathbf{K}_\infty=\mathbf{K}'_\infty\cup\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\mathbf{K}'_\infty$ と $\int_{\mathbf{K}_\infty}\mathrm{d}k=1$ に気をつける。$m\in M(\mathbb{R}),\ \det m>0$ とする。$m\notin Z(\mathbb{R})$ の場合、適切に $\mathrm{d}\mu'_\infty$ を正規化すると、

$n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について

$$
\begin{aligned}
I_M(m, f_\infty) =& \delta_P(m)\,|1 - m_1^{-1} m_2| \int_{\mathbf{K}'_\infty} \int_{N(\mathbb{R})} \psi_\infty^+ (k'^{-1} n^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} n k') \, \log(1 + x^2) \, \mathrm{d}n \, \mathrm{d}k' \\
&+ \int_{\widehat{M'(\mathbb{R})}} \mathrm{tr}(R(\mu'_\infty, 0)^{-1} R'(\mu'_\infty, 0) \pi_{0,\infty}|_{SL(2,\mathbb{R})}(\psi_\infty)|_{\mathbf{H}_{\mu'_\infty}}) \, \mu'_\infty(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix})^{-1} \mathrm{d}\mu'_\infty
\end{aligned}
$$

を得る。その結果、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の重み付き軌道積分のフーリエ変換に関する諸結果に帰結される。$m \in Z(\mathbb{R})$ の場合は極限公式から導かれる。他の場合も同様の議論で $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の軌道積分に帰結できる。 □

系 52 より $\mathrm{vol}_G = \pi/3$ なので、もし $z \in \Gamma\alpha\Gamma \cap Z(\mathbb{Q})$ ならば

$$
\mathrm{vol}_G \prod_{v \in \Sigma_v} f_v(z) = \frac{\pi}{3} \, [\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma] = \frac{\pi}{3} \, N \prod_{p|N} (1 + p^{-1})
$$

となる。ただし、積における p は素数のみ走る。あとは $\mathrm{vol}_M = 1$ であることに気をつければ、補題 100 と 101 と 102 を合わせて次の命題を得る。

命題 103. 仮定 *97* を仮定する。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} I_{\mathfrak{o}}(f) =& \frac{k-1}{24} \, [\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma] \, \sharp(\Gamma\alpha\Gamma \cap Z(\mathbb{Q})) \\
&- \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \subset \Gamma\alpha\Gamma} \frac{1}{2\,\sharp(\Gamma_\gamma)} \frac{e^{-i(k-1)\theta} - e^{i(k-1)\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \qquad (7.8) \\
&- \sum_{\gamma \in M(\mathbb{Q}),\, \det\gamma > 0} \frac{1}{4} \, \min\{|\lambda_\gamma|, \, |\lambda_\gamma|^{-1}\}^{k-1} \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v^P(\gamma) \qquad (7.9)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ただし、*(7.8)* の和は $\Gamma\alpha\Gamma$ に含まれる固有値 $n^{1/2} e^{i\theta}$, $n^{1/2} e^{-i\theta}$ を持つ楕円元 γ の Γ-共役類全体を走るとする、そして、*(7.9)* における λ_γ は $\gamma = n^{1/2} \begin{pmatrix} \lambda_\gamma & 0 \\ 0 & \lambda_\gamma^{-1} \end{pmatrix}$ により定められる。

定理 95 と命題 99, 103 を合わせれば、次の $\mathrm{tr}([\Gamma\alpha\Gamma]|_{S_k(\Gamma)})$ についての明示的公式を得る。

定理 104. *N と n を互いに素な正の整数とする。$\Gamma = \Gamma_0(N)$ とし、$\alpha \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{Z})$, $\det\alpha = n$ を任意に一つ取る。k を 2 以上の偶数としたとき、$S_k(\Gamma)$ 上に作用するヘッケ作用素 $[\Gamma\alpha\Gamma]$ の跡 $\mathrm{tr}([\Gamma\alpha\Gamma]|_{S_k(\Gamma)})$ について*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}([\Gamma\alpha\Gamma]|_{S_k(\Gamma)}) =& n^{\frac{k}{2}-1} \frac{k-1}{24} \, [\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma] \, \sharp(\Gamma\alpha\Gamma \cap Z(\mathbb{Q})) \\
&- n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \subset \Gamma\alpha\Gamma} \frac{1}{2\,\sharp(\Gamma_\gamma)} \frac{e^{-i(k-1)\theta} - e^{i(k-1)\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \qquad (7.10) \\
&- n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\gamma \in M(\mathbb{Q}),\, \det\gamma > 0} \frac{1}{4} \, \min\{|\lambda_\gamma|, \, |\lambda_\gamma|^{-1}\}^{k-1} \prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v^P(\gamma) \qquad (7.11) \\
&+ \begin{cases} 0 & \textit{if } \ k > 2 \, , \\ \displaystyle\prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}},\, v|n} \mathrm{vol}(\mathbf{K}_v \alpha \mathbf{K}_v) & \textit{if } \ k = 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ただし、*(7.10)* の和は $\Gamma\alpha\Gamma$ に含まれる固有値 $n^{1/2}e^{i\theta}$, $n^{1/2}e^{-i\theta}$ を持つ楕円元 γ の Γ-共役類全体を走るとする、そして、*(7.11)* における λ_γ は $\gamma = n^{1/2}\begin{pmatrix}\lambda_\gamma & 0\\ 0 & \lambda_\gamma^{-1}\end{pmatrix}$ により定められる。関数 f_v は *(7.7)* において定めた。

最後に定理 104 の等式の項 (7.11) を離散群 Γ の言葉に翻訳しておこう。証明に関しては補題 101 の証明と同じ議論で出来るので割愛する。計算上のメリットはあまりないと思われる。しかし、[20] での二元二次形式の話と関係するし、良く知られた本 [31] では離散群の言葉で記述されているため言及しておきたい。

命題 105. 等式

$$(7.11) = -\,n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{\{\gamma\}_\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma}\frac{1}{2}\frac{|\lambda|^{-k+1}}{|\lambda-\lambda^{-1}|} - n^{\frac{k}{2}-1}\lim_{s\to+0}\frac{s}{8}\sum_{\{\gamma\}_\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma}\frac{1}{|m(\gamma)|^{s+1}}$$

が成り立つ。ただし、第一項の $\{\gamma\}_\Gamma$ の代表元 γ は $n^{1/2}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$, $|\lambda|>1$ と $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})$-共役である、第二項の $\{\gamma\}_\Gamma$ の代表元 γ には $^\exists\xi\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})$ が存在して $\xi\gamma\xi^{-1} = n^{1/2}\begin{pmatrix}1 & h(\gamma)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $h(\gamma)\in\mathbb{Q}^\times$ と $\Gamma_\gamma = \xi^{-1}\{\begin{pmatrix}1 & th\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{Z}\}\xi$, $h\in\mathbb{Q}^\times$ が成り立つ、そして $m(\gamma)=h(\gamma)/h$ と定める。

定理 104 と命題 105 の公式は明示的だと言っても、まだ計算可能な公式とは言い難い。跡の具体的な数値が計算可能な公式になるためには、離散集合 $\Gamma\alpha\Gamma$ もしくはそれらの和集合の Γ-共役類に関する大域的な値を明らかにする必要がある。計算の続きに関しては [20] もしくは [31] を参照されたい。

References

[1] Arthur, J., *The Selberg trace formula for groups of F-rank one*, Ann. of Math. (2) **100** No.2, 326–385 (1974).

[2] Arthur, J., *A trace formula for reductive groups. I.*, Duke Math. J. **45**, 911–952 (1978).

[3] Arthur, J., *A trace formula for reductive groups. II: Applications of a truncation operator*, Compositio Math. **40**, 87–121 (1980).

[4] Arthur, J., *The invariant trace formula I. Local theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** 323–383 (1988).

[5] Arthur, J., *The invariant trace formula I. Global theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** 501–554 (1988).

[6] Arthur, J., *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula and Shimura varieties, Clay Mathematics Proceedings **4**, 1–263 (2005).

[7] Arthur, J., Herb, A., Sally, J., *The Fourier transform of weighted orbital integrals on* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, The Selberg trace formula and related topics, Proc. AMS-IMS-SIAM Joint Summer Res. Conf., Brunswick/Maine 1984, Contemp. Math. 53, 17-37 (1986).

[8] Borel,. A.,*Automorphic forms on $SL_2(\mathbb{R})$*, Cambridge tactics in Mathematics, Cambridge University Press (1997).

[9] Duflo, P. M., Labesse, J,-P.,*Sur la formle des traces de Selberg*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4 serie, **4**, 193–284 (1971)

[10] Flath, D., *Decomposition of representations into tensor products*, Proceedings of Symp. Pure Math. **33** part 1, 179–183 (1979).

[11] Gelbart, Stephen S., *Automorphic forms on adele grous*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1975).

[12] Gelbart, Stephen S., *Lectures on Arthur Selberg trace formula,* University Lecture Series, Amer. Math. Soc., (1995).

[13] Gelbart, S., Jacquet, H., *Forms of $GL(2)$ from the analytic point of view*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematrics Vol. 33 (1979), part 1, 213–251.

[14] Godement, R., *Introduction à la théorie de Langlands*, Bourbaki Seminar Exposé 321, 115–144 (1967).

[15] Godement,R., Jacquet, H., *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics 260, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972
[16] 権寧魯「セルバーグ跡公式，セルバーグゼータ関数」, 本報告集.
[17] Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Lecture Notes in Mathematics, 62, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg NewYork, 1968.
[18] Harish-Chandra, *Discrete series for semi-simple Lie groups II*, Acta Math. **116** (1966), 1-111.
[19] Hoffmann, W., *The Fourier transforms of weighted orbital integrals on semisimple groups of real rank one*, J. Reine Angew. Math. 489, 53-97 (1997).
[20] 伊吹山知義, 「$SL_2(\mathbb{Z})$ の共役類と跡公式」, 本報告集.
[21] Iwaniec, H., *Spectral methods of automorphic forms* (second edition), Graduate Studies in Mathematics 53, American Mathematical Society Providence, Rhode Islamd (2002).
[22] Jacquet, H., Langlands, L.P.,*Automorphic forms on $GL(2)$*, Lecture Notes in Mathematics, **114**, Springer-Verlag, Berline, Heiderberg, New York (1970).
[23] Knapp, A.W., *Theoretical aspects of the trace formula for* GL(2), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **61**, 355–405 (1997).
[24] Knapp, A.W., *Representation theory of semisimple groups, An over view based on examples*, Princeton University Press, Rrinceton New Jersey, (1986).
[25] 今野拓也, 「GL_2 上の保型形式と標準 L 函数」, (第１６回整数論サマースクール報告集「保型 L 関数」)
[26] Lai, K.F., *On the Tamagawa numbers of reductive algebraic groups*, Comp. Math. **41**, 153–188 (1980).
[27] Langlands, R. P., *Euler products*, Yale University Press (1971).
[28] Langlands, R. P., *On the functional equation satisfied by Eisenstin series*, Lecture Notes in Mathematics, **544**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
[29] Langlands, R. P., *Les débuts d'une formule des traces stables,* Publ. Math. Univ. Paris VII **13**, (1983).
[30] Langlands, R. P., *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Eis Märchen*, in Automorphic Forms, Representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 33, part 2, Amer. Math. Soc., 205–246 (1979).
[31] Miyake, T., *Modular forms*, Translated from the Japanese by Yoshitaka Maeda. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[32] Moeglin, C., Waldspurger, J.-L., *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*, Vol.113 Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.
[33] 森山知則, 「保型形式の空間と HECKE 作用素」, 本報告集.
[34] 織田孝幸, Selberg Trace Formula 入門. http://wakatsuki.w3.kanazawa-u.ac.jp/files/selberg
[35] Ramakrishnan, D., Valenza, R.J., *Fourier analysis on number fields*, Graduate Texts in Mathematics vol. 186, Springer (1998).
[36] Selberg, A. *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with application to Dirichlet series,* J. Indian Math. Soc. **20**, 47–87 (1956).
[37] Tate, J. *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Algebraic Number Theory, Academic Press (1990), 305–347.
[38] 都築 正男 「Eisenstein 級数の定数項（Langlands-Shahidi 理論への導入）」(第１６回整数論サマースクール報告集「保型 L 関数」)
[39] 都築 正男 「Jacquet-Langlands 対応」、本報告集.
[40] Yoshida, K., *Functional analysis*, 6th edition, Springer-Verlag, Berlin Heiderberg New York, 1980
[41] Weil, A., *Basic number theory*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 144, Springer-Verlag New York Heiderberg Berlin, 1974.

Index

$SL_2(\mathbb{Z})$-共役類の分類と跡公式

伊吹山知義（大阪大学大学院理学研究科）

1　序文

跡公式の表示にはいろいろな段階があるわけで、たとえば核関数を与えて積分表示した段階で、これを公式と称したらいけないということはないであろう。これをもっと細かく、軌道積分、体積その他を用いて書くともっと公式らしくなるであろう。しかし保型形式の次元や保型形式の古典的な意味でのヘッケ作用素の跡は、少なくとも整数であるから数値が決まっているわけで、これを実際に計算できる公式を与えよ、といわれるともっと細かいことをやらなくてはならなくなる。その最初が、共役類の分類であろう。たとえば Gottschling は $Sp(2,\mathbb{Z})$ の基本領域を精密に求めて、その境界での挙動から $Sp(2,\mathbb{Z})$ の共役類の分類を行っており、これは代数幾何の人たちが使ったりしていた。しかし、共役類の分類は、普通は体上の分類を局所的にやっておいて、さらに整数環上の分類を行い、Hasse の原理などで大域的にまとめなおすのが効率がよい。実際、そういうやり方をすれば基本領域を求める必要などは全くなく (たとえば $Sp(2,\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$-form の場合は Hashimoto and Ibukiyama [3] など), いきなり大域的に考えるのは、一般には、いかにも効率が悪い。ところが、$SL_2(\mathbb{Z})$ では、実は大域的な考察もまことに綺麗におこなえるし、このような大域的な考察は $Sp(2)$ の半単純でない元の分類にも役に立つ。あいにく、この非常に綺麗な手法は Miyake [9] などでは解説されていない。よってここでは最初に、敢えてまず大域的な手法を用いて説明し、後に一般の local-global の手法について少しだけ解説したい。

2　Global conjugacy class of $SL_2(\mathbb{Z})$

まず、記号を少し定めておく。自然数（１以上の整数）n に対して、

$$T(n) = \{g \in M_2(\mathbb{Z}); \det(g) = n\}$$

とおく。これは $SL_2(\mathbb{Z})$-double coset とみなせば、普通の意味でのヘッケ作用素である。$T(n)$ の元のうち、跡公式で必要なものの $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類の分類が目標である。ちなみに $T(n)$ の元は整数行列であるから、その固有値はもちろん代数的整数である。

$P_0(\mathbb{Q})$ を有理数体上の正則な 2 次上三角行列全体のなす群とする。また、S を $GL_2(\mathbb{Q})$ の部分集合で $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役で不変なものとするとき、$S//SL_2(\mathbb{Z})$ で、S の $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類の集合を表すことにする。

3 Parabolic elements

$g \in T(n)$ が半単純（＝対角化可能）でないとすると、固有方程式は重根を持つ。このような $T(n)$ の元 g （つまり固有方程式が重根を持ち半単純では無い元）を parabolic と呼ぼう。このような $T(n)$ の元の集合を $T(n)^{para}$ と書こう。ここで、固有多項式は整数係数だから、重根はもちろん有理整数である。よって、g は $\mathbb{Q}^2$ 内で固有ベクトルを持つので、$GL_2(\mathbb{Q})$ 共役で上三角化される。$GL_2(\mathbb{Q}) = SL_2(\mathbb{Z})P_0(\mathbb{Q}) = P_0(\mathbb{Q})SL_2(\mathbb{Z})$ は良く知られているし、証明も易しい。（$SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプの同値類がただひとつということと同じ。）よって、$x \in GL_2(\mathbb{Q})$ に対して、$x = \gamma p$ ($p \in P_0(\mathbb{Q}), \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$) とすれば、$x^{-1}gx \in P_0(\mathbb{Q})$ のとき、$\gamma^{-1}g\gamma \in pP_0(\mathbb{Q})p^{-1} = P_0(\mathbb{Q})$ となる。つまり g は $SL_2(\mathbb{Z})$ の元で上三角化できる。この上三角化された行列も $T(n)$ の元である。よって最初から g は上三角として、上三角なもの同志で分類すればよい。よって、

$$g = \begin{pmatrix} m & l \\ 0 & m \end{pmatrix} \in T(n)$$

$(l \in \mathbb{Z},\ l \neq 0)$ とする。もちろん $n = m^2 \neq 0$ である。m は当然正のものと負のものと両方ある。実は、$\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ で $\gamma^{-1}g\gamma \in P_0(\mathbb{Q})$ とすると、γ も上三角である。これは次のようにして簡単にわかる。

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。$\gamma^{-1}g\gamma$ の固有値はもとのと同じだから、ある $l' \in \mathbb{Z}, l' \neq 0$ に対して、

$$\gamma^{-1}g\gamma = \begin{pmatrix} m & l' \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

と書ける。

$$\begin{pmatrix} m & l \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & l' \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

より、$(1,1)$ 成分を比較して $am = am + cl$, よって $l \neq 0$ より、$c = 0.$　しかし $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ より $ad = 1$, a, $d \in \mathbb{Z}$ だから、$a = d = \pm 1$ である。ゆえに $\gamma = \pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という格好になる。これは g と交換可能になるので、g はこの共役では不変で、$l = l'$ である。言い換えると、n が平方数のときは、

$$T(n)^{para}//SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} m & l \\ 0 & m \end{pmatrix}; m^2 = n, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0 \right\}$$

なのである。n が平方数でないときは、$T(n)^{para}$ は空集合である。これで parabolic 共役類の分類はおしまいである。まことにあっけない。

4 Hyperbolic elements

$g \in T(n)$ が異なる実の固有値を持つとき、g を hyperbolic という。この固有値が有理数でないなら、跡公式に寄与しないことが知られている。よって、固有値は異なる有理整数と仮定する。g の 2 つの固有値を $\eta \neq \zeta \in \mathbb{Z}$ とする。また $\eta < \zeta$ としておく。これらが有理数であることより g は $GL_2(\mathbb{Q})$ により対角化可能である。よって、適当な $x \in GL_2(\mathbb{Q})$ について、

$$x^{-1}gx = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$$

としてよい。前と同様 $x = \gamma p$ $(\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}),\, p \in P_0(\mathbb{Q}))$ として、

$$\gamma^{-1}g\gamma = p \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} p^{-1}.$$

ここで右辺の対角成分はかわらないから、結局 g は $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役で

$$\begin{pmatrix} \eta & l \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$$

$(l \in \mathbb{Z})$ という形になる。よって、やはり最初から g をこの形としておいても良く、また (1,1) 成分が (2,2) 成分よりも小さいとしておいて良いのである。今 $l, l' \in \mathbb{Z}$、$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ として、

$$x \begin{pmatrix} \eta & l \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & l' \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} x$$

ならば、(2,1) 成分を比較して、$c\eta = c\zeta$, よって、$c = 0$ である。このとき $a = d = \pm 1$ であり、$al + b\zeta = b\eta + l'd$, つまり $l' = l \pm b(\zeta - \eta)$. よって、$l$ は modulo $\zeta - \eta$ で取り替えてよい。つまり、固有値が異なる有理数となる $T(n)$ の元全体を $T(n)^h$ と書くと、その代表は

$$T(n)^h // SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \eta & l \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} ; \eta, \zeta \in \mathbb{Z},\ \eta < \zeta,\ \eta\zeta = n,\ l \bmod \zeta - \eta \right\}.$$

となる。

5 Hyperbolic element (2)

元 $g \in T(n)$ の固有値が実数だが有理数でないときは、前に述べたように、$SL_2(\mathbb{Z})$ の跡公式に寄与はないので、前節では省略したが、このような元の共役類を分類することもできる。これについては次節以降で述べる elliptic elements の分類とあまりかわらないことだけは注意しておく。(これは $Sp(2,\mathbb{Z})$ と通約的な群での共役類の分類などで必要になることがある。)

6 Elliptic elements

6.1 2元2次形式と2次の整数環

対称行列 $\begin{pmatrix} x & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix}$ は、$x, y, z \in \mathbb{Z}$ のとき、半整数対称行列という。半整数対称行列全体を L_2^* と書くことにする。また L_2^* の正定値な元全体のなす部分集合を $L_{2,+}^*$ と書く。$SL_2(\mathbb{Z})$ の跡公式では $L_{2,+}^*$ の場合のみが必要になるが、不定値でもたいしてかわらないし、実際にジーゲル保型形式の跡公式などには必要になるので、若干一般的に述べておこう。従って、今 D を正または負の整数とし（つまりゼロは除く)、更に、D は平方数ではないとする。L_2^* の元 S のうち、$\det(2S) = -D$ となるもののなす部分集合を $L_2^*(D)$ と書くことにする。$S \in L_2^*$ ならば必ず $-\det(2S) \equiv 0 \text{ or } 1 \bmod 4$ となるので、D はこのような整数と仮定する。H. Weber の Algebra III [14] にならえば、このような数のことを判別式というのである。次のように定義しよう。

Definition 6.1 平方数でない整数 D について、$D \equiv 0$ *or* $1 \bmod 4$ となるものを判別式という。判別式 D のうちで、$l^{-2}D$ がまた判別式となる自然数 l は 1 に限るとき D を基本判別式という。

実は Weber では D が平方数である場合も含めているのだが、とりあえず我々には必要ないので、平方数の場合は除外しておく。Weber の本では、もともとはこのような定義は Kronecker によるものだと断ってある。

基本判別式とは、すなわち2次体の判別式にほかならない。従って、D が判別式ならば、$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の基本判別式を D_K と書けば、$D = f^2 D_K$ となる整数 $f > 0$ が存在する。(D が平方数ならば $D_K = 1$ ととることになる。しかしここでは D が平方数の場合は扱っていない。) また容易にわかるように、整数 D が判別式ということと $D = s^2 - 4n$ となる整数 s, n が存在することとは同値である。また任意に判別式 D を与えるとき、$b^2 - 4ac = D$ かつ $gcd(a, b, c) = 1$ となる自然数 a, b, c は存在する。

特に $S = \begin{pmatrix} x & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix} \in L_2^*$ に対して、$gcd(x, y, z)$ を S の content ということがある。$gcd(x, y, z) = 1$ となる S を原始的 (primitive) と呼ぶ。原

始的な S のなす $L_2^*(D)$ の部分集合を $L_2^{*,\ prim}(D)$ と書くことにする。今、$D = f^2D_K$ とすれば

$$L_2^*(D) = \bigsqcup_{m|f} mL_2^{*,\ prim}(D/m^2) \quad \text{(disjoint)}$$

である。ただし $mL_2^{*,\ prim}(D/m^2)$ は $L_2^{*,\ prim}(D/m^2)$ の元それぞれに m をかけた集合を表す。

さて、$L_2^*(D)$ の元 S_1, S_2 について、ある $P \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、${}^tPS_1P = S_2$ となるとき、S_1 と S_2 は properly equivalent という。$GL_2(\mathbb{Z}) = \{g \in M_2(\mathbb{Z}); \det(g) = \pm 1\}$ とおくと、$GL_2(\mathbb{Z})$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ を index 2 で含む。上の関係が $P \in GL_2(\mathbb{Z})$ で成立するとき、improperly equivalent と言うことがある。しかし、我々の目的のためには、むしろ次のように定義するほうが都合が良い。

$$S_1 \approx S_2 \longleftrightarrow {}^tPS_1P = \det(P)S_2 \quad (P \in GL_2(\mathbb{Z})).$$

特に $D < 0$ ならば、$\det(P) = -1$ のとき、この同値関係で負定値なものは、必ず正定値なものと同値になる。正定値なもの同志は、この同値関係で $\det(P) = -1$ により同値になることはありえないから、同値類は実際は正定値なものを $SL_2(\mathbb{Z})$ で分類したものと同じになる。$D < 0$ のとき、$L_2^*(D)$ の元のうちで正定値なものの集合を $L_{2,+}^*(D)$ と書き、$L_{2,+}^{*,\ prim} = L_2^{*,\ prim}(D) \cap L_{2,+}^*$ と書くことにする。L_2^* の適当な部分集合 X の $SL_2(\mathbb{Z})$ または $GL_2(\mathbb{Z})$ による同値類を $X//SL_2(\mathbb{Z})$ または $X//GL_2(\mathbb{Z})$ と書くことにしよう。この記号に従えば、今述べたことは、$D < 0$ ならば

$$L_2^*(D)//GL_2(\mathbb{Z}) = L_{2,+}^*(D)//SL_2(\mathbb{Z})$$

と言うことである。

一方で、判別式が D の整数環というのを定義する。$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ を考えると、今 D は平方数ではないと仮定しているから、これは 2 次体である。K の基本判別式を D_K と書くと、$D = f^2D_K$ となる正整数 f が存在する。($D \equiv 0$ or $1 \bmod 4$ という仮定が利いている。）K の整数環 $\mathcal{O}$ というのは、K の整数からなる環で、$\mathbb{Z}$ 上のランクが 2 のものである。K の元 ω を

$$\omega = (D_K + \sqrt{D_k})/2$$

で定義すると、ある正の整数 f があって、$\mathcal{O} = \mathbb{Z} + f\omega\mathbb{Z}$ となることが知られている。これを $\mathcal{O}_f$ と書く。$\mathcal{O}_f$ を判別式 D の整数環、または導手 f の整数環という。$\mathcal{O}_f$ の (普通の環論の意味での）イデアル $\mathfrak{a} \neq 0$ について

$$\{\alpha \in K; \alpha\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}\}$$

は一般に $\mathcal{O}_f$ を含む環であるが、これが $\mathcal{O}_f$ に一致するとき、$\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}_f$ の固有イデアル (proper ideal) と呼ぶ。$\mathcal{O}_f$ の 2 つの固有イデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ について、

ある $\alpha \in K^\times$ について、$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\alpha$ となるとき、広義の意味で同値という。また、ある $\alpha \in K, \alpha >> 0$（総正、つまり α の共役がすべて正）に対して同じ関係が成り立つとき、狭義の意味で同値であるという。今の場合、$\mathfrak{b} = (-1)\mathfrak{b}$ であるから、狭義の同値は、ある $\alpha \in K^\times$, $N(\alpha) > 0$ について、$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\alpha$ と言っても同じことである。($N(\alpha)$ は α のノルム、つまり共役との積)。

Theorem 6.2 $D = f^2 D_K$ としておく。
(1) $\mathcal{O}_f$ の固有イデアルの広義の同値類は $L_2^{*,prim}(D)//GL_2(\mathbb{Z})$ と１対１である。
(2) $\mathcal{O}_f$ の固有イデアルの狭義の同値類は $D > 0$ ならば $L_2^{*,prim}(D)//SL_2(\mathbb{Z})$ と、また $D < 0$ ならば $L_{2,+}^{*,prim}(D)//SL_2(\mathbb{Z})$ と１対１である。

もちろん $D < 0$ では任意の $\alpha \in K^\times$ について $N(\alpha) > 0$ なので、イデアルの狭義同値と広義同値は同じ意味であるが、上の (1), (2) で対応する２次形式の同値類も同じ集合であるのは前に注意した。この定理の証明は、狭義の同値については [1] に詳しい。広義の同値については、あいにく [1] には書いてない。書いてない理由は、あの本を書いたときにはこの事実を良く知らなかったからである。ここを良く考えなかったことを少し後悔している。広義についての証明の材料はほとんど [1] にでている。これをもとに証明のスケッチを描いておこう。

まずイデアル類との対応のさせ方から復習する。$S = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ が原始的半整数対称行列とする。ここで原始的というのは $gcd(a,b,c) = 1$ ということであった。$D = b^2 - 4ac$ として、これが平方数ではないと仮定する。このとき、ある２次体 K があって、$D = f^2 D_K$ と書けるのは容易に分かる。ただし、ここで D_K は２次体の基本判別式である。S が負定値ならば $-S$ と議論が並行的にできるから、S は負定値ではないと仮定する。すると $D_K < 0$ のときは正定値になるが、このときは $a > 0$ である。$D_K > 0$ とすると、S と $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値な行列で $a > 0$ になるものがある。（この証明は少し工夫がいるが、たとえば [1] p. 89 を見よ。）よって、以下、(1,1) 成分が正の対称行列だけを考えることにする。S に対し、K 内の lattice

$$\mathfrak{a} = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}\frac{b + \sqrt{D}}{2}$$

を対応させる。次の事実は定義どおりに計算してみれば容易に確かめられる。

Fact: これは $\mathcal{O}_f = \mathbb{Z} + f\omega\mathbb{Z}$ の固有イデアルである。

一方、$\mathcal{O}_f$ の固有イデアルはすべて上の $\mathfrak{a}$ のように書ける訳ではない。たとえば、このようなイデアルの整数倍はやはり固有イデアルだからである。$\mathcal{O}_f$ の固有イデアル $\mathfrak{a}$ について、$\mathfrak{a}/l$, $l \in Z_{>}0$ が固有イデアルならば $l = 1$ で

あるとする。このようなイデアルを原始的と呼ぶことにしよう。すると $\mathcal{O}_f$ の原始的なイデアルは、かならず上のように書ける。なぜなら、$b' + fd\omega \in \mathfrak{a}$ (b', $d \in \mathbb{Z}$) となる最小の正の整数 d をとり、$a \in \mathfrak{a}$ となる最小の正の整数 a をとると、$\mathfrak{a} = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}(b' + df\omega)$ となることが容易にわかるが、$\mathcal{O}_f$ のイデアルであることより $af\omega \in \mathfrak{a}$ で、よって $d|a$ となり、更には $N(b' + fd\omega) \in a\mathbb{Z}$ より、$d|b'$ もわかり、よって原始的という仮定から $d = 1$ となるからである。また、イデアルという仮定から、$b^2 - f^2 D_K = 4ac$ となる整数 c の存在もわかり、このイデアルは２次形式の像とみなせることもわかる。

しかし、当然ながら２次形式と固有イデアルが１対１に対応しているわけではない。たとえば b は a の偶数倍変えても同じイデアルである。固有イデアルと対称行列との関係はあくまで同値類の間の関係である。これを次に見る。

$\mathcal{O}_f$ の２つの固有イデアル

$$\mathfrak{a} = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}\frac{b+\sqrt{D}}{2} \qquad \mathfrak{a}' = \mathbb{Z}a' + \mathbb{Z}\frac{b'+\sqrt{D}}{2}$$

を考える。ここで $a,\ a'$ は正と仮定しておいてよい。今 $D = b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c'$ と c, c' を定め、

$$S = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \qquad S' = \begin{pmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{pmatrix}$$

とおく。

Lemma 6.3 次の (1), (2) は同値である。

(1) ある $\alpha \in K^\times$ に対して、

$$\mathfrak{a}\alpha = \mathfrak{a}'$$

となる。

(2) ある $U \in GL_2(\mathbb{Z})$ について、${}^tUS'U = \det(U)S$ となる。

もっと詳しく言えば、*(1)* で $N(\alpha) > 0$ のとき $\det(U) = 1$ ととれ、$N(\alpha) < 0$ のとき $\det(U) = -1$ と取れる。逆も正しい。

証明：まず (1) から (2) を示す。lattice の基底の変換を考えて、ある行列 $U \in GL_2(\mathbb{Z})$ で

$$(a\alpha, \frac{(b+\sqrt{D})\alpha}{2}) = (a', \frac{b'+\sqrt{D}}{2})U$$

となるものが存在する。$K/\mathbb{Q}$ の共役をとって並べれば、$Gal(K/\mathbb{Q}) = \{id, \sigma\}$ として、

$$\begin{pmatrix} a & (b+\sqrt{D})/2 \\ a & (b-\sqrt{D})/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & (b'+\sqrt{D})/2 \\ a' & (b'-\sqrt{D})/2 \end{pmatrix}U$$

となる。両辺の行列式をとって、

$$-a\sqrt{D}N(\alpha) = -a'\sqrt{D}\det(U),$$

よって $aN(\alpha) = a'\det(U)$ となる。よって $\det(U) = \pm 1$, $aN(\alpha) = \pm a'$ （復号同順)、つまり $N(\alpha) > 0$ か否かによって、$\det(U) = 1$ か -1 かが決まっている。さて、x, y を変数として

$$(a, (b+\sqrt{D})/2)\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a', (b'+\sqrt{D})/2)U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるが、両辺のノルムをとって

$$aN(\alpha)(ax^2 + bxy + cy^2) = a'(a'X^2 + b'XY + c'Y^2)$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

しかし、$aN(\alpha) = a'\det(U)$ であったから、これは ${}^tUS'U = S$ を意味している。次に (2) から (1) を示す。ある $U = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ について ${}^tUS'U = \det(U)S$ とする。

$$a\alpha = \det(U)(a'x + \frac{b'+\sqrt{D}}{2}z)$$

という式で $\alpha \in K$ を定義する。一方

$$\frac{(a'y + (b'+\sqrt{D})w/2}{(a'x + (b'+\sqrt{D})z/2)} = \frac{a'(a'xy + (xw+yz)b'/2 + c'wz) + \det(U)a'\sqrt{D}/2}{a'(a'x^2 + b'xz + c'z^2)}$$

が分かるが、これは ${}^tUS'U = \det(U)S$ の関係を用いて右辺を計算すると $(b+\sqrt{D})/2a$ に等しいことがわかる。よって、

$$a'y + \frac{b'+\sqrt{D}}{2}w = \frac{b+\sqrt{D}}{2a} \times \frac{a\alpha}{\det(U)} = \frac{(b+\sqrt{D})\alpha}{2\det(U)}.$$

つまり、$\mathfrak{a}\alpha = \mathfrak{a}'$ がわかる。q.e.d.

念のため、全整数環の類数と導手 f の類数公式の比較を書いておく。証明は [14], [8], [1] などにある。（なお、$\mathcal{O}_f$ はデデキント環ではないから、素イデアル分解の一意性はなりたたない。この部分が [8] では間違っているというのは金子昌信氏が昔から指摘している。）一般に $h(D)$ で広義類数を表すことにする。$\mathcal{O}_{max}$ で全整数環 $\mathcal{O}_1$ を表す。

Theorem 6.4 $D = f^2 D_K$ のとき、

$$h(D) = \frac{h(D_K)}{[\mathcal{O}_{max}^{\times} : \mathcal{O}_f^{\times}]} \times f \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{p}\left(\frac{-D_K}{p}\right)\right)$$

K が実２次体のときは、狭義類数は、$\mathcal{O}_f$ にノルムマイナス１の単数があるか否かで広義類数に等しいか、またはその２倍になる。虚２次体のときは、いつでも狭義と広義は同じ意味である。狭義類数の公式は、上の公式で $h(D)$, $h(D_K)$ を狭義の類数 $h^+(D)$, $h^+(D_K)$ に置き換えて、分母で $\mathcal{O}_{max}^{\times}$, $\mathcal{O}_f^{\times}$ を総正な単数群に置き換えればよい。たとえば、$\mathcal{O}_{max}$ にノルム -1 の単数があり、$\mathcal{O}_f$ にノルム -1 の単数がないのならば、$h^+(D_K) = h(D_K)$, $h^+(D) = 2h(D)$, $[\mathcal{O}_{max}^{\times}; \mathcal{O}_f^{\times}] = 2[\mathcal{O}_{max}^{\times +} : \mathcal{O}_f^{\times +}]$ などとなり、うまくつりあっている。

6.2 ２次体を生成する共役類と２元２次形式

元 $g \in T(n)$ で $K = \mathbb{Q}(g)$ が $\mathbb{Q}$ 上の２次体になっている場合を考えよう。このとき、固有値は有理数ではない。固有値が実数でないとき、つまり $\mathbb{Q}(g)$ が虚２次体のとき、g を elliptic という。固有値が実数、つまり $\mathbb{Q}(g)$ が実２次体ならば hyperbolic という。実は代数的な性質は両方ともあまりかわらない。これらはもちろん半単純である。これらについて、$GL_2(\mathbb{Z})$ 共役類も $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類も分類できる。これを説明する。

共役なもの同志は固有多項式が等しいはずだから、分類する際に $Tr(g) = s$ は固定して考えても良い。よって g の固有多項式 $X^2 - sX + n$ を固定しておく。このとき、$g - (s/2)1_2$ のトレースはゼロ、よって

$$g = \begin{pmatrix} s/2 & 0 \\ 0 & s/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y/2 & -z \\ x & y/2 \end{pmatrix}$$

$(s,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{Z})$ と書ける。ただしここで $s \equiv y \bmod 2$ である。このとき $(g - (s/2)1_2)^2 = (n - s^2/4)1_2$ である。つまり $4xz - y^2 = s^2 - 4n$ となる。$s^2 - 4n = D$ とおく。固有値が有理数でないという仮定から D は平方数ではなく $D \equiv 0$ or $1 \bmod 4$ であるから D は、ある order の判別式である。

ここで次のような $M_2(\mathbb{Q})$ の部分集合を考える。

$L(D) = \{h \in M_2(\mathbb{Q}); h^2 = -D/4,\ g$ の対角成分は半整数、他の成分は整数$\}$.

$h \in L(D)$ ならばもちろん $Tr(h) = 0$ である。この記号下で、$g \in T(n)$ の固有多項式が $X^2 - sX + n$ で $s^2 - 4n = D$ ということと、ある $h \in L(D)$ があって、$g = (s/2)1_2 + h$ とかけることは同値である。$g_i = (s/2)1_2 + h_i$ $(i = 1, 2)$ とすると $\gamma^{-1}g_1\gamma = g_2$ for $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ or $GL_2(\mathbb{Z})$ というのは、$\gamma^{-1}h_1\gamma = h_2$ というのと同値であるから、実際には $L(D)$ の共役類を分類すればよいのである。ここで $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

Lemma 6.5 *(1)* $h \to Jh$ は $L(D)$ から $L_2^*(D)$ への全単射である。
(2) $L(D)$ の $GL_2(\mathbb{Z})$ 共役類は $L_2^*(D)$ の広義の同値類と 1 対 1 に対応する。
(3) $L(D)$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類は $L_2^*(D)$ の狭義の同値類と 1 対 1 に対応する。

ここで、$D<0$ ならば $L_2^*(D)$ は正定値のものと負定値なもの両方からなり、これらは狭義の意味では同値でない点は、間違えないように注意すべきである。

Lemma の証明。 (1) は

$$Jh = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y/2 & -z \\ x & y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix}$$

で、$4xz-y^2=-D$ よりあきらか。(2), (3) は $g \in GL_2$ のとき、良く知られているように（あるいは計算ですぐわかるように）${}^t gJg = \det(g)J$ である。よって、$\gamma^{-1}h_1\gamma = h_2$ ならば $J\gamma^{-1}J^{-1}Jh_1\gamma = Jh_2$ つまり $\det(\gamma)^{-1}({}^t\gamma)h_1\gamma = Jh_2$ つまり ${}^t\gamma h_1 \gamma = \det(\gamma)h_2$. これは可逆な変形だから、証明できた。

Corollary 6.6 整数 s と $n>0$ について、$D = s^2-4n = f^2D_K$ が平方数ではないとする。固有多項式が $X^2 - sX + n$ となる $T(n)$ の元について、
(1) $GL_2(\mathbb{Z})$ 共役類の個数は、$\sum_{m|f} h(m^2D_K)$ に等しい。
(2) $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類の個数は、$D>0$ ならば $\sum_{m|f} h^+(m^2D_K)$ に等しい。$D<0$ ならば $2\sum_{m|f} h(m^2D_K)$ に等しい。

全整数環でない整数環の類数公式については、前節または [1] を見よ。

7 Subgroups of $SL_2(\mathbb{Z})$

群が $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群、たとえば $\Gamma_0(N)$ のときは、もっと複雑になる。たとえば、古典的には

$$\Delta_{0,N}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}; (a,N)=1, ad-Nbc=n \right\}$$

とおいて、$\Delta_{0,N}(n)$ の中で double coset を考える。この場合、$\Gamma_0(N)$ 共役類と

$$\begin{pmatrix} Nx & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix}$$

の 2 次形式としての $\Gamma_0(N)$ 同値類を考えることは同等である。今、$M_2(\mathbb{Q})$ の lattice

$$L_N^* = \left\{ \begin{pmatrix} Nx & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix}; x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$$

を不変にする $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群は $\Gamma_0(N)$ である。よって、これに属する 2 次形式全体を $\Gamma_0(N)$ で分類すればよいことになる。今はこれ以上、立ち入らない。

8 Trace formula for $T(n)$

若槻氏の講演からの結果を抜粋し、それを $SL_2(\mathbb{Z})$ に適用する。さて、ちょっと注意だが **具体的な跡公式は非常に多くの文献にミスプリントがあるようだ。** たとえば Eichler の論文はいろいろなところに間違っている部分があったはず。きちんと公式を書くのは、一番簡単な $SL_2(\mathbb{Z})$ のときでさえ、相当間違いやすいので、検算が欠かせないと思う。

以下でウェイト k はすべて $k > 2$ となる整数と仮定する。

8.1 一般公式の復習

T を $M_2(\mathbb{Z}) \cap GL_2^+(\mathbb{Q})$ 内の $SL_2(\mathbb{Z})$-double cosets の和集合とする。以下では $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ とかく。

$$
\begin{aligned}
Tr(T) &= \sum_{\alpha \in T \cap Z(\mathbb{Q})} \det(\alpha)^{(k-2)/2} \frac{k-1}{8\pi} \mathrm{vol}(\Gamma \backslash H) \#(T \cap Z(\mathbb{Q})) \\
&\quad - \sum_{\substack{\{\gamma\}_\Gamma \subset T \\ \gamma:\text{elliptic}}} \frac{\det(\gamma)^{(k-2)/2}}{2\#(\Gamma_\gamma)} \times \frac{e^{i(k-1)\theta} - e^{-i(k-1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \\
&\quad - \sum_{\substack{\{\gamma\}_\Gamma \subset T \\ \gamma \sim_{SL_2(\mathbb{Q})} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \\ a,b \in \mathbb{Q},\ |a|>|b|}} \det(\gamma)^{(k-2)/2} \frac{1}{2} \frac{|a^{-1}b|^{k/2}}{|1 - a^{-1}b|} \\
&\quad - \frac{1}{8} \times \det(\gamma)^{(k-2)/2} \lim_{s \to 0} \sum_{\substack{\{\gamma\}_\Gamma \subset T \\ \gamma:\text{parabolic}}} s|m(\gamma)|^{-s-1}
\end{aligned}
$$

ただしここで、$\{\gamma\}_\Gamma$ は γ の Γ 共役類、$\sim_{SL_2(\mathbb{Q})}$ は $SL_2(\mathbb{Q})$ 共役という意味である。また、$\mathrm{vol}(\Gamma \backslash H)$（割ったものの体積）は測度 $y^{-2} dx\, dy$ で測る。$Z(\mathbb{Q})$ は $GL_2(\mathbb{Q})$ の中心である。従って、T の元に $\det$ が有理数の自乗の元がなければ、中心の寄与はゼロである。elliptic の寄与において、$\sqrt{n}e^{\pm i\theta}$ は γ の固

有値である。parabolic の寄与において、$m(\gamma)$ は次で定まる量である。

$$\begin{aligned}\gamma &= \det(\gamma)\xi^{-1}\begin{pmatrix}1 & h(\gamma)\\0 & 1\end{pmatrix}\xi\\ \Gamma_\gamma &= \xi^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1 & \alpha h\\0 & 1\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{Z}\right\}\xi\\ m(\gamma) &= \frac{h(\gamma)}{h}\end{aligned}$$

ここで γ はいろいろ動いているが Γ_γ はたとえば γ を γ のべきに取り替えても同じなのに注意。以下順次結果を述べる。以下、一般の double coset ではなく、

$$T(n)=\{g\in M_2(\mathbb{Z});\det(g)=n\}$$

だけについて考える。

8.2 中心

n が整数の自乗でなければ寄与はない。$n=m^2$ のとき、$T(n)\cap Z(\mathbb{Q})=\{\pm m1_2\}$ であるから、$\#(T(n)\cap Z(\mathbb{Q}))=2.$

よく知られているように

$$\begin{aligned}\int_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash H}\frac{dxdy}{y^2} &= \int_{|x|\le 1/2, y\ge\sqrt{1-x^2}}\frac{dxdy}{y^2}\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{dxdy}{y^2}\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\left[-\frac{1}{y}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}dx\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= [Arcsin(x)]_{-1/2}^{1/2}=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

よって、n が square かどうかに応じて $\chi(\sqrt{n})=1$ or 0 とおくと、寄与は

$$\chi(\sqrt{n})\times\frac{n^{(k-2)/2}(k-1)}{8\pi}\times\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{k-1}{12}n^{(k-2)/2}\chi(\sqrt{n})$$

である。

8.3 parabolic

$n = m^2$ （m は正または負）で、

$$\gamma = \begin{pmatrix} m & l \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$(l \in \mathbb{Z},\, l \neq 0)$ のみ寄与がある。

$$\Gamma_\gamma = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

で $h = 1$. $h(\gamma) = l/m$. よって前の公式は次のように計算される。

$$-n^{(k-2)/2} \lim_{s\to 0} \frac{s}{8} |m|^{s+1} \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \frac{1}{|l|^{s+1}} = -n^{(k-2)/2}\sqrt{n} \lim_{s|\to 0} \frac{s}{4}\zeta(s+1) = -\frac{n^{(k-1)/2}}{4}.$$

$m^2 = n$ なる m は 2 つあるので結局、寄与は

$$-\frac{n^{(k-1)/2}}{2}$$

となる。（注意：たとえば Miyake [9] p. 265 の最終公式とは 1/2 分ちがうが、Miyake は $\Gamma_0(pq^\nu)$ を書いており、レベル 1 はそのページには含まれていない。$\Gamma_0(p)$ はカスプが 2 つあるので、Miyake p. 265 では上の 2 倍になっている。Miyake と比較したければ p. 263 の一般公式で比較するしかない。）

8.4 hyperbolic

n に対して、$ab = n$ $(a, b$ は $|a| > |b|$ となる正または負の整数）とする。寄与のある hyperbolic elements はこの分解に応じて定まる

$$\begin{pmatrix} a & l \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$(l$ は $\mathrm{mod}(a-b)$ の代表を渉る）である。つまり同じ a, b のものが $|a-b|$ 個ある。それぞれの寄与は

$$-\frac{1}{2} n^{(k-2)/2} \frac{|a^{-1}b|^{k/2}}{|1-a^{-1}b|} = -\frac{1}{2}|ab|^{-1} \frac{|aba^{-1}b|^{k/2}}{|1-a^{-1}b|} = -\frac{1}{2}\frac{|b|^{k-1}}{|a-b|}.$$

であるから、個数の $|a-b|$ をかけて、寄与は

$$-\frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}, ab=n, |a|>|b|} |b|^{k-1}$$

である。しかし $ab=n$ となる整数はひとつの $|a|,\ |b|$ に対して、(a,b), $(-a,-b)$ の２つあるから、結局寄与は

$$-\sum_{dd'=n,d'>d>0} d^{k-1}$$

となる。または

$$-\frac{1}{2}\sum_{dd'=n,d,d'>0,d\neq d'} min(d,d')^{k-1}$$

と書いても同じである。

8.5 parabolic と hyperbolic をまとめた表示

両方まとめると

$$-\frac{1}{2}\sum_{dd'=n,d,d'>0} min(d,d')^{k-1}$$

である。やや人工的な表示だが、(d,d'), (d',d) $(d\neq d')$ と２通りが有る場合が hyperbolic で $d=d'=\sqrt{n}\in\mathbb{Z}$ の一通りのときが parabolic である。スマートなまとめ方である。このまとめかたは Zagier にならっている。

8.6 elliptic

elliptic な元 $\gamma\in T(n)$ について、その中心化群の構造を求めよう。今の設定では、elliptic というのは $\mathbb{Q}(\gamma)$ が虚２次体ということに他ならない。共役類の分類は以前にやったが、もう一度最初から考えてみる。γ の固有方程式を $x^2-sx+n=0$ とする。

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

とすると $a+d=s$ であるから、

$$\gamma=\frac{s}{2}1_2+\begin{pmatrix} a-s/2 & b \\ c & d-s/2\end{pmatrix}=\frac{s}{2}1_2+\begin{pmatrix} -y/2 & -z \\ x & y/2\end{pmatrix}$$

とかける。$\gamma^2-s\gamma+n1_2=0$ であるから、$(g-(s/2)1_2)^2=(y^2-4xz)1_2/4=(s^2-4n)1_2/4.$ ここで $e=gcd(x,y,z)$ として、

$$\delta=e^{-1}\begin{pmatrix} -y/2 & -z \\ x & y/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y_0/2 & -z_0 \\ x_0 & y_0/2\end{pmatrix}$$

とおく。もちろん $gcd(x_0,y_0,z_0)=1$ である。また、

$$\mathbb{Z}\ni-\det(2\delta)=y_0^2-4x_0z_0=(s^2-4n)/e^2$$

である。ここで、$\mathbb{Q}(\gamma)=\mathbb{Q}(\delta)$ と可換な $M_2(\mathbb{Q})$ の元の集合は、Skolem-Noether の定理により $\mathbb{Q}(\delta)$ 自身である。$R=\mathbb{Q}(\delta)\cap M_2(\mathbb{Z})$ とおくと、R は $\mathbb{Q}(\delta)\cong\mathbb{Q}(\sqrt{s^2-4n})$ の整数環 (maximal とは限らない order) である。今、$\Gamma_\gamma\subset\mathbb{Q}(\gamma)\cap M_2(\mathbb{Z})=R$ なので、R が何であるかを知りたい。$\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ に対して

$$\alpha 1_2+\beta\delta\in M_2(\mathbb{Z})$$

と仮定すると、$\alpha\pm\beta y_0/2\in\mathbb{Z}$ であるから、$2\alpha\in\mathbb{Z}$ である。よって $\beta y_0/2\in 2^{-1}\mathbb{Z}$, 故に $\beta y_0\in\mathbb{Z}$. また $\beta z_0,\beta x_0\in\mathbb{Z}$ でもあるから、$gcd(x_0,y_0,z_0)=1$ より $\beta\in\mathbb{Z}$ である。ここで $\alpha=\alpha_0/2$ ($\alpha_0\in\mathbb{Z}$) と書くと、$\alpha_0+\beta y_0\in 2\mathbb{Z}$. ここでもし $y_0\equiv 0 \bmod 2$ ならば $\alpha_0\in 2\mathbb{Z}$ で $\alpha\in\mathbb{Z}$. また $y_0\equiv 1 \bmod 2$ ならば $\alpha_0\equiv\beta \bmod 2$. つまり

$$R=\mathbb{Q}(\delta)\cap M_2(\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\delta & \text{if } y_0\equiv 0 \bmod 2\\ \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\begin{pmatrix}(1-y_0)/2 & -z_0\\ x_0 & (1+y_0)/2\end{pmatrix} & \text{if } y_0\equiv 1 \bmod 2\end{cases}$$

ここで $-\det(\delta)=(4x_0z_0-y_0^2)/4$ であり、$y_0^2-4x_0z_0=f^2D_K$ ($f>0$, D_K は $K=\mathbb{Q}(\sqrt{s^2-4n})$ の基本判別式）とかけるので、R は conductor が f の K の整数環である。R の $\det=1$ の元は、すなわち R のノルム 1 の元であり、これは R の単数に他ならない。すなわち

$$\Gamma_\gamma=R^\times.$$

さて、s, n を固定しても e, f は一意的には決まらないので、このあたりの事情を正確に見る必要がある。前の設定と記号のもとで、γ の $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類を分類するということは δ の共役類を分類することと同じであって、e が異なれば、もちろんこれらは違う共役類に属する。ひとつの e に対し、f はいろいろありうるし、またひとつの f に対しても共役類はいろいろある。しかし、同じ f に対しては、どの γ でも $\#(\Gamma_\gamma)$ は同じであるから、結局寄与は次のように考えればよい。

n を固定し、s は固定しないとき、γ の Γ 共役類は本質的に δ の共役類の分類で記述できる。ここで本質的にはというのは、s の符号の choice は δ では決められないからである。よって、$s^2<n$ となる $s\in\mathbb{Z}$ をひとつ固定し、$(s^2-4n)/e^2$ が判別式になるような e も固定して、（従って、ある虚 2 次体の判別式 D_K に対して $(s^2-4n)/e^2=f^2D_K$ となるわけだが）それらに対して、$h(f^2D_K)/\#(\mathcal{O}_{K,f})^\times$ の和をとればよい。ここで $\mathcal{O}_{K,f}$ は K の conductor f の整数環としている。ここで、f はどこを動くかというと、$s^2-4n=l^2D_K$ ($l>0$, $l\in\mathbb{Z}$) とするとき、$f>0$ は $f|l$ なる数を全部動き、そのそれぞれについて、$e=l/f$ が定まり、また共役類に応じて (x_0,y_0,z_0) の代表が定まることになるのである。一方で積分からの寄与は

$$-\frac{1}{2}\times\det(\gamma)^{(k-2)/2}\frac{e^{i(k-1)\theta}-e^{-i(k-1)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}=\frac{(\sqrt{n}e^{i\theta})^{k-1}-(\sqrt{n}e^{-i\theta})^{k-1}}{\sqrt{n}e^{i\theta}-\sqrt{n}e^{-i\theta}}$$

だった。ここで $e^{\pm i\theta}$ は $\det(\gamma)^{1/2}e^{i\theta}=\sqrt{n}e^{\pm i\theta}$ が γ の固有値として定まる量である。言い換えると

$$1-sx+nx^2=(1-\eta x)(1-\zeta x)$$

とするとき

$$P_k(s,n):=\frac{\eta^{k-1}-\zeta^{k-1}}{\eta-\zeta}$$

で与えられる。これは

$$\frac{1}{1-sx+nx^2}=\frac{1}{x(\eta-\zeta)}\times\left(\frac{1}{1-\eta x}-\frac{1}{1-\zeta x}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\eta^k-\zeta^k}{\eta-\zeta}x^{k-1}$$

に注意すれば、$P_k(s,n)$ は $(1-sx+nx^2)^{-1}$ の x^{k-2} の係数といっても同じことである。こう書いたほうが有理数だという感じがわかりやすいであろう。

さて、非常に微妙なところだが、固有多項式 $x^2-sx+n=0$ から決まる共役類を分類する際に δ と $-\delta$ は２次形式で言えば、positive definite と negative definite に対応するので、共役にはなれない。（ひとつの s^2-4n に対し、２種類のとり方がある。）それで跡公式の一般形に登場する 1/2 なる因子はここキャンセルする。また公式

$$\frac{h(f^2D_K)}{\#(\mathcal{O}_{K,f}^\times)}=\frac{1}{\#(\mathcal{O}_{K,f}^\times)}\times\frac{h(D_K)}{[\mathcal{O}_K^\times:\mathcal{O}_{K,f}^\times]}f\prod_{p|f}\left(1-\frac{1}{p}\left(\frac{D_K}{p}\right)\right)$$

によって、$\#(\mathcal{O}_{K,f}^\times)[\mathcal{O}_K^\times,\mathcal{O}_{K,f}^\times]=\#(\mathcal{O}_K^\times)$ と簡易化される。

以上により、elliptic な寄与全体は次で与えられる。

Theorem 8.1 $Tr(T(n))$ における楕円元の寄与は

$$\begin{aligned}&-\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\ s.t.\\ s^2-4n=l^2D_K<0}}\sum_{f|l}\frac{h(f^2D_K)}{\#(\mathcal{O}_{K,f}^\times)}\\ =&-\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\ s.t.\\ s^2-4n=l^2D_K<0}}\frac{h(D_K)}{\#(\mathcal{O}_K^\times)}\sum_{f|l}f\prod_{p|f}\left(1-\frac{1}{p}\left(\frac{D_K}{p}\right)\right)\end{aligned}$$

で与えられる。

8.7　中心と elliptic のとりまとめ

中心は elliptic の degenerate case だと思って、まとめることを考える。γ が中心の元のときは、固有方程式は重根をもつので $s^2-4n=0$ であり、このとき、

$$\frac{1}{1-sx+nx^2}=\frac{1}{\left(1-\frac{s}{2}x\right)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{s^k}{2^k}x^k.$$

これの x^{k-2} の係数も $P_k(s,n)$ と書くことにする。つまり

$$P_k(\pm 2\sqrt{n},n)=(k-1)(s/2)^{k-2}=(k-1)n^{(k-2)/2}$$

である。よって中心の寄与は

$$\sum_{s;s^2=4n}\frac{-1}{24}P_k(s,n)=\chi(\sqrt{n})\frac{-1}{12}P_k(2\sqrt{n},n)$$

である。ここで Zagier にならって、次のような記号を導入しよう。

$$H(0)=-\frac{1}{12}$$

判別式 $D<0$ に対して

$$H(-D)=\sum_{D_1|D,D_1\text{は判別式}}\frac{h(D_1)}{w(D_1)/2}$$

ここで、$w(D_1)$ は判別式 D_1 の order の単数群の位数。$h(D_1)$ は判別式 D_1 の order の類数。また負の数 x に対しては $H(x)=0$ とおくことにする。

こうすると中心と elliptic の寄与をまとめてかける。すなわち

$$-\frac{1}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}P_k(s,n)H(4n-s^2)$$

となる。これは n を固定しているので、実際には有限和である。

8.8　公式と実例

k を偶数、$T(n)_k$ を $S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ 上のヘッケ作用素とすると、

$$Tr(T(n)_k)=-\frac{1}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}P_k(s,n)H(4n-s^2)-\frac{1}{2}\sum_{dd'=n,d,d'>0}min(d,d')^{k-1}.$$

ここで、

$$\frac{1}{1-sx+nx^2}=\sum_{k=2}^{\infty}P_k(s,n)x^{k-2}.$$

たとえば

$$\begin{aligned}
P_2(s,n) &= 1\\
P_4(s,n) &= s^2-n\\
P_6(s,n) &= s^4-3ns^2+n^2\\
P_8(s,n) &= s^6-5ns^4+6n^2s^2-n^3\\
P_{10}(s,n) &= s^8-7ns^6+15n^2s^4-10n^3s^2+n^4.
\end{aligned}$$

また

$$H(m)=\begin{cases} 0 & m<0\\ -\frac{1}{12} & m=0\\ \sum_{D|m,D>0,-D\text{ は判別式}}\frac{h(-D)}{w(-D)/2} & m>0\end{cases}$$

ここで、判別式というのは $1 \bmod 4$ または $0 \bmod 4$ となる整数のこととする。(上の設定では、$-D$ は負だから平方数ではない。) また $h(-D)$ は判別式が $-D=D_Kf^2$ の整数環 $\mathcal{O}_{K,f}$ の類数、$w(-D)$ は $\mathcal{O}_{K,f}^{\times}$ の位数。たとえば、$m=12$ ならば、$-D$ の候補は $-D=-3$, -12. $h(-3)=h(-12)=1$, $w(-3)=6$, $w(-12)=2$, $H(12)=1/3+1=4/3$. 実際には $m>0$ に対して、$H(m)$ は判別式が $-m$ の**原始的とは限らない**正定値整数係数 2 次形式の $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値類の個数を x^2+y^2 は $1/2$, x^2+xy+y^2 は $1/3$, その他は 1 と重みをつけてカウントしたものに等しい。

m	0	3	4	7	8	11	12	15	16	19	20	23	24
$H(m)$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	1	2	3	2

実例: $S_k(\Gamma)$ の次元公式。$n=1$ のとき $T(1)_k$ は恒等写像で $Tr(T(1)_k)=\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$. これが良く知られた次元公式に一致することを確かめる。

$s^2\le 4$ とすると $s=0$, $s=\pm1$, $s=\pm2$ である。$s=0$ ならば

$$\frac{1}{(1+x^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^{2k}=\sum_{k=0,k:even}(-1)^{k/2}x^k$$

よって、k even に対しては $-\frac{1}{2}P_k(0,n)=(-1)^{k/2}/2$,

$s=1$ と $s=-1$ をまとめて考えると

$$\frac{1}{1-x+x^2}+\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1+x}{1+x^3}+\frac{1-x}{1-x^3}=2\frac{1-x^4}{1-x^6}$$

つまり
$$-\frac{1}{2}(P_k(1,1)+P_k(-1,1))=[1,0,-1,0,0,0;6]_k$$
ただし、$[a_0,a_1,\ldots,a_{l-1};l]_k$ というのは $k\equiv i \bmod l$ のとき a_i になるという意味とする。$H(0)=-1/12$, $H(3)=1/3$, $H(4)=1/2$ より、k even に対して
$$\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z}))=Tr(T(1))=\frac{k-1}{12}+\frac{(-1)^{k/2}}{4}+\frac{1}{3}[1,0,-1,0,0,0;6]_k-\frac{1}{2}.$$
いまは k 奇数を跡公式にあまりちゃんといれていないので、奇数部分が面倒になるが、母関数は、次の式から奇数部分と小さい k を除外すれば得られる。
$$\begin{aligned}&-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{1-2x+x^2}+\frac{1}{1+2x+x^2}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)}\\&-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-x+x^2)}+\frac{1}{(1+x+x^2)}\right)-\frac{1}{2(1-x)}\\&=\frac{1+x+2x^2+x^3-x^4-3x^6-x^7-2x^8-x^9+x^{10}}{2(1-x^4)(1-x^6)}\end{aligned}$$
偶数部分は
$$\frac{1+2x^2-x^4-3x^6-2x^8+x^{10}}{2(1-x^4)(1-x^6)}$$
$k=0$, 2 を、$\dim S_0(\Gamma)=S_2(\Gamma)=0$ という、跡公式以外の論法で分かる事実を利用して補正して、
$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z}))=\frac{t^{12}}{(1-t^4)(1-t^6)}$$
（注意：一般の群 Γ について、$k=2$ まで跡公式が成り立つように補正する方法は知られている。(cf. [10], [5]). $S_0(\Gamma)=0$ は一般的事実である。一般の群では $S_1(\Gamma)$ の簡単に計算可能な公式は知られていない。ただしもちろん ad hoc に具体的な値がわかることは、よくある。また、$\Gamma_0(p)$ で Selberg zeta の留数との関係、ガロア表現との関係、などは知られているが、この方向で直接次元を計算した例は知らない。）

例： $T(2), n=2$.
$s=0$, $s^2-4n=-8$, $H(8)=1$
$s=\pm1$, $s^2-4n=-7$, $H(7)=1$
$s=\pm2$, $s^2-4n=-4$, $H(4)=\frac{1}{2}$.
$$\frac{1}{1+2x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k2^kx^{2k}$$

$$-\frac{1}{2}P_k(0,2) = (-1)^{k/2}2^{k/2-2}.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x+2x^2}+\frac{1}{1+x+2x^2}\right) = -1+x^2+x^4-7x^6+17x^8-23x^{10}+x^{12}+89x^{14}+\cdots$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x+2x^2}+\frac{1}{1+2x+2x^2}\right) &= -\frac{1+2x^2}{1+4x^4} = -1-2x^2+4x^4+8x^6-16x^8-32x^{10} \\ &\quad +64x^{12}+128x^{14}+\cdots\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{dd'=2} min(d,d')^{k-1} = -1.$$

$k=12$ で考えると

$$2^4-23-32/2-1 = 16-23-16-1 = -24$$

$k=14$ で $-2^5+1+64/2-1=0$. $k=16$ で $2^6+89+128/2-1=216$. $\Delta E_4 = q+216q^2+\cdots$. 一般には

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{\infty} Tr(T(2)_k)x^{k-2} &= -24x^{10}+216x^{14}-528x^{16}+456x^{18}-288x^{20} \\ &\quad +1080x^{22}-48x^{24}-8280x^{26}+8640x^{28}+\cdots\end{aligned}$$

例：$n=3$, $s=0$, $s^2-4n=-12$, $H(12)=\frac{4}{3}$, $s=\pm1$, $s^{-2}-4n=-11$, $H(11)=1$, $s=\pm2$, $s^2-4n=-8$, $H(8)=1$, $s=\pm3$, $s^2-4n=-3$, $H(3)=\frac{1}{3}$,

$$-\frac{1}{2(1+3x^2)} = -\frac{1}{2}(1-3x^2+9x^4-27x^6+81x^8-243x^{10}+\cdots)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x+3x^2}+\frac{1}{1+x+3x^2}\right) = -1+2x^2-x^4-13x^6+74x^8-253x^{10}+\cdots$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x+3x^2}+\frac{1}{1+2x+3x^2}\right) = -1-x^2+11x^4-13x^6-73x^8+263x^{10}+\cdots$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-3x+3x^2}+\frac{1}{1+3x+3x^2}\right) = -1-6x^2-9x^4+27x^6+162x^8+243x^{10}+\cdots$$

$k=12$ として

$$Tr(T(3)) = \frac{243}{2}\times\frac{4}{3}-253+263+\frac{243}{3}-1 = 252 = \tau(3).$$

なお、上の分数式を用いて各ウェイトに対する $Tr(T(3))$ の値の母関数を書くことができる。展開式は

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{\infty} Tr(T(3)_k)x^{k-2} &= 252x^{10} - 3348x^{14} - 4284x^{16} + 50652x^{18} - 128844x^{20} \\ &\quad +339480x^{22} - 195804x^{24} - 1286280x^{26} - 4967640x^{28} + \cdots\end{aligned}$$

の x^{k-2} の係数。たとえば

$$\begin{aligned}\Delta &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots \\ \Delta E_4 &= q + 216q^2 - 3348q^3 + 13888q^4 + \cdots \\ \Delta E_6 &= q - 528q^2 - 4284q^3 + 147712q^4 + \cdots \\ \Delta E_4^2 &= q + 456q^2 + 50652q^3 - 316352q^4 + \cdots \\ \Delta E_4 E_6 &= q - 288q^2 - 128844q^3 - 2014208q^4 + \cdots \\ \Delta E_4^3 &= q + 696q^2 + 162252q^3 + 12831808q^4 + \cdots \\ \Delta E_6^2 &= q - 1032q^2 + 245196q^3 + 10965568q^4 + \cdots\end{aligned}$$

例：$n = 4$,
$s = 0$, $s^2 - 4n = -16$, $H(16) = \frac{3}{2}$, $s = \pm 1$, $s^2 - 4n = -15$, $H(15) = 2$
$s = \pm 2$, $s^2 - 4n = -12$, $H(12) = \frac{4}{3}$, $s = \pm 3$, $s^2 = 4n = -7$, $H(7) = 1$,
$s = \pm 4$, $s^2 - 4n = 0$, $H(0) = -\frac{1}{12}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{\infty} Tr(T(4)_k)x^{k-2} &= -1472x^{10} + 13888x^{14} + 147712x^{16} - 316352x^{18} - 2014208x^{20} \\ &\quad +25326656x^{22} - 33552128x^{24} + 190623296x^{26} + \cdots\end{aligned}$$

以上より、$k = 24$ で $\dim S_{12}(SL_2(\mathbb{Z})) = 2$, $Tr(T(2)_{24}) = 1080$, $Tr(T(4)_{24}) = 25326656$, 固有空間では $T(4)_k = (T(2)_k)^2 - 2^{k-1}$. よって $T(2)_{24}$ の固有値を α, β として、$\alpha^2 + \beta^2 = Tr(T(4)_{24}) + 2^{24} = 19309881$, $\alpha + \beta = 1080$, $\alpha\beta = -20468736$. $\alpha, \beta = 540 \pm 12\sqrt{144169}$. ここで有名な 144169 がでてくる。

ちなみに $\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) = 2$ となるものの固有値をあげておく。

k	$T(2)$	$T(3)$
24	$540 \pm 12\sqrt{144169}$	$169740 \mp 576\sqrt{144169}$
28	$-4140 \pm 108\sqrt{18209}$	$-643140 \pm 20736\sqrt{18209}$
30	$4320 \pm 96\sqrt{51349}$	$-2483820 \mp 52992\sqrt{51349}$
32	$19980 \pm 12\sqrt{18295489}$	$324(26795 \pm 16\sqrt{18295489}$
34	$-60840 \mp 72\sqrt{2356201}$	$18959940 \pm 22464\sqrt{2356201}$

注意：$k \leq 10$ では $\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) = 0$ だからトレースは常に 0 である。これから類数の間の関係式 (class number relation) がでる。

9 一般の古典群の共役類の分類方針

つぎのような行列群のみを考える。

$$\begin{aligned} G &= \{g \in M_n(B); gg^* = n(g)1_n\} \text{ or} \\ G^1 &= \{g \in M_n(B); gg^* = 1_n\} \end{aligned}$$

ここで、$*$ は $M_n(B)$ の involution（$M_n(B)$ の位数 2 の自己同型、または逆自己同型）とする。例としては

(1) $B = \mathbb{Q}$; $g^* = JgJ^{-1}$, $g^* = {}^tg$, $g^* = S^tgS^{-1}$ など。ただし $S = {}^tS \in M_n(\mathbb{Q})$

(2) $B = K$ （虚 2 次体）、$g^* = {}^t\overline{g}$, $g^* = H^{-1}\,{}^t\overline{g}H$ など。

(3) B quarternion algebra, $g^* = {}^t\overline{g}$ など。

9.1 体上の共役類と共役類の Hasse の原理

以下に述べる方針は、私は土方弘明先生の記事で学んだ。

(0) $GL_n(B)$ 共役類。
$M_n(B)$ の元の固有多項式 $f(x)$ の候補をひとつ固定しておく。$f(x)$ をひとつ固定するとき、これを固有多項式に持つ $M_n(B)$ の半単純元は、Remak-Schmidt の直既約分解定理と Skolem Noether の定理より、$GL_n(B)$ 共役である。さて、$f(x)$ を固有多項式にもつ G の元が存在するためには $f(x)$ には多少条件がつくのが普通であるが、それについて論じるのはやめて、そのような元 g が存在するとして、ひとつ固定しておく。

(1) 以下の話は G で考えるか G^1 で考えるかで多少かわるが、G^1 のほうが話が見かけ上単純なので、G^1 で考えることにする。G^1 共役類。ある $x \in GL_n(B)$ について $x^{-1}gx \in G^1$ と仮定すると、$(x^{-1}gx)(x^{-1}gx)^* = 1$ すなわち $g(xx^*)g^* = xx^*$ である。$gg^* = 1_n$ により、$g(xx^*) = (xx^*)g.$ 今 $Z(g) = \{z \in M_n(B) : zg = gz\}$ とおくと、$xx^* \in Z(g)$ である。$Z(g)$ は $*$ の作用で集合として不変である。$Sym(Z(g)) = \{z = z^*; z \in Z(g)\}$ とおくと、$xx^* \in Sym(Z(g))$ である。$z^* = z$ となる $M_n(B)$ の元を $*$ symmetric と呼ぶことにする。$*$ symmetric な $M_n(B)$ の元のうち、どれが xx^* $(x \in GL_n(B))$ とかけるかというのは $(B, *)$ による。たとえば B が定符号 4 元数体で、$g^* = {}^t\overline{g}$, $\overline{g_{ij}}$ は main involution とすると正定値 4 元数的エルミート行列はみな xx^* の形にかけるので、さらに $Sym^+(Z(g))$ を $Sym(Z(g))$ の中で正定値なものとすれば $xx^* \in Sym^+(Z(g))$ である。一般に $Sym^+(M_n(B)) = \{z = z^* \in M_n(B); z = xx^* \text{ for some } x \in GL_n(B)\}$ とおいて、

$$Sym^+(Z(g)) = Z(g) \cap Sym^+(M_n(B))$$

とする。$x_i x_i^* \in Sym^*(Z(g))$ となる x_i $(i=1,2)$ について、$x_i^{-1} g x_i$ が G^1 共役とすると。

$$x_1^{-1} g x_1 = g_1^{-1} x_2^{-1} g x_2 g_1$$

$(g_1 \in G^1)$ だが、$x_2 g_1 x_1^{-1} = z \in Z(g)$ である。つまり

$$x_2 g_1 g_1^* x_2^* = z x_1 x_1^* z^*.$$

ここで $g_1 g_1^* = 1_n$ より $x_2 x_2^* = z(x_1 x_1^*) z^*$. 言い換えると、algebra $Z(g)$ の involution できまる「* 対称元」を $Z(g)$ 同値で分類していることになる。一般に $Z(g)$ は半単純ではあるが、単純環ではないので、詳しい分類は個別に論じるべきであるが、以上の流れをまとめると

(i) $f(x)$ を固有多項式にもつ G^1 の元全体の集合 $G(f)$ は

$$T(f) = \{x^{-1} g x; x x^* \in Sym^+(Z(g))\}$$

(ii) $G(f)$ の元の G^1 共役類は

$$T(f)//G^1 = Sym^+(Z(g))/\sim.$$

ここで、$s_1, s_2 \in Sym^+(Z(g))$ のとき $s_1 \sim s_2$ というのは、ある $z \in Z(g)$ について $z s_1 z^* = s_2$ ということ。

一般に Global 共役類の分類は難しいので、以上を local に帰着したい。以上は local に考えても全て同じで、G^1, B などのかわりに $G_{1,v}$, B_v $(v \le \infty)$, $Z(g)_v$ などを考えればよい。さて、(ii) の分類は、２次形式、エルミート形式等々の普通の分類であるが、形式に対する Hasse 原理は quaternion anti-hermitian の場合を除けば成立することが知られている。(quaternion anti-hermitian の場合の反例は土方先生の論文があったはず。この場合は具体的なレベルではどう取り扱えばよいのか良く知らない。）ということは、この特殊な場合をのぞけば共役類に関する Hasse の原理、つまりすべての $v \le \infty$ について $G_{1,v}$ 共役ならば (あるいは言い換えるとアデールで考えて $G_{1,A}$ 共役ならば）G^1 共役ということになる。（なお、正確に言うと、どのような代数群を考えるか、たとえば「形式」について、どのような同型を考えるか、で Hasse 原理は変わってくるかもしれない。従って、場合によっては similitude（相似変換）での同値類で考えることになるが、この場合、Hasse 原理自身、知られていないのではないかと思われる場合もある。）もちろん、これ以外に、どのアデール共役類がグローバルから来るかという判定も必要だが、以上のようなパラメトリゼーションでは、局所と大域の共役類のパラメータが具体的に書き下せる場合が多いので、実際上はあまり問題にならない。(G^1 に関してなら、局所的な「２次形式」がいつ大域的「２次形式」から来るかという話になって、これはまあ知られているといって良い。）ちなみに私の観点から見て、local に考えることのひとつのメリットは local には共役類が有限個になることが多いので、標準的な代表元を具体的に記述して計算を進めることができる点にあると思う。

9.2 整数環上のデータなど

実用上、実際に必要なのは、アデール $G_{1,A}$ の open subgroup U に対して、U-double coset $T=\prod_v T_v$ in G_A に属するような元である。(Hecke 作用素を考えるには、G^1 よりも G のほうが適当なので、話が少しかわるが、共役類という点では G^1 共役のまま話をすすめても構わない。）local に言えば、$g \in G_v$ を $G_{1,v}$ 共役類の代表として、$x^{-1}gx \in T_v$ $(x\ inG_v)$ となるものだけを考えたい。言い換えると、大域的な $G_{\mathbb{Q}}$-共役類が存在しても、このような x が存在しないならば、その元の寄与はないので、除外して考えなければならない。一方で、global な寄与を local な量で記述するには、中心化群でわった大域的な「体積」が必要になるが、ひとつの G_v 共役類を U_v 共役で分類しなおすと、中心化群の同型類がまた細かく分かれることになる。中心化群といわば「階層わけ」する方法はいろいろあると思うが、[11], [12], [13], [4] 等で伝統的なやりかたは、g と交換可能な元のつくる代数 $Z(g)$ の整数環 Λ を指定し、これと G_v の共通部分という見方で中心化群を「階層わけ」するというものである。これは計算に必要な群の index などを求める場合にわかりやすい手段を提供している。中心化群のアデール化の、このような global な Λ で決まる開部分群についての mass formula は、一応 local なデータをうまく計測すれば（Tamagawa number とあわせて）計算できるはずである。以上のような説明はたとえば、[4], [2], [3] などを参照されたい。以上のようなプロセスは、ヘッケ作用素の跡を計算する具体的な手段を与えているが、もちろんこのような説明は、具体的に跡公式を計算するという立場から言えば、単なる計算の出発点に過ぎない。実際の計算は個別的な長い面倒な計算による。その技術的な面白そうなトリックは多々あるのだが、紙数もつきたので、ここで筆をおく。

References

[1] 荒川恒男、伊吹山知義、金子昌信、「ベルヌーイ数とゼータ関数」、牧野書店 (2001), pp. 243 + ix.

[2] K. Hashimoto, On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion Hermitian forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), no. 1, 227–245.

[3] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math, **27** (1980), 549–601.

[4] H. Hijikata, Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$ J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 56–82.

[5] H. Ishikawa, On the trace formula for Hecke operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **20**(1973), 217–237.

[6] H. Ishikawa, On trace of Hecke operators for discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **21** (1974), 357–376.

[7] The traces of Hecke operators in the space of the “ Hilbert modular ” type cusp forms of weight two. Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo **29** (1979), no. 1, 1–28.

[8] S. Lang, Elliptic Functions, Addison Wesley (1973), xii+pp.326.

[9] T. Miyake, Modular Functions, Springer Verlag Berlin Heidelberg (1989), x+335 pp.

[10] H. Saito, On Eichler's Trace formula, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 333-340.

[11] H. Shimizu, On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. Ann. of Math. (2) **77** (1963), 33–71.

[12] H. Shimizu, On traces of Hecke operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **vol.10**(1963), 1–19.

[13] H. Shimizu, On zeta functions of quaternion algebras, Ann. of Math. (2) **81** (1965),166–193.

[14] H. Weber, Lehrbuch der Algebra III, 1908 Braunschweig Druck und verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. xvi+733 pp.

[15] D. Zagier, Appendix to S. Lang, Introduction to Modular Forms, (Springer 1976) pp. 44-54. **See also**: Correction to "The Eichler-Selberg trace formula on $SL_2(\mathbb{Z})$", *Modular functions of one variable VI*, Springer Lecture Notes in Math. No.627 (1977) 171–173.

Department of Mathematics,
Graduate School of Science,
Osaka University,
Machikaneyama 1-1,
Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan.
ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp

JACQUET-LANGLANDS 対応

都築正男

導入：四元数体上の保型表現と GL(2) の保型表現の関連性は、古典的には上半平面上の正則保型形式を４変数テータ級数として表す問題として関心を持たれていたが、６０年代初頭に清水により多元体のゼータ函数の観点から Selberg 跡公式を用いた一連の研究がなされた。その後、Jacquet と Langlands は、有名なテキスト [15] で、この問題への表現論的かつ組織的なアプローチを２通り与えた。１番目の方法は、ヘッケ理論の局所化と Weil 表現を利用した局所体上の GL(2) の無限次元既約許容表現の構成・分類を基礎に、まず局所体上で既約許容表現の移送を実現し（局所 Jacquet-Langlands 対応)、次に、保型 L-函数の Hecke 理論とその「逆定理」を経由して四元数体の保型表現を GL(2) の保型表現に移送する（大域 Jacquet-Langlands 対応）というものである。第二の方法は、Selberg 跡公式を利用するもので、[15] の最終章 (§16) はその解説に充てられている。これは、対応する保型表現同士の局所 (楕円) 指標の明示的な関係を導けるためより優れたものといえるが、必要な Selberg 跡公式周辺の整備が当時は十分でなかったためか、証明はスケッチにとどまっている。(序文で、細部を補完し応用などにも踏み込んだ続編の可能性をほのめかしているが実現されていない。) 跡公式の研究はその後、Duflo-Labesse [9] や Arthur の一連の仕事などで一気に進み、 Gelbart のテキスト [10] や Gelbart と Jacquet による Arthur-Selberg 跡公式の解説記事 [12] などで証明のより詳しい解説が与えられた。こうして実現された大域 Jacquet-Langlands 対応は、保型表現の L 函数や L^2-重複度といった量で「間接的に」記述される。清水 ([27]) は、アデール群の Weil 表現（テータ級数）を用いて、四元数体の保型表現に対応する GL(2) の保型形式を直接構成し大域 Jacquet-Langlands 対応の別証明を与えた。このような経緯から、GL(2) とその inner forms (= 四元数体の乗法群) の間の保型表現の対応は「Jacquet-Langlands-Shimizu 対応」とも呼ばれる。GL(n) の inner forms(内部形式) に対する同種の問題が自然に直近のテーマとなるが、GL(3) の場合は Flath (Thesis, Harvard Univ.) によって扱われ、GL(n) の場合は、(少なくとも局所体上の既約離散系列表現の移送に関しては) Rogawski ([25]), Deligne-Kazhdan-Vigneras [8] によって「簡易版の Selberg 跡公式」を使った大域的な方法で実現された。これらの仕事で使われた簡易版の跡公式では試験函数に強い制約が必要で、大域対応に関しては保型表現の局所成分に条件を加えなければならない。大域対応を完全な形で扱うのに必要な跡公式は、Arthur の一連の仕事に基づいて Arthur-Clozel [1] によって与えられた。Badulescu ([2], [3]) は、局所対応を離散系列表現から一般の既約ユニタリー表現に拡張し、[1] で確立された跡公式を使うことで GL(n) とその内部形式に対して大域対応を制約条件なしで証明した。

さて、このノートの目的は、Arthur-Selberg 跡公式の応用として、GL(2) とその内部形式に対する「Jacquet-Langlands-Shimizu 対応」の証明を解説することである。主に、[15], [25], [12], [11] を参考に若干の整理を加えた。以下は各章の詳しい内容である。

- 第１章では、四元数環の基本的な性質を、主に [26], [28] に従って復習したあと、四元数環の乗法群の共役類の分類を述べた。
- 第２章では、局所体上の四元数環の乗法群の共役類に対する軌道積分の基本的な性質を調べる。特に、非アルキメデス局所体に限定して、軌道積分の Shalika germ 展開を詳述し、[25] に従って「E 型函数」の軌道積分の特徴付け () を述べた。
- 第３章では、主定理の証明で使われる函数解析の結果（無限個の既約ユニタリー表現に対する汎函数指標の解析的線型独立性）を証明する。
- 第４章では、局所体上の GL(2) とその内部形式の既約表現とその指標の基礎的な性質を述べた。非アルキメデス局所体の場合に、離散系列表現の擬行列係数の存

在を第２章で準備した軌道積分の特徴付けを利用して証明する。（アルキメデス的な場合は証明を割愛した。）

- 第５章では、主定理を述べ、第６章でその証明を詳述した。

４章までは局所調和解析の必要事項のおさらいである。便宜のためと考えなるべく証明を付けが、そのため準備が予想以上に長くなってしまいかえって読みにくいものになってしまったかも知れない。

1. 四元数環とその乗法群

1.1. **四元数環.** ([26, 第 3 章 §3.3], [28, ChapIV §20, Chap V §27])

F を標数 0 の体とする。F-代数 $\mathfrak{A}$ が、次の 3 条件を満たすとき F 上の四元数環という。

- $\mathfrak{A}$ は単純環である。
- $\dim_F(\mathfrak{A}) = 4$
- $\mathfrak{A}$ の中心は $F\,(=\{a\,1_{\mathfrak{A}} | \, a \in F\,\})$ に一致する。

更に、$\mathfrak{A}$ が斜体になるとき $\mathfrak{A}$ を四元数体とよぶ。$\square$

四元数環の構成法として次がある ([28, Chap IV, §20])：E/F を 2 次拡大体、その非自明な F-自己同型写像 $x \mapsto \bar{x}$ とする。$X = \left[\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{M}_2(E)$ に対して、$\bar{X} = \left[\begin{smallmatrix} \bar{x_{11}} & \bar{x_{12}} \\ \bar{x_{21}} & \bar{x_{22}} \end{smallmatrix}\right]$ とおく。$c \in F$ に対して $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right]$ とおく。$\mathrm{M}_2(E)$ の部分環

$$\{E, c\}_F = \{X \in \mathrm{M}_2(E) |\, \gamma \bar{X} \gamma^{-1} = X\,\} = \{\left[\begin{smallmatrix} x & y \\ c\bar{y} & \bar{x} \end{smallmatrix}\right] |\, x,\, y \in E\,\}$$

は F 上の四元数環になり、E に同型な部分体 $\{\left[\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & \bar{x} \end{smallmatrix}\right] |\, \alpha \in E\,\}$ を含む。

補題 1. $\mathfrak{A}$ が F 上の四元数環とする。$E \subset \mathfrak{A}$ を 2 次部分体、$x \mapsto \bar{x}$ を E/F の共役写像とする。$\gamma x = \bar{x}\gamma\ (\forall x \in E)$, $\gamma^2 = c\,1_{\mathfrak{A}}$ なる $\gamma \in \mathfrak{A}^\times$, $c \in F$ が存在して、$\{1_{\mathfrak{A}}, \gamma\}$ は右 E-ベクトル空間 $\mathfrak{A}$ の基底になる。$\lambda_E : \mathfrak{A} \to \mathrm{M}_2(E)$ をこの基底による $\mathfrak{A}$ の左正則表現の表現行列とすれば、係数拡大によって

$$\lambda_E \otimes 1 \,:\, \mathfrak{A} \otimes_F E \xrightarrow{\cong} \mathrm{M}_2(E) \qquad (E\text{-同型})$$

であり、$\lambda_E(\mathfrak{A}) = \{E, c\}_F$ となる。

Proof : [28, Theorem 20.3, Lemma 20.4] $\square$

$\mathfrak{A}$ が F 上の四元数環、$\nu_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to F$ および $\tau_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to F$ をそれぞれ被約ノルムおよび被約トレースとする。$E \subset \mathfrak{A}$ を 2 次部分体、$\lambda_E : \mathfrak{A} \to \mathrm{M}_2(E)$ を補題 1 のように決めるとき、

$$\nu_{\mathfrak{A}}(a) = \det \lambda_E(a), \qquad \tau_{\mathfrak{A}}(a) = \mathrm{tr}\,\lambda_E(a)$$

である。

補題 2. $\mathfrak{A}$ を F 上の四元数体とする。

(1) $\nu_{\mathfrak{A}}(\xi) = 0\,(\exists \xi \in \mathfrak{A} - \{0\})$ ならば $\mathfrak{A} \cong \mathrm{M}_2(F)$
(2) $\nu_{\mathfrak{A}}(\xi) \neq 0\,(\forall \xi \in \mathfrak{A} - \{0\})$ ならば $\mathfrak{A}$ は斜体である。

Proof : [26, Lemma 3.2, Lemma 3.3] $\square$

補題 3. $\mathfrak{A} = \{E, c\}_F$ (E/F は 2 次体、$c \in F^\times$) のとき、

$$\{E, \gamma\}_F \cong \mathrm{M}_2(F) \quad \Longleftrightarrow \quad c \text{ が } E/F \text{ のノルムで表される}$$

Proof : $\{E, 1\}_F \cong \mathrm{M}(2, F)$ ([28, (20.6)]) に注意すると、これは [28, Theorem 20.8] から従う。$\square$

1.1.1. 局所体上の四元数環の分類. F が標数 0 の局所体とする。

F が非アルキメデス的なとき、F_0 を F の不分岐 2 次拡大、ϖ_F を F の素元として、$D = \{F_0, \varpi_F\}_F$ とおくと、D は四元数体になる。

$F = \mathbb{R}$ のときは、$D = \{\mathbb{C}, -1\}_{\mathbb{R}}$ を Hamilton の四元数体とする。

補題 4. F 上の四元数環は $\mathrm{M}(2, F)$ あるいは D のいずれか一方に同型である。$F = \mathbb{C}$ のときは、$\mathbb{C}$ 上の四元数環は全て $\mathrm{M}(2, \mathbb{C})$ と同型である。

Proof : [28, Theorem 21.22] □

そこで、F 上の任意の四元数環 $\mathfrak{A}$ に対して、そのハッセ不変量を

$$\mathrm{inv}_F(\mathfrak{A}) = \begin{cases} +1 & (\mathfrak{A} \cong D) \\ -1 & (\mathfrak{A} \cong \mathrm{M}(2, F)) \end{cases}$$

で定義する。

1.1.2. 大域体上の四元数環の分類. F を有限次元代数体とする。Σ を F の素点全体の集合とし、複素アルキメデス素点全体を $\Sigma_{\mathbb{C}}$ とする。

F 上の四元数環 $\mathfrak{A}$ と素点 $v \in \Sigma$ に対して、係数拡大 $\mathfrak{A} \otimes_F F_v$ を $\mathfrak{A}_v$ として、$\mathrm{inv}(\mathfrak{A}) = (\mathrm{inv}_{F_v}(\mathfrak{A}_v))_{v \in \Sigma} \in \{\pm 1\}^{\Sigma}$ とおく。

$$\Sigma_{\mathfrak{A}} = \{ v \in \Sigma | \, \mathrm{inv}_{F_v}(\mathfrak{A}_v) = -1 \, \}$$

と定義する。

補題 5. (1) F 上の四元数環 $\mathfrak{A}$ に対して、$\Sigma_{\mathfrak{A}}$ は有限集合であり、

$$\prod_{v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}} \mathrm{inv}_{F_v}(\mathfrak{A}_v) = 1$$

である。

(2) 偶数個の素点からなる有限集合 $S \subset \Sigma - \Sigma_{\mathbb{C}}$ に対して、

$$\mathrm{inv}_{F_v}(\mathfrak{A}_v) = \begin{cases} -1 & (v \in S), \\ +1 & (v \notin S) \end{cases}$$

を満たす四元数環 $\mathfrak{A}$ が同型を除いて唯ひとつ存在する。

(3) $\mathfrak{A} \mapsto \Sigma_{\mathfrak{A}}$ は次の全単射を導く：

$$\{ F \text{ 上の四元数環} \} / (F\text{-同型}) \quad \xrightarrow{\cong} \quad \{ S \subset \Sigma - \Sigma_{\mathbb{C}} | \quad \sharp(S) < \infty, \sharp(S) \equiv 0 \pmod 2 \quad \}$$

Proof : [28, Theorem 26.6, Theorem 27.8] □

1.2. **共役類.** F を標数 0 の体、$\mathfrak{A}$ を F 上の四元数環とする。G を乗法群 $\mathfrak{A}^{\times}$ とする。Z を G の中心とすると、$Z = \{ z \, 1_{\mathfrak{A}} | \, z \in F^{\times} \, \}$ となる。群 G の共役類の分類を行うのがこの節の目標である。

定義 6. G の元 ξ が条件「$F[\xi]$ は体である」を満たすとき F-楕円的であるといい、その全体の集合を G_{ell} と書く:

$$G_{\mathrm{ell}} = \{ \xi \in G | \, F[\xi] \text{ は体である} \, \}$$

G_{ell} は G-共役で安定な部分集合である。

補題 7. $\xi, \eta \in G_{\mathrm{ell}} - Z$ が G-共役になるための必要十分条件は

$$\nu_{\mathfrak{A}}(\xi) = \nu_{\mathfrak{A}}(\eta), \qquad \tau_{\mathfrak{A}}(\xi) = \tau_{\mathfrak{A}}(\eta)$$

である。

Proof : 必要性は自明である。逆に $\nu = \nu_{\mathfrak{A}}(\xi) = \nu_{\mathfrak{A}}(\eta)$, $\tau = \tau_{\mathfrak{A}}(\xi) = \tau_{\mathfrak{A}}(\eta)$ であるとすると、Cayley-Hamilton の定理から ξ, η はともに F 上の 2 次方程式 $X^2 - \tau X + \nu = 0$ を満たす。$\xi, \eta \in G_{\mathrm{ell}} - Z$ ゆえ、この 2 次式は F 上で既約で $F[\xi] \cong F[X]/(X^2 - \tau X + \nu) \cong F[\eta]$ となる。F-同型 $\phi : F[\xi] \to F[\eta]$ を一つ固定する。補題 1 より

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= F[\xi] + \gamma F[\xi], \qquad \gamma x = \bar{x}\gamma \quad (\forall x \in F[\xi]), \qquad \gamma^2 \in F, \\ \mathfrak{A} &= F[\eta] + \delta F[\eta], \qquad \delta y = \bar{y}\delta \quad (\forall y \in F[\eta]), \qquad \delta^2 \in F \end{aligned}$$

となる $\gamma, \delta \in \mathfrak{A}^\times$ が存在する。$\mathfrak{A} \cong \{F[\xi], \gamma^2\}_F \overset{\phi}{\cong} \{F[\eta], \gamma^2\}_F \cong \{F[\eta], \delta^2\}_F$ となるので、[28, Theorem 20.8(i)] より $\gamma^2 = N_{F[\eta]/F}(a)\,\delta^2$ $(\exists a \in F[\eta]^\times)$ となる。δ を $a\delta$ で置き換えれば、最初から $\gamma^2 = \delta^2$ だとしてよい。そこで写像 $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ を

$$\varphi(x_1 + \gamma x_2) = \phi(x_1) + \delta\,\phi(x_2), \qquad x_1,\, x_2 \in F[\xi]$$

で定義すると、これは F-代数 $\mathfrak{A}$ の F-自己同型であることが分かる。Skolem-Noether の定理から $\varphi(\alpha) = g^{-1}\alpha g$ $(\forall \alpha \in \mathfrak{A})$ なる $g \in \mathfrak{A}^\times$ が存在する。特に、$g^{-1}\,F[\xi]\,g = F[\eta]$ となる。$g^{-1}\xi g, \eta$ の F-最小多項式は共通だから $g^{-1}\xi g = \eta$ または $g^{-1}\xi g = \bar{\eta}$ となる。$\bar{\eta} = \delta\eta\delta^{-1}$ ゆえ、いずれにしろ ξ, η は G-共役である。□

G_{ell} に含まれる共役類（$= F$-楕円共役類）の完全代表系は次のように記述される。まず、代数的閉包 $\bar{F}$ を一つ固定して $\mathcal{Q}(F)$ を $\bar{F}$ に含まれる F の 2 次拡大の全体の集合とする。更に、

$$\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F) = \{E \in \mathcal{Q}(F) \,|\, F\text{-埋め込み } E \hookrightarrow \mathfrak{A} \text{ が存在する}\}$$

とおく。各 $E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ に対して、F-埋め込み $\iota_E : E \hookrightarrow \mathfrak{A}$ を一つ固定しておく。ι_E の $E^\times$ への制限 $\iota_E^G : E^\times \to \mathfrak{A}^\times$ の像を T_E^G とする。補題 1 により、

$$\begin{aligned} &w_E\,\iota_E^G(x)\,w_E^{-1} = \iota_E^G(\bar{x}), \quad (\forall x \in E), \\ &w_E^2 \in Z \end{aligned}$$

を満たす $w_E \in G$ がある。以下、このような w_E を一つ固定する。

補題 8. $E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ に対して、商群 $W(G, T_E^G) = N_G(T_E^G)/T_E^G$ $(= T_E^G$ の Weyl 群$)$ は w_E で生成される位数 2 の群である。ここで、$N_G(T_E^G)$ は T_E^G の G における正規化部分群である。

Proof : $gT_E^Gg^{-1} = T_E^G$ とすると、$g\iota_E^G(x)g^{-1} = \iota_E^G(x')$ $(x \in E)$ によって体 E の F-自己同型 $x \mapsto x'$ が決まる。E/F は 2 次拡大だからこの自己同型は恒等写像か共役写像のいずれかである。前者の場合 $g \in T_E^G$ であり、後者の場合 $g \in w_E\,T_E^G$ となる。□

G の部分集合

$$\mathcal{E}_G = Z \cup \left(\bigcup_{E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)} (T_E^G - Z) \right) \tag{1.1}$$

と定める。

補題 9. (1.1) は disjoint union である。更に、この集合の 2 元 ξ, η が G-共役になるのは次のいずれか場合に限られる：

- $\xi = \eta \in Z$
- $(\exists E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F))\,(\exists w \in W(G, T_E^G)) \quad \xi, \eta \in T_E^G - Z, \quad \xi = w\eta w^{-1}$

G_{ell} の任意の元は $\mathcal{E}_G$ のある元に G-共役である。

Proof : $E,\, E' \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$, $\xi \in (T_E^G - Z) \cap (T_{E'}^G - Z)$ とすると、$F[\xi]$ は $\mathfrak{A}$ の 2 次の部分体であり $F[\xi] \subset \iota_E(E)$ なので、$F[\xi] = \iota_E(E)$ となる。同様に $F[\xi] = \iota_{E'}(E')$ となる。よって、$\iota_E(E) = \iota_{E'}(E')$ であり、$\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ の定義から、$E = E'$ が従う。故に、(1.1) は disjoint である。

$\xi,\eta\in\mathcal{E}_G-Z$ が G-共役だとすると、補題 7 より ξ,η の F-最小多項式は一致する。よって、$\xi=\iota_E^G(t)$ $(t\in E^\times)$ と書くとき、$\eta=\iota_E(t)$ または $\iota_E^G(\bar{t})$ である。あとは、$w_E\,\iota_E^G(t)\,w_E^{-1}=\iota_E^G(\bar{t})$ に注意すればよい。□

補題 10. (1) $\mathfrak{A}$ が斜体であるとする。このとき、$G=G_{\mathrm{ell}}$ である。
(2) $\mathfrak{A}=\mathrm{M}_2(F)$ とする。このとき、$G-G_{\mathrm{ell}}$ の任意の元は集合 $\mathcal{U}_G\cup\mathcal{H}_G$,

$$\mathcal{U}_G=\left\{\left[\begin{smallmatrix}a&1\\0&a\end{smallmatrix}\right]\,|\,a\in F^\times\right\},\qquad \mathcal{H}_G=\left\{\left[\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right]\,|\,a,\,d\in F^\times,\,a\neq d\right\}=M-Z$$

の元に G-共役である。$\mathcal{E}_G$ の元と $\mathcal{U}_G\cup\mathcal{H}_G$ の元は G-共役ではない。$\mathcal{U}_G$ の異なる 2 元は G-共役ではない。$\mathcal{H}_G$ の 2 元はそれらの対角成分が順序を除いて一致する場合に限り G-共役になる。

Proof : (1) $\mathfrak{A}$ が斜体ならば、任意の元 $\xi\in\mathfrak{A}$ に対して $F[\xi]$ は部分体になる。

(2) Jordan 標準型より明らか。□

便宜上、$\mathfrak{A}$ が斜体の場合 $\mathcal{H}_G=\mathcal{U}_G=\varnothing$ とおく。$G_{\mathrm{reg}}=G-(Z\cup\mathcal{U}_G)$ の元を G の正則元と呼ぶ。

以下で必要になる場合に対して、集合 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ を決定しておこう。

補題 11. $\mathfrak{A}$ を F 上の四元数環とする。
(1) F が局所体のとき、$\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)=\mathcal{Q}(F)$ である。
(2) F が大域体のとき、$E\in\mathcal{Q}(F)$ に対して、

$$\Sigma(E)=\{v\in\Sigma|\,E_v=E\otimes_F F_v\text{ が体である}\}$$

とおくと、$\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)=\{E\in\mathcal{Q}(F)|\,\Sigma_{\mathfrak{A}}\subset\Sigma(E)\}$ である。

Proof : $\mathfrak{A}$ が斜体であるとして示せばよい。

(1) $E\in\mathcal{Q}(F)$ とする。$\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ は $F^\times$ の指数 2 の部分群だから、ある要素 $c\in F^\times-\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ が存在する。そこで、四元数環 $\{E,c\}_F$ を考えると、これは E と同型な部分体 $\{\left[\begin{smallmatrix}\alpha&0\\0&\bar{\alpha}\end{smallmatrix}\right]|\,\alpha\in E\}$ を含む。しかも、補題 3 より、$\{E,c\}_F$ は斜体になる。補題 4 より $\mathfrak{A}\cong\{E,c\}_F$ なので、$\mathfrak{A}$ も E と同型な体を含む。よって、$E\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ である。

(2) $E\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ ならば $\Sigma_{\mathfrak{A}}\subset\Sigma(E)$ は明らか。逆に、$\Sigma_{\mathfrak{A}}\subset\Sigma(E)$ となる $E\in\mathcal{Q}(F)$ は $\mathfrak{A}$ に埋め込めることを示そう。F のイデール群 $\mathbb{A}^\times$ の開部分集合

$$\mathcal{U}=\prod_{v\in\Sigma-\Sigma_{\mathfrak{A}}}\mathrm{N}_{E_v/F_v}(E_v^\times)\prod_{v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}}(F_v-\mathrm{N}_{E_v/F_v}(E_v^\times)$$

は開部分群 $\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ の作用で安定である。明らかに $\mathcal{U}\not\subset F^\times$ であるから、$\mathcal{U}\not\subset F^\times\,\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ となる。一方、類体論の結果から $\mathbb{A}^\times/F^\times\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ は E/F のガロア群と同型であり、特に位数 2 である。よって $\mathbb{A}^\times=\mathcal{U}\,F^\times\,\mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)=\mathcal{U}\,F^\times$ となる。従って、$1=c\,x$ となる $c\in F^\times$, $x\in\mathcal{U}$ が存在する。$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$ において $c^{-1}\in F_v^\times-\mathrm{N}_{E_v/F_v}(E_v^\times)$、$v\not\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$ において $c^{-1}\in\mathrm{N}_{E_v/F_v}(E_v^\times)$ となるので、補題 3 から、四元数環 $\mathfrak{A}'=\{E,c^{-1}\}_F$ は $\Sigma_{\mathfrak{A}'}=\Sigma_{\mathfrak{A}}$ を満たす。補題 5(2) より $\mathfrak{A}'\cong\mathfrak{A}$ となる。故に、$E\hookrightarrow\{E,c^{-1}\}_F\cong\mathfrak{A}$ となり、$E\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ が言えた。□

2. 軌道積分

この節では F を標数 0 の局所体、$|\,|_F$ を標準的な乗法付値とする。F が非アルキメデス的のときには、有限次元拡大体 E/F に対して、E の整数環を $\mathfrak{o}_E$、E の素元を ϖ_E、剰余体の位数を q_E で表す。

$\mathfrak{A}$ を F 上の四元数環、$G=\mathfrak{A}^\times$ とする。

2.1. **玉河測度.** 非自明な加法指標 $\psi_F : F \to \mathbb{C}^1$ を固定する。任意の有限次元拡大 E に対して、$\mathrm{d}_E x$ を加法指標 $\psi_E = \psi_F \circ \mathrm{tr}_{E/F}$ に対する加法群 E 上の自己双対的 Haar 測度とする。トーラス $T = E^\times$ の乗法的 Haar 測度を

$$\mathrm{d}\mu_T(t) = C_{E/F}\,\frac{\mathrm{d}_E t}{|\mathrm{N}_{E/F}(t)|_F}$$

で定義する。ここで、$F = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のとき、$C_{E/F} = 1$ とする。F が非アルキメデス的なとき、e を E/F の分岐指数、q_E を E の剰余体の位数でとして、$C_{E/F} = e^{-1}\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_E)^{-1}(1-q_E^{-1})^{-1}$ とする。$Z = F^\times$ による商群 $Z\backslash T$ に商測度 $\mathrm{d}\mu_{Z\backslash T} = \mathrm{d}\mu_T/\mathrm{d}\mu_Z$ を与えると、

$$\mathrm{vol}(Z\backslash T) = 1$$

となることが容易に分かる。

同様に、$\mathfrak{A}$ の加法指標 $\psi_D = \psi_F \circ \tau_D$ に対する $\mathfrak{A}$ 上の自己双対的測度を $\mathrm{d}_{\mathfrak{A}}\xi$ とする。$G = \mathfrak{A}^\times$ の測度 $\mathrm{d}\mu_G$ を

$$\mathrm{d}\mu_G(\xi) = \frac{\mathrm{d}_{\mathfrak{A}}\xi}{|\nu_{\mathfrak{A}}(\xi)|_F^2} \times \begin{cases} (1-q_F^{-1})^{-1} & (F:\text{非アルキメデス的}) \\ 1 & (F:\text{アルキメデス的}) \end{cases}$$

で固定する。これを G の (正規化された) 玉河測度とよぶ。

注意 : F が非アルキメデス的のとき、$(1-q_F^{-1})\,\mathrm{d}\mu_G$ を非正規化玉河測度と呼ぶ。因子 $(1-q_F^{-1})^{-1}$ はアデール群上の玉河測度を構成する際の収束因子として働く。□

$G = \mathrm{GL}(2,F)$ とすると、ある定数 $C_0 > 0$ が存在して

(2.1)
$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}\mu_G(g) = C_0 \int_{z\in F^\times}\int_{t\in F^\times}\int_{x\in F}\int_{k\in\mathbf{K}} f\left(\left[\begin{smallmatrix} zt & 0 \\ 0 & z\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]k\right)\,\mathrm{d}\mu_{F^\times}(z)\,\mathrm{d}\mu_{F^\times}(t)\,\mathrm{d}_F x\,\mathrm{d}k$$

となる。$\mathrm{d}k$ は $\mathrm{vol}(\mathbf{K}) = 1$ なる $\mathbf{K}$ のハール測度である。比例定数 C_0 は次で与えられる。

補題 12. F が非アルキメデス的なとき、$C_0 = \mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^3\,(1-q_F^{-2})$ である。$F = \mathbb{R}$ ならば $C_0 = \pi$, $F = \mathbb{C}$ ならば $C_0 = 2\pi$ である。

Proof : F が非アルキメデス的の場合 : f に $\mathbf{K}$ の特性函数を代入して公式 (2.1) の両辺を計算すればよい。$R = \mathrm{M}(2,\mathfrak{o}_F)$ の $\mathrm{M}(2,F)$ における特性函数を χ_R とすると、χ_R のフーリエ変換は

$$\hat{\chi_R}(x) = \mathrm{vol}(R)\,\chi_R(\varpi_F^d x), \qquad x \in \mathrm{M}(2,F)$$

と計算される。ただし、$\mathrm{vol}(R)$ は $\mathfrak{A} = M(2,F)$ の自己双対ハール測度 $\mathrm{d}_{\mathfrak{A}}x$ に関する体積、d は $\{x\in F|\,\psi_F(x\mathfrak{o}_F) = \{1\}\} = \varpi_F^{-d}\mathfrak{o}_F$ なる整数である。もう一度フーリエ変換すると、$\chi_R = \mathrm{vol}(R)^2\,|\varpi_F^d|_F^4\,\chi_R$ を得る。よって、$\mathrm{vol}(R) = |\varpi_F^{-d}|_F^2 = q_F^{-2d} = \mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$ となる。行列の基本変形より、容易に

$$R\cap\mathrm{GL}(2,F) = \bigcup_{l\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}} \mathbf{K}\begin{bmatrix}\varpi_F^{l+m} & 0 \\ 0 & \varpi_F^l\end{bmatrix}\mathbf{K},$$

(2.2)
$$\mathbf{K}\begin{bmatrix}\varpi_F^m & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{K} = \left(\bigcup_{j=1}^{m-1}\bigcup_{x\in(\mathfrak{o}_F/\varpi_F^j\mathfrak{o}_F)^\times}\begin{bmatrix}\varpi_F^j & x \\ 0 & \varpi_F^{m-j}\end{bmatrix}\mathbf{K}\right)\cup\left(\bigcup_{x\in\mathfrak{o}/\varpi_F^m\mathfrak{o}_F}\begin{bmatrix}\varpi_F^m & x \\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{K}\right)\cup\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & \varpi_F^m\end{bmatrix}\mathbf{K}$$

が分かる。各両側剰余類 $\mathbf{K}\begin{bmatrix}\varpi_F^{l+m} & 0 \\ 0 & \varpi_F^l\end{bmatrix}\mathbf{K}$ の測度 $\mathrm{d}_{\mathfrak{A}}x$ による体積 $V_{l,m}$ は分解 (2.2) を利用すると、$m > 0$ ならば $V_{l,m} = q_F^{-4l-m}(1+q_F^{-1})\mathrm{vol}(\mathbf{K})$、$m = 0$ ならば $V_{l,0} = q_F^{-4l}\mathrm{vol}(\mathbf{K})$ と

計算できる。$\mathrm{vol}(\mathbf{K})$ は $\mathbf{K}$ の $\mathrm{d}_{\mathfrak{A}}x$ に関する体積であるが、これは $(1-q_F^{-1})\,\mu_G(\mathbf{K})$ と等しい。故に、

$$\mathrm{vol}(R)=\mathrm{vol}(R\cap \mathrm{GL}(2,F))=\sum_{l,m\in\mathbb{N}} V_{l,m}=\sum_{l=0}^{\infty}\{\sum_{m=1}^{\infty} q_F^{-m}(1+q_F^{-1})+1\}q_F^{-4l}\,(1-q_F^{-1})\,\mu_G(\mathbf{K})$$
$$=(1-q_F^{-2})^{-1}\,\mu_G(\mathbf{K})$$

よって、(2.1) の左辺は $\mu_G(\mathbf{K})=(1-q_F^{-2})\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$ と求まる。
一方、(2.1) の右辺は、$C_0\,\mu_{F^\times}(\mathfrak{o}_F)^2\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)=C_0\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)$ である。これらを比較することで、C_0 の値が分かる。

$F=\mathbb{R}$ の場合：$f(g)=\exp(-\pi\mathrm{tr}({}^tgg))|\det g|_{\mathbb{R}}^2$ に対して、(2.1) の両辺を計算する。
左辺は $\left\{\int_{\mathbb{R}}\exp(-\pi x^2)\,\mathrm{d}x\right\}^4=1$ となる。右辺は

$$C_0\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{(z,t)\in(\mathbb{R}^\times)^2}\int_{\mathbf{K}_v}\exp(-\pi z^2(t^2+t^2x^2+1)))\,(z^2t)^2\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}k$$
$$=C_0\{\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x\}\{\int_{\mathbb{R}^\times}e^{-\pi z^2}z^2\frac{\mathrm{d}z}{z}\}\{\int_{\mathbb{R}^\times}e^{-\pi t^2}|t|\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\}=\pi^{-1}\,C_0$$

よって、$C_0=\pi$ となる。

$F=\mathbb{C}$ の場合：$f(g)=\exp(-\pi\,\mathrm{tr}({}^t\bar{g}\,g))\,|\det g|_{\mathbb{C}}^2$ に対して、(2.1) の両辺を計算する。左辺は 16、右辺は $8\pi^{-1}C_0$ になることが分かるので、$C_0=2\pi$ が得られる。□

補題 13. D を F 上の四元数体とする。

(1) 商空間 $F^\times\backslash D^\times$ はコンパクトである。
(2) F が非アルキメデス的とすると、$\mathrm{vol}(F^\times\backslash D^\times)=2\,q_F^{-2}\,(q_F+1)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$ である。

Proof: $F=\mathbb{R}$ のとき、$\mathbb{H}^\times=\mathbb{R}_+^\times\,\mathrm{SU}(2)$ なので (1) は明らか。以下、F は非アルキメデス的とする。$u_0\in\mathfrak{o}_F^\times-(\mathfrak{o}_F^\times)^2$ とすると、$E_0=F(\sqrt{u_0})$ は不分岐 2 次拡大である。従って、

$$D=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & \varpi_F\,\beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{bmatrix}\,|\,\alpha,\,\beta\in E_0\right\}$$

であり、$\alpha,\beta\in\mathfrak{o}_{E_0}$ である要素全体 $\mathfrak{o}_D$ はその極大オーダーを与える。$\varpi_D=\begin{bmatrix}0&\varpi_F\\1&0\end{bmatrix}$ は素元であり、$\varpi_D\mathfrak{o}_D=\mathfrak{o}_D\varpi_D$ はその唯ひとつの極大イデアルである。$\mathfrak{o}_D^\times=\mathfrak{o}_D-\varpi_D\mathfrak{o}_D$ より、$\mathfrak{o}_D^\times$ はコンパクトである。$D^\times=\mathfrak{o}_D^\times\,\varpi_D^{\mathbb{Z}},\,F^\times=\mathfrak{o}_F^\times\,\varpi_F^{\mathbb{Z}}$ であり、$\varpi_F=\varpi_D^2$ なので、

$$F^\times\backslash D^\times=(\mathfrak{o}_F^\times\backslash\mathfrak{o}_D^\times)\,\{\varpi_D,1\}\tag{2.3}$$

となる。これより (1) は明らかである。さて、$\mathfrak{d}_{D/F}=\{\gamma\in D|\,\psi_F(\tau_D(\gamma\,\mathfrak{o}_D))=\{1\}\}$ とすると、直接計算によって $\mathfrak{d}_{D/F}=\varpi_D^{-1}\varpi_F^{-d}\,\mathfrak{o}_D$ が分かる。ここで、d は ψ_F の differential exponent(i.e. $\{x\in F|\,\psi_F(a\mathfrak{o}_F)=\{1\}\}=\varpi_F^{-d}\mathfrak{o}_F$) である。以下、この証明のなかでは、vol で F 代数の加法的自己双対測度による集合の測度を表す。[29,] により $\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)=q_F^{-d/2}$ である。これと同様に、$\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_D)$ を計算する。$\mathfrak{o}_D$ の特性函数 $\chi_{\mathfrak{o}_D}$ のフーリエ変換は $\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_D)\,\chi_{\mathfrak{d}_{D/F}}$ になる。よって、再度これをフーリエ変換すると $\chi_{\mathfrak{o}_D}$ になるので、$1=|\nu_D(\varpi_D\varpi_F^d)|_F^{-2}\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_D)^2$ を得る。これより、$\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_D)=|\nu_D(\varpi_D\varpi_F^d)|_F=q_F^{-1-2d}=q_F^{-1}\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$ と求まる。$\mathfrak{o}_D^\times=\mathfrak{o}_D-\varpi_D\mathfrak{o}_D$ だから

$$(1-q_F^{-1})\,\mu_{D^\times}(\mathfrak{o}_D^\times)=\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_D^\times)=(1-|\nu_D(\varpi)|_F^2)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_D)=(1-q_F^{-2})\,q_F^{-1}\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$$

これと、(2.3) によって

$$\mu_{F^\times\backslash D^\times}(F^\times\backslash D^\times)=\frac{\mu_{D^\times}(\mathfrak{o}_D^\times)}{\mu_{F^\times}(\mathfrak{o}_F^\times)}\times 2=2q_F^{-2}(q_F+1)\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$$

を得る。□

2.2. **共役類上の不変測度.** $\gamma \in G$ に対して $\mathcal{O}_G(\gamma) = \{g^{-1}\gamma g | \, g \in G\}$ を γ の G-共役類、G_γ を γ の G における中心化群とする。補題 10 より、G の共役類分割は $\mathcal{O}_G(\gamma)$ ($\gamma \in \mathcal{E}_G \cup \mathcal{H}_G \cup \mathcal{U}_G$) で与えられる。$\gamma \in \mathcal{E}_G \cup \mathcal{H}_G \cup \mathcal{U}_G$ に対する共役類と中心化群は次のように具体的に求められる。

- $\gamma = \left[\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right]$ ($z \in F^\times$) ならば、
$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \{\gamma\}, \qquad G_\gamma = G$$
である。$\mathcal{O}_G(\gamma)$ には体積 1 の離散測度を与える。
- $\gamma = \iota_E^G(t)$ ($E \in \mathcal{Q}(F)$, $t \in E^\times - F^\times$) ならば、
$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \{\xi \in G | \, \det \xi = \mathrm{N}_E(t), \, \mathrm{tr}\xi = \mathrm{tr}_E(t)\}, \qquad G_\gamma = T_E^G$$
である。$\mathrm{d}\mu_{G_\gamma}(\iota_E^G(x)) = \mathrm{d}\mu_{E^\times}(x)$ で $G_\gamma \cong E^\times$ の Haar 測度 $\mathrm{d}\mu_{G_\gamma}$ が定まる。
- $\mathfrak{A} = \mathrm{M}(2, F)$ のとき、$\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right]$ ($a_1, a_2 \in F^\times$) ならば
$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \{\xi \in G | \, \det \xi = a_1 a_2, \, \mathrm{tr}\xi = a_1 + a_2\}, \qquad G_\gamma(F) = M$$
$\mathrm{d}\mu_M(x_1, x_2) = \mathrm{d}\mu_{F^\times}(x_1)\,\mathrm{d}\mu_{F^\times}(x_2)$ により $G_\gamma \cong (F^\times)^2$ の Haar 測度 $\mathrm{d}\mu_{G_\gamma}$ が定まる。
- $\mathfrak{A} = \mathrm{M}(2, F)$ のとき、$\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$ ($a \in F^\times$) ならば
$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \{\xi \in G | \, (\xi - a 1_2)^2 = 0, \, \xi \neq a\, 1_2\}, \qquad G_\gamma = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} z & x \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right] \middle| \, z \in F^\times, \, x \in F \right\}$$
である。これより、G_γ はユニモジュラーである。$\mathrm{d}\mu_{G_\gamma} = \mathrm{d}\mu_{F^\times}(z)\,\mathrm{d}_F x$ によって G_γ に Haar 測度を固定する。

$\mathcal{O}_G(\gamma)$ は G の局所閉集合になる。G-同型 $G_\gamma \backslash G \cong \mathcal{O}_G(\gamma)$ によって $G_\gamma \backslash G$ 上の商測度 $\mathrm{d}\mu_G/\mathrm{d}\mu_{G_\gamma}$ を移送して共役類 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_G(\gamma)$ に不変測度 $\mu_{\mathcal{O}}$ を与える。

$\omega : Z \to \mathbb{C}^1$ をユニタリー指標とする。smooth 函数 $f : G \to \mathbb{C}$ で mod Z でコンパクト台を持ち、
$$f(zg) = \omega(z)^{-1} f(g), \qquad z \in Z, \, g \in G$$
を満たすもの全体を $C_c^\infty(G, \omega)$ とかく。

定義 14. $\gamma \in G$, $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ とする。積分
$$\Phi(\gamma, f) = \int_{\mathcal{O}_G(\gamma)} f(x)\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma)}(x) \tag{2.4}$$
を γ に沿った f の軌道積分と呼ぶ。□

補題 15. $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ に対して、積分 (2.4) は絶対収束する。

Proof: γ が半単純 (i.e. $\mathcal{E}_G \cup \mathcal{H}_G$ に共役) ならば $\mathcal{O}_G(\gamma)$ は閉集合なので、任意のコンパクト集合 $\omega \subset G$ に対して、$\mathcal{O}_G(\gamma) \cap (Z\omega)$ はコンパクトである。(実際、点列 $g_n \in \mathcal{O}_G(\gamma) \cap (Z\omega)$ をとると、$g_n = \left[\begin{smallmatrix} z_n & 0 \\ 0 & z_n \end{smallmatrix}\right] h_n$ ($z_n \in F^\times$, $h_n \in \omega$) と書ける。部分列に移行して $\{h_n\}$ は収束列であるとしてよい。$g_n \in \mathcal{O}_G(\gamma)$ ゆえ $\det g_n = \det \gamma$ なので、$z_n^2 = \det \gamma \, \det h_n^{-1}$ となり z_n^2 は収束する。よって、部分列に更に移行すれば z_n も収束する。)

これより、$f \in C_c^\infty(G, \omega)$ に対して上の積分が絶対収束することは見やすい。$G = \mathrm{GL}(2)$ で、$\gamma = \left[\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right]$ ($a \in F^\times$) のときは、岩澤分解 $G = NA\mathbf{K}$ より自然な同一視 $G_\gamma \backslash G = ZN \backslash G \cong \{\left[\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] | \, t \in F^\times\}\mathbf{K}$ がある。これにより不変測度 $\mathrm{d}\mu_G/\mathrm{d}\mu_{G_\gamma}$ は $|t|_F^{-2}\mathrm{d}_F t\,\mathrm{d}k$ の定数倍に対応する。ここで、$\mathrm{d}k$ は $\mathbf{K}$ の全体積 1 のハール測度である。
$$\begin{aligned}\int_{G_\gamma \backslash G} |f(g^{-1}\gamma g)|\,\mathrm{d}\mu_G/\mathrm{d}\mu_{G_\gamma} &\ll \int_{F^\times} \int_{\mathbf{K}} \left|f\left(k^{-1} \left[\begin{smallmatrix} z & t^{-1} \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right] k\right)\right| |t|_F^{-2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}k \\ &= \int_{F^\times} \int_{\mathbf{K}} \left|f\left(k^{-1} \left[\begin{smallmatrix} z & t \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right] k\right)\right|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}k \qquad (\because t^{-1} = t' \text{ と変数変換})\end{aligned}$$
この最後の表示と f が mod Z でコンパクト台を持つことから積分の収束は自明である。□

2.3. **Weyl の積分公式.** $\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}} = \{T_E |\, E \in \mathcal{Q}(F)\}$ とする。$\mathfrak{A}$ が斜体のときには $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ とし、$\mathfrak{A} = \mathrm{M}(2,F)$ のときは $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}} \cup \{M\}$ (M: 対角行列全体) とする。各 $T \in \mathcal{T}_G$ に対して、$T_{\mathrm{reg}} = T - Z$ とおく。

$T \in \mathcal{T}_G$ に対して、

$$D_T(t) = |\det(\mathrm{Ad}(t) - I)|_F, \qquad t \in T$$

とおく。

補題 16. $T \in \mathcal{T}_G$ とする。写像 $\eta_T : (T\backslash G) \times T_{\mathrm{reg}} \to G$、

$$\eta_T(g,t) = g^{-1}\, t\, g, \qquad \dot{g} \in T\backslash G, \quad t \in T_{\mathrm{reg}}$$

は submersive であり、任意の $(g,t) \in (T\backslash G) \times T_{\mathrm{reg}}$ に対して

$$\eta_T^{-1}(\eta_T(g,t)) = \{\, (w_E g, w_E t w_E^{-1}) \,|\, w \in W(G,T)\,\}$$

である。像 $(T_{\mathrm{reg}})^G = \bigcup_{t \in T_{\mathrm{reg}}} \mathcal{O}_G(t)$ は G の開集合になる。

Proof : [8, §A.3.f], [21, 補題 (4.1.2)] □

補題 17. (Weyl の積分公式)： 可積分函数 $f : G \to \mathbb{C}$ に対して、

$$\int_{Z\backslash G} f(g)\, \mathrm{d}\mu_G(g) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_G} \int_{Z\backslash T_{\mathrm{reg}}} D_T(t)\, \Phi(t,f)\, \mathrm{d}\mu_T(t)$$

が成り立つ。

Proof : [8, §A.3.f], [21, 補題 (4.1.2)] を参照せよ。□

2.4. **軌道積分の germ 展開.** この節では F は非アルキメデス的とする。

$T \in \mathcal{T}_G$ とする。軌道積分 $\Phi(t,f)$ の $t \in T$ の函数としての振る舞いは次の命題で与えられる。

命題 18. (1) $f \in C_c^\infty(G,\omega)$ する。T_{reg} 上では $\Phi(t,f)$ は smooth 函数であり、台は mod Z で相対コンパクトな集合に含まれる。

(2) $\gamma = z\, 1_{\mathfrak{A}} \in Z$ とする。

(a) $\mathfrak{A}$ が斜体ならば、$\Phi(t,f)$ は γ の近傍で smooth である。

(b) $\mathfrak{A} = \mathrm{M}(2,F)$ とする。T_{reg} 上の函数 $\Gamma_{\gamma,u}^T$, Γ_γ^T (= Shalika germ) が存在して次の性質を持つ：

- mod 任意の函数 $f \in C_c^\infty(G,\omega)$ に対して、γ の G での近傍 $\mathcal{N}(f)$ が存在して

(2.5) $$\Phi(t,f) = \Gamma_{\gamma,u}^T(t)\, \Phi(\left[\begin{smallmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right], f) + \Gamma_\gamma^T(t)\, f(\gamma), \qquad t \in T_{\mathrm{reg}} \cap \mathcal{N}(f)$$

- γ の十分近傍で、$\Gamma_{\gamma u}^T(t)$ は $D_T(t)^{-1/2}$ に比例し、$\Gamma_\gamma^T(t)$ は次の定数に一致する：

(2.6) $$\Gamma_\gamma^T(t) = \begin{cases} 0 & (T \notin \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}), \\ -\mathrm{vol}(F^\times \backslash D^\times) & (T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}) \end{cases}$$

ここで、D は F 上の四元数体である。□

命題 18 の証明は、以下でいくつかの補題を準備しながら段階を分けて与える。(一般の場合は、[24], [32], [19, §5, §6] を参照せよ。)

2.4.1. *Germ* 展開の存在証明. [32] に従いながら、「中心指標付き」に修正しつつ進む。この小節を通して、$G = \mathrm{GL}(2, F)$ とし、$\gamma_u = \left[\begin{smallmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right]$, $\gamma = z\,1_2$ とおこう。

補題 19. 開集合 $\mathcal{U} \subset G$ に対して、$\tilde{\mathcal{U}} = \mathrm{Ad}(G)\mathcal{U}$ をその充満化として $Z(\mathcal{U}) = Z \cap \tilde{\mathcal{U}}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}$ とおく。$\mathcal{U}$ がある点 $x \in G$ の基本近傍系を走るとき、$Z(\mathcal{U})$ は Z における単位元の基本近傍系をなす。

Proof : $g \in \tilde{U}$ の固有値を $\lambda_i(g) \in \bar{F}$ $(i = 1, 2)$ とするとき、ζg $(\zeta \in F^\times)$ の固有値が $\zeta\lambda_i(g)$ になることに注意すればよい。□

補題 20. $f_u, f_1 \in C_\mathrm{c}^\infty(G, \omega)$ で

$$\begin{cases} \Phi(\gamma_u, f_u) & = 1, \\ \Phi(\gamma, f_u) & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi(\gamma_u, f_1) & = 0, \\ \Phi(\gamma, f_1) & = \omega(\gamma)^{-1} \end{cases}$$

を満たすものが存在する。

Proof : $\mathcal{O}_G(\gamma_u) = (G - Z) \cap \overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ より $\mathcal{O}_G(\gamma_u)$ は $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ において開集合である。γ_u の $G - Z$ での相対コンパクト近傍 $\mathcal{N}$ を十分小さくとると、補題 19 から Z における単位元の相対コンパクト近傍 $Z(\mathcal{N})$ 上で ω は自明になる。不変測度 $\mathrm{d}\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ の台は $\mathcal{O}_G(\gamma_u)$ 全体に等しいので、$\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}(Z(\mathcal{N})\,\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)) \neq 0$ である。

$$f_u(g) = \begin{cases} \omega(\zeta)^{-1}\,\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}(Z(\mathcal{N})\,\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u))^{-1} & (g = \zeta g_0 \in Z\,\mathcal{N}), \\ 0 & (g \notin Z\,\mathcal{N}) \end{cases}$$

によって smooth 函数 $f_u : G \to \mathbb{C}$ は矛盾無く定義されて、$\mathrm{supp}(f_u) \subset Z\mathcal{N}$ となる。$f_u(\zeta g) = \omega(\zeta)^{-1}\,f_u(g)$ $(\zeta \in Z)$ も明らかなので、$f_u \in C_\mathrm{c}^\infty(G, \omega)$ である。$Z\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u) = Z(\mathcal{N})\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ に注意すると、

$$\Phi(\gamma_u, f_u) = \int_{Z(\mathcal{N})\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)} \varphi\,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)} = 1,$$
$$\Phi(\gamma, f_u) = f_u(\gamma) = 0$$

となる。次に、G における γ の微小近傍 $\mathcal{N}_1$ を $\omega|(Z \cap \mathcal{N}_1^{-1}\mathcal{N}_1) = 1$ となるようにとり、

$$\chi_0(g) = \begin{cases} \omega(\zeta)^{-1} & (g = \zeta g_0 \in Z\,\mathrm{Ad}(G)\mathcal{N}_1), \\ 0 & (g \notin Z\mathrm{Ad}(G)\mathcal{N}_1) \end{cases}$$

として、$\chi_0 \in C_\mathrm{c}^\infty(G, \omega)$ と定め

$$f_1 = \chi_0 - \Phi(\gamma_u, \chi_0)\,f_u$$

と定義する。すると、

$$\Phi(\gamma, f_1) = f_1(\gamma) = \omega(\gamma)^{-1}, \qquad \Phi(\gamma_u, f_1) = \Phi(\gamma_u, \chi_0) - \Phi(\gamma_u, \chi_0)\,\Phi(\gamma_u, f_u) = 0$$

となる。□

$Z\backslash G$-作用を持つ全不連結空間 X 上の函数 $\phi : X \to \mathbb{C}$ に対して $\phi^g(x) = \phi(g^{-1} \cdot x)$ $(g \in Z\backslash G,\, x \in X)$ とする。$C_0(X)$ を $\phi^g - \phi$ $(\phi \in C_\mathrm{c}^\infty(X),\, g \in Z\backslash G)$ の形を持つ函数によって生成される $C_\mathrm{c}^\infty(G)$ の部分空間とする。$X = \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ は Ad による G-作用を持つので、$C_0(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ が定義される。

補題 21. $\langle \mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}, \varphi \rangle = 0$, $\varphi \in C_\mathrm{c}^\infty(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ ならば $\varphi \in C_0(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ である。

Proof : $\mathcal{O}_G(\gamma_u)$ は G-軌道なのでその上の Haar 測度は定数倍を除いて一意である。これは、商空間 $C_\mathrm{c}^\infty(\mathcal{O}_G(\gamma_u))/C_0(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ の双対空間が 1 次元であることを意味する。□

補題 22. $f_u,\ f_1$ を補題 *20* のようにとる。任意の $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega)$ に対して、$f' = f - \Phi(\gamma_u, f)\, f_u - \Phi(\gamma, f)\, f_1$ とおくと、$h \circ \mathrm{Ad}(g) - h$ $(h \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega),\ g \in G)$ の形の函数の有限一次結合が存在して $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ 上で f' と一致する。

Proof: $f_u,\ f_1$ の性質から $\Phi(\gamma_u, f') = 0,\ f'(\gamma) = 0$ となる。よって、f' は γ のある近傍で零なので、$\varphi = f'|\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ は $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ であって、

$$\langle \mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}, \varphi \rangle = \Phi(\gamma_u, f') = 0$$

を満たす。従って、補題 21 より $\varphi \in C_0(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ となるので、

$$\varphi = \sum_{j \in J} (h_j \circ \mathrm{Ad}(g_j) - h_j), \qquad h_j \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathcal{O}_G(\gamma_u)),\ g_j \in G$$

と有限和で書ける。補題 19 より、$G - Z$ の $\mathrm{Ad}(G)$-不変開集合 $\mathcal{N}$ を $\gamma_u \in \mathcal{N}$ かつ $\omega|(\mathcal{N}^{-1}\mathcal{N} \cap Z) = 1$ となるように取れる。各点 $x \in \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ の $\mathcal{N}$ における開近傍 $\mathcal{U}_x$ が存在して、任意の j に対して $h_j|\mathcal{U}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ は定数になる。補題 19 に注意して $Z(\mathcal{U}_x)\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ を満たすように x の開近傍 $\mathcal{V}_x$ をとる。$Z\mathcal{V}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u) = Z(\mathcal{V}_x)\mathcal{V}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u) \subset \mathcal{U}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ より、h_j は $Z\mathcal{V}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ 上で定数になる。$\bigcup_j \mathrm{supp}(h_j)$ はコンパクトなので、有限個の点 $x_\alpha\ (\alpha = 1, \dots, r)$ が存在して $\mathcal{V}_{x_\alpha} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ によって被覆される。$\mathcal{V}'_\beta = \mathcal{V}_{x_\beta} - \bigcup_{\alpha<\beta}(\mathcal{V}_{x_\beta} - Z\mathcal{V}_{x_\alpha})$ によって $\mathcal{V}'_\beta$ を定めると、$Z\mathcal{V}'_\beta$ は disjoint で $Z\mathcal{V}'_\beta \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ 上すべての h_j が定数になる。

h_j は $\mathcal{O}_G(\gamma_u)$ の開集合 $Z\mathcal{V}'_{\beta_j} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ の特性函数の定数 c_j 倍であるとしよう。

各 $j \in J$ に対して、$\mathcal{N}_j = Z\mathcal{V}'_{\beta_j} \cap \mathcal{N}$ とおき、$\zeta g \in Z\mathcal{N}_j$ のとき $\phi_j(\zeta g) = \omega(\zeta)^{-1} c_j$ とし、$G - Z\mathcal{N}_j$ 上で零とすることで $\phi_j \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega)$ が矛盾無く作れる。すると、$\phi_j|\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)} = h_j$ $(j \in J)$ となる。そこで、$\phi = \sum_{j \in J}(\phi_j \circ \mathrm{Ad}(g_j) - \phi_j)$ とおけば $\phi|\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)} = f'|\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ となる。□

補題 23. $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega)$ が $f|\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)} = 0$ を満たせば、γ のコンパクト近傍 $\mathcal{N}_f$ が存在して、$\tilde{\mathcal{N}}_f = \mathrm{Ad}(G)\mathcal{N}_f$ 上で f は恒等的に零になる。

Proof: $\mathrm{Ch} : Z\backslash G \longrightarrow F^3$ を $g \in Z\backslash G$ に $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{GL}_F(\mathfrak{g})$ の特性多項式 $\det(t - \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g))$ の係数を対応させる写像とする。これは連続かつ G-不変である。$\mathrm{Ch}(\mathrm{supp}(f))$ はコンパクト集合であり、$\mathrm{Ch}(\gamma)$ を含まない。よって、$\mathrm{Ch}(\gamma)$ の近傍 $C \subset F^3$ が存在して、$C \cap \mathrm{Ch}(\mathrm{supp}(f)) = \varnothing$ となる。そこで、$\gamma \in \mathcal{N} \subset \mathrm{Ch}^{-1}(C)$ なる $\mathcal{N}$ をとればよい。□

germ 展開の存在性: $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega)$ に対して、補題 22 を適用すると、有限個の函数 $h_i \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega)$ および点 $g_i \in G$ が存在して、

$$f'' = f - \Phi(\gamma_u, f)\, f_u - \Phi(\gamma, f)\, f_1 - \sum_i (h_i \circ \mathrm{Ad}(g_i) - h_i)$$

の $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ への制限が恒等的に零になる。そこで、この f'' に対して補題 23 を適用することで、γ のあるコンパクト近傍 $\mathcal{N}_f$ であって $f''|\mathrm{Ad}(G)\mathcal{N}_f \equiv 0$ なるものが存在する。特に、$\Phi(t, f'') = 0\ (\forall t \in T \cap \mathcal{N}_f)$、つまり、

$$\Phi(t, f) = \Phi(\gamma_u, f)\, \Phi(t, f_u) + \Phi(\gamma, f)\, \Phi(t, f_1), \qquad t \in T \cap \mathcal{N}_f$$

そこで、$\Gamma^T_{\gamma,u}(t) = \Phi(t, f_u),\ \Gamma^T_\gamma(t) = \Phi(t, f_1)$ とすれば germ 展開 (2.5) が成り立つ。□

2.4.2. *Shalike germ* の決定. 引き続き、$G = \mathrm{GL}(2, F)$ とする。(2.5) の両辺を特別な函数に対して計算すればよい。$\chi_{\mathbf{K}} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G)$ を極大コンパクト部分群 $\mathbf{K} = \mathrm{GL}(2, \mathfrak{o}_F)$ の特性函数とする。

$$\chi^1_{\mathbf{K}}(g) = \int_{F^\times} \chi_{\mathbf{K}}(cg)\, \mathrm{d}\mu_{F^\times}(c), \qquad g \in G$$

とすれば、$\chi^1_{\mathbf{K}} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G, 1)$ である。以下で現れる C_0 は補題 12 の定数である。また、条件 P に対して、それが成立するときに限り $\delta(\mathrm{P}) \in \{0, 1\}$ は 1 とする。

補題 24. (1) $a = \left[\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right] \in M - Z$ に対して

$$\Phi(g, \chi^1_{\mathbf{K}}) = C_0 \operatorname{vol}(\mathfrak{o}_F)\, \delta(a_1 a_2^{-1} \in \mathfrak{o}_F^\times)\, |a_1 a_2|_F^{-1/2}\, D_M(a)^{-1/2}$$

(2) $z \in F^\times$ に対して、

$$\Phi\left(\left[\begin{smallmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right], \chi^1_{\mathbf{K}}\right) = C_0\, (1 - q_F^{-1})^{-1}$$

Proof : $G_a \backslash G$ の不変測度の決め方から、

$$\begin{aligned}
\Phi(a, \chi^1_{\mathbf{K}}) &= \int_{M\backslash G} \int_Z f(g^{-1} c a g)\, \mathrm{d}\mu_{A\backslash G}(g)\, \mathrm{d}\mu_F^\times(c) \\
&= C_0 \int_{x \in F} \int_{c \in F^\times} \int_{k \in \mathbf{K}} \chi_{\mathbf{K}}\left(k^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} ca_1 & 0 \\ 0 & ca_2 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] k\right)\, \mathrm{d}\mu_{F^\times}(c)\, \mathrm{d}_F x\, \mathrm{d}k \\
&= C_0 \int_{x \in F} \int_{c \in F^\times} \chi_{\mathbf{K}}\left(\left[\begin{smallmatrix} ca_1 & (a_1 - a_2)cx \\ 0 & ca_2 \end{smallmatrix}\right]\right)\, \mathrm{d}\mu_{F^\times}(c) \mathrm{d}_F x\, \mathrm{d}k \\
&= C_0 \left\{ \int_{c \in F^\times} \delta(ca_1, ca_2 \in \mathfrak{o}_F,\, c^2 a_1 a_2 \in \mathfrak{o}_F^\times)\, \mathrm{d}\mu_{F^\times}(c) \right\} \operatorname{vol}(\mathfrak{o}_F)\, |a_1 - a_2|_F^{-1} \\
&= C_0 \operatorname{vol}(\mathfrak{o}_F)\, \delta(a_1 a_2^{-1} \in \mathfrak{o}_F^\times)\, |a_1 a_2|_F^{-1/2}\, D_A(a)^{-1/2}
\end{aligned}$$

もう一つの積分も同様に容易に計算される。 □

$E \in \mathcal{Q}(F)$, $T = T_E^G$ とする。$\mathfrak{o}_E = \mathfrak{o}_F + \mathfrak{o}_F \theta$ となる $\theta \in \mathfrak{o}_E$ が存在する。θ の F-最小多項式を $f(t) = t^2 + b_1 t + b_0 \in \mathfrak{o}_F[t]$ とすると、E/F の differentail ideal は $f'(\theta)\mathfrak{o}_E$ となる。そこで、$u = f'(\theta) = 2\theta + b_1$ とおくと、$\bar{u} = -u$, $E = F + Fu$ である。E の F-基底 $\{1, u\}$ による正則表現によって E を行列環に埋め込むと

$$T_E = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} z & tu^2 \\ t & z \end{smallmatrix}\right] \,|\, t, z \in F^\times \right\}$$

となる。$\operatorname{vol}(Z\backslash T_E^G) = \operatorname{vol}(F^\times \backslash E^\times) = 1$ であったことを想起しよう。

補題 25. $e \in \{1, 2\}$ を E/F の分岐指数とする。$|\mathrm{N}(\tau)|_F = |z|_F^2$ を満たすような $\tau = \left[\begin{smallmatrix} z & t\delta^2 \\ t & z \end{smallmatrix}\right] \in T_E^G - Z$ に対して

$$\Phi(\tau, \chi^1_{\mathbf{K}}) = C_0 (q_F - 1)^{-1} \operatorname{vol}(\mathfrak{o}_F)\, \left\{-2 + (q_F^{e-1} + q_F)\, |u|_F\, D_T(\tau)^{-1/2}\right\}$$

Proof : 写像 $\sigma : E \to F$ を $\sigma(\xi) = (\xi - \bar{\xi})/u$ で定義しよう。 ϖ_F, ϖ_E を F, E の素元とする。このとき、任意の整数 $l \in \mathbb{Z}$ に対して、$\sigma(\varpi_E^l \mathfrak{o}_E) = \varpi_F^{[l/e]}\, \mathfrak{o}_F$ が成り立つ。まず、$\chi_{\mathbf{K}}$ の軌道積分を計算する。

$$\begin{aligned}
C_0^{-1}\, \Phi(\tau, \chi_{\mathbf{K}}) &= C_0^{-1} \int_{Z\backslash G} \chi_{\mathbf{K}}(g^{-1} \tau g)\, \mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g) \\
&= \int_{x \in F} \int_{a \in F^\times} \int_{k \in \mathbf{K}} \chi_{\mathbf{K}}\left(k^{-1} \left[\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} z & tu^2 \\ t & z \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] k\right)\, |a|_F^{-1}\, \mathrm{d}\mu_{F^\times}(a)\, \mathrm{d}_F x\, \mathrm{d}k \\
&= \int_{x \in F} \int_{a \in F^\times} \int_{k \in \mathbf{K}} \chi_{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} z - xt & a^{-1} t(u^2 - x^2) \\ at & z + xt \end{bmatrix}\right)\, |a|_F^{-1}\, \mathrm{d}\mu_{F^\times}(a)\, \mathrm{d}_F x\, \mathrm{d}k
\end{aligned}$$

(2.7)

$$= \int_{x \in F} \int_{a \in F^\times} \int_{k \in \mathbf{K}} \chi_{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} z - x & a^{-1}(t^2 u^2 - x^2) \\ a & z + t \end{bmatrix}\right)\, |a|_F^{-1}\, \mathrm{d}\mu_{F^\times}(a)\, \mathrm{d}_F x\, \mathrm{d}k$$

最後の被積分函数の中に現れた行列が $\mathbf{K}$ に属する条件は、$x = c + z$ として変数 c を導入すると、次と同値；

$$(c, 2z, a) \in \mathfrak{o}_F^3, \qquad \mathrm{N}(\tau) \in \mathfrak{o}_F^\times, \quad \mathrm{N}(c + \tau) \in a\mathfrak{o}_F$$

よって、(2.7) は積分 $I=\iint_{(a,c)\in\mathfrak{I}}|a|_F^{-2}\,\mathrm{d}_F a\,\mathrm{d}_F c$ の $\delta(2z\in\mathfrak{o}_F,\,\mathrm{N}(\tau)\in\mathfrak{o}_F^\times)$ 倍に等しい。ただし、$\mathfrak{I}=\{(a,c)\in\mathfrak{o}_F^2\,|\,\mathrm{N}(c+\tau)\in a\mathfrak{o}_F\}$ である。$\mathfrak{I}$ は減少集合列 $\{(a,c)\in\mathfrak{I}\,|\,c+\tau\in\varpi_E^l\mathfrak{o}_E\}$ $(l\in\mathbb{N})$ によるフィルター付けを持つ。これで積分 I を分解すると、

(2.8)

$$I=\sum_{l\in\mathbb{N}}J(l)\,(V(l)-V(l+1)),$$

$$\text{ただし、}J(l)=\int_{a\in\mathfrak{o}_F;\,\mathrm{ord}_F(a)\leqslant 2l/e}|a|_F^{-1}\,\mathrm{d}\mu_{F^\times}(a),\qquad V(l)=\mathrm{vol}\,\{c\in\mathfrak{o}_F\,|\,c+\tau\in\varpi_E^l\mathfrak{o}_E\}$$

となる。$J(l)$ は容易に

$$J(l)=\frac{q_F^{2l/e+1}-1}{q_F-1}\tag{2.9}$$

と計算される。一方、

$$I(l)=\delta((\mathfrak{o}_F+\tau)\cap\varpi_E^l\mathfrak{o}_E\neq\varnothing)\,\mathrm{vol}(F\cap\varpi_E^l\mathfrak{o}_E)$$

となる。$\tau\in\mathfrak{o}_E$ のとき、$(\mathfrak{o}_F+\tau)\cap\varpi^l\mathfrak{o}_E\neq\varnothing$ は $2t\in\sigma(\varpi_E^l\mathfrak{o}_E)$ と同値である。また、$E=F+\theta F\cong F^2$ によって一時的に E に $\mathrm{d}_F x$ の積測度を与えると、$\mathrm{vol}(\varpi_E^l\mathfrak{o}_E)=\mathrm{vol}(F\cap\varpi_E^l\mathfrak{o}_E)\,\mathrm{vol}(\sigma(\varpi_E^l\mathfrak{o}_E))$ であり、しかも $\sigma(\varpi_E^l\mathfrak{o}_E)=\varpi_F^{[l/e]}\mathfrak{o}_F$ なので、

$$V(l)=\delta(2t\in\sigma(\varpi_E^l\mathfrak{o}_E))\,\frac{\mathrm{vol}(\varpi_E^l\mathfrak{o}_E)}{\mathrm{vol}(\varpi_F^{[l/e]}\mathfrak{o}_F)}=\delta(\mathrm{ord}_F(2t)\geqslant[l/e])\,q_F^{2l/e-[l/e]}\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)\tag{2.10}$$

(2.8) に (2.9), (2.10) を代入して直接計算すれば、$I=(q_F-1)^{-1}\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)\,\{-2+(q_F^{e-1}+q_F)\,|2t|_F^{-1}\}$ を得る。$D_T(\tau)^{1/2}=|u|_F|2t|_F|\mathrm{N}(\tau)|_F^{-1/2}$ なので、最終的に

$$C_0^{-1}\,\Phi(\tau,\chi_{\mathbf{K}})=\delta(2z\in\mathfrak{o}_F,\,\mathrm{N}(\tau)\in\mathfrak{o}_F^\times)\,(q_F-1)^{-1}\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)\,\{-2+(q_F^{e-1}+q_F)\,|u|_F\,D_T(\tau)^{-1/2}\}$$

を得る。これより、

$$\Phi(\tau,\chi_{\mathbf{K}}^1)=\left\{\int_{c\in F^\times}\delta(2cz\in\mathfrak{o}_F,\,c^2\mathrm{N}(\tau)\in\mathfrak{o}_F^\times)\,|c|_F^{-1}\,\mathrm{d}_F c\right\}\times C_0\,(q_F-1)^{-1}\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)\,\left\{-2+(q_F^{e-1}+q_F)\,|u|_F\,D_T(\tau)^{-1/2}\right\}$$

右辺の積分は条件 $|\mathrm{N}(\tau)|_F=|z|_F^2$ のもとでは 1 になる。□

命題 18 の証明の完成： さて、Shalika germ の構成の仕方より、函数 $\Gamma_{\gamma u}^T(t)=\Phi(\gamma_u,f_u)$ である。ただし、$f_u\in C_c^\infty(G,\omega)$ は補題 20 の性質を持つ任意の函数であるが、その構成法から γ_u の任意の微小開近傍 $\mathcal{N}$ であって $\mathcal{N}^{-1}\mathcal{N}\cap Z$ 上で ω が自明となるものに対して、$Z\mathcal{N}$ に台を持ちしかも $f_u|\mathcal{N}$ は中心指標 ω によらないようにとることが出来た。これより、$\Gamma_{\gamma,u}^T(t)=\Phi(t,f_u)$ の γ での芽は中心指標に依存しないことが分かる。$\Gamma_\gamma^T(t)$ についても同様である。よって、$\chi_{\mathbf{K}}^1\in C_c^\infty(G,1)$ に対して展開 (2.5) の両辺を計算すれば $\Gamma_{\gamma,u}^T(t)$, $\Gamma_\gamma^T(t)$ が決定できる。補題 24、補題 25 および補題 13 を使って実際に求めると (2.6) のようになる。

命題 18 (1) は補題 16 から従う。(2) の主張 (a) を示そう。$t_0\in T$ を固定する。函数 f が局所定数函数なことより、各点 $x\in Z\backslash G$ に対してその近傍 $\mathcal{N}_x\subset Z\backslash G$ および t_0 の T での近傍 $\mathcal{U}_x$ が存在して、$(g,t)\in\mathcal{N}_x\times\mathcal{U}_x$ 上で $f(g^{-1}tg)$ は定数値になる。$\mathfrak{A}$ が斜体なので、$Z\backslash G$ はコンパクトである (補題 13(1))。よって、$\{\mathcal{N}_x\}$ は有限部分被覆 $\{\mathcal{N}_{x_j}\}$ を持つ。$\mathcal{U}=\bigcap_j\mathcal{U}_{x_j}$ とおこう。$t\in\mathcal{U}$ のとき

$$\Phi(t,f)=\int_{Z\backslash G}f(g^{-1}tg)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g)=\sum_j\mu_{Z\backslash G}(\mathcal{N}_{x_j})\,f(x_j^{-1}t_0x_j)$$

となって、$\Phi(t,f)$ は t_0 の近傍 $\mathcal{U}$ 上で定数函数になる。$\square$

注意 ：

(1) (2.6) より、$T\in\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ に対する $\Phi(t,f)$ の展開 (2.5) の右辺第 2 項（「漸近展開」の定数項）は T に依存しない。これを保障するには正規化 $\mathrm{vol}(Z\backslash T)=1$ が重要であることを注意しておく。

(2) 両側 $\mathbf{K}_v$-不変かつコンパクト台を持つ $G=\mathrm{GL}(2,F)$ 上の smooth 函数 (要するに不分岐ヘッケ環の元) 全てに対する軌道積分の計算は [20, Chap. 5] で実行されている。計算は Bruhat-Tis building ($SL_2(F)$ の tree) の頂点の個数を数え上げる問題に帰着させる方法で行われる。[19, §5] に詳しい解説がある。

2.5. **E 型函数.**

定義 26. ([25, Definition A (p.174)]) $f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega)$ が条件

- $G_{\mathrm{ell}}-Z$ 上の函数 $\gamma\mapsto\Phi(\gamma,f)$ は G_{ell} 上の smooth 函数に延長される。
- $\Phi(\gamma,f)=0$ $(\forall\gamma\in\mathcal{H}_G)$

を満たすとき、E-型函数とよぶ。

補題 27. F は非アルキメデス的とする。$f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega)$ が E-型函数ならば、

$$\Phi(\gamma,f)=0,\qquad\forall\,\gamma\in G-G_{\mathrm{ell}}$$

Proof: $G=\mathrm{GL}(2,F)$ の場合のみが問題になる。共役類の分類結果 (2.2 節参照) から、任意の $z\in F^{\times}$ に対して $\Phi(\left[\begin{smallmatrix}z&1\\0&z\end{smallmatrix}\right],f)=0$ を示せばよい。$T=M$ に対する germ 展開 (2.5) の左辺は f が E 型ならば消える。右辺でみると、$\Gamma_{\gamma,u}^{T}(t)$ は零ではないので、その係数 $\Phi(\left[\begin{smallmatrix}z&1\\0&z\end{smallmatrix}\right],f)$ は零でなくてはならない。$\square$

命題 28. ([25, Theorem 2.4(p.171)]) : F は非アルキメデス的とする。各 $E\in\mathcal{Q}(F)$ に対して函数 $\varphi^E:T_E^G\to\mathbb{C}$ が与えられ、次の条件を満たすとする。

- $\varphi^E(wtw^{-1})=\varphi^E(t)$ $(\forall\,t\in T_E^G,\,\forall\,w\in W(G,T_E^G))$
- $\varphi^E(zt)=\omega(z)^{-1}\varphi^E(t)$ $(\forall\,t\in T_E^G,\,\forall\,z\in Z)$
- $\{\varphi^E\}$ は G_{ell} 上の smooth 函数に「貼り合わされる」。即ち、任意の $\gamma\in Z$ に対して、G における γ の近傍 $\mathcal{N}(\gamma)$ とある定数 $c(\gamma)$ が存在して、任意の $E\in\mathcal{Q}(F)$ に対して
$$\varphi^E(t)=c(\gamma),\qquad t\in\mathcal{N}(\gamma)\cap T_E^G$$

このとき、E-型函数 $f\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G,\omega)$ が存在して、

$$\Phi(t,f)=\varphi^E(t),\qquad\forall\,E\in\mathcal{Q}(F),\,\forall\,t\in T_E^G$$

となる。$\square$

この命題の証明は次節で与える。

2.5.1. 命題 *28* の証明. [25, Theorem 2.4] に従って進む。T_E^G $(E\in\mathcal{Q}(F))$ 全体の互いに素な合併を G-共役で割って得られる商空間を X とする。自然な全射 $\mathcal{E}_G\to X$ が存在する。これにより商位相を与えると、X は中心 Z が連続に作用する局所コンパクト全不連結位相空間になる。各点 $x\in X$ に対して、その持ち上げの一つ $\tilde{x}\in\mathcal{E}_G$ を固定しておく。。

補題 29. $x\in X$ として、$\tilde{x}$ の G での任意の近傍 $\mathcal{V}$ を与える。すると、$\tilde{x}$ の近傍 $\mathcal{V}_{\tilde{x}}\subset\mathcal{V}$ および函数 $f_x\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(Z\mathcal{V}_{\tilde{x}},\omega)$ で、任意の半単純正則元 $t\in G$ に対して

$$\Phi(t,f_x)=\begin{cases}1 & (\mathcal{O}_G(t)\cap\mathcal{V}_{\tilde{x}}\cap\mathcal{E}_G\neq\varnothing),\\ 0 & (\mathcal{O}_G(t)\cap\mathcal{V}_{\tilde{x}}\cap\mathcal{E}_G=\varnothing)\end{cases}$$

を満たすものが存在する。つまり、函数 $t\mapsto\Phi(t,f_x)$ を空間 X 上の函数と見做すと、$\mathcal{V}_{\tilde{x}}\cap\mathcal{E}_G$ の像の特性函数に伸びる。

Proof : $\underline{\tilde{x} \notin Z \text{ の場合：}}$　補題 9 より $\tilde{x} \in T - Z$ となる $T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ が唯ひとつ存在する。命題 16 の写像 $\eta_T : (T\backslash G) \times (T - Z) \to G$ を想起しよう。$\eta_T(1, \tilde{x}) = \tilde{x}$ なので、命題 16 から $\mathcal{V}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{V} \cap (G - Z)$ を満たす開近傍を $\mathcal{V}_{\tilde{x}} = \eta_T(N_1 \times N_2)$（$N_1$ は $T\backslash G$ の原点のコンパクト開近傍、N_2 は T における $\tilde{x}$ のコンパクト開近傍）の形に取れて、しかも $\eta_T : N_1 \times N_2 \cong \mathcal{V}_{\tilde{x}}$ は位相同型になる。更に、$\mathcal{V}_{\tilde{x}}^{-1}\mathcal{V}_{\tilde{x}} \cap Z$ 上で ω が自明になるとしてよい。$N_1' \subset N_1$, $N_2' \subset N_2$ を空でないコンパクト開集合として、$\mathcal{V}_x' = \eta_T(N_1' \times N_2')$ とおく。$f_x \in C_{\mathrm{c}}^\infty(Z\mathcal{V}_{\tilde{x}}, \omega)$ を各 $\zeta \in Z$ に対して $\zeta\mathcal{V}_{\tilde{x}}'$ 上では定数 $\omega(\zeta)^{-1}\operatorname{vol}(N_1')^{-1}$ として、$Z\mathcal{V}_{\tilde{x}}'$ の外では零として定める。すると、$\gamma \in \mathcal{V}_{\tilde{x}}' \cap T$ のとき

$$\Phi(\gamma, f_x) = \int_{\mathcal{O}_G(\gamma) \cap Z\mathcal{V}_{\tilde{x}}} f_x \,\mathrm{d}\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma)} = \operatorname{vol}(N_1')^{-1} \int_{N_1'} \mathrm{d}\mu_{T\backslash G}(g) = 1$$

$\operatorname{Ad}(G)\mathcal{V}_{\tilde{x}}$ は T 以外の $\mathcal{T}_G$ に属するトーラスと交わらない。これより、f_x が求めるものである。

$\underline{\tilde{x} = \left[\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right] \in Z \text{ の場合：}}$ $\beta := \left[\begin{smallmatrix} z & b \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{V}$ となるような $b \in F^\times$ が存在する。よって、補題 20 の証明から、β の近傍 $\mathcal{N}_\beta \subset \mathcal{V} \cap (G - Z)$ と函数 $h_\beta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(Z\mathcal{V}, \omega)$ が存在して $\Phi(\beta, h_\beta) = 1$ となる。$\mathcal{N}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{V}$ を $\tilde{x}$ のコンパクト近傍とする。$\mathcal{N}_{\tilde{x}}^{-1}\mathcal{N}_{\tilde{x}} \cap Z$ 上で ω が自明になるように $\mathcal{N}_{\tilde{x}}$ を小さくしておく。函数 $h_{\tilde{x}} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(Z\mathcal{V}, \omega)$ を各 $\zeta \in Z$ について $\zeta\mathcal{N}_{\tilde{x}}$ 上で $\omega(\zeta)^{-1}\Gamma_{\tilde{x}}^{-1}$ に等しく、$Z\mathcal{N}_{\tilde{x}}$ の外では零とおくことで定義する。$f_x = \omega(\tilde{x})\,(\Gamma_{\tilde{x}})^{-1}\{h_{\tilde{x}} - \Phi(\beta, \chi_{\tilde{x}})\,h_\beta\}$ とおく。ここで、$\Gamma_{\tilde{x}}$ は「0 次」Shalika germ $\Gamma_{\tilde{x}}^T(t)$ (これは $T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ によらない）である。すると、

$$\Phi(\beta, f_x) = 0, \qquad f_x(\tilde{x}) = \Gamma_{\tilde{x}}^{-1}$$

を満たす。この函数 f_x に対して、germ 展開 (2.5) が成り立つような $\tilde{x}$ の近傍 $\mathcal{V}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{N}_{\tilde{x}}$ が存在する。$\gamma \in \mathcal{V}_{\tilde{x}} \cap (T - Z)$ ならば

$$\Phi(\gamma, f_x) = \Gamma_{\tilde{x}u}^T(\gamma)\,\Phi(\beta, f_x) + \Gamma_{\tilde{x}}^T\,f_x(\tilde{x})$$

である。右辺の第一項は $\Phi(\beta, f_x) = 0$ より消える。第二項は $T \notin \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ ならば $\Gamma_{\tilde{x}}^T = 0$(命題 18 (2.6)) より零であり、$T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ ならば $\Gamma_{\tilde{x}}\,f_x(\tilde{x}) = 1$ である。よって、f_x が求める函数である。□

命題 28 の証明 ： 命題の仮定から、$\{\varphi^E\}$ は X 上の smooth 函数 $\varphi : X \to \mathbb{C}$ を自然に決める:

$$\varphi(x) = \varphi^E(\tilde{x}), \qquad (\tilde{x} \in T_E,\ E \in \mathcal{Q}(F))$$

φ は X 上 smooth で商空間 $Z\backslash X$ はコンパクトなので、X の有限開集合族 $\{V_i\}_{i=0}^r$ を次のように選べる：

- φ は V_i 上定数函数である。
- $\{ZV_i\}_{i=0}^r$ は X の被覆である。
- G の開コンパクト集合 $\mathcal{V}_i$ であって $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{E}_G$ の X への像が V_i となるものが存在して、$\mathcal{V}_i^{-1}\mathcal{V}_i \cap Z$ 上では ω は定数値をとる。

$\{V_i\}$ を $U_i = V_i - \bigcup_{h<i}(V_i \cap ZV_h)$ で定義される開集合族 $\{U_i\}$ で置き換えれば、最初から $\{ZV_i\}$ が disjoint であると仮定できる。補題 29 から各 $\tilde{x} \in \mathcal{V}_i$ に対して、$\tilde{x}$ の開コンパクト近傍 $\mathcal{V}(\tilde{x}) \subset \mathcal{V}_i$ と函数 $f_x \in C_{\mathrm{c}}^\infty(Z\mathcal{V}(\tilde{x}), \omega)$ であって、任意の半単純元 $t \in G - Z$ に対して、$\Phi(t, f_x) = 1$ (if $\mathcal{O}_G(t) \cap \mathcal{E}_G \cap \mathcal{V}(\tilde{x}) \neq \varnothing$), $\Phi(t, f_x) = 0$ (if $\mathcal{O}_G(t) \cap \mathcal{V}(\tilde{x}) \cap \mathcal{E}_G = \varnothing$) を満たすものが存在する。$\mathcal{V}_i$ のコンパクト性から $\{\mathcal{V}(\tilde{x})\}$ から有限部分開被覆 $\{\mathcal{V}(\tilde{x}_{i,\alpha})\}_{\alpha=0}^{q(i)}$ を選べる。更に、$\mathcal{N}_{i,\alpha} = \mathcal{V}(\tilde{x}_{i,\alpha}) - \bigcup_{\beta<\alpha}(\mathcal{V}(\tilde{x}_{i,\beta}) \cap Z\mathcal{V}(\tilde{x}_{i,\alpha}))$ として、$f_{i,\alpha} = f_{x_{i,\alpha}}|Z\mathcal{N}_{i,\alpha}$ とおき、$f_i = \sum_\alpha f_{i,\alpha}$ と定義すると、$f_i \in C_{\mathrm{c}}^\infty(Z\mathcal{V}_i, \omega)$ であり、$\Phi(\gamma, f_i) = 0$ (if $\mathcal{O}_G(\gamma) \cap \mathcal{E}_G \cap \mathcal{V}_i = \varnothing$), $\Phi(\gamma, f_i) = 1$ (if $\mathcal{O}_G(\gamma) \cap \mathcal{E}_G \cap \mathcal{V}_i \neq \varnothing$) となる。$\varphi$ の V_i 上での値を c_i として $f = \sum_i c_i f_i$ と定義すると、これが求める函数になっている。□

H を局所コンパクト位相群、Z_H をその中心の閉部分群とする。$Z_H\backslash H$ の Haar 測度 $\mathrm{d}h$ を固定する。K を H のコンパクト部分群とする。$(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ を H の Hibert 空間上の連続表現、$\langle\,|\,\rangle$ を表現空間 $\mathcal{V}$ の (必ずしも G-不変とは限らない) 内積とする。(エルミート内積は常に最初の変数に関して $\mathbb{C}$-線型とする。) π の中心指標は η であるとする：

$$\pi(z) = \eta(z)\,\mathrm{Id}, \qquad z \in Z_H$$

K の任意の有限次元連続表現 (τ, W_τ) に対して

$$\mathcal{V}_\pi[\tau] = \mathrm{Image}(\mathrm{Hom}_K(W_\tau, \mathcal{V}_\pi) \otimes_{\mathbb{C}} W_\tau \longrightarrow \mathcal{V}_\pi)$$

とおき、これを π の K-等型成分 (isotypic component) とよぶ。以下では、π は K-許容可能（即ち、K の任意の既約表現 τ に対して $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_\pi[\tau] < +\infty$）であると仮定する。

$L^1(H,\eta)$ を H 上の可側函数 f で、$f(zh) = \omega(z)^{-1} f(h)$ $(z \in Z_H)$ を満たし、$|f|$ が $Z_H\backslash H$ 上可積分となるもの全体の空間とする。$L^1(H,\eta)_{(K)}$ を両側 K-有限な $f \in L^1(H,\eta)$ 全体のなす部分空間とする。$f \in L^1(H,\eta)_{(K)}$ に対して、有界線型作用素 $\pi(f) : \mathcal{V}_\pi \to \mathcal{V}_\pi$ が

$$\langle \pi(f)v \,|\, u \rangle = \int_{Z_H\backslash H} f(h) \langle \pi(h)v \,|\, u \rangle \,\mathrm{d}h, \qquad u, v \in \mathcal{V}_\pi$$

で定義される。K のある有限次元表現 τ が存在して $\pi(f)(\mathcal{V}_\pi) \subset \mathcal{V}_\pi[\tau]$ となるので、$\pi(f)$ は有限階数をもつ。線型写像

$$\mathrm{tr}\,\pi : L^1(H,\eta)_{(K)} \ni f \longrightarrow \mathrm{tr}\,[\pi(f)] \in \mathbb{C}$$

を π の distribution 指標 (distributional character) と呼ぶ。

$\mathbb{C}$-部分空間 $\mathcal{H} \subset L^1(H,\eta)_{(K)}$ は次の条件を満たすとする：

- $L^1(H,\eta)$ で稠密である。
- $\mathcal{H}$ は合成積で閉じている。
- $f \in \mathcal{H}$ ならば $f^* \in \mathcal{H}$ である。ただし、$f^*(h) = \overline{f(h^{-1})}$ である。

補題 30. $(\sigma_\alpha, L_\alpha)$ を H の中心指標 η の既約ユニタリー表現の族とし、各 α に対して $x_\alpha \in L_\alpha - \{0\}$ が与えられているとする。また、(σ, L) を H の中心指標 η の既約ユニタリー表現、$x \in L$ 零でないベクトルとする。任意の α について σ_α が σ とユニタリー同値でないならば、任意の正数 ϵ に対して、ある $f \in \mathcal{H}$ が存在して、

$$\sum_\alpha \|\sigma_\alpha(f)x_\alpha\|^2 < \epsilon\,\|\sigma(f)x\|^2$$

となる。

Proof : ([15, Lemma 16.1.1]) 背理法で証明するため、仮にある $\epsilon_0 > 0$ に対して

$$\sum_\alpha \|\sigma_\alpha(f)x_\alpha\|^2 \geqslant \epsilon_0 \|\sigma(f)x\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H} \tag{3.1}$$

となったとしよう。L' を $\{(\sigma_\alpha(f)x_\alpha) \in \bigoplus_\alpha L_\alpha |\, f \in \mathcal{H}\,\}$ の $\hat{\bigoplus}_\alpha L_\alpha$ での閉包とする。すると、L' は G-安定な閉部分空間になる。(3.1) より、条件

$$\psi((\sigma_\alpha(f)x_\alpha)) = \sigma(f)x, \qquad f \in \mathcal{H}$$

を満たす有界線型写像 $\psi : L' \to L$ が唯ひとつ存在する。特に、ψ は G-作用と可換になる。更に、$\psi \neq 0$ である。(実際、$x \neq 0$ で、$\mathcal{H}$ は $L^1(H,\eta)$ において稠密だから $\sigma(f)x \neq 0$ となる $f \in \mathcal{H}$ が存在する。よって $\psi((\sigma_\alpha(f)x_\alpha) = \sigma(f)x \neq 0$ である。) $\tilde{\psi}|(L')^\perp = 0, \tilde{\psi}|L' = \psi$ として $\tilde{\psi} : \hat{\bigoplus}_\alpha L_\alpha \to L$ を定義すると、これは零でない連続な G-線型写像になる。包含写像 $L_\alpha \hookrightarrow \hat{\bigoplus}_\alpha L_\alpha$ と $\tilde{\psi}$ の合成写像として G-線型写像 $\psi_\alpha : L_\alpha \to L$ が定義される。任意の α に対して、σ_α と σ は同値ではないので、Schur の補題から $\psi_\alpha = 0$ でなくてはならない。よって、$\tilde{\psi} = 0$ となってしまい矛盾する。□

補題 31. $\pi_j\,(j\in I)$ を中心指標 η の K-許容可能な既約ユニタリー表現の族であって、$i\neq j$ ならば $\pi_i\not\cong\pi_j$ を満たすとし、$\{a_j\}_{j\in I}$ を複素数の族とする。任意の $f\in\mathcal{H}$ に対して $\sum_{j\in I}a_j\,\mathrm{tr}\,\pi(f)$ が絶対収束して 0 に等しいならば、$a_j=0\,(\forall j\in I)$ である。特に、$\mathcal{H}$ 上の線型形式の族 $\{\mathrm{tr}\,\pi_j\}_{j\in I}$ は線型独立である。

Proof: $a_j=a_j'+\sqrt{-1}a_j''$ $(a_j',\,a_j''\in\mathbb{R})$ と表す。任意の $f\in\mathcal{H}$ について $\mathrm{tr}\,\pi_j(f*f^*)\in\mathbb{R}_+$ $(\forall\,j\in I)$ だか $\sum_{j\in I}a_j\,\mathrm{tr}\,\pi_j(f*f^*)=0$ より

$$\sum_{j\in I}a_j'\,\mathrm{tr}\,\pi_j(f*f^*)=\sum_{j\in I}a_j''\,\mathrm{tr}\,\pi_j(f*f^*)=0$$

である。よって、

$$\sum_{j\in I}a_j\,\mathrm{tr}\,\pi_j(f*f^*)=0,\qquad (a_j\in\mathbb{R})\quad\Longrightarrow\quad a_j=0\,(\forall j\in I)$$

を示せばよい。$I_+=\{j\in I|\,a_j>0\}$, $I_-=I-I_+$ とおく。$I_+\neq\varnothing$ と仮定して矛盾を導く。$j_0\in I_+$ とし、零でない単位ベクトル $u_0\in\mathcal{V}_{\pi_{j_0}}$ をとる。更に、各添え字 $j\in I_-$ に対して、$\mathcal{V}_{\pi_j}$ の正規直交基底 $\{u_{\alpha,j}\}$ をとる。補題 30 より、ある函数 $f\in\mathcal{H}$ が存在して、

$$\sum_{j\in I_-}\sum_{\alpha}\|\pi_j(f)\,\sqrt{-a_j}\,u_{\alpha,j}\|^2<\frac{1}{2}\|\pi_{j_0}(f)\,\sqrt{a_{j_0}}\,u_0\|^2$$

となる。従って、

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I_-}(-a_j)\,\mathrm{tr}\,\pi_j(f*f^*)&=\sum_{j\in I_-}(-a_j)\,\sum_{\alpha}\|\pi_j(f)u_{\alpha,j}\|^2\\&<\frac{1}{2}a_{j_0}\|\pi_{j_0}(f)u_0\|^2\\&<\frac{1}{2}a_{j_0}\mathrm{tr}\,\pi_{j_0}(f*f^*)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{j\in I_+}a_j\,\mathrm{tr}\,\pi_j(f*f^*)\end{aligned}$$

となり、$\sum_{j\in I}a_j\,\mathrm{tr}\,\pi_j(f*f^*)=0$ と矛盾する。よって、$I_+=\varnothing$ である。同様の論法で、$\{j\in I\,|a_j<0\}=\varnothing$ が示せる。従って、$a_j=0\,(\forall I)$ である。□

4. 局所体上の GL(2) およびその INNER FORMS の局所調和解析

この章を通して、F を標数 0 の局所体、D を F 上の四元数体とする。$G=D^\times$ または $\mathrm{GL}(2,F)$ とする。$D^\times$, $\mathrm{GL}(2,F)$ の中心はいずれも $F^\times$ に自然に同型だから区別せず Z と書く。$G=\mathrm{GL}(2,F)$ のとき、標準的な極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}$ を [31,] のように固定する。$G=D^\times$ のとき、$\mathbf{K}$ を任意に固定した極大コンパクト部分群とする。

4.1. **指標の局所可積分性.** G の任意の既約ユニタリー表現 $(\pi,\mathcal{V}_\pi)$ は $\mathbf{K}$ 許容可能であることが知られている。更に、G の正則元全体 $G-Z$ の上で定義された smooth 函数 χ_π が存在して、χ_π は G 上局所可積分函数になり

$$\mathrm{tr}\,\pi(f)=\int_G f(g)\,\chi_\pi(g)\,\mathrm{d}\mu_G(g),\qquad f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$$

であることが知られている ([15, Theorem 7.7], [14])。以降では、この函数 χ_π をも $\mathrm{tr}\,\pi$ と書くことにする。(注意：函数 χ_π は G のハール測度のとり方に依存しない。)

与えられた指標 $\omega\,:\,F^\times\,\to\,\mathbb{C}^1$ に対して、$\mathcal{H}(G,\omega)$ を両側 $\mathbf{K}$-有限であるような函数 $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$ 全体の空間とする。

4.2. **主系列表現.** $G=\mathrm{GL}(2,F)$ としよう。$\mu_1,\mu_2:F^\times\to\mathbb{C}^\times$ を擬指標とすると、$\mu=(\mu_1,\mu_2)$ は自然に分裂トーラス M の擬指標と見做せる。G 上の smooth 函数 $\varphi:G\to\mathbb{C}$ で

$$\varphi\left(\left[\begin{smallmatrix}a_1 & x\\ 0 & a_2\end{smallmatrix}\right]g\right)=\mu_1(a_1)\,\mu_2(a_2)\,\left|\frac{a_1}{a_2}\right|_F^{1/2}\varphi(g),\qquad (a_1,a_2\in F^\times,\ x\in F,\ g\in G)$$

を満たすもの全体の空間 $\mathbf{H}^0(\mu)$ に群 G を右移動で作用させることで G の smooth 許容表現 $\pi(\mu)$ が定義される。この表現は μ がユニタリー指標ならば内積

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_{\mathbf{K}}=\int_{\mathbf{K}}f_1(k)\,\overline{f_2(k)}\,\mathrm{d}k \tag{4.1}$$

によってユニタリー化可能であることが分かる。函数としての指標 $\mathrm{tr}\,\pi(\mu):G-Z\to\mathbb{C}$ は次のように求めることが出来る。

補題 32. $g\in G-Z$ が $a=\left[\begin{smallmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{smallmatrix}\right]\in\mathcal{H}_G$ に共役ならば

$$[\mathrm{tr}\pi(\mu)](g)=D_M(a)^{-1/2}\{\mu_1(a_1)\,\mu_2(a_2)+\mu_1(a_2)\,\mu_1(a_2)\}$$

ただし、$D_M(a)=|a_1-a_2|_F^2\,|a_1a_2|_F^{-1}$ である。$g\in G-Z$ が $\mathcal{H}_G$ の要素に共役でなければ $[\mathrm{tr}\,\pi(\mu_1,\mu_2)]\,(g)=0$ である。

Proof : (*cf.* [15, Proposition 7.6]) $\omega=\mu_1\mu_2$ が $\pi(\mu)$ の中心指標になる。任意の $\varphi,\,\varphi'\in\mathbf{H}^0(\mu)$ および $f\in C_c^\infty(G,\omega)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\langle[\pi(\mu)(f)]\varphi,\varphi'\rangle_{\mathbf{K}}&=\int_{Z\backslash G}f(g)\,\langle\pi(\mu_1,\mu_2)\varphi,\varphi'\rangle_{\mathbf{K}}\,\mathrm{d}g\\
&=\int_{Z\backslash G}f(g)\left\{\int_{\mathbf{K}}\varphi(kg)\,\overline{\varphi'(k)}\,\mathrm{d}k\right\}\mathrm{d}g\\
&=\int_{Z\backslash G}\int_{\mathbf{K}}f(k^{-1}g)\,\varphi(g)\overline{\varphi'(k)}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}g\\
&=\int_{n\in N}\int_{m\in Z\backslash M}\int_{k_1\in\mathbf{K}}\int_{k\in\mathbf{K}}f(k^{-1}nmk_1)\,\varphi(nmk_1)\,\overline{\varphi'(k)}\,\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k\\
&=\int_{\mathbf{K}\times\mathbf{K}}K_f(k,k_1)\,\varphi(k_1)\,\overline{\varphi'(k)}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k_1
\end{aligned}$$

ただし、

$$K_f(k,k_1)=\int_N\int_{Z\backslash M}f(k^{-1}nmk_1)\mu(m)\delta_P(m)^{-1/2}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}n$$

$\mathbf{K}$ への制限写像 $\mathbf{H}^0(\mu)\to\mathbf{H}^0(\mu)|\mathbf{K}$ は線型同型であり、この同型のもとで、作用素 $\pi(\mu):\mathbf{H}^0(\mu)|\mathbf{K}\to\mathbf{H}^0(\mu)|\mathbf{K}$ は核函数 K_f によって表される。よって、

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,[\pi(\mu)f]&=\int_{\mathbf{K}}K_f(k,k)\,\mathrm{d}k\\
&=\int_{N\times Z\backslash M\times\mathbf{K}}f(knmk)\,\mu(m)\,\delta_P(m)^{-1/2}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k
\end{aligned}$$

最後の式の $N\times\mathbf{K}$ 上の積分は $m\in M-Z$ の軌道積分でかける。実際、

$$\begin{aligned}
\Phi(m,f)&=\int_{M\backslash G}f(g^{-1}mg)\,g)\,\mathrm{d}\dot{g}\\
&=\int_{N\times\mathbf{K}}f(k^{-1}n^{-1}mnk)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k\\
&=|\det(\mathrm{Ad}(m)-1)_{\mathfrak{n}}|_F^{-1}\int_{N\times\mathbf{K}}f(k^{-1}n'mk)\,\mathrm{d}n'\,\mathrm{d}k
\end{aligned}$$

最後の等号を得るためには、変数変換 $n' = n^{-1}mnm^{-1}$ を行い、$\mathrm{d}n' = |\det(\mathrm{Ad}(m)-1)_{\mathfrak{n}}|_F\,\mathrm{d}n$ であることを使った。(行列表示で簡単に分かる。) $|\det(\mathrm{Ad}(m)-1)_{\mathfrak{n}}|_F = D_M(m)^{1/2}\,\delta_P(m)^{1/2}$ なので、結局、

$$\mathrm{tr}\,[\pi(\mu)f] = \int_{Z\backslash M} \mu(m)\,D_M(m)^{-1/2}\,\Phi(m,f)\,\mathrm{d}m$$

が得られた。$\theta(g)$ を $m \in M-Z$ に共役な g に対しては $D_M(m)^{-1/2}(\mu(m)+\mu({}^w m))$ とおき、$M-Z$ に共役でない g に対しては零で定義すると、Weyl 積分公式から

$$\int_{Z\backslash G} \theta(g)\,f(g)\,\mathrm{d}g = \frac{1}{2}\int_{Z\backslash M_{\mathrm{reg}}} \theta(m)\,\Phi(m,f)\,D_M(m)\,\mathrm{d}m = \int_{Z\backslash M_{\mathrm{reg}}} \mu(m)\,D_M(m)^{-1/2}\,\Phi(m,f)\,\mathrm{d}m$$

よって、$\chi_{\pi(\mu)}(g) = \theta(g)$ $(g \in G-Z)$ が示せた。$\square$

注意：主系列表現の distribution 指標が $G-Z$ 上では smooth 函数で表されることは、補題 32 から分かる。

4.3. **離散系列表現.** $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ を中心指標 ω の既約ユニタリー表現、V_π を $\mathcal{V}_\pi$ の $\mathbf{K}$-有限ベクトル全体の空間とする。

$v, u \in V_\pi$ に対して、函数

$$\phi^\pi_{u,v}(g) = \langle\, u \,|\, \pi(g)v \,\rangle, \qquad g \in G$$

を行列係数と呼ぶ。$\phi^\pi_{u,v}(zg) = \omega(z)^{-1}\,\phi^\pi_{u,v}(g)$ $(z \in Z)$ であることに注意しよう。

可測函数 $\phi : G \to \mathbb{C}$ で、$\phi(zg) = \omega(z)^{-1}\,\phi(g)$ $(z \in Z)$ かつ $\displaystyle\int_{Z\backslash G} |\phi(g)|^2\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g) < +\infty$ なるもの全体の空間を $L^2(G,\omega)$ と定義する。

定義 33. $\phi^\pi_{v,v} \in L^2(G,\omega)$ となるような $v \in V_\pi - \{0\}$ が存在するとき、$(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ を 2 乗可積分表現（離散系列表現）と呼ぶ。$\Pi_2(G,\omega)$ を中心指標 ω を持つ離散系列表現のユニタリー同値類の集合（或いはその完全代表系）とする。

補題 34. $\pi \in \Pi_2(G,\omega)$ とすると、ある正の定数 $d(\pi)$ が存在して

$$\int_{Z\backslash G} \phi^\pi_{u_1,v_1}(g)\,\overline{\phi^\pi_{u_2,v_2}(g)}\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g) = d(\pi)^{-1}\langle\, u_1 \,|\, u_2 \,\rangle\,\overline{\langle\, v_1 \,|\, v_2 \,\rangle}, \qquad u_1, u_2, v_1, v_2 \in V_\pi$$

を満たす。($d(\pi)$ を π の形式次数 (formal degree) とよぶ。) $\sigma \in \Pi_2(G,\omega)$ が π と同値でなければ、

$$\int_{Z\backslash G} \phi^\pi_{u_1,v_1}(g)\,\overline{\phi^\sigma_{u_2,v_2}(g)}\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g) = 0, \qquad u_1,\, v_1 \in \mathcal{V}_\pi,\ u_2,\, v_2 \in \mathcal{V}_\sigma$$

である。

Proof: F が非アルキメデス的のときは、[4, 10a.2 (p.74–75)] を参照。$\square$

注意：形式次数は群 $Z\backslash G$ の Haar 測度のとり方に依存する。$\square$

我々の目的のために必要となる、離散系列表現の「粗い」分類を復習しよう。$G = D^\times$ の場合、$Z\backslash D^\times$ はコンパクトだから任意の既約表現は有限次元であり、行列係数は当然 2 乗可積分になる。故に、任意の既約ユニタリー表現は離散系列表現である。$G = \mathrm{GL}(2,F)$ の場合、F が非アルキメデス的かそうでないかで分けて述べよう。

(1) F が非アルキメデス的の場合。離散系列表現は次の 2 種類からなる：

- **超尖点表現**：既約 smooth 表現 π は、その任意の行列係数 $\phi^\pi_{u,v}$ が $C^\infty_{\mathrm{c}}(G,\omega)$ (ω は π の中心指標）に属するとき超尖点的と定義される。([4, Chap 3 §10])

- **Steinberg 表現の捻り**: 射影直線 $\mathbb{P}^1_F$ に一次分数変換で G を作用させることで函数空間 $C^\infty(\mathbb{P}^1)$ は G の smooth 表現になる。定数函数の生成する 1 次元部分加群によるの商表現 $C^\infty(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C}$ を Steinberg 表現とよび、St_G とかく。ユニタリー指標 $\eta: F^\times \to \mathbb{C}^1$ に対して、$\eta\circ\det$ を G の 1 次元表現と見做して、$\mathrm{St}_G(\eta)=\mathrm{St}_G\otimes[\eta\circ\det]$ と定義する。$\mathrm{St}(\eta)$ の中心指標は η^2 である。G-空間としての同型 $\mathbb{P}^1 = P\backslash G$ によって、G-加群の同型 $C^\infty(\mathbb{P}^1)\cong \mathbf{H}^0(|\,|_F^{-1/2},|\,|_F^{1/2})$ が得られる。$\pi(\mu)$ の組成列の記述 ([18, 2.3.3], [4, Chap 3 §9]) より、$\mathbf{H}^0(|\,|_F^{-1/2},|\,|_F^{1/2})$ は自明表現 $\mathbb{C}$ を唯ひとつの部分加群に持ち、その商は既約であることが分かる。よって、$\mathrm{St}_G(\eta)$ を G 加群の完全列

$$0\longrightarrow \eta\circ\det \longrightarrow \pi(\eta|\,|_F^{-1/2},\eta|\,|_F^{1/2})\longrightarrow \mathrm{St}_G(\eta)\longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

で定義してもよい。$\mathrm{St}_G(\eta)$ が離散系列表現であることは行列係数の分裂トーラス M に沿った増大度を漸近的に評価することで示せる ([15, Lemma 15.2 (p.472)], [6, §8], [4, Theorem 17.5(p.118)])

既約 smooth 表現の分類表 ([18, 定理 2.11]) のなかで、上に挙げた 2 系列の表現以外（既約主系列表現あるいは 1 次元指標）が 2 乗可積分でないことは、例えば、2 乗可積分性の判定条件 ([6, Theorem 4.4.6]) により、あるいは、直接行列係数の漸近的大きさを評価して ([4, Proposition 17.10(p.121)]) もチェックできる。

(2) $F=\mathbb{R}$ の場合。$l_1-l_2\in\mathbb{N}$ を満たす $(l_1,l_2)\in\mathbb{C}^2$ に対して、$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の有限次元表現 $\det^{l_2}\otimes\mathrm{Sym}_{l_1-l_2}$ を $\rho^{\mathbb{C}}_{l_1,l_2}$ とする。ただし、Sym_k は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^2$ における自然な表現の k 次対称積表現である。$\rho_{l_1,l_2}=\rho^{\mathbb{C}}_{l_1,l_2}|\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ により $G=\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の有限次元表現を定義する。さて、主系列表現 $\pi(\mu_1,\mu_2)$ を考えよう。その $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$-有限ベクトル全体を表現空間とする $(\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}),\mathrm{O}(2,\mathbb{R}))$-加群を $\pi^0(\mu_1,\mu_2)$ とする。$\mu_1(t)=|t|_{\mathbb{R}}^{l_1}\mathrm{sgn}(t)^{\epsilon_1}(t)$, $\mu_2(t)=|t|_{\mathbb{R}}^{l_2}\mathrm{sgn}(t)^{\epsilon_2}(t)$ $(l_1,l_2\in\mathbb{C},\,\epsilon_1,\epsilon_2\in\{0,1\})$ と書ける。条件

$$l_1-l_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1},\qquad \epsilon_1+\epsilon_2\equiv l_1-l_2+1 \pmod 2 \tag{4.3}$$

のもとで、$(\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}),\mathrm{O}(2,\mathbb{R}))$-加群 $\pi^0(\mu_1,\mu_2)$ は ρ_{l_1,l_2} を唯ひとつの既約商にもち、$\sigma(l_1,l_2)=\mathrm{Ker}(\pi(\mu_1,\mu_2)\to\rho_{l_1,l_2})$ は既約表現である:

$$0\longrightarrow \sigma^0(l_1,l_2)\longrightarrow \pi^0(\mu_1,\mu_2)\longrightarrow \rho_{l_1,l_2}\longrightarrow 0 \tag{4.4}$$

$\sigma^0(l_1,l_2)$ を適切な内積で完備化することで、ユニタリー表現 $\sigma(l_1,l_2)$ が得られ、これは離散系列表現であることが知られている。更に、$\omega(t)=|t|_{\mathbb{R}}^m\,\mathrm{sgn}^\epsilon(t)$ のとき、

$$\Pi_2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}),\omega)=\{\sigma(l_1,l_2)|\,l_1-l_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1},\,l_1+l_2=m,\,l_1-l_2+1\equiv\epsilon \pmod 2\}$$

であることも知られている。

(3) $F=\mathbb{C}$ の場合。離散系列表現は存在しない。

4.3.1. 離散系列表現の性質 *(*非アルキメデス素点の場合*)*. 離散系列表現、特に Steinberg 表現の行列係数の必要な性質を復習する。([23], [4] を参照。)

この小節では F を非アルキメデス的, $G=\mathrm{GL}(2,F)$ とする。$\mathbf{K}$ の開部分群 $\mathbf{I}=\{\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]\in\mathbf{K}|\,c\in\varpi_F\mathfrak{o}_F\}$ を岩堀部分群とよぶ。容易に $\mathbf{K}=\mathbf{I}\cup\mathbf{I}w\mathbf{I}$ (ただし、$w=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$) であることが分かる。よって、$\mu_G(\mathbf{K})=\mu_G(\mathbf{I})\,\{1+\sharp(\mathbf{I}/\mathbf{I}\cap w\mathbf{I}w^{-1})\}=\mu_G(\mathbf{I})\,(1+q)$ となる。これと、補題 12 の証明から

$$\mu_G(\mathbf{I})=q_F^{-2}(q_F-1)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^4 \tag{4.5}$$

となる。

補題 35. $\Pi=\left[\begin{smallmatrix}0&1\\\varpi_F&0\end{smallmatrix}\right]$ とし、$\epsilon\in\{0,1\}$, $a\in\mathbb{Z}$ に対して、

$$w_{\epsilon,a}=\Pi^\epsilon\begin{bmatrix}\varpi_F^a&0\\0&\varpi_F^{-a}\end{bmatrix},\qquad w'_{\epsilon,a}=\Pi^\epsilon\begin{bmatrix}0&\varpi_F^a\\\varpi_F^{-a}&0\end{bmatrix},$$

とおく。すると、$W=\{w_{\epsilon,a},\, w'_{\epsilon,a} | \epsilon\in\{0,1\},\, a\in\mathbb{Z}\}$ は $Z\mathbf{I}\backslash G/\mathbf{I}$ の完全代表系を与える。更に、

$$\mu_G(\mathbf{I}w_{\epsilon,a}\mathbf{I})=\mu_G(\mathbf{I}w_{\epsilon,-a}\mathbf{I})=q^{-2a}\,\mu_G(\mathbf{I}),$$
$$\mu_G(\mathbf{I}w'_{\epsilon,a}\mathbf{I})=\mu_G(\mathbf{I}w'_{\epsilon,-a-1}\mathbf{I})=q^{-(2a+1)}\,\mu_G(\mathbf{I})$$

となる。

Proof : [4, 17.1 Proposition (p.115), 17.8 Lemma1 (p.119)] □

補題 36. 任意の指標 $\eta:F^\times\to\mathbb{C}^1$ に対して *Steinberg* 表現の捻り $\mathrm{St}(\eta)$ の形式次数は次のように与えられる：

$$d(\mathrm{St}(\eta))^{-1}=2q_F^{-2}(q_F+1)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_F)^4=\mathrm{vol}(F_v^\times\backslash D^\times)$$

Proof : $\mathrm{St}(\eta)=\mathrm{St}\otimes\eta(\det)$ により $d(\mathrm{St}(\eta))=d(\mathrm{St})$ である。[4, 17.6] のように St のある単位ベクトル τ,θ に対する行列係数 $f=\phi_{\tau,\theta}$ を考える。測度の正規化の違いに注意して [4, 17.9 (p.120)] および補題 35 を使うと、

$$\mu_G(\mathbf{I})^{-1}\int_{Z\backslash G}|f(g)|^2\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g)=\sum_{w\in W}\mu_G(\mathbf{I})\,\mu_G(\mathbf{I}w\mathbf{I})^{-1}=2\{\sum_{b=1}^{\infty}q_F^{-b}+1\}=2\frac{q_F+1}{q_F-1}$$

となり、$d(\mathrm{St})^{-1}=2(q_F+1)(q_F-1)^{-1}\,\mu_G(\mathbf{I})$ を得る。これと (4.5), 補題 13 より結論が従う。□

補題 37. $\pi=\mathrm{St}(\eta)$ を Steinberg 表現の $\eta:F^\times\to\mathbb{C}^1$ による捻りとする。その指標は正則楕円元上で

$$[\mathrm{tr}\,\pi](t)=-\eta(\det t),\qquad t\in G_{\mathrm{ell}}-Z$$

となる。また、

$$[\mathrm{tr}\,\pi]\,(a)=\eta(a_1a_2)\left(\frac{|a_1|_F+|a_2|_F}{|a_1-a_2|_F}-1\right),\qquad a=\left[\begin{smallmatrix}a_1&0\\0&a_2\end{smallmatrix}\right]\in M-Z$$

Proof : 一般に長さ有限の smooth 表現の短完全列 $0\to\pi_1\to\pi_2\to\pi_3\to0$ に対して、$\mathrm{tr}\,\pi_2=\mathrm{tr}\,\pi_1+\mathrm{tr}\,\pi_3$ が成り立ち、従って G_{reg} 上で $\mathrm{tr}\,\pi_2=\mathrm{tr}\,\pi_1+\mathrm{tr}\,\pi_3$ である。これを短完全列 (4.2) に適用すると、

$$[\mathrm{tr}\,\pi(|\,|_F^{-1/2}\eta,|\,|_F^{1/2}\eta)](t)=[\mathrm{tr}\,\mathrm{St}(\eta)](t)+[\mathrm{tr}\,\eta\circ\det](t),\qquad t\in G_{\mathrm{reg}}$$

を得る。命題 32 と $[\mathrm{tr}\,\eta\circ\det](t)=\eta(\det t)$ であることから結論が従う。□

主系列表現 $\pi_0=\pi(1_{F^\times},1_{F^\times})$ ($1_{F^\times}$ は $F^\times$ の自明指標) は $f_0(k)=1\,(\forall k\in\mathbf{K})$ となる $\mathbf{K}$-不変ベクトル f_0 を唯ひとつ含む。内積 (4.1) により、行列要素 $\Xi=\phi^{\pi_0}_{f_0,f_0}$ を考えると、

$$\Xi(g)=\int_{\mathbf{K}}\delta_P(kg)^{1/2}\,\mathrm{d}k,\qquad g\in G$$

となる。明らかに $\Xi(zk'gk)=\Xi(g)$ $(\forall(z,g,k,k')\in Z\times G\times\mathbf{K}\times\mathbf{K})$ であるから、Cartan 分解 $G=\bigcup_{a\in\mathbb{N}}Z\mathbf{K}\left[\begin{smallmatrix}\varpi_F^a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\mathbf{K}$ によれば、次の補題は Ξ の明示公式を与える：

補題 38.

$$\Xi\left(\left[\begin{smallmatrix}\varpi_F^a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\right)=q_F^{-a/2}\left(1+\frac{q_F-1}{q_F+1}\,a\right),\qquad a\in\mathbb{N}$$

Proof : $T(\mathfrak{p})$ を両側剰余類 $\mathbf{K}\left[\begin{smallmatrix}\varpi_F&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\mathbf{K}$ の特性函数とすると、$\pi_0(T(\mathfrak{p}))f_0=2q_F^{1/2}\,f_0$ なので $\Xi*T(\mathfrak{p})=2q_F^{1/2}\,\Xi$ が成り立つ。この方程式から $a_m=\Xi(\left[\begin{smallmatrix}\varpi_F^m&0\\0&1\end{smallmatrix}\right])$ の漸化式を導き解けばよい。*cf.* [5, Exsercise 4.6.2 (p.511)] □

補題 39. ϕ を $\mathrm{St}(\eta)$ の任意の行列係数とすると次が成り立つ。

(1) $|\phi(g)| \ll \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})^{-1}, \qquad g \in G$
(2) 積分 $\int_N \phi(n)\,\mathrm{d}n$ は絶対収束する。

Proof: ([23, Proposition 2.2.3]) (1) St のある単位ベクトル τ, θ に対して、等式 $|\phi_{\tau,\theta}(g)| = \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})^{-1}$ が [4, 17.7 Proposition, 17.8 Lemma 2] から従う。St が既約なことから、g の函数として $\phi(g)$ は有限線型結合 $\sum_i c_i\,\phi_{\tau,\theta}(x_igy_i)$ に表せることが分かる。簡単に示せる不等式 $\mu_G(\mathbf{I}gh\mathbf{I}) \leqslant \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})\,\mu_G(\mathbf{I}h\mathbf{I})$ ([23, Lemma 2.1.2]) により、$g \mapsto \mu_G(\mathbf{I}x_igy_i\mathbf{I})$ は上下から $\mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})$ の定数倍で評価される。これらの注意から (1) が従う。
(2) 不等式 $\mu_G(\mathbf{I}gh\mathbf{I}) \leqslant \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})\,\mu_G(\mathbf{I}h\mathbf{I})$ から、ある定数 $C > 1$ が存在して評価 $\mu_G(\mathbf{I}k'gk\mathbf{I}) \leqslant C\,\mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})$ $(g \in G,\, k',\, k \in \mathbf{K})$ が成り立つ。よって、

$$
\begin{aligned}
(4.6)\qquad & \int_{a\in Z\backslash M}\int_{n\in N} |\phi(na)|\,\delta_P(a)^{-1/2}\,\mathrm{d}\mu_M(a)\,d\mu_N(n) \\
&\ll \int_{a\in Z\backslash M}\int_{n\in N} \mu_G(\mathbf{I}na\mathbf{I})^{-1}\,\delta_P(a)^{-1/2}\,\mathrm{d}\mu_M(a)\,d\mu_N(n) \\
&\leqslant C^{-1}\int_{a\in Z\backslash M}\int_{n\in N}\int_{k\in\mathbf{K}}\int_{k'\in\mathbf{K}} \mu_G(\mathbf{I}k'nak\mathbf{I})^{-1}\,\delta_P(a)^{-1/2}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k'\,\mathrm{d}\mu_M(a)\,d\mu_N(n) \\
&= C^{-1}C_0^{-1}\int_{Z\backslash G}\int_{\mathbf{K}} \mu_G(\mathbf{I}k'g\mathbf{I})^{-1}\,\delta_P^{1/2}(g)\,\mathrm{d}k'\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g) \\
&= C^{-1}C_0\int_{Z\backslash G} \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})^{-1}\,\Xi(g)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g) = C^{-1}C_0\sum_{w\in W}\Xi(w)
\end{aligned}
$$

補題 35 および補題 38 からこの最後の級数は $\sum_{b\in\mathbb{N}} q_F^{-b+\epsilon}$ $(\forall\epsilon > 0)$ で評価されるので収束する。よって、積分 (4.6) は有限になる。これより、測度零の補集合をもつ部分集合 $X \subset Z\backslash M$ が存在して、$a \in X$ のとき $\int_{n\in N} |\phi(na)|\,d\mu_N(n) < +\infty$ となる。しかし、ϕ は smooth だから、$Z\backslash M$ の開コンパクト部分群 $\mathcal{U}$ があって、$\phi(nag) = \phi(na)$ $(\forall g \in \mathcal{U})$ となる。$Z\backslash M = X\mathcal{U}$ だから、任意の $a \in Z\backslash M$ で積分 $\int_{n\in N} |\phi(na)|\,d\mu_N(n) < +\infty$ となる。□

補題 40. (Selberg principle) ϕ を離散系列表現 $\pi \in \Pi_2(\mathrm{GL}(2,F),\omega)$ の任意の行列係数とすると

$$\int_N \phi(xny)\,\mathrm{d}n = 0, \qquad x,\, y \in G$$

Proof: ([23, Proposition 2.2.5]) $\pi = \mathrm{St}(\eta)$ とする。行列係数 ϕ を定義するのに使ったベクトルをとりかえれば、$x = y = e$ として示せば十分。St の表現空間を V とする。双線型形式 J が

$$J(\xi,\xi') = \int_N \langle\,\mathrm{St}(n)\xi\,|\,\xi'\,\rangle \mathrm{d}n, \qquad \xi,\, \xi' \in V$$

で定義される。(補題 39 から積分は絶対収束する。) $V(N)$ を $\mathrm{St}(n)\xi - \xi$ $(n \in N, \xi \in V)$ の形のベクトルの有限和全体とすると、Jacquet 加群 $V/V(N)$ は M の表現として δ_P^{-1} と同型 ([4, (9.10.3) 直後 (p.68)])。故に、あるベクトル $u_1 \in V$ が存在して $V = \mathbb{C}u_1 + V(N)$, $\mathrm{St}(a)u_1 - \delta_P(a)^{-1}u_1 \in V(N)$ となる。$\xi \in V(N)$ または $\xi' \in V(N)$ ならば、$J(\xi,\xi') = 0$ であることは明らか。よって、$J(u_1,u_1) = 0$ をしめせば、$J = 0$ となって証明が終わる。$a \in M - Z$ に対して、内積の不変性と変数変換によって $J(\mathrm{St}(a)\,u_1,u_1) = \delta_P(a)\,J(u_1,\mathrm{St}(a^{-1})\,u_1)$ が分かる。これと、$\mathrm{St}(a)u_1 - \delta_P^{-1}(a)u_1 \in V(N)$ より、$J(u_1,u_1) = \delta_P^3(a)\,J(u_1,u_1)$ が得られる。従って、$J(u_1,u_1) = 0$ である。π が超尖点的な場合には、$V = V(N)$ であるから、上の証明をなぞればよい。□

補題 41. ϕ を離散系列表現 $\pi \in \Pi_2(\mathrm{GL}(2,F),\omega)$ の任意の行列係数とすると、任意の $a \in M-Z$ に対して軌道積分 $\Phi(a,\phi)$ は絶対収束して零に等しい。更に、

$$\int_{Z\backslash G_{\mathrm{ell}}} |\phi(g)|\,\mathrm{d}\mu_G(g) < +\infty$$

Proof : ([23, Lemma 3.1.1]) 補題 32 の証明から

$$\Phi(m,|\phi|) = |\det(\mathrm{Ad}(m)-1)_{\mathfrak{n}}|_F^{-1} \int_{N\times\mathbf{K}} |\phi(k^{-1}nmk)|\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k \tag{4.7}$$

となる。$\phi=\phi^{\pi}_{u,v}$ とすると、ある開コンパクト部分群 $K\subset\mathbf{K}$ に対して、u,v は K-不変になる。このことから、$\mathbf{K}$ に関する積分は $\int_N |\phi(k_i^{-1}nmk_i)|\,\mathrm{d}n$ なる形の積分の有限和に帰着されることが分かる。$g\mapsto\phi(k_i^{-1}gmk_i)$ は π の行列係数なので補題 39 から軌道積分の絶対収束性が従い、補題 42 からその消滅が従う。(注：π が超尖点的表現のとき、軌道積分の収束は補題 15 による。)

後半部の主張は、超尖点表現にたいしては自明なので、以下 $\pi=\mathrm{St}(\eta)$ とする。補題 39(1) から $\int_{Z\backslash G_\ell} \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})^{-1}\,\mathrm{d}\mu_G(g) < +\infty$ を示せば十分である。G_n を $|a|\leqslant n$ を満たす両側剰余類 $\mathbf{I}w_{\epsilon,a}\mathbf{I}$, $\mathbf{I}w'_{\epsilon,a}\mathbf{I}$ の合併集合として、χ_{G_n} をその特性函数とする。$\varphi(g)=\mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})$, $\varphi_n(g)=\chi_{G_n}(g)\,\varphi(g)$ とおくと、$\varphi_n(g)$ はコンパクト台を持つ正の単調増加函数列で G の各点で $\varphi(g)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(g)$ となる。積分論の単調収束定理から、極限 $\lim_{n\to\infty}\int_{Z\backslash G_{\mathrm{ell}}}\varphi_n(g)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g)$ が存在することを言えば十分。さて、G_{ell} 上で $[\mathrm{trSt}](t)=-1$ (補題 37) に注意すると、$-\int_{Z\backslash G_{\mathrm{ell}}}\varphi_n(g)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g)$ は次の 2 つの積分の差 $I_1(n)-I_2(n)$ になる：

$$I_1(n)=\int_{Z\backslash M^G}[\mathrm{tr\,St}](g)\,\varphi_n(g)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g),\qquad I_2(n)=\int_{Z\backslash G}[\mathrm{tr\,St}](g)\,\varphi_n(g)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g)$$

$\mathrm{St}^{\mathbf{I}}$ は有限次元（実は 1 次元）なので、有限基底 $\{\xi_i\}$ がとれる。φ_n は両側 $\mathbf{I}$-不変だから

$$I_2(n)=\sum_i\int_{Z\backslash G}\overline{\phi_{\xi_i,\xi_i}(g)}\,\varphi_n(g)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g)$$

となる。ϕ_{ξ_i,ξ_i} は St の行列係数である。補題 39 の証明の中で注意したとおり $\varphi(g)=|\phi_{\tau,\theta}(g)|$ だから、非積分函数 $\overline{\phi_{\xi_i,\xi_i}(g)}\,\varphi_n(g)$ は上から $\beta(g)=|\phi_{\xi_i,\xi_i}(g)|\,|\phi_{\tau,\theta}(g)|$ で押さえられる。$\mathrm{St}\in\Pi_2(G,1)$ なので、β は可積分函数である。よって、優収束定理から $\lim_{n\to\infty}I_2(n)$ は収束する。$I_1(n)$ の方は、Weyl 積分公式から

$$I_1(n)=\frac{1}{2}\int_{Z\backslash M_{\mathrm{reg}}} D_M(a)\,[\mathrm{tr\,St}](a)\,\Phi(a,\varphi_n)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash M}(a)$$

である。補題 37 から、ある定数 $C'>0$ が存在して、$0<D_M(a)^{1/2}\,[\mathrm{trSt}](a)<C'$ ($\forall a\in M_{\mathrm{reg}}$) 上となる。特に、$I_1(n)$ は正の数からなる増加数列になり、積分

$$\frac{C'}{2}\int_{Z\backslash M_{\mathrm{reg}}} D_M(a)^{1/2}\,\Phi(a,\varphi)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash M}(a)$$

で上から押さえられる。この積分は、(4.7) によって書き直すと、

$$\int_{Z\backslash M_{\mathrm{reg}}}\delta_P(a)^{-1/2}|\varphi(na)|\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash M}(a)$$

の定数倍で上から評価される。これは (4.6) より有限である。□

補題 42. ϕ を離散系列表現 $\pi\in\Pi_2(\mathrm{GL}(2,F),\omega)$ の任意の行列係数とすると、任意の $T\in\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$, $t\in T_{\mathrm{reg}}$ に対して軌道積分 $\Phi(t,\phi)$ は絶対収束する。

4.3.2. 離散系列の擬行列係数.

命題 43. F は非アルキメデス的、$\pi \in \Pi_2(G,\omega)$ とする。$v,u \in V_\pi$ に対する行列係数 $\phi = \phi_{u,v}$ は次の性質を満たす。

(1) $T \in \mathcal{T}_G$ とするとき、軌道積分 $\Phi(t,\phi)$ は $t \in T_{\mathrm{reg}}$ について局所一様に絶対収束して、

$$\Phi(t,\phi) = \begin{cases} 0 & (T \notin \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}), \\ \dfrac{\phi(1)}{d(\pi)}\,\overline{[\mathrm{tr}\,\pi](t)} & (T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}) \end{cases}$$

となる。

(2) 任意の $\sigma \in \Pi_2(G,\omega)$ に対して、有界線型作用素 $\sigma(\phi) : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{V}_\sigma$ で

$$\langle \sigma(\phi)u' \,|\, v' \rangle = \int_{Z\backslash G} \langle\, \sigma(g)u' \,|\, v' \rangle\, \phi(g)\, \mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g), \quad u', v' \in \mathcal{V}_\sigma$$

なるものが定義される。この作用素は有限階数で、そのトレースは

$$\mathrm{tr}[\sigma(\phi)] = \begin{cases} 0 & (\sigma \ncong \pi) \\ \dfrac{1}{d(\pi)}\,\phi(1) & (\sigma \cong \pi) \end{cases}$$

で与えられる。

Proof : (1) ([8, Proposition A.3.e (p.53)]) $G = \mathrm{GL}(2,F)$, $m \in M$ のとき、補題 41 から $\Phi(m,f) = 0$ である。$T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ としよう。$f \in \mathcal{H}(G,\omega)$ を任意にとる。f は左右から $\mathbf{K}$-有限だから、$\mathbf{K}$ の有限次元表現 τ が存在して $\mathrm{Im}\pi(f) \subset \mathcal{V}_\pi[\tau]$ となる。有限次元空間 $\mathcal{V}_\pi[\tau]$ の正規直交基底 $\{\xi_i\}$ を固定すると、

$$\begin{aligned}
(4.8)\qquad & \int_{Z\backslash G} \{ \int_G \bar{f}(g)\, \phi(x^{-1}gx)\, \mathrm{d}\mu_G(g) \}\, \mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(x) \\
&= \int_{Z\backslash G} \langle\, \pi(x)u \,|\pi(f)\, \pi(x)v\, \rangle\, \mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(x) \\
&= \int_{Z\backslash G} \sum_{ij} \langle\, \pi(x)u \,|\, \xi_i \,\rangle \langle\, \xi_i \,|\, \pi(f)\, \xi_j \rangle \langle\, \xi_j \,|\, \pi(x)v\, \rangle \mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(x) \\
&= \sum_{ij} \langle\, \xi_i \,|\, \pi(f)\, \xi_j \rangle \int_{Z\backslash G} \langle\, \pi(x)u \,|\, \xi_i \,\rangle \langle\, \xi_j \,|\, \pi(x)v\, \rangle \mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(x) \\
&= \sum_{ij} \langle\, \xi_i \,|\, \pi(f)\, \xi_j \rangle \frac{1}{d(\pi)} \langle\, u \,|\, v\, \rangle\, \overline{\langle\, \xi_i \,|\, \xi_j \,\rangle} \qquad (\because \text{補題 } 34) \\
&= \frac{1}{d(\pi)} \sum_i \langle\, \xi_i \,|\, \pi(f)\, \xi_i \rangle = \frac{1}{d(\pi)}\, \overline{\mathrm{tr}\,\pi(f)}
\end{aligned}$$

$\mathrm{supp}(f) \subset G_{\mathrm{ell}} - Z$ ならば、(4.8) の最初の累次積分の順序交換が可能であることが分かる。実際、任意の $T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ に対して、$\mathrm{supp}(f) \cap T^G$ はコンパクトなので、$\eta_T(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$ なる形のコンパクト集合に含まれる (補題 16)。ただし、$\mathcal{U}_1 \subset T\backslash G, \mathcal{U}_2 \subset T - Z$ はいずれもコンパクトである。Weyl の積分公式 (補題 17) から

$$\begin{aligned}
& \int_{Z\backslash G} \{ \int_{T^G - Z} |f(g)|\, |\phi(x^{-1}gx)|\, \mathrm{d}\mu_G(g) \}\, \mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(x) \\
&\ll \int_{x \in Z\backslash G} \{ \int_{t \in \mathcal{U}_2} D_T(t) \int_{g \in \mathcal{U}_1} |\phi(x^{-1}g^{-1}tgx)|\, \mathrm{d}\mu_{T\backslash G}(g)\, \mathrm{d}\mu_T(t) \,\} \mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(x) \\
&= \mathrm{vol}(Z\backslash T)\, \mathrm{vol}(\mathcal{U}_1) \int_{t \in \mathcal{U}_2} D_T(t)\, \{ \int_{T\backslash G} |\phi(x^{-1}tx)|\, \mathrm{d}\mu_{T\backslash G}(x) \}\, \mathrm{d}\mu_T(t)
\end{aligned}$$

最後の積分は補題 41 の 2 番目の主張から有限である。故に、積分順序交換により、$G_{\mathrm{ell}} - Z$ に台を持つ任意の函数 $f \in C_c^\infty(G)$ に対して

$$\int_G \bar{f}(g)\,\{\int_{Z\backslash G} \phi(x^{-1}gx)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(x)\}\,\mathrm{d}\mu_G(g) = \frac{1}{d(\pi)}\,\overline{\mathrm{tr}\,\pi(f)}$$

が得られた。$\mathrm{vol}(Z\backslash T) = 1$ に注意すれば、これは $\Phi(t,\phi) = d(\pi)^{-1}\,\overline{\mathrm{tr}\,\pi(t)}$ $(\forall\, t \in G_{\mathrm{ell}} - Z)$ を示している。

(2) ([8, Proposition A.3.g (p.57)]) Cauchy-Schwarz 不等式と補題 34 から

$$\int_{Z\backslash G} |\langle\, \sigma(g)u' \,|\, v' \rangle|\,|\phi(g)|\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g \leqslant \frac{1}{d(\sigma)} \|v'\|\,\|u'\|\,\|\phi\|_{L^2(G,\omega)}$$

となる。これより有界作用素 $\sigma(\phi) : \mathcal{V}_\sigma \to \mathcal{V}_\sigma$ が定義可能なことが分かる。$u, v \in V_\pi[\tau]$ となる $\mathbf{K}$ の有限次元表現 τ を選ぶと、$\sigma(\phi)\mathcal{V}_\sigma \subset \mathcal{V}_\sigma[\tau]$ となるが、σ の許容可能性から $\mathcal{V}_\sigma[\tau]$ は有限次元である。故に、$\sigma(\phi)$ は階数有限の作用素である。$\{\xi_i\}$ を $\mathcal{V}_\sigma[\tau]$ の正規直交基底とすると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\sigma(\phi) &= \sum_i \int_{Z\backslash G} \langle\, \sigma(g)\xi_i \,|\, \xi_i \rangle\, \phi(g)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g) \\
&= \sum_i \int_{Z\backslash G} \overline{\phi^\sigma_{\xi_i,\xi_i}(g)}\, \phi^\pi_{u,v}(g)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash G}(g) \\
&= \delta_{\sigma,\pi} \sum_i \frac{1}{d(\pi)} \langle u|\xi_i\rangle\, \langle \xi_i|v\rangle \qquad (\because \text{補題 } 34) \\
&= \frac{1}{d(\pi)}\langle u|v\rangle = \frac{\phi(1)}{d(\pi)}
\end{aligned}$$

□

命題 44. $\pi \in \Pi^2(G,\omega)$ とする。このとき次の条件を満たす函数 $f_\pi \in \mathcal{H}(G,\omega)$ が存在する。

(1) $\sigma \in \Pi^2(G,\omega)$ に対して、

$$\mathrm{tr}\,\sigma(f_\pi) = \begin{cases} 0 & (\sigma \ncong \pi), \\ 1 & (\sigma \cong \pi) \end{cases}$$

$G = \mathrm{GL}(2,F)$ で $\sigma = \pi(\mu_1,\mu_2)$ が主系列表現ならば $\mathrm{tr}\,\sigma(f_\pi) = 0$ となる。

(2) $T \in \mathcal{T}_G$, $t \in T_{\mathrm{reg}}$ のとき

$$\Phi(t, f_\pi) = \begin{cases} 0 & (T \notin \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}), \\ \overline{\chi_\pi(t)} & (T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}} \end{cases}$$

Proof: $F = \mathbb{R}$ の場合には [21, 第 5 章] を参照せよ。($\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ で書かれているので、若干の修正が必要。)

以下では、F が非アルキメデス的と仮定する。$v \in V_\pi - \{0\}$ を一つ固定する。離散系列の分類より、π は超尖点表現かあるいは Steinberg 表現の捻りである。それぞれに応じて場合分けして考える。

- <u>π が超尖点表現の場合</u>： このとき、$f_\pi = d(\pi)\,\phi_{v,v}$ は $C_c^\infty(G,\omega)$ に属し、f_π が (1) の後半部分以外の主張を満たすことは命題 43 から従う。
- <u>π が Steinberg 表現の捻りの場合</u>：各 $E \in \mathcal{Q}(F)$ に対して

$$\varphi^E(t) = d(\pi)\,\Phi(t, \phi_{v,v}), \qquad t \in T_E$$

によって $\varphi^E : T_E \to \mathbb{C}$ を定義する。(命題 43(2) により、ここに現れる軌道積分は絶対収束する。) すると、$\{\varphi^E\}$ は命題 28 の条件を満たす。実際、(a) は φ^E を軌道積分で定義しているので自明。(b) は $\phi_{v,v}(zg) = \phi_{v,v}(g)$ $(z \in Z)$ より従う。函

数 $\varphi^E(t)$ が $\gamma=\left[\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right]\in Z$ の近傍で smooth なことを確かめる。命題 43(1) から $\varphi^E(t)=\overline{\mathrm{tr}\,\pi}(t)$ $(t\in T_E-Z)$ なので、(c) を確かめるには指標 $\mathrm{tr}\,\pi|(G_{\mathrm{ell}}-Z)$ が G_{ell} 全体に smooth に伸びればよい。補題 37 から $[\mathrm{tr}\,\pi](t)=-\eta(\det t)$ $(t\in G_{\mathrm{ell}}-Z)$ なので明らかに G_{ell} 全体で smooth である。

さて、函数族 $\{\varphi^E\}_{E\in\mathcal{Q}(F)}$ に命題 28 を適用することによって、任意の $E\in\mathcal{Q}(F)$ に対して

$$\Phi(t,f_\pi)=\varphi^E(t)=d(\pi)\,\Phi(t,\phi_{v,v}),\qquad t\in T_E-Z \tag{4.9}$$

を満足する E-型函数 $f_\pi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$ が存在する。(2) はこの関係式と命題 43(1) から自明である。任意の $\sigma\in\Pi_2(G,\omega)$ に対して、

$$\mathrm{tr}\,\sigma(f_\pi)=\sum_{T\in\mathcal{T}_G}\frac{1}{2}\int_{Z\backslash T_{\mathrm{reg}}}\chi_\sigma(t)\,\Phi(t,f_\pi)\,D_T(t)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash T}(t), \tag{4.10}$$

$$\mathrm{tr}\,\sigma(\phi_{v,v})=\sum_{T\in\mathcal{T}_G}\frac{1}{2}\int_{Z\backslash T_{\mathrm{reg}}}\chi_\sigma(t)\,\Phi(t,\phi_{v,v})\,D_T(t)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash T}(t) \tag{4.11}$$

である。命題 43(1) より $\Phi(t,\phi_{v,v})=0$ $(T\notin\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}})$ であり、f_π が E 型函数なので $\Phi(t,f_\pi)=0$ $(T\notin\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}})$ である。この注意と関係式 (4.9) をあわせれば、$d(\pi)\mathrm{tr}\,\sigma(\phi_{v,v})=\mathrm{tr}\,\sigma(f_\pi)$ が従う。よって、命題 43(2) から $\mathrm{tr}\,\sigma(f_\pi)=\delta_{\sigma,\pi}$ となり、(1) の前半部が示せた。

$G=\mathrm{GL}(2,F)$ として、(1) の後半部分を示そう。$\sigma=\pi(\mu_1,\mu_2)$ の指標公式（補題 32）から $\chi_\sigma(t)=0$ $(\forall t\in G_{\mathrm{ell}})$ である。公式 (4.10) は $\sigma=\pi(\mu_1,\mu_2)$ でも正しいが、$T\notin\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ ならば $\Phi(t,f_\pi)=0$、$T\in\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}$ ならば $\chi_\sigma(t)=0$ により、右辺はゼロになる。□

定義 45. $\pi\in\Pi_2(G,\omega)$ に対して、命題 44 の条件を満たす函数 $f_\pi\in\mathcal{H}(G,\omega)$ を擬行列係数 (pseudo matrix coefficient) と呼ぶ。□

補題 46. $G=\mathrm{GL}(2,F)$ (F：非アルキメデス的) とする。Steinberg 表現の捻り $\pi=\mathrm{St}(\eta)$ の擬行列係数 f_π に対して、$f_\pi(1)=d(\pi)$ である。

Proof: 補題 37 より、任意の $t\in T-Z$ に対して $\Phi(t,f_\pi)=\overline{[\mathrm{tr}\,\pi](t)}=-\eta(\det t)$ である。そこで $t\to 1$ を考えると、germ 展開から $\Gamma_1^T f(1)=-1$ を得る。よって、(2.6), 補題 13(2) および補題 36 から、$f(1)=-(\Gamma_1^T)^{-1}=\mathrm{vol}(Z\backslash D^\times)^{-1}=d(\pi)$ となる。□

補題 47. $G=\mathrm{GL}(2,F)$ とする。F が非アルキメデス的なとき、f を Steinberg 表現 St の擬行列要素、$F=\mathbb{R}$ のとき、f を離散系列表現 $\sigma(1/2,-1/2)$ の擬行列係数とすると、$\eta^2=1$ なる任意のユニタリー指標 $\eta:F^\times\to\mathbb{C}^1$ に対して、

$$[\mathrm{tr}\,(\eta\circ\det)](f_{\mathrm{St}})=-\delta_{\eta,1}$$

である。

Proof: F が非アルキメデス的な場合、完全系列 (4.2) より

$$[\mathrm{tr}(\eta\circ\det)](f_{\mathrm{St}})=[\mathrm{tr}\,\pi(\eta|\,|_F^{-1/2},\eta|\,|_F^{1/2})](f_{\mathrm{St}})-[\mathrm{tr}\,\mathrm{St}(\eta)](f_{\mathrm{St}})$$

命題 44 より右辺の値は確定する。$F=\mathbb{R}$ の場合も、完全系列 (4.4) を用いれば同様。□

4.3.3. 指標の直交関係. (*cf.* [8, A.3]) F を標数 0 の非アルキメデス的局所体とする。補題 11(1) より $\mathcal{Q}_D(F)=\mathcal{Q}_{\mathrm{M}(2,F)}(F)=\mathcal{Q}(F)$ であることに注意しよう。集合 $\mathcal{E}_G-Z$ は T_E^G-Z $(E\in\mathcal{Q}(F))$ の互いに素な合併集合になり自然に F-多様体である。$C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathcal{E}_G-Z,\omega)$ をこの空間上の smooth 函数 $\varphi:\mathcal{E}_G-Z\to\mathbb{C}$ で $\varphi(zt)=\omega(z)^{-1}\varphi(t)$ $(z\in Z)$ を満たすもの全体のなす $\mathbb{C}$-線型空間とする。函数 $\varphi_1,\varphi_2\in C^\infty(\mathcal{E}_G-Z,\omega)$ に対して

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_{\mathrm{ell}}=\frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}}\int_{Z\backslash T_{\mathrm{reg}}}D_T(t)\,\varphi_1(t)\,\overline{\varphi_2(t)}\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash T}(t) \tag{4.12}$$

によって内積を定義する。更に、この内積で $C_c^\infty(\mathcal{E}_G - Z, \omega)$ を完備化して得られる L^2 空間を $L^2(\mathcal{E}_G, \omega)$ と書く。$E \in \mathcal{Q}(F)$ に対して、$\iota_E^{D^\times} : E^\times \cong T_E^{D^\times}$ および $\iota_E^{\mathrm{GL}(2)} : E^\times \cong T_E^{\mathrm{GL}(2)}$ によって、$D^\times$ のトーラス $T_E^{D^\times}$ と $\mathrm{GL}(2,F)$ のトーラス $T_E^{\mathrm{GL}(2)}$ を同一視する。すると、$C^\infty(\mathcal{E}_G - Z, \omega)$ は G によらない次のような空間 $\mathcal{C}(F)$ と同一視される。$\mathcal{C}(F)$ は smooth 函数 $\varphi^E : E^\times \to \mathbb{C}$ で $\varphi^E(ax) = \omega(a)^{-1}\varphi^E(x)$ $(a \in F^\times)$ を満たすものの族 $\varphi = \{\varphi^E\}_{E\in\mathcal{Q}(F)}$ 全体のなす線型空間で、内積は

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \sum_{E\in\mathcal{Q}(F)} \int_{F^\times\backslash E^\times} \varphi_1^E(t)\overline{\varphi_2^E(t)}\,\delta_E(t)\,\frac{\mathrm{d}\mu_{E^\times}}{\mathrm{d}\mu_{F^\times}}(t)$$

ここで、$\delta_E(t) = D_{T_E^G}(\iota_E^G(t))$、或いは具体的に書けば、

$$\delta_E(t) = \left| \frac{\mathrm{tr}_{E/F}(t)^2}{\mathrm{N}_{E/F}(t)} - 4 \right|_F, \qquad t \in E^\times$$

である。

命題 48. 中心指標が ω である離散系列指標 $\mathrm{tr}\,\pi$ $(\pi \in \Pi_2(G,\omega))$ の $\mathcal{E}_G - Z$ への制限全体は内積 (4.12) に関して正規直交系を成す。つまり、

$$\langle \mathrm{tr}\,\pi, \mathrm{tr}\,\pi' \rangle_{\mathrm{ell}} = \begin{cases} 1 & (\pi \cong \pi'), \\ 0 & (\pi \not\cong \pi') \end{cases}$$

$\mathrm{tr}\sigma$ $(\sigma \in \Pi_2(D^\times, \omega))$ は $L^2(\mathcal{E}_{D^\times}, \omega) \cong L^2(\mathcal{E}_{\mathrm{GL}(2,F)}, \omega)$ の正規直交基底を成す。

Proof : (*cf.* [8, Theoreme A.3.h (p.59)]) $G = D^\times$ (D : 四元数体) のとき、群 $Z\backslash G$ はコンパクトであり、$G = G_{\mathrm{ell}}$ である (補題 10) ことに注意しよう。従って、この場合の命題の主張はコンパクト群の指標の直交関係式に他ならず、その完全性は Peter-Weyl の定理から従う。

$f_\pi \in C_c^\infty(G,\omega)$ を π の擬行列係数とする。すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\pi'(f_\pi) &= \sum_{T\in\mathcal{T}_G} \frac{1}{2} \int_{Z\backslash T_{\mathrm{reg}}} [\mathrm{tr}\pi'](t)\,\Phi(t, f_\pi)\,D_T(t)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash T}(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T\in\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}} \int_{Z\backslash T_{\mathrm{reg}}} [\mathrm{tr}\,\pi'](t)\,\overline{[\mathrm{tr}\,\pi](t)}\,D_T(t)\,\mathrm{d}\mu_{Z\backslash T}(t) \qquad (\because \text{命題 } 44(2)) \\ &= \langle\, \mathrm{tr}\,\pi',\, \mathrm{tr}\,\pi \rangle_{\mathrm{ell}} \end{aligned}$$

これと命題 44(1) から結論は明らか。□

注意 : 一般の p-進代数群に対する離散系列指標の直交関係式に関しては、[8, A.3] を参照してください。そこでは、２通りの方法で証明が与えられています。第一証明では、（当時 $\mathrm{GL}(n)$ に対しては証明されていた）離散系列の行列係数に対するある予想を仮定して直交関係式を導いています。その予想は、Clozel によって肯定的に解かれました ([7])。第二証明では、擬行列係数の存在とその性質を証明し ([8, A.4]) 利用する方法がとられています。このノートでは、この後者の方式に従いました。

5. Jacquet-Langlands 対応

5.1. **局所対応.** F を標数 0 の局所体として $G = \mathrm{GL}(2,F)$ とおく。D を F 上の四元数体として、ν_D をその被約ノルム、τ_D をその被約トレースとする。$D^\times, G$ の中心を区別せず Z と書き、自然に $F^\times$ と同一視しておく。ユニタリー指標 $\omega : F^\times \to \mathbb{C}^1$ を固定し、これを中心 Z の指標と見做す。正則楕円元の対 $(\gamma,\gamma') \in G_{\mathrm{ell}} \times D_{\mathrm{ell}}^\times$ に対して、

$$\det\gamma = \nu_D(\gamma'), \qquad \mathrm{tr}\gamma = \tau_D(\gamma')$$

が成り立つとき、$\gamma \leftrightarrow \gamma'$ と書くことにする。

補題 49. 正則楕円共役類の空間の間の全単射 $\psi : (G_{\mathrm{ell}} - Z)/\mathrm{Ad}(G) \to (D_{\mathrm{ell}}^{\times} - Z)/\mathrm{Ad}(D^{\times})$ で条件

$$\psi(\mathcal{O}_G(\gamma)) = \mathcal{O}_{D^\times}(\gamma') \qquad \text{iff} \quad \gamma \leftrightarrow \gamma'$$

を満たすものが一意的に決まる。

Proof : 補題 9 より写像 ψ とその逆写像 ψ' が、任意の $(E, t) \in \mathcal{Q}(F) \times (E^\times - F^\times)$ に対して

$$\psi(\mathcal{O}_G(\iota_E^G(t)) = \mathcal{O}_{G'}(\iota_E^{G'}(t)), \qquad \psi'(\mathcal{O}_{G'}(\iota_E^{G'}(t)) = \mathcal{O}_G(\iota_E^G(t))$$

を満たすように矛盾無く定義されることが分かる。これが上の条件を満たすことは補題 7 から従う。□

定理 50. 全単射 $\mathrm{JL}_F : \Pi_2(G, \omega) \longrightarrow \Pi(D^\times, \omega)$ であって、$\gamma' \leftrightarrow \gamma$ となる任意の正則楕円元対 $(\gamma, \gamma') \in G_{\mathrm{ell}} \times D_{\mathrm{ell}}^\times$ に対して

$$[\mathrm{tr}\, \mathrm{JL}_F(\pi)](\gamma') = -\mathrm{tr}\, \pi(\gamma)$$

を満たすものがただ一つ存在する。更に、次が成り立つ。

- 玉河測度に関する離散系列表現の形式次数はこの対応で保たれる：$d(\mathrm{JL}_F(\pi)) = d(\pi)$
- 任意のユニタリー指標 $\eta : F^\times \to \mathbb{C}^1$ に対して $\mathrm{JL}_F(\mathrm{St}(\eta)) = \eta \circ \nu_D$ である。□

5.2. **大域対応.** F を有限次元代数体、その整数環を $\mathfrak{o}_F$ とする。F のアルキメデス素点全体の集合を $\Sigma_\infty = \Sigma_{\mathbb{R}} \cup \Sigma_{\mathbb{C}}$, 有限素点全体の集合を Σ_{fin}、$\Sigma = \Sigma_\infty \cup \Sigma_{\mathrm{fin}}$ を素点全体の集合とする。$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対し、$\mathfrak{o}_v$ を完備化 F_v の整数環、$\mathfrak{p}_v$ を $\mathfrak{o}_v$ の極大イデアル、ϖ_v を $\mathfrak{p}_v$ の生成元とし、剰余体 $\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数を q_v とかく: $q_v = \sharp(\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v)$.　完備化 F_v $(v \in \Sigma_\infty)$ の直積環を F_∞ とする: $F_\infty = \prod_{v\in\Sigma_\infty} F_v$. F のアデール環を $\mathbb{A}$ とすれば、$\mathbb{A}$ は有限アデール全体の環 $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ と F_∞ の直積に分解される: $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$.

$\mathfrak{A}$ を F 上の四元数体とする。$\mathrm{GL}(2)$ を F-代数群と見做して G と書き、乗法群 $\mathfrak{A}^\times$ の定義する F-代数群を $G_{\mathfrak{A}}$ で表す。G, $G_{\mathfrak{A}}$ の中心を区別せずに Z で表す。イデール類指標 $\omega = \otimes_v : F^\times\backslash\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ を固定する。$\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ を、中心指標 ω を持つ $G(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現全体の集合とする。

$\eta^2 = \omega$ を満たすイデール類群指標 $\eta : F^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して、$\phi_\eta(g) = \eta(\nu_D(g))$ $(g \in G'(\mathbb{A}))$ の形を持つ函数 ϕ_η 全体の張る $\mathcal{L}_0^2(G', \omega)$ の閉部分空間を $\mathcal{L}_{\mathrm{sp}}^2(G', \omega)$ とおき、その直交補空間を $\mathcal{L}_0^2(G', \omega)$ と定義する。$\Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega)$ を $\mathcal{L}_0^2(G', \omega)$ の既約部分表現全体の集合とする。

$\Sigma_{\mathfrak{A}}$ を $\mathfrak{A}$ の分岐素点全体の集合とする。$\mathfrak{A}$ の極大整環 $\mathfrak{O}$ を固定する。任意の $v \in \Sigma - \Sigma_{\mathfrak{A}}$ に対して、同型 $\mathfrak{A}_v \cong \mathrm{M}_2(F_v)$ を $\mathfrak{O} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_v \cong \mathrm{M}(2, \mathfrak{o}_v)$ となるように固定し、2 つの群 $G(F_v)$, $G_{\mathfrak{A}}(F_v)$ を同一視する。

定理 51. 写像 $\mathrm{JL}^{\mathfrak{A}} : \Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega) \longrightarrow \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ で次の条件を満たすものがただ一つ存在する: $\sigma \in \Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega)$, $\pi = \mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma)$ を (抽象ユニタリー表現として) $\sigma \cong \bigotimes_v \sigma_v$, $\pi \cong \bigotimes_v \pi_v$ と制限テンソル積に分解するとき、

(5.1)

任意の素点 $v \in \Sigma - \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において ($G_{\mathfrak{A}}(F_v) \cong G(F_v)$ の表現として) $\sigma_v \cong \pi_v$ である。

更に、この対応は次の性質を持つ。

- $\pi = \mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma)$, $\sigma \cong \bigotimes_v \sigma_v$, $\pi \cong \bigotimes_v \pi_v$ とするとき、任意の分岐素点 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において、$\pi_v \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v)$ かつ $\mathrm{JL}_{F_v}(\pi_v) = \sigma_v$ である。ただし、$\mathrm{JL}_{F_v} : \Pi_2(G(F_v), \omega_v) \to \Pi(\mathfrak{A}_v^\times, \omega_v)$ は局所 Jacquet-Langlands 対応である。
- 像 $\mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega))$ は、任意の分岐素点 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ で $\pi_v \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v)$ を満たすような $\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ 全体からなる。

系 52. ($G_{\mathfrak{A}}$ における強重複度 1 定理) : σ, $\sigma' \in \Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega)$, $\sigma \cong \bigotimes_v \sigma_v$, $\sigma' \cong \bigotimes_v \sigma'_v$ とする。有限個の素点を除いて $\sigma_v \cong \sigma'_v$ ならば $\sigma = \sigma'$ である。

6. 証明

この章を通して、有限次元代数体 F 上の四元数体 $\mathfrak{A}$ を固定し、$G' = G_{\mathfrak{A}}$, $G = \mathrm{GL}(2)$ とおく。5.2 節で導入した定義、記号はこの章を通して有効とする。更に、非自明な加法指標 $\psi_F : F\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^1$ を固定する。$v \in \Sigma$ に対して、$G(F_v)$ の標準的な極大コンパクト部分群 $\mathbf{K}_v$ を [31, §3] のように固定する。その他、GL(2) に関わる記号は [31] に従う。

この章は、[15], [12], [11], [25] などを参考にして、若干整理を加えたものである。

6.1. **玉河測度.** 任意の素点 $v \in \Sigma$ において、ψ_F の v-成分 $\psi_{F,v}$ を局所体 F_v の加法指標とし採用し、て 2.1 節で説明した構成によって、様々な F-代数群の F_v 値点上の Haar 測度を正規化する。例えば、$\mathrm{d}\mu_{Z(F_v)}$, $\mathrm{d}\mu_{G(F_v)}$, $\mathrm{d}\mu_{G'(F_v)}$ などが定義される。$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ のとき、$\mu_{Z(F_v)}(Z(F_v) \cap \mathbf{K}_v) = \mu_{F_v^\times}(\mathfrak{o}_v^\times) = 1$ なので、$\mathrm{d}\mu_{Z(F_v)}$ のテンソル積によってアデール群 $Z(\mathbb{A})$ の Haar 測度 $\mathrm{d}\mu_{Z(\mathbb{A})}$ を定義する。一方、補題 13 の証明から $\mu_{G(F_v)}(\mathbf{K}_v) = q_v^{-2d_v}\,\zeta_{F,v}(2)^{-1}$ であるから、$\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} \mu_{G(F_v)}(\mathbf{K}_v) < +\infty$ となる。よって、アデール群 $G(\mathbb{A})$ の Haar 測度が

$$\mathrm{d}\mu_{G(\mathbb{A})}(g) = \bigotimes_{v\in\Sigma} \mathrm{d}\mu_{G(F_v)}(g_v)$$

で定義可能である。$G'(\mathbb{A})$ に対しても $G(\mathbb{A})$ の場合と平行な構成により Haar 測度 $\mathrm{d}\mu_{G'(\mathbb{A})}$ を定義する。（殆ど全ての素点では $G(F_v) \cong G'(F_v)$ であることに注意せよ。）$\mathrm{d}\mu_{G(\mathbb{A})}$, $\mathrm{d}\mu_{G'(\mathbb{A})}$ を $G(\mathbb{A})$, $G'(\mathbb{A})$ の (非正規化) 玉河測度という。$Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$, $Z(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})$ には商測度 $\mathrm{d}\mu_{Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} = \mathrm{d}\mu_{G(\mathbb{A})}/\mathrm{d}\mu_{Z(\mathbb{A})}$, $\mathrm{d}\mu_{Z(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})} = \mathrm{d}\mu_{G'(\mathbb{A})}/\mathrm{d}\mu_{Z(\mathbb{A})}$ を与える。L^2-空間 $\mathcal{L}^2(G,\omega)$, $\mathcal{L}^2(G',\omega)$ の内積はこれらの測度によって定義されているとする。

6.2. **セルバーグ跡公式.** $\omega : F^\times\backslash\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ とする。[31, 4.1.1] のように、局所ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(F_v),\omega_v)$ $(v \in \Sigma)$ および大域ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}),\omega)$ を定義する。G' に対しても同様に、$\mathcal{H}(G'(F_v),\omega_v)$, $\mathcal{H}(G'(\mathbb{A}),\omega)$ を定義する。

6.2.1. GL(2) の場合 *(簡易化された跡公式)*. （[31, §7] を参照せよ。）$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}),\omega)$ に対する右正則表現 $R(f) : \mathcal{L}^2(G,\omega) \to \mathcal{L}^2(G,\omega)$ はスペクトル分解

$$\mathcal{L}^2(G,\omega) = \mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}(G,\omega) \hat{\oplus} \mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}(G,\omega) \hat{\oplus} \mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}(G,\omega)$$

に応じて $R(f) = R_{\mathrm{cus}}(f) + R_{\mathrm{res}}(f) + R_{\mathrm{cont}}(f)$ と分解されて、$R_{\mathrm{cus}}(f)$, $R_{\mathrm{res}}(f)$ はトレース族作用素であった。その跡は絶対収束級数

$$\mathrm{tr}\, R_{\mathrm{cus}}(f) = \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)} \mathrm{tr}\,\pi(f), \tag{6.1}$$

$$\mathrm{tr}\, R_{\mathrm{res}}(f) = \mathrm{vol}(Z(\mathbb{A})\, G(F)\backslash G(\mathbb{A}))^{-1} \sum_{\eta^2=\omega} \int_{Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \eta(\det g)\, f(g)\, \mathrm{d}g \tag{6.2}$$

で与えられた。（重複度 1 定理により、各既約カスプ表現の $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}(G,\omega)$ での重複度は 1 であることに注意する。）更に、試験函数 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}),\omega)$ が次の条件を満たすとする。

(a) f は分解可能である。即ち、各素点で函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v),\omega_v)$ が決まって、殆ど全ての素点では $f_v = f_v^\circ$、

$$f(g) = \prod_v f_v(g_v), \qquad g = (g_v) \in G(\mathbb{A})$$

となる。ただし、各有限素点において、$f_v^\circ \in \mathcal{H}(G(F_v),\omega_v)$ は $f_v^\circ(g_v) = \omega_v(z_v)^{-1}$ $(g = z_v k_v \in Z(F_v)\,\mathbf{K}_v)$ かつ $f_v^\circ|(G(F_v) - Z(F_v)\mathbf{K}_v) \equiv 0$ で定義される函数である。

(b) 2 つの素点 v_1, v_2 が存在して、

$$v \in \{v_1, v_2\} \text{ に対して } \Phi_v(a_v, f_v) = 0\, (\forall\, a_v \in \mathcal{H}_{G(F_v)}) \tag{6.3}$$

ただし、Φ_v は群 $G(F_v)$ における軌道積分を表す。

$\gamma \in (\mathcal{E}_{G(F)} - Z(F)) \cup \mathcal{H}_{G(F)}$ とする。$G_\gamma(\mathbb{A})$ 上の Haar 測度 $\mathrm{d}\mu_{G_\gamma(\mathbb{A})}$ を、各素点において ($\psi_{F,v}$ を使って) 群 $G_\gamma(F_v)$ 上に固定してある Haar 測度 $\mathrm{d}\mu_{G_\gamma(F_v)}$(2.2 節参照) の直積測度で定義する: $\mathrm{d}\mu_{G_\gamma(\mathbb{A})} = \otimes_v \mathrm{d}\mu_{G_\gamma(F_v)}$. $\gamma \in (\mathcal{E}_{G(F)} - Z(F)) \cup \mathcal{H}_{G(F)}$ に対するアデール的な軌道積分を

$$\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\, \mathrm{d}\mu_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}(g)$$

で定義する。測度の決め方から、積公式 $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = \prod_v \Phi_v(\gamma, f_v)$ が成り立つ。

さて、簡易化されたセルバーグ跡公式は次のようになる ([31, 定理 93])：

(6.4) $\quad \mathrm{tr}\, R_{\mathrm{cus}}(f) + \mathrm{tr}\, R_{\mathrm{res}}(f)$

$$= \tau(G)\, f(1) + \sum_{\gamma \in [(\mathcal{E}_{G(F)} - Z(F)) \cup \mathcal{H}_{G(F)}]/Z(F)} \mathrm{vol}(Z(\mathbb{A})\, G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))\iota(\gamma)^{-1}\, \Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f)$$

ただし、

$$\tau(G) = \mathrm{vol}(Z(\mathbb{A})\, G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \qquad (Z\backslash G \text{ の玉河数})$$

であり、$\iota(\gamma)$ は $-\gamma$ と γ が $G(F)$-共役であるかないかに従い 1 または 2 とする。

6.2.2. $G_{\mathfrak{A}}$ の場合. $G' = G_{\mathfrak{A}}$ とおこう。群 $Z(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})$ はコンパクトなので、右正則表現 $\mathcal{L}^2(G', \omega)$ は既約表現の離散直和に分解する。$\mathcal{L}^2_{\mathrm{sp}}(G', \omega)$, $\Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ の定義により、、

$$\mathcal{L}^2(G', \omega) = \left\{ \hat{\bigoplus}_{\sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)} \sigma \right\} \hat{\oplus}\, \mathcal{L}^2_{\mathrm{sp}}(G, \omega)$$

となる。試験函数 $f' \in \mathcal{H}(G'(\mathbb{A}), \omega)$ に対して、右正則表現 $R(f')$ はトレース族作用素であって上の分解に沿って 2 つの作用素 $R_0(f') : \mathcal{L}^2_0(G', \omega) \to \mathcal{L}^2_0(G', \omega)$, $R_{\mathrm{sp}}(f') : \mathcal{L}^2_{\mathrm{sp}}(G', \omega) \to \mathcal{L}^2_{\mathrm{sp}}(G', \omega)$ の和に分解される。セルバーグ跡公式は

(6.5) $\quad \mathrm{tr}\, R_0(f') + \mathrm{tr}\, R_{\mathrm{sp}}(f')$

$$= \tau(G')\, f'(1) + \sum_{\gamma \in [\mathcal{E}_{G'(F)} - Z(F)]/Z(F)} \mathrm{vol}(Z(\mathbb{A})\, G'_\gamma(F)\backslash G'_\gamma(\mathbb{A}))\, \iota'(\gamma)^{-1}\, \Phi'_{\mathbb{A}}(\gamma, f')$$

と表せる。ただし、

$$\tau(G') = \mathrm{vol}(Z(\mathbb{A})\, G'(F)\backslash G'(\mathbb{A})) \qquad (Z\backslash G' \text{ の玉河数})$$

であり、$\iota'(\gamma)$ は $-\gamma$ と γ が $G'(F)$-共役であるかないかに従い 1 または 2 とする。また、各中心化群 $G'_\gamma(\mathbb{A})$ 上の Haar 測度を直積 $\mathrm{d}\mu_{G'_\gamma(\mathbb{A})} = \otimes_v \mathrm{d}\mu_{G'_\gamma(F_v)}$ で決めたうえで、アデール的な軌道積分を

$$\Phi'_{\mathbb{A}}(\gamma, f') = \int_{G'_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f'(g^{-1}\gamma g)\, \mathrm{d}\mu_{G'_\gamma(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})}(g)$$

で定義すれば、分解可能な試験函数 $f' = \otimes_v f'_v$ に対して積公式 $\Phi'_{\mathbb{A}}(\gamma, f') = \prod_v \Phi'_v(\gamma, f'_v)$ が成り立つ。

6.3. **局所対応の構成 ($\mathbb{R}$ 上の場合)**. $\mathbb{H} = \{\mathbb{C}, -1\}_{\mathbb{R}}$ を Hamilton 四元数体とする:

$$\mathbb{H} = \{ \xi = \left[\begin{smallmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{smallmatrix}\right] \,|\, z,\, w \in \mathbb{C} \}$$

$\mathbb{H}^1 = \{\xi \in \mathbb{H} |\, \det(\xi) = 1\} = \mathrm{SU}(2)$ とおくと、$\xi \mapsto ((\det \xi)^{1/2}, \xi\, (\det \xi)^{-1/2})$ は Lie 群の同型写像 $\mathbb{H}^\times \to \mathbb{R}^\times_+ \times \mathbb{H}^1$ を与える。$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の有限次元表現 $\rho^{\mathbb{C}}_{l_1,l_2}$ の制限 $\sigma_c(l_1, l_2) = \rho^{\mathbb{C}}_{l_1,l_2}|\mathbb{H}^\times$ は $\mathbb{H}^\times$ の既約表現で、$\mathbb{H}^\times$ の中心指標 $\omega(z) = |z|^m_{\mathbb{R}}\, \mathrm{sgn}(z)^\epsilon$ ($m \in \mathbb{C}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$) に対して、

$$\Pi(\mathbb{H}^\times, \omega) = \{\sigma_c(l_1, l_2) |\, l_1 - l_2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1},\, l_1 + l_2 = m,\, l_1 - l_2 + 1 \equiv \epsilon \pmod 2\}$$

であることが分かる。(SU(2) に対して、コンパクトリー群の既約表現の Cartan-Weyl 分類を適用し、あとは中心指標による補正を行えばよい。) 4.3 節で復習した $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の離散系列の分類結果と比較すると、対応 $\sigma(l_1,l_2)\mapsto\sigma_{\mathrm{c}}(l_1,l_2)$ によって全単射 $\Pi_2(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}),\omega)\to\Pi(\mathbb{H}^\times,\omega)$ が得られる。この対応が定理 50 の指標条件を満たすことを示せばよい。$\mathcal{T}^{\mathrm{ell}}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})}=\mathcal{T}^{\mathrm{ell}}_{\mathbb{H}^\times}=\{T\}$、ただし

$$T=\left\{z\left[\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right]\,\middle|\,z>0,\,\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

である。完全系列 (4.4) と補題 32 より

$$[\mathrm{tr}\,\sigma(l_1,l_2)](t)=-\mathrm{tr}\,\rho_{l_1,l_2}(t),\qquad t\in T-Z \tag{6.6}$$

である。一方、$[\mathrm{tr}\,\rho_{l_1,l_2}](t)=[\mathrm{tr}\,\rho^{\mathbb{C}}_{l_1,l_2}](t)=\mathrm{tr}\,\sigma_c(l_1,l_2)](t)$ は明らかである。よって、

$$\mathrm{tr}\,\sigma(l_1,l_2)(t)=-\mathrm{tr}\,\sigma_c(l_1,l_2)](t),\qquad t\in T-Z$$

となり、確かに定理 50 の条件が満たされている。□

系 53. $G=\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ とする。中心指標 ω の離散系列表現 $\sigma(l_1,l_2)$ の指標は楕円元上で

$$[\mathrm{tr}\,\sigma(l_1,l_2)]\left(z\left[\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right]\right)=\omega(z)\,\frac{e^{-i(l_1-l_2)\theta}-e^{i(l_1-l_2)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}$$

で与えられる。特に、これは G_{ell} 全体に *smooth* に拡張される。

Proof: ρ_{l_1,l_2} の指標公式 (= Weyl の指標公式の特別な場合) と (6.6) から従う。□

注意： このノートでは、[25], [8] に従って、p-進体上での局所対応の構成を保型表現の Jacquet-Langlands 対応を経由して行う。実素点では、$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の任意の離散系列表現が主系列表現の組成因子に現れることから、上で見たように保型表現を経由することなく至極単純に局所対応の証明が出来る。p-進体上でも、超尖点表現の存在によって状況は困難さを著しく増すものの、純局所的な証明がやはり可能である ([4, Chap.13])。

6.4. 試験函数の matching.

定義 54. $v\in\Sigma$ とする。2 つの函数 $f_v\in\mathcal{H}(G(F_v),\omega_v)$ および $f'_v\in\mathcal{H}(G'(F_v),\omega_v)$ の対 (f_v,f'_v) を考える。

- $v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$ の場合：次の 2 条件を満たすとき、(f_v,f'_v) を matching pair と呼び $f_v\leftrightarrow f'_v$ と書く：
  (1) $\gamma_v\leftrightarrow\gamma'_v$ なる任意の正則楕円元対 $(\gamma_v,\gamma'_v)\in G_{\mathrm{ell}}\times G'_{\mathrm{ell}}$ に対して
  $$\Phi_v(\gamma_v,f_v)=\Phi'_v(\gamma'_v,f'_v)$$
  である
  (2) 任意の $a_v\in\mathcal{H}_{G(F_v)}$ に対して $\Phi_v(a_v,f_v)=0$ である。
- $v\in\Sigma-\Sigma_{\mathfrak{A}}$ の場合：$G(F_v)\cong G'(F_v)$ から導かれる同型 $\mathcal{H}(G(F_v),\omega_v)\cong\mathcal{H}(G'(F_v),\omega_v)$ によって f_v, f'_v が対応するとき (f_v,f'_v) を matching pair と呼び $f_v\leftrightarrow f'_v$ と書く。

注意：$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}$, $f_v\leftrightarrow f'_v$ ならば f_v, f'_v は E 型函数である。実際、命題 18(2) の最初の主張より $\mathcal{H}(G'(F_v),\omega_v)$ の函数はすべて E 型である。よって、条件 (1) から $\gamma_v\mapsto\Phi_v(\gamma,f_v)$ は G_{ell} 上 smooth な拡張を持つ。これと条件 (2) から f_v も E 型になる。

補題 55. (1) $v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}$ として、$f_v\in\mathcal{H}(G(F_v),1)$ を $G(F_v)=\mathrm{GL}(2,F_v)$ の Steinberg 表現の擬行列係数とする。$G'(F_v)$ 上の定数函数 $f'_v=-\mathrm{vol}(Z(F_v)\backslash G'(F_v))^{-1}$ に対して $f_v\leftrightarrow f'_v$ となる。
(2) $v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}\cap\Sigma_{\mathbb{R}}$ として、$f_v\in\mathcal{H}(G(\mathbb{R}),\omega_v)$ を $G(F_v)=\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 $\sigma(l_1,l_2)$ ($l\in\mathbb{N}^*$) の擬行列係数とする。$G'(F_v)$ の有限次元表現 $\sigma'=\sigma_{\mathrm{c}}(l_1,l_2)$ の 0 でない単位ベクトル ξ' をとり $f'_v(g')=-d(\sigma')^{-1}\,\phi^{\sigma'}_{\xi',\xi'}(g')$ とおくと、$f_v\leftrightarrow f'_v$ となる。更に、f_v, f'_v は E 型である。

Proof : (1) $T \in \mathcal{T}^{\mathrm{ell}}_{G(F_v)}$ に対して $\mathrm{vol}(Z(F_v)\backslash T) = 1$ であったから、$\Phi'_v(\gamma, f'_v) = 1$ ($\forall\, \gamma \in \mathcal{E}_{G'(F_v)} - Z$) となる。これと補題 37 および命題 44 から $f_v \leftrightarrow f'_v$ である。

(2) $F = \mathbb{R}$ での局所対応から、$\mathrm{JL}_{\mathbb{R}}(\sigma(l_1, l_2)) = \sigma_{\mathrm{c}}(l_1, l_2)$ である。これと命題 44 から結論が出る。□

補題 56. $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}} \cap \Sigma_{\mathrm{fin}}$ とする。

(1) 任意の $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ に対して、$f_v \leftrightarrow f'_v$ なる E 型函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ が存在する。
(2) 任意の E 型函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ に対して、$f_v \leftrightarrow f'_v$ なる $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ が存在する。

Proof : (1) $\varphi^E(\iota_E^{G(F_v)}(t)) = \Phi(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f'_v)$ ($E \in \mathcal{Q}(F_v)$, $t \in E^\times - F_v^\times$) として、$\varphi^E : T_E^{G(F_v)} \to \mathbb{C}$ を定義し、命題 28 を適用するればよい。

(2) $\varphi^E(\iota_E^{G'(F_v)}(t)) = \Phi(\iota_E^{G(F_v)}(t), f'_v)$ ($E \in \mathcal{Q}(F_v)$, $t \in E^\times - F_v^\times$) として、$\varphi^E : T_E^{G'(F_v)} \to \mathbb{C}$ を定義すると、f_v が E 型なので命題 28 が適用できる。□

補題 57. $f_v \leftrightarrow f'_v$ とする。更に、$v \in \Sigma_{\mathfrak{A}} \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ のときには、f_v, f'_v は補題 55 の条件を満たす試験函数の組とする。

(1) $f_v(1) = -f'_v(1)$ である。
(2) 任意の指標 $\eta_v : F_v^\times \to \mathbb{C}^1$ に対して、

$$\int_{Z(F_v)\backslash G(F_v)} f_v(g)\, \eta_v(\det g_v)\, \mathrm{d}\mu_{Z(F_v)\backslash G(F_v)}(g_v) = \int_{Z(F_v)\backslash G'(F_v)} f'_v(g'_v)\, \eta_v(\nu_{\mathfrak{A}_v}(g'_v))\, \mathrm{d}\mu_{Z(F_v)\backslash G'(F_v)}(g'_v)$$

である。

Proof : (1) F が非アルキメデス的としよう。$T = T_E^{G(F_v)}$ ($E \in \mathcal{Q}(F_v)$ とすると、任意の $\gamma \in T - Z(F_v)$ に対して $\Phi_v(\gamma, f_v) = \Phi'_v(\gamma, f'_v)$ である。この等式において、$\gamma \to 1$ とした極限を考える。f_v は上で注意したように E 型なので、germ 展開 (2.5) より $\Gamma_1^T f_v(1) = -\mathrm{vol}(Z(F_v)\backslash G'(F_v))\, f_v(1)$ に近づく。右辺は命題 18 より連続なので

$$\int_{T'\backslash G'(F_v)} f'_v(1)\, \mathrm{d}_{T'\backslash G'(F_v)}\mu = \mathrm{vol}(T'\backslash G'(F_v))\, f'_v(1)$$

に近づく。ここで、$T' = T_E^{G'(F_v)} \subset G'(F_v)$ である。よって、$f_v(1) = -f'_v(1)$ を得る。

$F = \mathbb{R}$ の場合には、系 53 と補題 44 からから従う。

(2) f_v は E 型なので、補題 17 から、左辺は

$$\frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{Q}(F_v)} \int_{E_v^\times - F_v^\times} \delta_E(t)\, \eta_v(t)^2\, \Phi_v(\iota_E^{G(F_v)}(t), f_v)\, \mathrm{d}\mu_{F_v^\times\backslash E^\times}(t)$$

となる。右辺は、同様に

$$\frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} \delta_E(t)\, \eta_v(t)^2\, \Phi'_v(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f_v)\, \mathrm{d}\mu_{F_v^\times\backslash E^\times}(t)$$

に等しい。$f_v \leftrightarrow f'_v$ より $\Phi_v(\iota_E^{G(F_v)}(t), f_v) = \Phi'_v(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f'_v)$ ($\forall t \in E^\times - F_v^\times$) なのでこれら 2 つの表示は一致する。□

6.5. Main Lemma の証明.

補題 58. 分解可能な試験函数 $f=\otimes_v f_v\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}),\omega)$, $f'=\otimes_v f'_v\in\mathcal{H}(G'(\mathbb{A}),\omega)$ が与えられ、任意の素点 v において $f_v\leftrightarrow f'_v$ が成り立つとする。更に、$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}\cap\Sigma_{\mathbb{R}}$ に対しては、f_v, f'_v は補題 55(2) の条件を満たす試験函数の組とする。

$$\{\operatorname{tr}R_{\mathrm{cus}}(f)+R_{\mathrm{res}}(f)\}-\{\operatorname{tr}R_0(f')+\operatorname{tr}R_{\mathrm{sp}}(f')\}=(\tau(G)-\tau(G'))\,f(1)\tag{6.7}$$

である。

Proof: (1) 2つの跡公式 (6.4), (6.5) の右辺同士を比較する。($v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$ においては試験函数 f_v は E 型函数なので、特に非楕円正則共役類に対する軌道積分は消滅する。$\mathfrak{A}$ は斜体ゆえ $\sharp\Sigma_{\mathfrak{A}}\geqslant 2$ なので、6.1.1 節の条件 (b) が満たされることに注意しよう。) (6.4) の右辺の和で、$\gamma\in\mathcal{H}_{G(F)}$ に対する軌道積分 $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma,f)=0$ となる。実際、$\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma,f)=\prod_v\Phi_v(\gamma,f_v)$ であり、素点 $v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$ において f_v は E 型函数なので $\Phi_v(\gamma,f_v)=0$ である。

$\gamma\in\mathcal{E}_{G(F)}-Z(F)$ とすると、$\gamma=\iota_E^{G(F)}(t)$ となる $E\in\mathcal{Q}(F)$ および $t\in T_E(F)$ が存在する。中心化群 G_γ はトーラス T_E と一致するから、体積因子 $\mathrm{vol}(Z(\mathbb{A})\,G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))$ は $\mathrm{vol}(\mathbb{A}^\times E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times)$ となる。もし、$\Sigma_{\mathfrak{A}}\not\subset\Sigma(E)$ であるとすると、軌道積分 $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma,f)=0$ となる。実際、$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}-\Sigma(E)$ なる素点においては $E_v=E\otimes_F F_v\cong F_v\oplus F_v$ と分解するので、$\gamma\in T_E(F_v)$ は $G(F_v)$ の分裂トーラス $M(F_v)$ のある元 a_v と $G(F_v)$-共役になる。f_v が E 型なことから $\Phi_v(\gamma_v,f_v)=\Phi_v(a_v,f_v)=0$ となる。よって、$\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma,f)=0$ を得る。

従って、補題 11 から、$E\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ でない限り $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma,f)=0$ となる。故に、公式 (6.4) は

(6.8)

$$\operatorname{tr}R_{\mathrm{cus}}(f)+\operatorname{tr}R_{\mathrm{res}}(f)=\tau(G)\,f(1)+\sum_{E\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)}\sum_{t\in(E^\times-F^\times)/F^\times}\frac{1}{2}\mathrm{vol}(\mathbb{A}^\times E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times)\,\Phi_{\mathbb{A}}(\iota_E^{G(F)}(t),f)$$

と書きなおせる。同様に、補題 9 によれば公式 (6.5) は次の表示を持つ：

(6.9)

$$\operatorname{tr}R_0(f')+\operatorname{tr}R_{\mathrm{sp}}(f')=\tau(G')\,f'(1)+\sum_{E\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)}\sum_{t\in(E^\times-F^\times)/F^\times}\frac{1}{2}\mathrm{vol}(\mathbb{A}^\times E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times)\,\Phi'_{\mathbb{A}}(\iota_E^{G'(F)}(t),f')$$

よって、補題を証明するには

$$\Phi_{\mathbb{A}}(\iota_E^{G(F)}(t),f)=\Phi'_{\mathbb{A}}(\iota_E^{G'(F)}(t),f'),\quad (E\in\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F),\,t\in E^\times-F^\times)\tag{6.10}$$

$$f(1)=f'(1),\tag{6.11}$$

を示せば十分である。

<u>(6.10) の証明</u>：両辺とも局所軌道積分のオイラー積に分解しているので、各因子ごとに等号を確かめればよい。$v\in\Sigma-\Sigma_{\mathfrak{A}}$ のとき、$f_v\leftrightarrow f'_v$ より、同型 $G(F_v)\cong G'(F_v)$ のもとで2つの函数は一致する。故に、自明に $\Phi_v(\iota_E^{G(F)}(t)_v,f_v)=\Phi'_v(\iota_E^{G'(F)}(t)_v,f'_v)$ である。$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$ のとき、$\iota_E^{G(F)}(t)_v\in G(F_v)_{\mathrm{ell}}-Z(F_v)$, $\iota_E^{G'(F)}(t)_v\in G'(F_v)_{\mathrm{ell}}-Z(F_v)$ で $\iota_E^{G(F)}(t)_v\leftrightarrow\iota_E^{G'(F)}(t)_v$ なので、$f_v\leftrightarrow f'_v$ より、やはり $\Phi_v(\iota_E^{G(F)}(t)_v,f_v)=\Phi'_v(\iota_E^{G'(F)}(t)_v,f'_v)$ が従う。

<u>(6.11) の証明</u>：$f(1)=\prod_v f_v(1)$, $f(1)=\prod_v f'_v(1)$ である。任意の素点で $f_v\leftrightarrow f'_v$ なので、$v\in\Sigma-\Sigma_{\mathfrak{A}}$ ならば $f_v(1)=f'_v(1)$ は自明であり、$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$ においては補題 57(1) より $f_v(1)=-f'_v(1)$ である。$\sharp\Sigma_{\mathfrak{A}}$ が偶数であることから $f(1)=f'(1)$ を得る。□

定理 59. $\tau(G)=\tau(G')$ である。

Proof: (*cf.* [15, (16.1.8)]) $S=\Sigma_{\mathfrak{A}}$ とおく。(6.7) を次の状況で使う：

- $\omega=1$
- $v\in S\cap\Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して、f_v は $\mathrm{GL}(2,F_v)$ の Steinberg 表現の擬行列係数、$f'_v=-\mathrm{vol}(Z(F_v)\backslash G'(F_v))$

- $v \in S \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ においては、$l_1 = 1/2, l_2 = -1/2$ として補題 (55)(2) の条件を満たすように f_v, f'_v をとる。

補題 55 より、これは各素点 $v \in S$ において試験函数の matching pair を与えることを注意しよう。$v \in S$ において、$\mathbf{K}_v$ の有限次元表現 ϵ_v を f_v が生成する両側 $\mathbf{K}_v$-加群が $\epsilon_v \boxtimes \epsilon_v$ の部分表現となるように固定する。π を $\mathcal{L}^2(G,1)$ の既約部分表現, σ を $\mathcal{L}^2(G',1)$ の既約部分表現とする。$\pi \cong \hat{\bigotimes}_v \pi_v$, $\sigma \cong \hat{\bigotimes}_v \sigma_v$ と制限直積に分解して、

$$M_\pi = \{\hat{\bigotimes}_{v\in S} \mathcal{V}_{\pi_v}[\epsilon_v]\} \hat{\otimes} \{\hat{\bigotimes}_{v\in\Sigma-S} \mathcal{V}_{\pi_v}\}, \qquad M'_\sigma = \{\hat{\bigotimes}_{v\in S} \mathcal{V}_{\sigma_v}^{G'(F_v)}\} \hat{\otimes} \{\hat{\bigotimes}_{v\in\Sigma-S} \mathcal{V}_{\sigma_v}\}$$

とおく。$G_{\mathbb{A}}^S$ を $G(F_v) \cong G'(F_v)$ $(v \in \Sigma - S)$ の制限直積群とすると、この群は $\Sigma - S$ に亘るテンソル積因子を経由して Hilbert 空間 M_π, M'_σ にユニタリーに作用する。M_π は $G_{\mathbb{A}}^S$ の $\mathcal{V}_\pi^S = \hat{\bigotimes}_{v\in\Sigma-S} \mathcal{V}_{\pi_v}$ における既約表現 π^S の有限重複度 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{\pi_v}[\epsilon_v]$ の直和、M'_π は $G_{\mathbb{A}}^S$ の $\mathcal{V}_\sigma^S = \hat{\bigotimes}_{v\in\Sigma-S} \mathcal{V}_{\sigma_v}$ における既約表現 σ^S の有限重複度 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{\sigma_v}^{G'(F_v)}$ の直和である。($G(F_v)$ の既約ユニタリー表現の許容可能性による。) R^S を既約部分表現 $\pi \subset \mathcal{L}^2(G,1)$ で条件「$\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),1) \implies \pi_v \cong \mathrm{St}_{G(F_v)}\,(\forall\, v \in S)$」 or 「$\dim \pi = 1,\ \pi_v = 1\,(\forall v \in S)$」を満たすものを走らせたときの M_π^S 全体の直和、r^S を既約部分表現 $\sigma \subset \mathcal{L}^2(G',1)$ で $\sigma_v = 1\,(\forall v \in S)$ なるものを走らせたときの M_σ^S 全体の直和とする。これらは、$G_{\mathbb{A}}^S$ の既約ユニタリー表現の直和に分解されるユニタリー表現である。さて、任意の $f^S \in \mathcal{H}(G_{\mathbb{A}}^S,1)$ に対して

$$\mathrm{tr}\, R^S(f^S) - \mathrm{tr}\, r^S(f^S) = [\tau(G) - \tau(G')]\, f^S(1) \tag{6.12}$$

が成り立つことを見よう。

$\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),1)$ ならば、任意の $v \in S$ で π_v は無限次元表現であるから、$G(F_v)$ の既約ユニタリー表現の分類から、π_v は既約な主系列表現または離散系列表現である。従って、擬行列係数の性質から $\mathrm{tr}\, \pi_v(f_v) = \delta_{\mathrm{St}_{G(F_v)},\pi_v}$ である。$\pi = \eta \circ \det$ (η は $\eta^2 = 1$ を満たす $F^\times$ のイデール類群指標）の場合、補題 47 から $\mathrm{tr}\pi_v(f_v) = -\delta_{\eta_v,1}$ $(\forall v \in S)$ である。これより、

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, R_{\mathrm{cus}}(f) + R_{\mathrm{res}}(f) &= \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),1)} \{\prod_{v\in S} \mathrm{tr}\, \pi_v(f_v)\}\, \mathrm{tr}\, \pi^S(f^S) + \sum_{\substack{\pi=\eta\circ\det \\ \eta^2=1}} \{\prod_{v\in S} \mathrm{tr}\, \pi_v(f_v)\}\, \mathrm{tr}\, \pi^S(f^S) \\
&= \sum_{\substack{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),1) \\ \pi_v\cong \mathrm{St}_{G(F_v)}\,(\forall v\in S)}} \mathrm{tr}\, \pi^S(f^S) + \sum_{\substack{\pi=\eta\circ\det \\ \eta^2=1,\, \eta_v=1\,(\forall\, v\in S)}} \mathrm{tr}\, \pi^S(f^S) \qquad (\because \sharp S \text{ は偶数}) \\
&= \mathrm{tr} R^S(f^S) \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

$v \in S$ に対して、f'_v は自明表現の行列係数なことに注意すれば、

$$\mathrm{tr}\, R_0(f') + \mathrm{tr}\, R_{\mathrm{sp}}(f') = r^S(f^S) \tag{6.14}$$

が同様に示せる。(6.7), (6.13), (6.14) より (6.12) が従う。さて、$\tau(G) > \tau(G')$ であったと仮定すると、等式 (6.12) より任意の $f^S \in \mathcal{H}(G_{\mathbb{A}}^S,1)$ に対して

$$\mathrm{tr}\, R^S(f^S * (f^S)^*) - \mathrm{tr}\, r^S(f^S * (f^S)^*) = [\tau(G) - \tau(G')] \int_{Z_{\mathbb{A}}^S\backslash G_{\mathbb{A}}^S} |f^S(g)|^2\, \mathrm{d}g \geqslant 0$$

となる。よって、[15, Lemma 16.1.1] より r^S は R^S の部分表現に同値になる。r^S の R^S における直和補表現を ρ とすれば、等式 (6.12) より

$$\rho(f^S * (f^S)^*) = [\tau(G) - \tau(G')] \int_{Z_{\mathbb{A}}^S\backslash G_{\mathbb{A}}^S} |f^S(g)|^2\, \mathrm{d}g$$

が成立する。$Z_{\mathbb{A}}^S\backslash G_{\mathbb{A}}^S$ は非コンパクトだから [15, Lemma16.1.2] より矛盾が起こる。$\tau(G') > \tau(G)$ と仮定しても、同様の論法により矛盾に導かれる。故に、$\tau(G) = \tau(G')$ である。□

補題 60. 分解可能な試験函数 $f=\otimes_v f_v\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}),\omega)$, $f'=\otimes_v f'_v\in\mathcal{H}(G'(\mathbb{A}),\omega)$ が与えられ、任意の素点 v において $f_v\leftrightarrow f'_v$ が成り立つとする。更に、$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}\cap\Sigma_{\mathbb{R}}$ に対しては、f_v, f'_v は補題 *55(2)* の条件を満たす試験函数の組とする。このとき、

$$\operatorname{tr}R_{\mathrm{res}}(f)=\operatorname{tr}R_{\mathrm{sp}}(f'),\qquad \operatorname{tr}R_{\mathrm{cus}}(f)=\operatorname{tr}R_0(f')$$

である。

Proof: $R_{\mathrm{sp}}(f')$ の定義から容易に、

$$R_{\mathrm{sp}}(f')=\tau(G')^{-1}\sum_{\eta^2=\omega}\int_{Z(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})}f'(g')\,\eta(\nu_D(g'))\,\mathrm{d}\mu_{Z(\mathbb{A})\backslash G'(\mathbb{A})}(g')$$

が分かる。この表示式と (6.2) および補題 57 から、

$$\tau(G')\operatorname{tr}R_{\mathrm{sp}}(f')=\tau(G)\operatorname{tr}R_{\mathrm{res}}(f)$$

が従う。そこで定理 59 を使えば $\operatorname{tr}R_{\mathrm{sp}}(f')=\operatorname{tr}R_{\mathrm{res}}(f)$ を得る。この関係式と (6.7) および定理 59 より、$\operatorname{tr}R_{\mathrm{cus}}(f)=\operatorname{tr}R_0(f')$ が従う。□

補題 61. (Main Lemma): S を素点の有限集合で $\Sigma_{\mathfrak{A}}$ を含むとする。各 $v\in\Sigma-S$ に対して $G(F_v)$ の既約ユニタリー表現 $\tau_v\in\Pi(G(F_v),\omega_v)$ を殆どすべての $v\in\Sigma-S$ で $\tau^{\mathbf{K}_v}\neq 0$ となるように指定して、$\tau^S=\bigotimes_{v\in\Sigma-S}\tau_v$ とおく。

$$\mathcal{U}(\tau^S)=\{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)|\,\pi_v\cong\tau_v\ (\forall v\in\Sigma-S)\,\},$$
$$\mathcal{U}'(\tau^S)=\{\sigma\in\Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)|\,\sigma_v\cong\tau_v\ (\forall v\in\Sigma-S)\,\}$$

とする。各素点 $v\in S$ ごとに与えられた函数の matching pair $(f_v,f'_v)\in\mathcal{H}(G(F_v),\omega_v)\times\mathcal{H}(G'(F_v),\omega_v)$（ただし、$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}\cap\Sigma_{\mathbb{R}}$ に対しては、f_v, f'_v は補題 55(2) の条件を満たす試験函数の組）に対して、等式

$$\sum_{\pi\in\mathcal{U}(\tau^S)}\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\pi_v(f_v)=\sum_{\sigma\in\mathcal{U}'(\tau^S)}\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\sigma_v(f'_v)$$

が成り立つ。

Proof: ([12, Lemma (8.19)]) $G^S_{\mathbb{A}}$ を $G(F_v)\cong G'(F_v)\,(v\in\Sigma-S)$ の制限直積群とする。$\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)$ を制限テンソルに分解して $\pi\cong\hat{\bigotimes}_v\pi_v$ と書き、$\pi^S=\bigotimes_{v\in\Sigma-S}\pi_v$ と定義する。同様に、, $\sigma\in\Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)$ を制限テンソルに分解して σ^S を決める。すると、

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}R_{\mathrm{cus}}(f)-\operatorname{tr}R_0(f')&=\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)}\{\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\pi_v(f_v)\}\operatorname{tr}\pi^S(f^S)-\sum_{\sigma\in\Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)}\{\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\sigma_v(f'_v)\}\operatorname{tr}\sigma^S(f^S)\\&=\sum_{\rho\in\widehat{(G^S_{\mathbb{A}})}}\left\{\sum_{\pi\in\mathcal{U}(\rho)}\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\pi_v(f_v)-\sum_{\sigma\in\mathcal{U}'(\rho)}\prod_{v\in S}\operatorname{tr}\sigma_v(f'_v)\right\}\operatorname{tr}\rho(f^S)\end{aligned}$$

であり、補題 60 より、これは試験函数の任意の matching pair(f,f') に対して消える。補題 31 より結論が従う。□

主定理の証明には関係ないが、ここで玉河数 $\tau(G)$、$\tau(G')$ の具体的な値を決定しておこう。

定理 62. $\tau(G)=\tau(G')=2$ である。

Proof: 定理 59 より $\tau(G)=2$ を示せば十分である。[31, 命題 49] において、岩澤分解を使って正規化した $G(\mathbb{A})$ の Haar 測度 $\mathrm{d}^{\mathrm{IW}}g$ に関して $\mathrm{vol}_{\mathrm{IW}}(Z^+_\infty G(F)\backslash G(\mathbb{A}))=2\Delta_F^{1/2}\,\pi^{r_2}\zeta_F(2)\,\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)$ を示した。ただし、$r_2=\sharp\Sigma_{\mathbb{C}}$ である。$\mathrm{vol}(Z^+_\infty Z(F)\backslash Z(\mathbb{A}))=\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)$ なので、

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{IW}}(Z(\mathbb{A})\backslash G(F)\backslash G(\mathbb{A}))=2\Delta_F^{1/2}\pi^{r_2}\zeta_F(2)\tag{6.15}$$

が得られる。中心 Z に関連する群の Haar 測度の正規化は [31] と同じものが採用されていることに注意しよう。あとは、$\mu_{G(\mathbb{A})}$ と $\mathrm{d}^{\mathrm{IW}}g$ の比例定数を決定すればよい。$v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば、$\mu_{G(F_v)}(\mathbf{K}_v)=\zeta_{F,v}(2)^{-1}\,q_v^{-2d_v}$ であった。($\because\ \mathrm{vol}(\mathfrak{o}_v)=q_v^{-d_v/2}$)　一方、$\mathrm{d}^{\mathrm{IW}}g_v$ の構成に使った $F_v^\times$ の測度に対して $\mathrm{vol}(\mathfrak{o}_v^\times)=q_v^{-d_v/2}$ なので、$\mathrm{vol}_{\mathrm{IW}}(\mathbf{K}_v)=q_v^{-3d_v/2}$ が簡単に分かる。よって、$\mathrm{d}\mu_{G(F_v)}(g_v)=\zeta_{F,v}(2)^{-1}q_v^{-d_v/2}\,\mathrm{d}^{\mathrm{IW}}g_v$ を得る。無限素点では、補題 12 における定数 C_v によって $\mathrm{d}\mu_{G(F_v)}(g_v)=C_v\,\mathrm{d}^{\mathrm{IW}}g_v$ である。$v\in\Sigma_{\mathbb{R}}$ ならば $C_v=\zeta_{F,v}(2)^{-1}$, $v\in\Sigma_{\mathbb{C}}$ ならば $C_v=\zeta_{F,v}(2)^{-1}\pi^{-1}$ が容易に分かる。以上より、

$$\mathrm{d}\tilde{\mu}_{G(\mathbb{A})}(g)=\zeta_F(2)^{-1}\,\Delta_F^{-1/2}\,\pi^{-r_2}\,\mathrm{d}^{\mathrm{IW}}g \tag{6.16}$$

(6.15), (6.16) から

$$\tau(G)=\mu_{G(\mathbb{A})}(Z(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A}))=2$$

となる。□

6.6. **大域対応の構成.**

命題 63. $\sigma\in\Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)$ とする。

(1) 性質 (5.1) を満たす $\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)$ が唯ひとつ存在する。
(2) (1) の π に対して、$\pi_v\in\Pi_2(G(F_v),\omega_v)$ $(\forall\,v\in\Sigma_{\mathfrak{A}})$ である。

Proof: $S=\Sigma_{\mathfrak{A}}$ として、$\sigma^S=\{\sigma_v\}_{v\in\Sigma-S}$ とする。補題 61 より、$v\in S$ における任意の試験函数の matching pair (f_v,f_v') に対して

$$\sum_{\pi\in\mathcal{U}(\sigma^S)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}\,\pi_v(f_v)=\sum_{\pi'\in\mathcal{U}'(\sigma^S)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}\,\pi_v'(f_v') \tag{6.17}$$

である。$\sharp\mathcal{U}(\sigma^S)=1$ を示せばよい。GL(2) の強重複度 1 定理から $\sharp\mathcal{U}(\sigma^S)\leqslant 1$ は分かっている。従って、適当な (f_v,f_v') に対して、上の等式の右辺が零でないことが示せれば (1) の証明は終わる。各 $v\in S$ について、零でないベクトル $\xi_v\in\mathcal{V}_{\sigma_v}$ を選び、$f_v'(g_v')=d(\sigma_v)\,\phi_{\xi_v,\xi_v}(\sigma_v$ の行列係数) とする。補題 56 および補題 55(2) より $f_v\leftrightarrow f_v'$ となる E 型函数 $f_v\in\mathcal{H}(G(F_v),\omega_v)$ が存在する。補題 43(2) より、$\mathrm{tr}\pi_v'(f_v')=\delta_{\pi_v',\sigma_v}$ なので、等式 (6.17) の右辺は $\pi_v'\cong\sigma_v\,(\forall v\in\Sigma)$ となる $\pi'\in\Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)$ の個数 $m_0(\sigma)$ に一致する。$\sigma\in\Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)$ だから $m_0(\sigma)\geqslant 1$ である。これで、(1) が示せた。

さて、$\mathcal{U}(\sigma^S)=\{\pi\}$ としよう。π はカスプ保型表現なので、π_v は無限次元でなければならない。$v\in\Sigma_{\mathfrak{A}}$ に対して、$\pi_v\notin\Pi_2(G(F_v),\omega_v)$ となったとすると、既約ユニタリー表現の分類から π_v は既約主系列表現となる。よって補題 32 から $\mathrm{tr}\,\pi_v(g)=0\,(g\in G(F_v)_{\mathrm{ell}}-Z(F_v))$ である。このことと、f_v は E 型函数であることより、Weyl の積分公式

$$\mathrm{tr}\,\pi_v(f_v)=\frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_{G(F_v)}}\int_{T-Z(F_v)}[\mathrm{tr}\,\pi_v](t)\,\Phi_v(t,f_v)\,D_T(t)\,\mathrm{d}\mu_{Z(F_v)\backslash T}(t) \tag{6.18}$$

の右辺は消える。したがって、等式 (6.17) の左辺は零になり、右辺が零でないことと矛盾する。よって、$\pi_v\in\Pi_2(G(F_v),\omega_v)$ $(\forall\,v\in S)$ が示せた。□

命題 63 より、写像

$$\mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}:\Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)\longrightarrow\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega) \tag{6.19}$$

が条件 (5.1) によって決まり、その像は

$$\Pi_{\mathrm{cus}}^{\mathfrak{A},\square}(G(\mathbb{A}),\omega)=\{\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)|\,\pi_v\in\Pi_2(G(F_v),\omega_v)\,(\forall\,v\in\Sigma_{\mathfrak{A}})\,\}$$

に含まれることが分かる。

6.7. 大域対応の像の決定.

命題 64. (1) $\pi \in \Pi^{\mathfrak{A},\square}_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)$ に対して、$\mathrm{JL}(\sigma) = \pi$ を満たす $\sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)$ が唯ひとつ存在する。写像 (6.19) は単射でその像は $\Pi^{\mathfrak{A},\square}_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)$ に一致する。

(2) $\pi = \mathrm{JL}(\sigma)$ とする。$v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において、$\gamma \leftrightarrow \gamma'$ なる任意の正則楕円元対 $(\gamma,\gamma') \in G(F_v)_{\mathrm{ell}} \times G'(F_v)_{\mathrm{ell}}$ に対し

$$\mathrm{tr}\,\pi_v(\gamma) = -\mathrm{tr}\,\sigma_v(t')$$

が成立する。

Proof: $S = \Sigma_{\mathfrak{A}}$ とする。 $\pi \cong \hat{\bigotimes}_v \pi_v$ と制限テンソル積に分解すると、仮定より、任意の $v \in S$ において $\pi_v \in \Pi_2(G(F_v),\omega_v)$ である。$v \in S$ に対して、$\sigma_v \in \Pi(G'(F_v),\omega_v)$ を任意に与え、$a(\sigma_v) = \langle \mathrm{tr}\,\pi_v, \mathrm{tr}\,\sigma_v\rangle_{\mathrm{ell}}$ とおく。σ_v の表現空間の零でない単位ベクトル ξ'_v をとり、行列係数 $f'_v = d(\sigma_v)\,\phi_{\xi'_v,\xi'_v}$ を考える。補題 56 および補題 55(2) から $f_v \leftrightarrow f'_v$ なる E 型函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v),\omega_v)$ が存在する。次のように $\mathrm{tr}\,\pi_v(f_v) = a(\sigma_v)$ が示される。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\,\pi_v(f_v)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_{G(F_v)}} \int_{T-Z(F_v)} [\mathrm{tr}\,\pi_v](t)\,\Phi_v(t,f_v)\,D_T(t)\,\mathrm{d}\mu_{Z(F_v)\backslash T}(t) \qquad (\because \text{Weyl の積分公式から})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{E\in\mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} [\mathrm{tr}\,\pi_v](\iota_E^{G(F_v)}(t))\,\Phi_v(\iota_E^{G(F_v)}(t),f_v)\,\delta_E(t)\,\mathrm{d}\mu_{F_v^\times\backslash E^\times}(t)\\
&\qquad\qquad (\because f_v \text{ は E 型函数なので非楕円軌道積分は消滅})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{E\in\mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} [\mathrm{tr}\,\pi_v](\iota_E^{G(F_v)}(t))\,\Phi_v(\iota_E^{G'(F_v)}(t),f'_v)\,\delta_E(t)\,\mathrm{d}\mu_{F_v^\times\backslash E^\times}(t)\\
&\qquad\qquad (\because f_v \leftrightarrow f'_v \text{ より楕円軌道積分は一致})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{E\in\mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} [\mathrm{tr}\,\pi_v](\iota_E^{G(F_v)}(t))\,\overline{[\mathrm{tr}\,\sigma_v]}(\iota_E^{G'(F_v)}(t))\,\delta_E(t)\,\mathrm{d}\mu_{F_v^\times\backslash E^\times}(t) \qquad (\because \text{命題 } 43(1))\\
&= \langle \mathrm{tr}\,\pi_v, \mathrm{tr}\,\sigma_v\rangle_{\mathrm{ell}} = a(\sigma_v)
\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz 不等式と命題 48 を使えば

$$|a(\sigma_v)| = |\mathrm{tr}\,\pi_v(f_v)| \leqslant \|\mathrm{tr}\pi_v\|\,\|\mathrm{tr}\,\sigma_v\| \leqslant 1$$

である。こうして得られた matching pairs の族 $f_v \leftrightarrow f'_v\,(v\in S)$ に対して補題 61 を適用しよう。(τ^S としては $\pi^S = \{\pi_v\}_{v\in\Sigma-S}$ を採用する。) GL(2) の強重複度 1 定理から左辺の和には π のみしか現れず、右辺では f'_v が σ_v の行列係数なので $\mathrm{tr}\,\pi'_v(f'_v) = \delta_{\pi'_v,\sigma_v}$（補題 43(2)）であることに注意すれば、

$$\prod_{v\in S} a(\sigma_v) = \sharp\mathcal{U}'(\pi^S,\sigma_S) \tag{6.20}$$

を得る。ただし、

$$\mathcal{U}'(\pi^S,\sigma_S) = \{\pi' \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)\,|\,\pi'_v \cong \sigma_v, (\forall\,v\in S),\ \pi'_v \cong \pi_v\,(\forall\,v\in\Sigma - S)\,\}$$

である。さて、$|a(\sigma_v)| \leqslant 1\,(\forall\,v\in S)$ であったから、(6.20) の左辺は 1 以下である。一方、右辺は自然数なので、

$$\sharp\mathcal{U}'(\pi^S,\sigma_S) \leqslant 1 \ (\text{等号成立の条件は } a(\sigma_v) \neq 0\,(\forall\,v\in S)) \tag{6.21}$$

が分かった。実際、等号を成立させる $\sigma_S = \{\sigma_v\}_{v\in S}$ の選択が可能なことは次のように示せる：補題 48 から、$\mathrm{tr}\,\pi_v$ は $L^2(G(F_v)_{\mathrm{ell}},\omega_v)$ の単位ベクトルであり、$\{\mathrm{tr}\,\pi'_v\,|\,\pi'_v \in \Pi_0(G'(F_v)),\omega_v\,\}$ は $L^2(G'(F_v)_{\mathrm{ell}},\omega_v) \cong L^2(G(F_v)_{\mathrm{ell}},\omega_v)$ の完全正規直交系をなす。よって、

$$a(\sigma_v^0) = \langle \mathrm{tr}\,\pi_v, \mathrm{tr}\,\sigma_v^0\rangle_{\mathrm{ell}} \neq 0$$

なる表現 $\sigma_v^0 \in \Pi_0(G'(F_v),\omega_v)$ が存在する。$v \in S \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ のときは局所対応が既に示されているので、$\sigma_v = \sigma_{\rm c}(l_1,l_2)$ とすると、$a(\sigma_v) \neq 0$ を満たす σ_v は $\sigma_v^0 = \sigma(l_1,l_2)$ のみとなり、正則楕円元上で $\mathrm{tr}\,\pi_v = \mathrm{tr}\,\sigma_v^0$ が成り立つ。

そこで、$\mathcal{U}'(\pi^S,\{\sigma_v^0\}_{v\in S}) = \{\sigma\}$ とおくと $\mathrm{JL}(\sigma) = \pi$ であることが結論される。JL の単射性を見るには、$\sharp\mathcal{U}'(\pi^S) = 1$ を示せばよい。$\sharp\mathcal{U}'(\pi^S)$ は $\sigma^S = \{\sigma_v\}_{v\in S} \in \prod_{v\in S}\Pi(G'(F_v),\omega_v)$ に亘る $\sharp\mathcal{U}'(\pi^S,\sigma_S)$ の和なので、(6.21) より $\sharp\mathcal{U}'(\pi^S) = \sharp\{\sigma_S |\, a(\sigma_v) \neq 0\,(\forall\, v \in S)\,\}$ である。σ_S が $a(\sigma_v) \neq 0\,(\forall v \in S)$ を満たすとすると、(6.20), (6.21) から $|a(\sigma_v)| = 1\,(\forall v \in S)$ が従う。補題 48 より、$L^2(G(F_v)_{\rm ell},\omega_v)$ において $\mathrm{tr}\pi_v = \sum_{\pi'_v} a(\pi'_v)\,\mathrm{tr}\pi'_v$ と展開され、Perseval 等式から、

$$1 = \|\mathrm{tr}\,\pi_v\|^2_{\rm ell} = |a(\sigma_v)|^2 + \sum_{\pi'_v \not\cong \sigma_v} |a(\pi'_v)|^2$$

である。$|a(\sigma_v)| = 1$ より右辺第二項は零である。よって、$G(F_v)_{\rm ell} - Z(F_v) \cong G'(F_v)_{\rm ell} - Z(F_v)$ 上で $\mathrm{tr}\,\pi_v = a(\sigma_v)\,\mathrm{tr}\,\sigma_v$ である。あとは $a(\sigma_v) = -1\ (\forall\, v \in S\cap\Sigma_{\rm fin})$ を示せば証明が終わる。実際、もしこれが言えると、補題 48 から $\sigma_v = \sigma_v^0\ (v \in S\cap\Sigma_{\rm fin})$ がわかり、$v \in S\cap\Sigma_{\mathbb{R}}$ においては既に $\sigma_v = \sigma_v^0$ であったことを合わせると、$\sharp\mathcal{U}'(\pi^S) = \sharp\{\,\{\sigma_v^0\}_{v\in S}\,\} = 1$ となる。

以下、$v \in S\cap\Sigma_{\rm fin}$ とする。f_{π_v} を π_v の擬行列係数とし、f'_v を上のとおり σ_v の行列係数とすれば、補題 44 より

$$\Phi_v(\iota_E^{G(F_v)}(t), f_{\pi_v}) = a(\sigma_v)\,\Phi'_v(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f'_v), \qquad t \in E^\times - F_v^\times \tag{6.22}$$

である。π_v が超尖点表現であれば $f_{\pi_v} = d(\pi_v)\phi_{\xi,\xi}$ (ξ は π_v の零でないベクトル）ととることが出来る。$t=1$ での極限を見ると、germ 展開から

$$\Gamma_1^T\, f_{\pi_v}(1) = a(\sigma_v)\,\mathrm{vol}(Z(F_v)\backslash G'(F_v))\, f'_v(1)$$

この等式と $f_{\pi_v}(1) = d(\pi_v)$ および $\Gamma_1^T = -\mathrm{vol}(Z(F_v)\backslash G'(F_v))$((2.6)) をあわせると、$-d(\pi_v) = a(\sigma_v)\,d(\sigma_v)$ となる。$|a(\sigma_v)| = 1$ かつ $d(\pi_v),\, d(\sigma_v) > 0$ だから $a(\sigma_v) = -1$ および $d(\pi_v) = d(\sigma_v)$ が結論される。$\pi_v = \mathrm{St}_{G(F_v)}(\eta_v)$ であれば、(6.22) の左辺は -1 に等しい。$t=1$ での極限を見ると、
$-1 = a(\sigma_v)\,\mathrm{vol}(Z(F_v)\backslash G'(F_v))\,d(\sigma_v)$ となり、上と同様の論法で、$a(\sigma_v) = -1$ が結論される。

注意 : 上の証明の最後の段階で、π_v が超尖点表現の場合には形式次数の関係 $d(\pi_v) = d(\sigma_v)$ が示されている。π_v が Steiberg 表現の捻りの場合には、補題 36 により $d(\mathrm{St}(\eta)) = \mathrm{vol}(F_v^\times\backslash D_v^\times)^{-1} = d(\eta_v)$ である。□

系 52 の証明: G' における強重複度 1 定理を導こう。$\sigma,\, \sigma' \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}),\omega)$ に対して素点の有限集合 S があって $\sigma_v \cong \sigma'_v\ (\forall v \notin S)$ とする。$\Sigma_\infty \cup \Sigma_{\mathfrak{A}} \subset S$ としてよい。$v \notin S$ ならば $\mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\pi)_v \cong \sigma_v \cong \sigma'_v \cong \mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma')_v$ となる。GL(2) の強重複度 1 定理から $\mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma')$ が従う。$\mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}$ の単射性をつかえば、$\sigma = \sigma'$ を得る。□

6.8. 局所データの大域データへの埋め込みの存在.

補題 65. F_0 を標数 0 の局所体、$\omega_0 : F_0^\times \to \mathbb{C}^1$ を指標とする。このとき、ある有限次元代数体 F、$F^\times$ のイデール類群指標 ω および稠密像を持つ体の埋め込み $\iota_0 : F \to F_0$ が存在して、v_0 を ι_0 の定める F の素点として $F_{v_0} = F_0$ と見做すとき、$\omega_{v_0} = \omega_0$ となる。

命題 66. F を有限次元代数体、ω をイデール類群指標とする。$G = \mathrm{GL}(2)$ とする。S を有限素点の有限集合とし、各 $v \in S$ において離散系列表現 $\pi_v^0 \in \Pi_2(G(F_v),\omega_v)$ が与えられているとする。このとき、既約保型カスプ表現 $\pi \in \Pi_{\rm cus}(G(\mathbb{A}),\omega)$ が存在して、$\pi_v \cong \pi_v^0\ (\forall v \in S)$ となる。

Proof : ([11, VI §3]) $\Sigma - S$ から３つの有限素点 $w_0,\, w_1,\, w_2$ を選ぶ。命題 5(2) より $\Sigma_{\mathfrak{A}} = \{w_1, w_2\}$ となる F 上の四元数体 $\mathfrak{A}$ が存在する。$G' = G_{\mathfrak{A}}$ とおく。$\pi^0_{w_1} \in \Pi(G'(F_{w_1}),\omega_{w_1})$ を２次元以上の既約表現とする。$(Z(F_{w_1})\backslash G'(F_{w_1})$ はコンパクトな非アーベル群なので、このような $\pi^0_{w_1}$ は存在する。f'_{w_1} を $\pi^0_{w_1}$ の行列係数の形式次数倍とする。$f'_{w_0} \in \mathcal{H}(G'(F_{w_0}),\omega_{w_0})$

を $\operatorname{supp}(f'_{w_0}) \subset G'(F_{w_0})_{\mathrm{ell}} - Z(F_{w_0})$ かつ $\mathcal{N}_{w_0} = \{\delta_{w_0} \in G'(F_{w_0})_{\mathrm{ell}} - Z(F_{w_0}) \,|\, \Phi_{w_0}(\delta_{w_0}, f'_{w_0}) \neq 0\,\}$ が空でないように選ぶ。さらに、各 $v \in S$ に対して、f'_v を $\pi^0_v \in \Pi_2(G'(F_v), \omega_v)$ の擬行列係数とし、$v \in \Sigma - (S \cup \{w_1, w_0\})$ に対しては $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ を任意にとる (以下でもっと特殊化される)。$f' = \otimes_v f'_v$ として $G'(\mathbb{A})$ 上の試験函数 $f' \in \mathcal{H}(G'(\mathbb{A}), \omega)$ を構成し、跡公式 (6.5) を適用する。(6.5) 左辺の第 2 項に関しては、任意の 1 次元表現 $\pi'_{w_1} = \eta_{w_1} \circ \det \in \Pi(G'(F_{w_1}, \omega_{w_1})$ に対して、行列係数の直交関係式 (補題 34) から $\operatorname{tr} \pi'_{w_1}(f_{w_1}) = 0$ となり $\operatorname{tr} R_{\mathrm{sp}}(f') = 0$ が従う。左辺の第 1 項では、補題 44 によって、$\pi' \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ が集合

$$\mathcal{U}' = \{\sigma \in \Pi_0(G(\mathbb{A}), \omega) |\, \sigma_v \cong \pi^0_v\, (\forall\, v \in S \cup \{w_1\})\,\}$$

に属さなければ $\operatorname{tr} \pi(f') = 0$ になる。また、$f_{w_0}(1) = 0$ より、(6.5) 右辺の第一項も消滅する。これらを考慮に入れると、(6.5) は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{U}'} [\operatorname{tr} \sigma]\,(f') = \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_{G'(F)} - Z(F)} \operatorname{vol}(Z(\mathbb{A})\, G'_\gamma(F) \backslash G'_\gamma(\mathbb{A}))\, \Phi'_{\mathbb{A}}(\gamma, f')$$

となる。もし、$f'_v\,(v \notin S \cup \{w_1\})$ を上手く選ぶことによって、$\mathcal{U}' \neq \varnothing$ が示されたとしよう。任意の要素 $\sigma \in \mathcal{U}'$ の写像 $\mathrm{JL} : \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega) \to \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ による像 π が求めるものである。

<u>$\mathcal{U}' \neq \varnothing$ なる $f'_v\,(v \notin S \cup \{w_1\})$ の構成法</u>：ある $\gamma_0 \in \mathcal{E}_{G'(F)} - Z(F)$ が存在して

$$\Phi'_{\mathbb{A}}(\gamma_0, f') \neq 0, \qquad \Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f') = 0\, (\forall \gamma \neq \gamma_0) \tag{6.23}$$

となるように作れれば十分である。$v \in S$ ならば、命題 44 より $\Phi'_v(\delta_v, f'_v) = \overline{\operatorname{tr} \pi^0_v(\delta_v)}$ $(\forall\, \delta_v \in G'(F_v)_{\mathrm{ell}} - Z(F_v))$ で、この式の右辺は補題 48 から恒等的に零ではない。よって、$\mathcal{N}_v = \{\delta_v \in G'(F_v)_{\mathrm{ell}} - Z(F_v) |\, \Phi'_v(\delta_v, f'_v) \neq 0\,\}$ は空でない開集合である。同様にして、$\Phi'_{w_1}(\delta_{w_1}, f'_{w_1}) \neq 0\, (\forall \delta_{w_1} \in \mathcal{N}_{w_1})$ なる空でない開集合 $\mathcal{N}_{w_1} \subset G'(F_{w_1}) - Z(F_{w_1})$ が存在する。$G'(F)$ の $\prod_{v \in S \cup \{w_1, w_0\}} G'(F_v)$ における像は稠密なので、$G'(F) \cap \prod_{v \in S \cup \{w_1, w_0\}} \mathcal{N}_v$ は少なくとも 1 つ要素 γ_0 を含む。

$$\Sigma^* = \{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - (S \cup \{w_1, w_0\}) |\, \mathcal{O}_{G(F_v)}(\gamma_0) \cap \mathbf{K}_v \neq \varnothing\,\}$$

とおく。$v \in \Sigma^*$ においては、f'_v を $zk \in Z(F_v)\mathbf{K}_v$ では $\omega_v(z)^{-1}$ に等しく、$Z(F_v)\mathbf{K}_v$ の外では零になる函数とする。$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} - (\Sigma^* \cup S \cup \{w_1, w_0\}$ においては、$\Phi'_v(\gamma_0, f'_v) \neq 0$ となるような函数 $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ を任意に選ぶ。すると、

$$\prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} \Phi'_v(\gamma_0, f'_v) \neq 0$$

である。さて、写像 $\mathrm{Ch} : Z(F) \backslash G(F) \to F^3$ を $g \in Z(F) \backslash G(F)$ に随伴表現 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{sl}(2,F)}(g)$ の特性多項式の係数を対応させる写像とする。$\prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} \Phi'_v(\gamma, f'_v) \neq 0$ であるとしよう。任意の $v \in \Sigma^*$ において $\mathrm{Ch}(\gamma)$ の F^3_v への像は $\mathfrak{o}^3_v$ に含まれ、$v \in S \cup \{w_1, w_0\}$ では $\mathrm{Ch}(\gamma)$ の F^3_v への像はコンパクト集合 $\mathrm{Ch}(\operatorname{supp}(f'_v))$ に含まれる。よって、γ に依存しない ある $\mathfrak{o}_F$-格子 $L \subset F^3_\infty$ が存在して $\mathrm{Ch}(\gamma)_\infty \in L$ となる。$\mathrm{Ch}(\gamma_0)_\infty \in L$ の F^3_∞ での微小近傍 V を $V \cap L = \{\gamma_0\}$ となるようにとる。$\mathcal{N}_\infty(\gamma_0) = \{g_\infty |\, \mathrm{Ch}(g_\infty) \in V\,\}$ は $Z(F_\infty) \backslash G(F_\infty)$ の $\mathrm{Ad}(G(F_\infty))$-不変開集合で γ_0 を含んでいる。よって、$f'_\infty = \prod_{v \in \Sigma_\infty} f'_v$ を台が $\mathcal{N}_\infty(\gamma_0)$ に含まれ、しかも、$\Phi'_\infty(\gamma_0, f'_\infty) \neq 0$ となるように選べる。これで、(6.23) を満たす試験函数 f' が構成された。□

6.9. **局所対応の構成 (非アルキメデス局所体の場合)**.

命題 67. F_0 を非アルキメデス的局所体、$\omega_0 : F_0 \to \mathbb{C}^1$ を指標とする。D を F_0 上の四元数体とする。任意の $\pi_0 \in \Pi_2(G(F_0), \omega_0)$ に対して、次の条件を満たす $\sigma_0 \in \Pi(D^\times, \omega_0)$ が唯ひとつ存在する：$\gamma \leftrightarrow \gamma'$ なる任意の正則楕円元対 $(\gamma, \gamma') \in G(F_0)_{\mathrm{ell}} \times D^\times_{\mathrm{ell}}$ に対して

$$[\operatorname{tr} \pi_0](\gamma) = -[\operatorname{tr} \sigma_0](\gamma') \tag{6.24}$$

$\mathrm{JL}_{F_0}(\pi_0) = \sigma_0$ によって定まる写像 $\mathrm{JL}_{F_0} : \Pi_2(G(F_0), \omega_0) \to \Pi(D^\times, \omega_0)$ は全単射である。

Proof: 補題 65 より、ある有限次元代数体 F、$F^\times$ のイデール類群指標 ω および F の有限素点 v_0 が存在して、$F_{v_0}=F_0$, $\omega_{v_0}=\omega_0$ となる。ω_{v_1} が不分岐となる $v_1\in\Sigma_{\mathrm{fin}}-\{v_0\}$ を固定する。ω_{v_1} が不分岐なので、$\eta_{v_1}^2=\omega_{v_1}$ を満たす指標 $\eta_{v_1}:F_{v_1}^\times\to\mathbb{C}^1$ が存在する。さて、$\Sigma_{\mathfrak{A}}=\{v_0,v_1\}$ となる F 上の四元数体 $\mathfrak{A}$ をとろう (補題 5)。補題 66 から $\pi_{v_0}\cong\pi_0$, $\pi_{v_1}\cong\mathrm{St}_{G(F_{v_1})}(\eta_{v_1})$ を満たすような既約カスプ保型表現 $\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}),\omega)$ がとれる。$\pi\in\Pi_{\mathrm{cus}}^{\mathfrak{A},\square}(G(\mathbb{A}),\omega)$ ゆえ、定理 51 から $\mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma)=\pi$ を満たす $\sigma\in\Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}),\omega)$ が存在する。そこで $\sigma_0=\sigma_{v_0}$ とおくと、命題 64 から (6.24) が成立する。π_0 に対して、(6.24) を満たすような σ_0 の一意性および対応 $\pi_0\mapsto\sigma_0$ の単射性は指標の直交関係式 (命題 48) から明らかである。

次に全射性を示そう。任意に $\sigma_0\in\Pi(G^{\mathfrak{A}}(F_{v_0},\omega_{v_0})$ をとる。$\dim\sigma_0=1$ ならば、$\sigma_0=\eta\circ\nu_D$ となる指標 $\eta:F_{v_0}^\times\to\mathbb{C}^1$ が存在する。この場合には、$\pi_0=\mathrm{St}_{G(F_{v_0})}(\eta)$ が $\mathrm{JL}_{F_0}(\pi_0)=\sigma_0$ を満たすことは、命題 37 から従う。

$\dim\sigma_0>1$ ならば、命題 66 の証明から、$\sigma\in\Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}),\omega)$ が存在して $\sigma_{v_0}\cong\sigma_0$ となることがわかる。そこで、$\mathrm{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma)$ を制限テンソルに分解してその v_0-成分を π_0 とおくと、定理 51 から $\pi_0\in\Pi_2(G(F_{v_0},\omega_{v_0})$ となる。命題 64 から $\mathrm{JL}_{F_0}(\pi_0)=\sigma_0$ でなくてはならない。

□

References

[1] Arthur, J., Clozel, L., *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University (1989).

[2] Badulescu, A. I., *Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations*, Invent. Math. **172** (2008), 383–438.

[3] Badulescu, A. I., *Unitary dual of GL(n) at Archimedean places and global Jacquet-Langlands correspondence.* Compos. Math. **146** (2010), 1115-1164

[4] Bushnell, C.J., Henniart, G., *The local Langlands conjecture for* GL(2), Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **335**, Springer, 2006.

[5] Bump, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge studies in Advanced Mathematics: 55, Cambridge University Press (1998).

[6] Casselman, W,. *Introduction to the theory of admissible representations of* $\mathfrak{p}$*-adic groups*, preprint.

[7] Clozel, L., *Orbital integrals on p-adic groups: A proof of the Howe conjecture*, Ann. of Math, **129** (1989), 237–251.

[8] Deligne, P., Kazhdan, D., Vigneras, M.-F. *Representations des algebres centrales simples p-adiques*, 33–117, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984

[9] Duflo, P. M., Labesse, J,-P.,*Sur la formle des traces de Selberg*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4 serie, **4**, 193–284 (1971)

[10] Gelbart, Stephen S., *Automorphic forms on adele groups*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1975).

[11] Gelbart, Stephen S., *Lectures on the Arthur-Selberg trace formula*, University Lecture Series **9**, A.M.S. (1996).

[12] Gelbart, S., Jacquet, H., *Forms of GL*(2) *from the analytic point of view*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematrics Vol. 33 (1979), part 1, 213–251.

[13] Godement,R., Jacquet, H., *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics 260, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972

[14] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Lecture Notes in Mathematics **162**, Springer-Verlag Berlin, Heiderberg, New York (1970)

[15] Jacquet, H., Langlands, L.P.,*Automorphic forms on GL*(2), Lecture Notes in Mathematics, **114**, Springer-Verlag, Berline, Heiderberg, New York (1970).

[16] Knapp, A.W., *Theoretical aspects of the trace formula for* GL(2), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **61**, 355–405 (1997).

[17] Knapp, A.W., *Representation theory of semisimple groups, An over view based on examples*, Princeton University Press, Rrinceton New Jersey, (1986).

[18] 今野 拓也, 「GL_2 上の保型形式と標準 L 函数」, (第１６回整数論サマースクール報告集「保型 L 関数)

[19] Kottwitz, R., E., *Harmonic analysis on reductive p-adic groups and Lie algebras*, Clay Mathematics Proceedings, volume 4 (2005), 393–522.

[20] Langlands, R. P., *Base change for* GL(2), Ann. of Math. Studies **96**, Princeton University Press (1980).
[21] 織田 孝幸,「Selberg Trace Formula 入門」東大講義記録 (1990)
[22] Ramakrishnan, D., Valenza, R.J., *Fourier analysis on number fields*, Graduate Texts in Mathematics vol. 186, Springer (1998).
[23] Shalika, J., *On the space of cusp forms of a $\mathcal{P}$-adic Chevalley groups*, (1969) 262–278.
[24] Shalika, J., *A theorem on semi-simple p-adic groups*, Ann. of Math. **95** (1972), 226–242.
[25] Rogawski, Jonathan D, *Representations of GL(n) and division algebras over a p-adic field*, Duke Math. J. 50 (1983), no. 1, 161–196.
[26] 清水 英男, 「保型関数」岩波講座 基礎数学
[27] Shimizu, Hideo, *Theta series and automorphic forms on* GL_2, J. Math. Soc. Japan **24**, No.4 (1972), 638–683.
[28] Shimura, G., *Arithmetic of quadratic forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer (2010).
[29] Tate, J. *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Algebraic Number Theory, Academic Press (1990), 305–347.
[30] 都築 正男,「Eisenstein 級数の定数項（Langlands-Shahidi 理論への導入）」(第１６回整数論サマースクール報告集「保型 L 関数)
[31] 都築 正男, 若槻聡, 「GL(2) の跡公式」(本報告集)
[32] Vigneras, M.-F., *Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique*, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo **28**, Sec. 14 (1982), 945–961.
[33] Weil, A., *Basic number theory*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 144, Springer-Verlag New York Heiderberg Berlin, 1974.

〒 102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7-1
上智大学理工学部情報理工学科
都築 正男

GL(3) の跡公式

若槻 聡

このノートの目的は GL(3) のアーサー跡公式の粗い展開と細かい展開を解説することである．アーサー跡公式は一般の $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群で定式化されているので，GL(3) のみを説明するよりも一般論の枠組みで説明した方が全体像が分かりやすい．そこで，一般論について簡潔に説明した後に，連結簡約代数群が GL(3) である場合に具体的な例をいくつか与える形で跡公式を説明することにした．一般論に関しては全く証明を与えないが，具体的に記述するために必要な知識に関しては出来る限り言及した．GL(3) の具体的な例を通じて，群の階数が上がった場合の難しさや定式化の雰囲気を感じ取ってもらえると嬉しい．

もしアーサー跡公式を本格的に学ぶのであれば，現在は Arthur の「An introduction to the trace formula」[A1] を読むことがベストだと思う．このノートの内容の一般論の部分は，その [A1] を参考に書かれている．そして，[A1] に書かれている図や例を演習問題だと思うと，このノートの GL(3) に関する解説はそれらの解答例だと思うことができる．このノートがアーサー跡公式の勉強のお役に立てば幸いである．

目 次

1 代数群とルート系について

このセクションでは, $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群に関する放物型部分群や Levi 部分群について説明する. このノートの内容は $\mathbb{Q}$ へのスカラーの制限により任意の代数体上の連結簡約代数群に適用できることに注意する. **有理数体やアデール等の基本的な記号に関しては $F = \mathbb{Q}$ とした場合の [TW] の記号と同様とする.** 代数群の基礎的な事柄に関しては, 例えば [Bor] や [PR] を参照されたい. ただし, このノートでは線型代数群のことを略して代数群と言っている.

1.1 一般の場合

1.1.1 基本的な設定と記号

G を $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群とする. A_G を G の maximal $\mathbb{Q}$-split central torus とし, そして $A_G(\mathbb{R})^0$ を $A_G(\mathbb{R})$ の 1 の連結成分とする. $X(G)_\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された G から GL(1) への有理準同型の加法群とする. ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について A_G は $\mathrm{GL}(1)^k$ と $\mathbb{Q}$ 上同型となる. このとき, $X(G)_\mathbb{Q}$ は階数 k の自由アーベル群である. そして, k 次元実ベクトル空間 $\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X(G)_\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ を得る. また $\mathfrak{a}_G^* = X(G)_\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R}$ は $\mathfrak{a}_G$ の双対空間となる. 以下, $a \in \mathfrak{a}_G$, $a^* \in \mathfrak{a}_G$ について, $\langle a, a^* \rangle = a(a^*)$ と記号を定める. 全射 $H_G : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_G$ を

$$\langle H_G(x), \chi \rangle = \log |\chi(x)|, \quad x \in G(\mathbb{A}),\ \chi \in X(G)_\mathbb{Q}$$

によって定義する. $G(\mathbb{A})$ の正規部分群 $G(\mathbb{A})^1$ を

$$G(\mathbb{A})^1 = \{x \in G(\mathbb{A}) \mid H_G(x) = 0\}$$

と定める. このとき, $G(\mathbb{A}) \cong G(\mathbb{A})^1 \times A_G(\mathbb{R})^0$ を得る.

M が G の $\mathbb{Q}$ 上の Levi 部分群であるとは, G のある $\mathbb{Q}$ 上の放物型部分群 P について M が P の Levi 部分群になることを言う. M を G の $\mathbb{Q}$ 上の Levi 部分群とする. M は $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群であることに注意する. $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}^G(M)$ を M を含む G の $\mathbb{Q}$ 上の Levi 部分群全体の集合とする. $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}^G(M)$ を M を含む G の $\mathbb{Q}$ 上の放物型部分群全体の集合とする. $P \in \mathcal{F}(M)$ の Levi 分解を $P = M_P N_P$, ($M_P \in \mathcal{L}(M)$, N_P は unipotent radical) として定める. M_P は一意的に定まることに注意する. 最後に $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}^G(M) = \{P \in \mathcal{F}(M) \,|\, M_P = M\}$ とおく. $\mathcal{L}(M)$, $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{P}(M)$ はすべて有限集合である.

G の $\mathbb{Q}$ 上の極小 Levi 部分群 M_0 を固定する. $\mathcal{L} = \mathcal{L}^G = \mathcal{L}(M_0)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^G = \mathcal{F}(M_0)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^G = \mathcal{P}(M_0)$ と置く. 各素点 v に対して $\mathbf{K}_v \subset G(\mathbb{Q}_v)$ を [A6, p.9] で定義された "admissible relative to M_0" と呼ばれる極大コンパクト群の一つとする. そして, $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト群 $\mathbf{K}$ を

$$\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$$

と固定する. この $\mathbf{K}$ も "admissible relative to M_0" と呼ばれる. このとき任意の $P \in \mathcal{P}$ について $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})\mathbf{K}$ が成り立つ. さらに任意の $M \in \mathcal{L}$ についても, $\mathbf{K} \cap M(\mathbb{A})$ は $M(\mathbb{A})$ における "admissible relative to M_0" となる. $P \in \mathcal{F}$ に対して, $A_P = A_{M_P}$, $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$ と置く. 各 $P \in \mathcal{F}$ について, $G(\mathbb{A})$ から $\mathfrak{a}_P$ への全射 H_P を

$$H_P(nmk) = H_{M_P}(m), \quad n \in N_P(\mathbb{A}),\ m \in M_P(\mathbb{A}),\ k \in \mathbf{K}$$

によって定義する.

1.1.2 $\mathfrak{a}_M$ と $\mathfrak{a}_M^*$ の直和分解

$M \in \mathcal{L}$ について, 制限 $X(M)_{\mathbb{Q}} \to X(A_M)_{\mathbb{Q}}$ は単射なので, 線型同型

$$\mathfrak{a}_M^* = X(M)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R} \to X(A_M)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R} = \mathfrak{a}_{A_M}^* \tag{1.1}$$

を得る. 次に $M_1, M_2 \in \mathcal{L}$, $M_1 \subset M_2$ について考える. このとき次のような $\mathbb{Q}$ 上の埋め込みが成り立つ.

$$A_{M_2} \subset A_{M_1} \subset M_1 \subset M_2.$$

制限 $X(M_2)_{\mathbb{Q}} \to X(M_1)_{\mathbb{Q}}$ は単射なので, 線型単射 $\mathfrak{a}_{M_2}^* \to \mathfrak{a}_{M_1}^*$ が得られ, この単射から線型全射 $\mathfrak{a}_{M_1} \to \mathfrak{a}_{M_2}$ を得る. また, この線型単射により $\mathfrak{a}_{M_2}^*$ は $\mathfrak{a}_{M_1}^*$ の部分空間となる. 制限 $X(A_{M_1})_{\mathbb{Q}} \to X(A_{M_2})_{\mathbb{Q}}$ は全射なので, 全射 $\mathfrak{a}_{A_{M_1}}^* \to \mathfrak{a}_{A_{M_2}}^*$ がその拡張から得られる. よって (1.1) より線型全射 $\mathfrak{a}_{M_1}^* \to \mathfrak{a}_{M_2}^*$ が得られ, この全射から線型単射 $\mathfrak{a}_{M_2} \to \mathfrak{a}_{M_1}$ を

得る．この線型単射により $\mathfrak{a}_{M_2}$ は $\mathfrak{a}_{M_1}$ の部分空間となる．$\mathfrak{a}_{M_1}$ の部分空間 $\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2}$ を上述の線型全射 $\mathfrak{a}_{M_1} \to \mathfrak{a}_{M_2}$ の核として定める．つまり

$$\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2} = \{a_1 \in \mathfrak{a}_{M_1} \mid \langle a_1, a_2^* \rangle = 0,\ {}^\forall a_2^* \in \mathfrak{a}_{M_2}^*\}$$

と定める．定義より $\mathfrak{a}_{M_2} \cap \mathfrak{a}_{M_1}^{M_2} = \{0\}$ と $\mathfrak{a}_{M_1} = \mathfrak{a}_{M_2} + \mathfrak{a}_{M_1}^{M_2}$ が成り立つので, $\mathfrak{a}_{M_1}$ の直和分解

$$\mathfrak{a}_{M_1} = \mathfrak{a}_{M_2} \oplus \mathfrak{a}_{M_1}^{M_2}$$

を得る．さらに,

$$(\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2})^* = \{a_1^* \in \mathfrak{a}_{M_1}^* \mid \langle a_2, a_1^* \rangle = 0,\ {}^\forall a_2 \in \mathfrak{a}_{M_2}\}$$

と $\mathfrak{a}_{M_1}^*$ の部分空間 $(\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2})^*$ を定める．$(\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2})^*$ は $\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2}$ の自然な双対である．同様に $\mathfrak{a}_{M_1}^*$ の直和分解

$$\mathfrak{a}_{M_1}^* = \mathfrak{a}_{M_2}^* \oplus (\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2})^*$$

を得る．

$\mathfrak{a}_{M_2}$ と $\mathfrak{a}_{M_2}^*$ についての $\langle\ ,\ \rangle$ は, それぞれ部分空間としての $\mathfrak{a}_{M_1}$ と $\mathfrak{a}_{M_1}^*$ についての $\langle\ ,\ \rangle$ と一致することに注意しよう．線型単射 $\mathfrak{a}_{M_2}^* \to \mathfrak{a}_{M_1}^*$ は $\chi \otimes x \mapsto \chi|_{M_1} \otimes x$, $(\chi \in X(M_2)_{\mathbb{Q}},\ x \in \mathbb{R})$ で与えられる．ς を上で述べた $\mathfrak{a}_{M_1}^* \to \mathfrak{a}_{M_2}^*$ への線型全射とすると, $\varsigma(\sum_l \sigma_l \otimes x_l) = \sum_{l'} \sigma'_{l'} \otimes x'_{l'}$, $(\sigma_l \in X(M_1)_{\mathbb{Q}},\ \sigma'_{l'} \in X(M_2)_{\mathbb{Q}},\ x_l, x'_{l'} \in \mathbb{R})$ は $\sum_l \sigma_l|_{A_{M_2}} \otimes x_l = \sum_{l'} \sigma'_{l'}|_{A_{M_2}} \otimes x'_{l'}$ で定められる．線型単射 $\mathfrak{a}_{M_2} \to \mathfrak{a}_{M_1}$ は $a_2 \mapsto a_2 \circ \varsigma$, $(a_2 \in \mathfrak{a}_{M_2})$ で与えられる．したがって, 任意の $\chi \in X(M_2)_{\mathbb{Q}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathfrak{a}_{M_2}$ について

$$\langle a_2 \circ \varsigma\, ,\, \chi|_{M_1} \otimes x \rangle = a_2(\varsigma(\chi|_{M_1} \otimes x)) = \langle a_2\, ,\, \chi \otimes x \rangle$$

が成り立つので, 上述の注意が正しいことがわかる．

1.1.3 ルート系と標準放物型部分群

放物型部分群とルートについて考えよう．$\mathfrak{g}$ を G のリー代数とし, $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を随伴表現とする．つまり, $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$, $(g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$ と作用する．$P \in \mathcal{F}$ とする．P について, $\mathfrak{a}_P^* = \mathfrak{a}_{M_P}^*$, $\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2} = \mathfrak{a}_{M_{P_1}}^{M_{P_2}}$, $(\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})^* = (\mathfrak{a}_{M_{P_1}}^{M_{P_2}})^*$ と置く．$\mathfrak{n}_P$ を N_P のリー代数とする．$\alpha \in X(A_P)_{\mathbb{Q}}$ について, $\mathfrak{n}_P$ の $\mathbb{Q}$ 上定義された部分空間 $\mathfrak{n}_\alpha$ を

$$\mathfrak{n}_\alpha = \{X \in \mathfrak{n}_P \mid \mathrm{Ad}(a)X = \alpha(a)X,\ {}^\forall a \in A_P\}$$

と定める．そして,

$$\Phi_P = \{\alpha \in X(A_P)_{\mathbb{Q}} \mid \alpha \neq 0,\ \mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\}\}$$

とする．特に Φ_P は $X(A_P)_{\mathbb{Q}}$ の零でない元の有限集合である．このとき, $\mathfrak{n}_P$ は次の様に分解される．

$$\mathfrak{n}_P = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_P} \mathfrak{n}_\alpha.$$

自然な埋め込み

$$\Phi_P \subset X(A_P)_{\mathbb{Q}} \subset X(A_P)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R} = \mathfrak{a}_P^*$$

により, Φ_P は $\mathfrak{a}_P^*$ の部分集合となる．また定義より明らかに, 任意の $H \in \mathfrak{a}_G$ について $\alpha(H) = 0$, $(\alpha \in \Phi_P)$ なので, Φ_P は $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ に含まれる．$(\mathfrak{a}_P^G)^*$ の元 ρ_P を

$$\rho_P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_P} (\dim \mathfrak{n}_\alpha)\, \alpha$$

と定める．特に $e^{2\rho_P(H_P(x))}$, $(x \in P(\mathbb{A}))$ は P の module となる．

これより, **極小放物型部分群 $P_0 \in \mathcal{P}$ を一つ固定する．** そして, 集合 Φ_{P_0} について考えよう．$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$, $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_{M_0}^*$, $\mathfrak{a}_0^P = \mathfrak{a}_0^{M_P} = \mathfrak{a}_{M_0}^{M_P}$, $(\mathfrak{a}_0^P)^* = (\mathfrak{a}_0^{M_P})^* = (\mathfrak{a}_{M_0}^{M_P})^*$, $\Phi_0 = \Phi_{P_0}$ と置く．$\Phi_0 \cup (-\Phi_0)$ は $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ のルート系になる．以下, しばらく [Ser, Chapter V] を参考にルート系を簡単に復習する．ベクトル空間 V の部分集合 R が以下の条件を満たすとき, R は V のルート系であると言う．

(1) R は有限であり, V を生成する．そして, 0 を含まない．

(2) 各 $\alpha \in R$ について, R を保存する α についての対称 s_α が存在する．
(注. (1) より s_α は唯一定まる.)

(3) 各 $\alpha, \beta \in R$ について, $s_\alpha(\beta) - \beta$ は α のスカラー倍である．

ただし, 対称 s_α とは, $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ を満たし, かつ, s_α で固定される V の元の集合が V の超平面となる, V の自己同型写像のことを言う．これより, R を V のルート系とする．R の元をルートと呼ぶ．そして, $\alpha \in R$ について H_α を s_α で固定される V の超平面とする．$\alpha \in R$ に対して, s_α は位数 2 であり, H_α は V における $\mathbb{R}\alpha$ の補空間である．そして $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R$ となることも分かる．$V^\vee$ を V の双対空間とする．$\alpha \in R$ のコルート $\alpha^\vee \in V^\vee$ は, $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$ かつ $\alpha^\vee(x) = 0$ $({}^\forall x \in H_\alpha)$ を満たす唯一の元として定められる．よって,

$$s_\alpha(x) = x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha, \quad x \in V$$

が成り立つ．また W の作用で不変な V 上の正値対称双一次形式 $(\ ,\ )$ が存在することが知られている．この $(\ ,\ )$ で V から $V^\vee$ への同型写像が与えられる．この同型で V と $V^\vee$ を同一視したとき,

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}, \quad s_\alpha(x) = x - 2\frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

が成り立つ．$R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ と置くと, $R^\vee$ は $V^\vee$ のルート系となる．そして,

$$s_{\alpha^\vee}(y) = y - \langle y, \alpha \rangle \alpha^\vee, \quad y \in V^\vee$$

が成り立つ． 特に $\alpha, \beta \in R$, $x \in V$, $y \in V^\vee$ について $\langle s_{\alpha^\vee}(y), s_\alpha(x) \rangle = \langle y, x \rangle$ と $(s_\alpha(\beta))^\vee = s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee)$ が成り立つ．R のワイル群 W は s_α, $(\alpha \in R)$ によって生成される群

のことを言う．対応 $s_\alpha \mapsto s_{\alpha^\vee}$ により W は $V^\vee$ にも作用する．次の条件を満たすとき, R の部分集合 Δ は R の基本ルート系であるという．

(1) Δ は V の基底である．

(2) 各 $\beta \in R$ は, $\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha \alpha$ と書くことができる．
ただし, ${}^\forall\alpha \in \Delta$ について, $m_\alpha \in \mathbb{Z}$ はすべて 0 以上もしくは 0 以下とする．

ルート系 R に対して基本ルート系 Δ は必ず存在する．これより Δ を R の基本ルート系とする．Δ の元を単純ルートと言う．$\beta \in R$ について上の (2) の記述で $\mathfrak{m}_\alpha$ がすべて 0 以上になる場合, β を正ルートと呼ぶ．ここでルート系の復習は終わりにして, もとの Φ_0 の話に戻ろう．$V = (\mathfrak{a}_0^G)^*$, $R = \Phi_0 \cup (-\Phi_0)$ と置くと, R は V のルート系になる．$W_0 = W_0^G$ を R のワイル群とする．Φ_0 のすべての元が正ルートになるような基本ルート系 Δ_0 が一つ定まる．コルートの集合

$$\Delta_0^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0^G \,|\, \alpha \in \Delta_0\}$$

は $R^\vee$ の基本ルート系であり, その元は単純コルートと呼ばれる．次に $\varpi_\alpha \in (\mathfrak{a}_0^G)^*$, $\varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0^G$, $(\alpha \in \Delta_0)$ を $\beta \in \Delta_0$ に対して

$$\langle \beta^\vee, \varpi_\alpha \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta = \alpha\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}, \quad \langle \varpi_\alpha^\vee, \beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta = \alpha\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$$

と定める．ϖ_α を単純ウェイト, $\varpi_\alpha^\vee$ を単純コウェイトと呼ぶ．

$$\widehat{\Delta}_0 = \{\varpi_\alpha \in (\mathfrak{a}_0^G)^* \,|\, \alpha \in \Delta_0\}, \quad \widehat{\Delta}_0^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0^G \,|\, \alpha \in \Delta_0\}$$

と置く．$\widehat{\Delta}_0$ は $\Delta_0^\vee$ に双対である $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ の基底であり, $\widehat{\Delta}_0^\vee$ は Δ_0 に双対である $\mathfrak{a}_0^G$ の基底である．

固定した極小放物型部分群 P_0 を含むような $\mathbb{Q}$ 上の放物型部分群のことを標準という．標準放物型部分群 P に関連したルートについて考えよう．$P_0 \subset P$ なので明らかに $P \in \mathcal{F}$ である．Δ_0 の部分集合 Δ_0^P を

$$\mathfrak{a}_P = \{a \in \mathfrak{a}_0 \mid \langle a, \alpha \rangle = 0,\ {}^\forall\alpha \in \Delta_0^P\}$$

によって定める．Δ_0^P は $(\mathfrak{a}_0^P)^*$ の基底となる．対応 $P \mapsto \Delta_0^P$ によって, 標準放物型部分群の集合と Δ_0 の部分集合との間に一対一対応が与えられる．

$$\Delta_P = \{\alpha|_{\mathfrak{a}_P} \in (\mathfrak{a}_P^G)^* \mid \alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P\}$$

とする．ただし, $\alpha|_{\mathfrak{a}_P}$ は α の $\mathfrak{a}_P$ への制限とする．Δ_P は $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ の基底であり, Φ_P の任意のルートを Δ_P の元の非負整数の一次結合で一意的に表すことができる．続いて,

$$\widehat{\Delta}_P = \{\varpi_\alpha \in (\mathfrak{a}_P^G)^* \mid \alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P\}$$

とする. $\widehat{\Delta}_P$ も $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ の基底となる. 次に $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G$, $(\alpha \in \Delta_P)$ を, $\beta \in \Delta_0 - \Delta_0^P$ によって

$$\langle \alpha^\vee, \varpi_\beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta|_{\mathfrak{a}_P} = \alpha\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta|_{\mathfrak{a}_P} \neq \alpha \end{cases}$$

と定める. 同様に $\varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G$, $(\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P)$ を, $\beta \in \Delta_P$ によって

$$\langle \varpi_\alpha^\vee, \beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta = \alpha|_{\mathfrak{a}_P}\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta \neq \alpha|_{\mathfrak{a}_P} \end{cases}$$

と定める.

$$\Delta_P^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G \mid \alpha \in \Delta_P\}, \quad \widehat{\Delta}_P^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G \mid \alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P\}.$$

と置く. $\Delta_P^\vee$ は $\widehat{\Delta}_P$ と双対である $\mathfrak{a}_P^G$ の基底となり, $\widehat{\Delta}_P^\vee$ は Δ_P と双対である $\mathfrak{a}_P^G$ の基底となる. $\alpha^\vee \in \Delta_P^\vee$ について次のことに注意する. $\beta \in \Delta_0 - \Delta_0^P$ について $\alpha = \beta|_{\mathfrak{a}_P} \in \Delta_P$ とすると, $\alpha^\vee$ は直和 $\mathfrak{a}_0^G = \mathfrak{a}_P^G \oplus \mathfrak{a}_0^P$ によるコルート $\beta^\vee \in \Delta_0^\vee$ の $\mathfrak{a}_P^G$ への射影となる.

$P_1, P_2 \in \mathcal{F}$, $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ について考える.

$$\Delta_{P_1}^{P_2} = \{\alpha|_{\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}} \in (\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})^* \mid \alpha \in \Delta_0^{P_2} - \Delta_0^{P_1}\}, \quad \widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2} = \{\varpi|_{\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}} \in (\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})^* \mid \varpi \in \widehat{\Delta}_{P_1} - \widehat{\Delta}_{P_2}\}$$

と定義する. $\Delta_{P_1}^{P_2}$ と $\widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2}$ は $(\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})^*$ の基底となる. $(\Delta_{P_1}^{P_2})^\vee$ と $(\widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2})^\vee$ も上述と同じように定義する. つまり, $(\Delta_{P_1}^{P_2})^\vee$ は $\widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2}$ と双対である $\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}$ の基底とし, $(\widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2})^\vee$ は $\Delta_{P_1}^{P_2}$ と双対である $\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}$ の基底とする. ここで $P_0 \cap M_{P_2}$, $P_1 \cap M_{P_2} \in \mathcal{F}^{M_{P_2}}$ と, $P_0 \cap M_{P_2}$ は M_{P_2} の極小放物部分群になることに注意する. 定義より, $\mathfrak{a}_{P_1 \cap M_{P_2}} = \mathfrak{a}_{P_1}$, そして $\mathfrak{a}_{P_1 \cap M_{P_2}}^{M_{P_2}} = \mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}$ となるので,

$$\Delta_{P_1 \cap M_{P_2}} = \Delta_{P_1}^{P_2}, \quad \widehat{\Delta}_{P_1 \cap M_{P_2}} = \widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2}$$

を得る.

1.1.4　ワイル群と放物型部分群とルート

標準放物型部分群全体と $\mathcal{F}$ の元全体との関係を W_0 の作用で記述しよう. $A_0 = A_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$ と置く. $s \in W_0$ に対して w_s を $G(\mathbb{Q})$ における s の代表元とする. つまり, $w_s A_0 w_s^{-1} = A_0$ を満たし, かつ $(s\alpha)(w_s a w_s^{-1}) = \alpha(a)$, $({}^\forall a \in A_0,\ {}^\forall \alpha \in \Phi_0 \cup (-\Phi_0))$ が成り立つ. 代表元 w_s は modulo $M_0(\mathbb{Q})$ で定まる. また $w_s M_0 w_s^{-1} = M_0$ にも注意する. $s \in W_0$ と $P \in \mathcal{F}$ について, $sP = w_s P w_s^{-1}$ と定義する. 任意の $Q \in \mathcal{F}$ に対して, ある唯一つの標準放物型部分群 P が存在して, ある $s \in W_0$ について $Q = sP$ が成り立つことが知られている. ゆえに, $\{P \in \mathcal{F} \mid P_0 \subset P\} \times W_0$ から $\mathcal{F}$ への写像 Υ を

$$\Upsilon(P, s) = sP$$

によって定義すると, Υ は全射となる. 各 $M\in\mathcal{L}$ について,

$$W_0^M=\{s\in W_0^G \mid w_s\in M(\mathbb{Q})\}$$

と置く. このとき, $Q\in\mathcal{F}$ について, ある標準放物型部分群 P とある $s'\in W_0$ が存在して, その逆像が

$$\Upsilon^{-1}(Q)=\{(P,s)\mid s\in W_0^{M_Q}s'\}$$

と与えられる. そして, 位数について $|\Upsilon^{-1}(Q)|=|W_0^{M_Q}|$ が成り立つ. 特に極小放物型部分群に関してのみ考えると, W_0 から $\mathcal{P}$ への写像 $s\mapsto sP_0$ を考えることになり, その写像は全単射である. ルートについても考えよう. 定義より, $a\in A_0$, $n\in\mathfrak{n}_\alpha$ について

$$\mathrm{Ad}(w_saw_s^{-1})w_snw_s^{-1}=w_s(\mathrm{Ad}(a)n)w_s^{-1}=\alpha(a)\,w_snw_s^{-1}=(s\alpha)(w_saw_s^{-1})\,w_snw_s^{-1}$$

なのだから, $s\in W_0$ について

$$\Phi_{sP_0}=s\Phi_0,\quad \Delta_{sP_0}=s\Delta_0,\quad \Delta_{sP_0}^\vee=s\Delta_0^\vee,\quad \widehat{\Delta}_{sP_0}=s\widehat{\Delta}_0,\quad \widehat{\Delta}_{sP_0}^\vee=s\widehat{\Delta}_0^\vee$$

が成り立つ. 各 $Q\in\mathcal{F}$ に対しては, ある $s\in W_0$ によって $sP_0\subset Q$ となるので, Δ_Q が上と同様の議論で定義される. その s は modulo $W_0^{M_Q}$ で定まるのだから, Δ_Q は s の選択に依存しないことが分かる. 他の $\widehat{\Delta}_Q$ や $\Delta_{Q_1}^{Q_2}$ についても同様に定めることができる.

$M\in\mathcal{L}$ とする. 最後に $\mathcal{P}(M)$ と $\mathcal{L}(M)$ と $\mathcal{F}(M)$ のそれぞれの元を実ベクトル空間 $\mathfrak{a}_M$ の部分集合と対応させよう. $\alpha\in\Phi_0$, $\alpha|_{\mathfrak{a}_M}\neq 0$ について, $\mathfrak{a}_M$ の超平面 $Y_{\mathfrak{a}_M,\alpha}$ を

$$Y_{\mathfrak{a}_M,\alpha}=\{a\in\mathfrak{a}_M\mid \langle a,\alpha|_{\mathfrak{a}_M}\rangle=0\}$$

と定義する. 各 $P\in\mathcal{P}(M)$ について

$$\mathfrak{a}_P^+=\{a\in\mathfrak{a}_M\mid \langle a,\alpha\rangle>0,\ {}^\forall\alpha\in\Delta_P\}$$

と置く. このとき, 対応 $P\mapsto\mathfrak{a}_P^+$ は, $\mathcal{P}(M)$ と $\mathfrak{a}_M$ における $\cup_{\alpha\in\Phi_0,\,\alpha|_{\mathfrak{a}_M}\neq 0}Y_{\mathfrak{a}_M,\alpha}$ の補集合の連結成分の集合との間に一対一対応を与える. 先に述べたように各 $L\in\mathcal{L}(M)$ に対して, $\mathfrak{a}_L$ は $\mathfrak{a}_M$ の部分空間になる. 対応 $L\mapsto\mathfrak{a}_L$ は, $\mathcal{L}(M)$ と $\{Y_{\mathfrak{a}_M,\alpha}\}_{\alpha\in\Phi_0}$ の元たちの共通部分から成る集合との間に一対一対応を与える. さらに, $\mathcal{F}=\cup_{L\in\mathcal{L}(M)}\mathcal{P}(L)$ (disjoint union) であるため, 対応 $Q\mapsto\mathfrak{a}_Q^+$ は, $\mathcal{F}(M)$ と各 $L\in\mathcal{L}(M)$ についての $\mathfrak{a}_L$ における $\cup_{\alpha\in\Phi_0,\,\alpha|_{\mathfrak{a}_L}\neq 0}Y_{\mathfrak{a}_L,\alpha}$ の補集合の連結成分から成る集合との間に一対一対応を与える.

1.2 GL(3) の場合

1.2.1 基本的な設定

$\mathrm{GL}(n)$ を代数群としての通常の n 次一般線型群とする (cf. [Bor, p.49]). $\mathrm{GL}(n)$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された連結簡約代数群であることが知られている. 環 R について $M(n,R)$ を R 上の n 次の全行列環とする. $R^\times$ を R の単元群とすると, $\mathrm{GL}(n)$ の R-点全体は

$$\mathrm{GL}(n,R)=\{x\in M(n,R)\mid \det x\in R^\times\}$$

と与えられる．以下，「GL(3) の場合」というサブセクションにおいては，

$$G = \mathrm{GL}(3)$$

とする．

このG = GL(3) に対して上述で説明した Levi 部分群やルート系を具体的に記述していこう．良く知られているように正則な上三角行列全体からなる部分群は，G の $\mathbb{Q}$ 上の極小放物型部分群 (Borel 部分群) となる．そして，極小 Levi 部分群として正則な対角行列全体からなる部分群をとる．よって，

$$M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

と置く．さらに，

$$\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v, \quad \mathbf{K}_\infty = O(3) = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_3\}, \ \mathbf{K}_v = G(\mathbb{Z}_v) \ (v < \infty)$$

とすると，$\mathbf{K}$ は求められた条件を満たす $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群である．

1.2.2 $\mathfrak{a}_0$ と $\mathfrak{a}_0^G$

GL(n) から GL(1) への $\mathbb{Q}$ 上定義された任意の準同型は，ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して，

$$x \mapsto \det(x)^k, \quad x \in \mathrm{GL}(n)$$

と与えられる．よって

$$\chi_j(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}) = a_j, \quad 1 \leq j \leq 3$$

と $\chi_j \in X(M_0)_{\mathbb{Q}}$ を定めると，

$$X(M_0)_{\mathbb{Q}} = \{\chi_1^{k_1}\chi_2^{k_2}\chi_3^{k_3} \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}\}$$

となる．$\xi_j \in \mathfrak{a}_0$ を

$$\xi_j(\chi_1^{k_1}\chi_2^{k_2}\chi_3^{k_3}) = k_j$$

で定める．このとき，

$$\mathfrak{a}_0 = \mathbb{R}\xi_1 \oplus \mathbb{R}\xi_2 \oplus \mathbb{R}\xi_3$$

を得る．次に

$$\eta_j = \chi_j \otimes 1$$

と置くと,

$$\mathfrak{a}_0^* = \mathbb{R}\eta_1 \oplus \mathbb{R}\eta_2 \oplus \mathbb{R}\eta_3$$

を得る. 特に, クロネッカーのデルタ δ_{jk} について,

$$\langle \xi_j\,,\,\eta_k \rangle = \delta_{jk}$$

となっている. 次に $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトルとして

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$$

と置く. 以後, $\mathfrak{a}_0$ から $\mathbb{R}^3$ への線型同型写像

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 \mapsto a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3\,, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

によって, $\mathfrak{a}_0$ と $\mathbb{R}^3$ を同一視する. 同様に, $\mathfrak{a}_0^*$ から $\mathbb{R}^3$ への線型同型写像

$$b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3 \mapsto b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3\,, \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

によって, $\mathfrak{a}_0^*$ と $\mathbb{R}^3$ も同一視する. $\mathbb{R}^3$ 上のユークリッド内積 $(\,,\,)$ によって $\mathbb{R}^3$ とその双対空間を同一視する. これらの同一視のもとで, $\mathbb{R}^3$ 上のユークリッド内積 $(\,,\,)$ と $\mathfrak{a}_0$ と $\mathfrak{a}_0^*$ の $\langle\,,\,\rangle$ は一致する. つまり,

$$\langle \sum_{j=1}^{3} a_j\xi_j, \sum_{k=1}^{3} b_k\eta_k \rangle = (\sum_{j=1}^{3} a_je_j, \sum_{k=1}^{3} b_ke_k) = \sum_{j=1}^{3} a_jb_j$$

となる. 定義より,

$$H_0(m) = \sum_{j=1}^{3} \log|m_j|\,e_j \,\in \mathfrak{a}_0\,, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \in M_0(\mathbb{A})$$

がすぐに分かる.

M_0 と同じようにして,

$$\mathfrak{a}_G^* = \mathbb{R}\det\otimes 1, \quad \mathfrak{a}_G = \mathbb{R}\xi, \quad \xi(\det^k) = k$$

を得る. $\mathfrak{a}_G^*$ から $\mathfrak{a}_0^*$ への線型単射は

$$\det\otimes 1 \;\mapsto\; \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$$

で与えられる. したがって,

$$\mathfrak{a}_G^* = \mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3)$$

となる. サブサブセクション 1.1.2 の線型全射 $\varsigma : \mathfrak{a}_0^* \to \mathfrak{a}_G^*$ について,

$$\varsigma(\chi_j \otimes 1) = \frac{1}{3}\det\otimes 1$$

となるのだから, $\mathfrak{a}_G$ から $\mathfrak{a}_0$ への線型単射は

$$\xi \ \mapsto \ \frac{1}{3}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$$

で与えられる. よって,

$$\mathfrak{a}_G=\mathbb{R}(e_1+e_2+e_3)$$

を得る. 定義より, $\mathbb{R}^3$ の部分空間として $\mathfrak{a}_0^G$ と $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ を考えると,

$$\mathfrak{a}_0^G=(\mathfrak{a}_0^G)^*=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\mid x_1+x_2+x_3=0\}$$

となる. また定義より,

$$H_G(m)=\frac{\log|\det(m)|}{3}(e_1+e_2+e_3)\in\mathfrak{a}_0,\quad m\in G(\mathbb{A})$$

を得る.

1.2.3 P_0 とルート系

$1\le j<k\le 3$ について

$$\alpha_{jk}=e_j-e_k=\chi_j\chi_k^{-1}\in\mathfrak{a}_0^*$$

と置くと, 明らかに

$$\mathfrak{n}_{P_0}=\mathfrak{n}_{\alpha_{12}}\oplus\mathfrak{n}_{\alpha_{13}}\oplus\mathfrak{n}_{\alpha_{23}}\,,\quad \Phi_0=\{\,\alpha_{12},\,\alpha_{13},\,\alpha_{23}\,\}$$

が成り立つ. 良く知られているように, $\Phi_0\cup(-\Phi_0)$ は $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ のルート系となる. (jk) を j と k の互換とする. $\sigma=(jk)$ と置いて, α_{jk} について,

$$s_{\alpha_{jk}}(x_1,x_2,x_3)=(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}),\quad (x_1,x_2,x_3)\in(\mathfrak{a}_0^G)^* \tag{1.2}$$

によって α_{jk} の対称 $s_{\alpha_{jk}}$ が得られる. もちろん, $-\alpha_{jk}$ に対しては, $s_{-\alpha_{jk}}=s_{\alpha_{jk}}$ である. **以下, ワイル群 W_0 と 3 次対称群を同一視する.** そして, ユークリッド内積 $(\,,\,)$ は W_0 不変な $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ 上の正値対称双一次形式なので, 上述の $\mathbb{R}^3$ とその双対空間の同一視とルート系は両立する. ワイル群 W_0 は (1.2) と同様に $\mathfrak{a}_0^G$ にも作用する. α_{jk} に対するコルート $\alpha_{jk}^\vee$ は

$$\alpha_{jk}^\vee=e_j-e_k\in\mathfrak{a}_0^G$$

となる. すぐに分かるように,

$$\Delta_0=\{\alpha_{12}\,,\,\alpha_{23}\},\quad \Delta_0^\vee=\{\alpha_{12}^\vee\,,\,\alpha_{23}^\vee\}$$

となる. さらに, 定義より

$$\varpi_{\alpha_{12}}=\varpi_{\alpha_{12}}^\vee=\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}(e_2+e_3),\quad \varpi_{\alpha_{23}}=\varpi_{\alpha_{23}}^\vee=\frac{1}{3}(e_1+e_2)-\frac{2}{3}e_3$$

となり,

$$\widehat{\Delta}_0=\{\varpi_{\alpha_{12}},\varpi_{\alpha_{23}}\},\quad \widehat{\Delta}_0^\vee=\{\varpi_{\alpha_{12}}^\vee,\varpi_{\alpha_{23}}^\vee\}$$

を得る.

1.2.4 標準放物型部分群

P_0 の標準放物型部分群について考える．標準放物型部分群は P_0 を含む部分群なので,

$$\{P \in \mathcal{F} \mid P_0 \subset P\} = \{P_0,\, P_1,\, P_2,\, G\},$$

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

が簡単な計算で得られる．

P_1 について考えよう．サブサブセクション 1.2.2 とほぼ同様の議論により, $\mathfrak{a}_{P_1}$ と $\mathfrak{a}_{P_1}^*$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間として,

$$\mathfrak{a}_{P_1} = \mathfrak{a}_{P_1}^* = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \alpha_{12}) = 0\}$$

となる．そして, $m_1 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$, $m_2 \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$ について

$$H_{M_{P_1}}(\begin{pmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{pmatrix}) = \frac{\log|\det(m_1)|}{2}(e_1 + e_2) + \log|m_2| e_3$$

となる．さらに計算を進めて,

$$\mathfrak{a}_{P_1}^G = (\mathfrak{a}_{P_1}^G)^* = \{(x, x, -2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\varpi_{\alpha_{23}},$$

$$\mathfrak{a}_0^{P_1} = (\mathfrak{a}_0^{P_1})^* = \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\alpha_{12}$$

を得る．定義と $\Delta_0 - \Delta_0^{P_1} = \{\alpha_{23}\}$ より Δ_{P_1} の唯一の元は $\alpha_{23}|_{\mathfrak{a}_{P_1}}$ となる．$\mathfrak{a}_{P_1}$ に制限することと直和分解 $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_{P_1}^* \oplus (\mathfrak{a}_0^{P_1})^*$ の $\mathfrak{a}_{P_1}^*$-成分をとることは同一であることに注意しよう．これにより,

$$\Delta_{P_1} = \Delta_{P_1}^\vee = \{\frac{3}{2}\varpi_{\alpha_{23}}\}, \quad \widehat{\Delta}_{P_1} = \widehat{\Delta}_{P_1}^\vee = \{\varpi_{\alpha_{23}}\}$$

となる．さらに,

$$\Delta_0^{P_1} = (\Delta_0^{P_1})^\vee = \{\alpha_{12}\}, \quad \widehat{\Delta}_0^{P_1} = (\widehat{\Delta}_0^{P_1})^\vee = \{\frac{1}{2}\alpha_{12}\}$$

も得る．

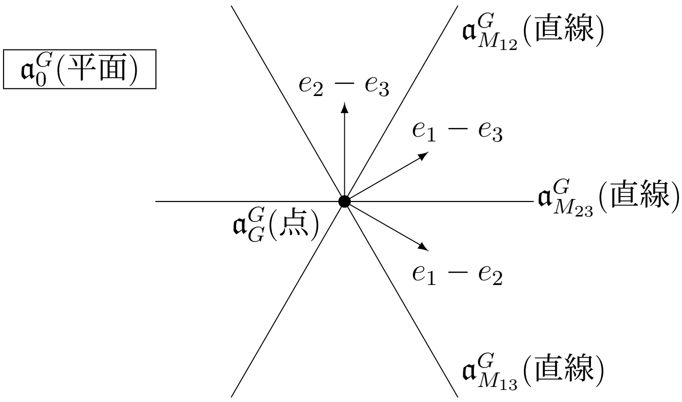
P_2 についても P_1 と同じ議論で以下を得る．

$$\mathfrak{a}_{P_2} = \mathfrak{a}_{P_2}^* = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \alpha_{23}) = 0\},$$

であり, $m_1 \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$, $m_2 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ について

$$H_{M_{P_2}}(\begin{pmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{pmatrix}) = \log|m_1| e_1 + \frac{\log|\det(m_2)|}{2}(e_2 + e_3)$$

図 1: Levi 部分群



となる. さらに,

$$\mathfrak{a}_{P_2}^G = (\mathfrak{a}_{P_2}^G)^* = \{(-2x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\varpi_{\alpha_{12}},$$

$$\mathfrak{a}_0^{P_2} = (\mathfrak{a}_0^{P_2})^* = \{(0, x, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\alpha_{23},$$

$$\Delta_{P_2} = \Delta_{P_2}^\vee = \{\frac{3}{2}\varpi_{\alpha_{12}}\}, \quad \widehat{\Delta}_{P_2} = \widehat{\Delta}_{P_2}^\vee = \{\varpi_{\alpha_{12}}\},$$

$$\Delta_0^{P_2} = (\Delta_0^{P_2})^\vee = \{\alpha_{23}\}, \quad \widehat{\Delta}_0^{P_2} = (\widehat{\Delta}_0^{P_2})^\vee = \{\frac{1}{2}\alpha_{23}\}$$

となる.

1.2.5 Levi 部分群と放物型部分群

まず次のように Levi 部分群たちを定義する.

$$M_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, M_{13} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, M_{23} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in G \right\}.$$

このとき明らかに,

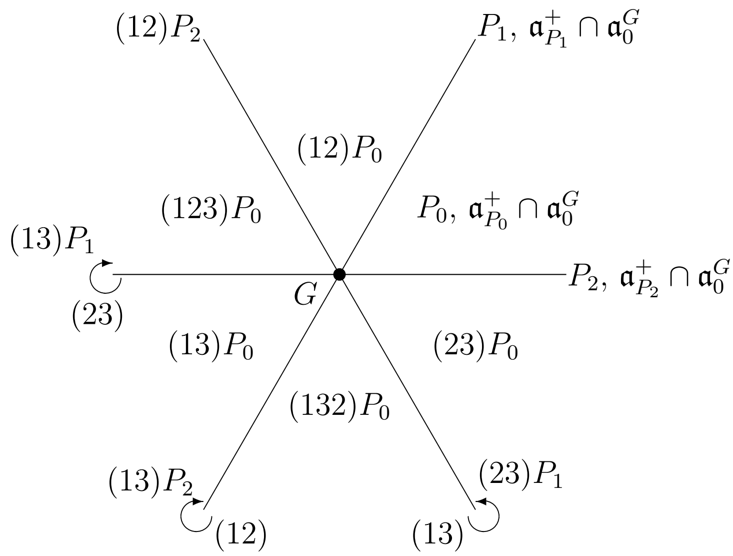
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(M_0) = \{M_0, M_{12}, M_{13}, M_{23}, G\},$$

$$\mathcal{L}(M_{12}) = \{M_{12}, G\}, \ \mathcal{L}(M_{13}) = \{M_{13}, G\}, \ \mathcal{L}(M_{23}) = \{M_{23}, G\}, \ \mathcal{L}(G) = \{G\}$$

となる.

$$M_{P_1} = M_{12}, \quad M_{P_2} = M_{23}$$

図 2: 放物型部分群



となっているので、$\mathfrak{a}_{M_{12}}$ などに関しては, すでに前のサブサブセクションで記述されている. M_{13} に関しても $(23) \in W_0$ の M_{12} への作用を考えれば明らかで,

$$\mathfrak{a}_{M_{13}} = \{x \in \mathfrak{a}_0 \,|\, (x, \alpha_{13}) = 0\}, \quad \mathfrak{a}_{M_{13}}^G = \mathbb{R}\,(23)\varpi_{\alpha_{23}}, \quad \mathfrak{a}_0^{M_{13}} = \mathbb{R}\alpha_{13},$$

$$(23)\varpi_{\alpha_{23}} = \frac{1}{3}(e_1 + e_3) - \frac{2}{3}e_2 = \varpi_{\alpha_{12}} - \varpi_{\alpha_{23}},$$

$$H_{M_{13}}(\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{33} \end{pmatrix}) = \frac{\log|m_{11}m_{33} - m_{31}m_{13}|}{2}(e_1 + e_3) + \log|m_{22}|e_2$$

を得る. $\mathfrak{a}_0^G$ 平面の上に $\mathfrak{a}_M^G$ に対応する超平面を描くと図 1 のようになる.

ワイル群の作用により放物型部分群の集合 $\mathcal{P}(M)$ は次のように記述できる.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(M_0) = \{sP_0 \mid s \in W_0\}, \quad \mathcal{P}(G) = \{G\},$$

$$\mathcal{P}(M_{12}) = \{P_1,\ (13)P_2\},\ \mathcal{P}(M_{13}) = \{(23)P_1,\ (12)P_2\},\ \mathcal{P}(M_{23}) = \{(13)P_1,\ P_2\}.$$

そして,

$$\mathcal{F}(M) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}(M)} \mathcal{P}(L)$$

となる. $s \in W_0$ について $\Delta_{sP} = s\Delta_P$ と $\Delta_{sP}^{sQ} = s\Delta_P^Q$ が成り立つのだから, 任意の P, $Q \in \mathcal{F}$ についての Δ_P や Δ_P^Q は簡単に求めることができる. $\mathfrak{a}_0^G$ 平面の上に $\mathfrak{a}_P^+$ に対応する図形を描くと図 2 のようになる. 図形における (jkl) は巡回置換 $\begin{pmatrix} j & k & l \\ k & l & j \end{pmatrix}$ を意味する (例えば $(13)(12) = (123)$).

2　粗い展開

これより跡公式についての解説を始める．アーサー跡公式の第一段階として, Modified kernel の $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の積分に幾何サイドとスペクトルサイドの 2 つの粗い展開を与える．このセクションでは主に [A1, Part I] もしくは [A3, A4] の内容に相当することを説明する．

2.1　Modified kernel

このセクションでは P を標準放物型部分群とする.

まず選択される測度について述べよう．N_{P_0} の任意の $\mathbb{Q}$ 上定義された連結部分群 V に対して, $V(\mathbb{A})$ 上のハール測度を $V(\mathbb{Q})\backslash V(\mathbb{A})$ の測度が 1 となるように正規化する．その一つとして $\mathrm{d}n$ を $N_P(\mathbb{A})$ のハール測度とする．同様に $\mathbf{K}$ 上のハール測度 $\mathrm{d}k$ についても, その測度を 1 と正規化する．$\mathfrak{a}_P$ 上のハール測度 $\mathrm{d}H$ を一つ固定する．そのとき, $A_P(\mathbb{R})^0$ 上のハール測度 $\mathrm{d}a$ が同型 $H_P : A_P(\mathbb{R})^0 \cong \mathfrak{a}_P$ により定まる．$i=\sqrt{-1}$ とする．$i\mathfrak{a}_P^*$ 上のハール測度 $\mathrm{d}\lambda$ を $\mathrm{d}H$ と双対な測度とする．つまり, 任意の $h \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_P)$ について

$$\int_{i\mathfrak{a}_P^*}\int_{\mathfrak{a}_P} h(H)e^{-\lambda(H)}\mathrm{d}H\mathrm{d}\lambda = h(0)$$

が成り立つ．最後に $G(\mathbb{A})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}x$ を一つ固定する．このとき, 次が成り立つような $M_P(\mathbb{A})^1$ 上の測度 $\mathrm{d}m$ が唯一存在する．任意の $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ について,

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(x)\mathrm{d}x = \int_{N_P(\mathbb{A})}\int_{M_P(\mathbb{A})^1}\int_{A_P(\mathbb{R})^0}\int_{\mathbf{K}} f(nmak)e^{-2\rho_P(H_P(a))}\mathrm{d}n\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}k$$

が成り立つ．

$\widehat{\tau}_P$ を $\mathfrak{a}_P$ の部分集合

$$\{H \in \mathfrak{a}_P \mid \varpi(H) > 0,\ {}^\forall\varpi \in \widehat{\Delta}_P\}$$

の特性関数とする．テスト関数 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ について, $L^2(N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の核関数 $K_P(x,y)$ を

$$K_P(x,y) = \int_{N_P(\mathbb{A})}\sum_{\gamma \in M_P(\mathbb{Q})} f(x^{-1}\gamma n y)\mathrm{d}n$$

と定義する．$\mathfrak{a}_0^+ = \mathfrak{a}_{P_0}^+$ と置く．パラメーター $T \in \mathfrak{a}_0^+$ に関する $G(\mathbb{A})$ 上の関数 $k^T(x,f)$ を

$$k^T(x,f) = \sum_{P \supset P_0}(-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G}\sum_{\delta \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} K_P(\delta x, \delta x)\,\widehat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T)$$

と定義する．T は直和分解 $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_0^P$ の射影によって $\mathfrak{a}_P$ の点とも思えることに注意しよう．テスト関数 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ とパラメーター $T \in \mathfrak{a}_0^+$ に関する積分 $J^T(f)$ を

$$J^T(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k^T(x,f)\mathrm{d}x$$

と定義する. $T \in \mathfrak{a}_0^+$ が十分に正則であるとは, 任意の $\alpha \in \Delta_0$ に対して $\alpha(T)$ が十分に大きいことを意味する.

定理 2.1. $T \in \mathfrak{a}_0^+$ は十分正則とする. そのとき,

$$\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} |k^T(x,f)| \mathrm{d}x < +\infty$$

が成り立つ. ただし T の大きさは f のサポートにのみ依存する.

この定理より積分 $J^T(f)$ は値を持つことが分かる. この後, 十分正則な T について積分 $J^T(f)$ を幾何サイドとスペクトルサイドに展開していく.

2.2 幾何サイド

$G(\mathbb{Q})$ の元 γ に対して, $\gamma = \gamma_s\gamma_u = \gamma_u\gamma_s$, 元 $\gamma_s \in G(\mathbb{Q})$ は半単純, 元 $\gamma_u \in G(\mathbb{Q})$ はユニポテントと γ のジョルダン分解を定める. $G(\mathbb{Q})$ の元 γ と γ' が $\mathcal{O}$-同値であるとは, γ_s と γ_u が $G(\mathbb{Q})$-共役であることを意味する. $\mathcal{O} = \mathcal{O}^G$ を $G(\mathbb{Q})$ の $\mathcal{O}$-同値類の集合とする. $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $T \in \mathfrak{a}_0^+$, $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ について,

$$K_{P,\mathfrak{o}}(x,y) = \int_{N_P(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in M_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} f(x^{-1}\gamma n y) \mathrm{d}n,$$

$$k_\mathfrak{o}^T(x,f) = \sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x, \delta x)\, \widehat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T),$$

$$J_\mathfrak{o}^T(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k_\mathfrak{o}^T(x,f) \mathrm{d}x$$

と置く.

定理 2.2. $T \in \mathfrak{a}_0^+$ は十分正則とする. そのとき,

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} |k_\mathfrak{o}^T(x,f)| \mathrm{d}x < +\infty$$

が成り立つ. ただし T の大きさは f のサポートにのみ依存する.

したがって, この定理より

$$J^T(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_\mathfrak{o}^T(f)$$

と幾何サイドの粗い展開を得る.

2.3 スペクトルサイド

関数 $\phi \in L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ がカスピダルであるとは, 任意の標準放物型部分群 $P \neq G$ とほとんどすべての $x \in G(\mathbb{A})^1$ について

$$\int_{N_P(\mathbb{A})} \phi(nx)\mathrm{d}n = 0$$

が成り立つことを意味する. $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ を $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ のカスピダルである関数全体から成る部分空間とする. $G(\mathbb{A})^1$ は右正則表現により $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 上に作用している. そして, $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は $G(\mathbb{A})^1$ の作用について不変である. 空間 $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は $G(\mathbb{A})^1$ の作用の下で, 有限重複度の既約表現の離散和となることが知られている. つまり,

$$L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1) \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{G(\mathbb{A})^1}} m_{\mathrm{cusp}}(\pi) \cdot \pi$$

と書くことができる. ただし, $m_{\mathrm{cusp}}(\pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は π の重複度であり, 位相群 H に対して $\widehat{H}$ は H の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の集合とする. $L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ を $G(\mathbb{A})^1$-不変な閉既約部分空間によって張られる $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の部分空間とする. $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は $L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の部分空間となる.

P と P' を標準放物型部分群とする. そして, σ を $M_P(\mathbb{A})^1$ の既約ユニタリ表現とし, σ' を $M_{P'}(\mathbb{A})^1$ の既約ユニタリ表現とする. $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ を W_0 の元を制限することで得られる $\mathfrak{a}_P$ から $\mathfrak{a}_{P'}$ への異なる線型同型の集合とする. 二つのペア (P, σ) と (P', σ') が同値であるとは,

$$\sigma \cong s^{-1}\sigma'(m) = \sigma'(w_s m w_s^{-1}), \quad m \in M_P(\mathbb{A})^1$$

となるような $s \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ が存在することを意味する. 上述の $L^2_{\mathrm{cusp}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$ の既約分解の成分に既約ユニタリ表現 σ が現れるとき $(m_{\mathrm{cusp}}(\sigma) \neq 0)$, 同値類 $\chi = \{(P, \sigma)\}$ をカスピダルデータといい, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^G$ をその同値類の集合とする.

$\mathcal{H}_P$ を次の条件 (i) と (ii) を満たす $N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{Q})A_P(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{A})$ 上の $\mathbb{C}$ 値可測関数 ϕ からなる空間とする. (i) 任意の $x \in G(\mathbb{A})$ について, $\phi_x(m) = \phi(mx)$ によって定まる $M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1$ 上の関数 ϕ_x は

$$\phi_x \in L^2_{\mathrm{disc}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$$

を満たす. (ii) 関数 ϕ は

$$||\phi||^2 = \int_{\mathbf{K}} \int_{M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1} |\phi(mk)|^2 \mathrm{d}m\, \mathrm{d}k < +\infty$$

を満たす.

$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_P^* \otimes \mathbb{C}$ と記号を定める．$\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ とする．空間 $\mathcal{H}_P$ 上に作用する $G(\mathbb{A})$ の表現 $\mathcal{I}_P(\lambda)$ を $\phi \in \mathcal{H}_P$ に対して

$$(\mathcal{I}_P(\lambda, y)\phi)(x) = \phi(xy)\, e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(xy))}\, e^{-(\lambda+\rho_P)(H_P(x))}, \quad y \in G(\mathbb{A})$$

と定義する．$\mathcal{H}_P^0$ を $\mathbf{K}$-有限な元からなる $\mathcal{H}_P$ の部分空間とする．ほとんどすべての $x \in G(\mathbb{A})$ について $\phi_x \in L^2_{\mathrm{cusp}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$ となるような $\phi \in \mathcal{H}_P^0$ からなる空間を $\mathcal{H}_{P,\mathrm{cusp}}^0$ とする．さらに, $\sigma \in \widehat{M_P(\mathbb{A})}^1$ について, $\phi_x \in \sigma^{\oplus m_{\mathrm{cusp}}(\sigma)}$ となるような $\phi \in \mathcal{H}_{P,\mathrm{cusp}}^0$ からなる空間を $\mathcal{H}_{P,\mathrm{cusp},\sigma}^0$ とする．

$\chi = \{(P,\sigma)\} \in \mathfrak{X}$ とする．$\Psi(\lambda)$ を Paley-Wiener type の $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ について整関数とし, $x \in G(\mathbb{A})$ について $\Psi(\lambda, x) \in \mathcal{H}_{P,\mathrm{cusp},\sigma}^0$ が成り立つとする．このとき, $\Psi(\lambda, x)$ は, ある $\mathfrak{a}_P$ 上の滑らかなコンパクト台をもつ関数の λ に関するフーリエ変換で与えられる．任意の $\Lambda \in \mathfrak{a}_P^*$ について, $N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ 上の関数 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \int_{\Lambda + i\mathfrak{a}_P^*} e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(x))}\Psi(\lambda, x)d\lambda$$

で定義する．$\psi(x)$ は $H_P(x) \in \mathfrak{a}_P$ についてコンパクト台をもつ．この ψ により擬アイゼンシュタイン級数 $E\psi(x)$ が

$$E\psi(x) = \sum_{\delta \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \psi(\delta x), \quad x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$$

と与えられる．$E\psi \in L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ が成り立つ．$L^2_\chi(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ を上述の $\Psi(\lambda, x)$ と $\Lambda \in \mathfrak{a}_P^*$ についての $E\psi$ によって張られる空間の閉包とする．$L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ の閉部分空間 $L^2_\chi(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$-不変である．さらに直和分解

$$L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1) \cong \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}} L^2_\chi(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$$

を得る．

P_1 を P に含まれる標準放物型部分群とする．このとき, $M_{P_1} \subset M_P$ に注意する．$\mathfrak{X}^{M_P}$ から $\mathfrak{X}^G$ への写像 Ω が, $\sigma_1 \in \widehat{M_{P_1}(\mathbb{A})}^1$ に関するカスピダルデータ $(P_1 \cap M_P\,, \sigma_1)$ に対して (P_1, σ_1) を対応させることで与えられる．カスピダルデータ $\chi \in \mathfrak{X}^G$ に対して

$$L^2_{\mathrm{disc},\chi}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1) = \bigoplus_{\chi_P \in \Omega^{-1}(\chi)} L^2_{\mathrm{disc}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1) \cap L^2_{\chi_P}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$$

とおくと, $\mathfrak{X}^G$ による直和分解

$$L^2_{\mathrm{disc}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1) = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}^G} L^2_{\mathrm{disc},\chi}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$$

を得る．ほとんどすべての $x \in G(\mathbb{A})$ について $\phi_x \in L^2_{\mathrm{disc},\chi}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$ となる $\phi \in \mathcal{H}_P$ 全体からなる空間を $\mathcal{H}_{P,\chi}$ とする．このとき, 直交直和

$$\mathcal{H}_P = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}} \mathcal{H}_{P,\chi}$$

を得る. $\mathcal{I}_P(\lambda)$ を $\mathcal{H}_P$ の不変部分空間 $\mathcal{H}_{P,\chi}$ へ制限することで得られる表現を $\mathcal{I}_{P,\chi}(\lambda)$ と書く. そして,

$$\mathcal{B}_P = \bigcup_{\chi\in\mathfrak{X}} \mathcal{B}_{P,\chi} \ \ \text{(disjoint union)}, \quad \mathcal{B}_{P,\chi} = \mathcal{B}_P \cap \mathcal{H}_{P,\chi} \cap \mathcal{H}_P^0$$

をみたす $\mathcal{H}_P$ の正規直交基底 $\mathcal{B}_P$ が存在する.

$P \subset Q$, $x \in G(\mathbb{A})$, $\phi \in \mathcal{H}_P$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ についてアイゼンシュタイン級数 $E_P^Q(x,\phi,\lambda)$ を

$$E_P^Q(x,\phi,\lambda) = \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash Q(\mathbb{Q})} \phi(\delta x)\, e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(\delta x))}$$

と定める. そして,

$$n_P = n_P^G = \sum_{P'\supset P_0} |W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})|$$

と置く． また, $n_P^Q = n_{P\cap M_Q}^{M_Q} (= n_{P\cap M_Q})$ と置く． このとき, $\chi \in \mathfrak{X}$ に対する核関数 $K_{P,\chi}(x,y)$ が

$$K_{P,\chi}(x,y) = \sum_{P_0\subset P_1\subset P} (n_{P_1}^P)^{-1} \int_{i\mathfrak{a}_P^*} \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} E_{P_1}^P(x, \mathcal{I}_{P,\chi}(\lambda,f)\phi,\lambda)\, \overline{E_{P_1}^P(y,\phi,\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda$$

と与えられる. これより

$$k_\chi^T(x,f) = \sum_{P\supset P_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} K_{P,\chi}(\delta x, \delta x)\, \widehat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T),$$

$$J_\chi^T(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k_\chi^T(x,f)\, \mathrm{d}x$$

とおく.

定理 2.3. $T \in \mathfrak{a}_0^+$ は十分正則とする. そのとき,

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} |k_\chi^T(x,f)| \mathrm{d}x < +\infty$$

が成り立つ. ただし T の大きさは f のサポートにのみ依存する.

したがって, この定理より

$$J^T(f) = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}} J_\chi^T(f)$$

とスペクトルサイドの粗い展開を得る.

2.4 まとめ

T に対する $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ の性質を考える.

定理 2.4. 任意に $f \in C_0^\infty(G(\mathbb{A}))$ について, 十分正則な $T \in \mathfrak{a}_0^+$ に対して定義される関数 $T \mapsto J^T(f)$ は T に関する高々 $\dim \mathfrak{a}_0^G$ 次の多項式となる. $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$ と $J^T_{\chi}(f)$ についても同様である.

この定理により $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ を T の多項式と見ることで, 任意の $T \in \mathfrak{a}_0^+$ に対して値を持つ. 特に多項式の各係数は $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ 上の distribution となる. このセクションのこれまでの議論は, 極小放物型部分群 $P_0 \in \mathcal{P}$ の選択に依存してきたが, 適当な点 $T = T_0 \in \mathfrak{a}_0^+$ を取ることで, $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ は P_0 の選択に依存しない値になることが知られている. そのような点 T_0 は存在して,

$$H_{P_0}(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0, \quad {}^\forall w \in W_0$$

を満たす点として唯一に定められる. これより, 点 $T = T_0 \in \mathfrak{a}_0^+$ での多項式 $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ の値をそれぞれ $J(f)$, $J_{\mathfrak{o}}(f)$, $J_{\chi}(f)$ とおく. これらの値は P_0 の選択によらないが, まだ M_0 の選択には依存していることに注意しよう.

最後にテスト関数 f の適用範囲について考える. $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ の定義から明らかなように, これらの値は f の $G(\mathbb{A})^1$ 上の値にのみ依存している. そこで, $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ を $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ の関数を $G(\mathbb{A})^1$ へ制限した関数から成る空間とすると, これまでの定理は $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ 上の任意の関数に対して適用可能である.

以上をまとめると, 定理 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 より, P_0 の選択には依存していない, 次の粗い展開による等式を得る。

定理 2.5. 任意の $f \in C_0^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ について, 等式

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}} J_{\chi}(f)$$

が成り立つ.

2.5 GL(3) の場合

$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ がコンパクトな場合は核関数 $K_G(x,x)$ を $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上積分すれば跡公式が得られたが, 一般的には $\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} K_G(x,x)\mathrm{d}x$ は収束しないので, modified kernel $k^T(x,f)$ を考える必要があった. GL(3) を例にして, modified kernel の意味を考えよう。そのままでは積分 $\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} K_G(x,x)\mathrm{d}x$ が収束しない理由は, $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ がコンパクトでない, つまり基本領域がカスプを持つことにある. 収束させるためにカスプの周辺において核関数 $K_G(x,y)$ に修正を加えてできたのが, modified kernel $k^T(x,f)$ である. GL(2) の場合 (cf. [TW]) ではカスプは点のみなので一つの放物型部分群に対

図 3: Siegel set

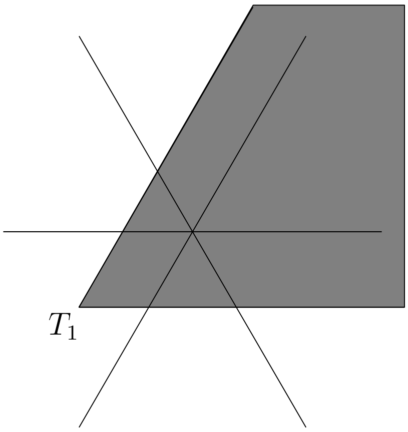


図 4: $\widehat{\tau}_P(H_P(a) - T)$ のサポート

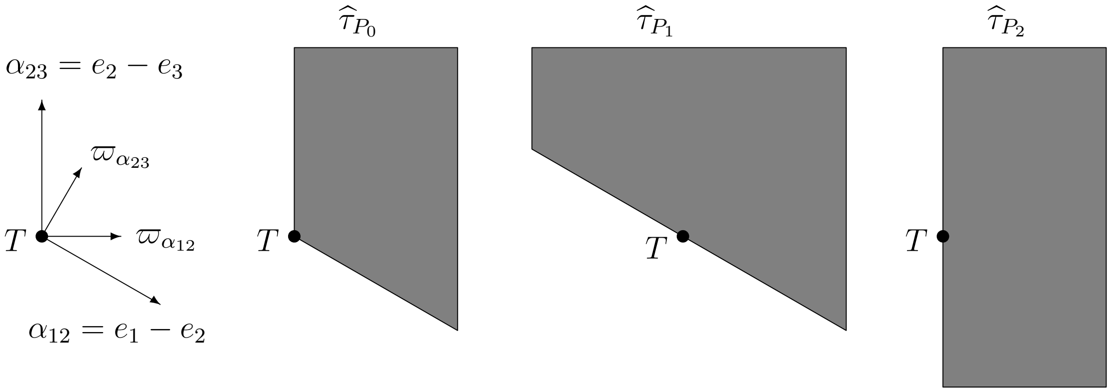
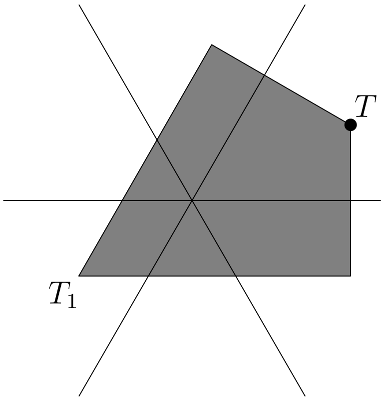


図 5: 切り取られた領域



して修正を施してやればよかった．しかし，一般の場合は放物型部分群が多いので，パラメーターも増え，修正の過程も複雑になる．この修正の雰囲気は，基本領域のカスプの周辺を切り取って積分の範囲をコンパクトな領域にしている，と思ってもらいたい．もちろん雰囲気なので正確ではないが，$\mathfrak{o}$-同値類によっては実際に T を十分に大きくすれば $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ の積分の範囲はその切り取られて出来た領域になる (cf. [TW]，双曲元と $F^G(g,T)$)．ここでの切り取られて出来た領域と言うのは，$x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ についての基本領域上における関数

$$\sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G}\, \widehat{\tau}_P(H_P(x) - T)$$

のサポートのことである．$H_0(a) \in \mathfrak{a}_0^G$ に関するサポートの形を $G = \mathrm{GL}(3)$ の場合に詳しく見てみよう．

まず $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ の基本領域は，ある $T_1 \in \mathfrak{a}_0^G$ と $N_{P_0}(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ のあるコンパクト部分集合 ω についての Siegel set

$$\{\, x = pak \,|\, p \in \omega\,,\ a \in A_0(\mathbb{R})^0\,,\ k \in \mathbf{K}\,,\ H_G(a) = 0\,,\ \beta(H_0(a) - T_1) > 0\ {}^\forall\beta \in \Delta_0\}$$

に含まれる．基本領域の元 $x = pak$ の p と k はコンパクトな領域を動くのだからカスプとの距離は a にのみ依存している．$H_0(x) = H_0(a) \in \mathfrak{a}_0^G$ であり，Siegel set 上 $H_0(a)$ は図 3 の影の範囲を動く．基本領域の元 $x = pak$ は $H_0(a)$ が T_1 から離れるほどカスプに近づく．続いて $\widehat{\tau}_P(H_P(a) - T)$ を $H_0(a) \in \mathfrak{a}_0^G$ についての関数とみて，そのサポートを図 4 の影で表した．最後に $(-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G}$ に注意すると，切り取られた領域は図 5 の影のようになる．図より切り取られた領域がコンパクトになっていることが明らかに分かる。つまり修正の雰囲気は $x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ の基本領域上で動く範囲が図 5 のコンパクトな領域に含まれていると思うことができる．

3　(G, M)-family

このセクションでは [A1, §.17] や [A2, A5, A6, A7] の中で述べられている (G, M)-family について説明する．定理 2.5 の等式をより詳しく知るためには，$J_{\mathfrak{o}}(f)$ と $J_\chi(f)$ を細かく展開する必要がある．細かく展開するためにも，また展開したときに現れる重み付き軌道積分と重み付き指標の性質を理解するためにも，(G, M)-family の概念が重要となる．

3.1　$c_P(\lambda)$ と $c_M(\lambda)$ と $c'_P(\lambda)$

まず $M \in \mathcal{L}$ を一つ固定する．$P \in \mathcal{P}(M)$ について，

$$(\mathfrak{a}_M^*)_P^+ = \{a \in \mathfrak{a}_P^* \mid \langle \alpha^\vee\,,\, a\rangle > 0,\ \ {}^\forall\alpha^\vee \in \Delta_P^\vee\}$$

と置く．$P,\ P' \in \mathcal{P}(M)$ が adjacent であるとは，$\mathfrak{a}_P^+$ と $\mathfrak{a}_{P'}^+$ が余次元 1 の共通の wall を持つことをいう．各 $P \in \mathcal{P}(M)$ に対して $c_P(\lambda)$ を $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ についての滑らかな関数とする．そのような関数の集まり

$$\{\, c_P(\lambda) \mid P \in \mathcal{P}(M)\,\}$$

が (G,M)-family であるとは，P と P' が adjacent であるような任意のペア $P,\ P' \in \mathcal{P}(M)$ について

$$c_P(\lambda) = c_{P'}(\lambda)\,,\ \ {}^\forall\lambda \in (i(\mathfrak{a}_M^*)_P^+ \text{と}\ i(\mathfrak{a}_M^*)_{P'}^+ \text{の wall のなす超平面})$$

が成り立つことを意味する．**以下, $\{c_P(\lambda)\,|\,P \in \mathcal{P}(M)\}$ を (G,M)-family と仮定する.**

サブサブセクション 2.1 において $\mathfrak{a}_G$, $\mathfrak{a}_M$, $\mathfrak{a}_G^*$, $\mathfrak{a}_M^*$ 上のハール測度を固定したので，$\mathfrak{a}_M^G$ と $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ 上のハール測度もすでに固定されていることに気をつけよう．$\mathbb{Z}(\Delta_P^\vee)$ を $\Delta_P^\vee$ で生成される $\mathfrak{a}_M^G$ の格子とする．次に，

$$\theta_P(\lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_M^G/\mathbb{Z}(\Delta_P^\vee))^{-1} \prod_{\alpha\in\Delta_P} \lambda(\alpha^\vee)\,, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$$

と λ の斉次多項式 $\theta_P(\lambda)$ を定める．そして，

$$c_M(\lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \frac{c_P(\lambda)}{\theta_P(\lambda)}$$

と置く．

補題 3.1. 関数 $c_M(\lambda)$ は $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の滑らかな関数に拡張される．

後で $c_M(\lambda)$ の $\lambda = 0$ での値に注目することになる．そのため，$c_M(\lambda)$ の $\lambda = 0$ での値を c_M と書く．つまり，$c_M = c_M(0)$ と置く．

$P \in \mathcal{P}(M)$ と $P \subset Q$ となる $Q \in \mathcal{F}(M)$ とについて

$$\widehat{\theta}_P^Q(\lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}((\widehat{\Delta}_P^Q)^\vee))^{-1} \prod_{\varpi\in\widehat{\Delta}_P^Q} \lambda(\varpi^\vee)\,, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$$

と置く．当然 $\widehat{\theta}_P^Q(\lambda)$ は λ に関する多項式である．直和分解 $\mathfrak{a}_M^* = (\mathfrak{a}_P^Q)^* \oplus \mathfrak{a}_Q^*$ による $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ の $i\mathfrak{a}_Q^*$ への射影の像を λ_Q とする．関数 c_P の $i\mathfrak{a}_Q^*$ への制限を c_Q とする．つまり $c_Q = c_P|_{i\mathfrak{a}_Q^*}$ と置いた．そして，

$$c_P'(\lambda) = \sum_{\mathbb{Q}\supset P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^Q}\, c_Q(\lambda_Q)\, \widehat{\theta}_P^Q(\lambda)^{-1}\, \theta_Q(\lambda_Q)^{-1}$$

と置く．

補題 3.2. 関数 $c_P'(\lambda)$ は $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の滑らかな関数に拡張される．

この場合も $c_P'(\lambda)$ の $\lambda = 0$ での値を c_P' と書く．つまり，$c_P' = c_P'(0)$ と置く．

3.2 (G, M)-family の例

$x \in G(\mathbb{A})$ と $P \in \mathcal{P}(M)$ について, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の関数 $v_P(\lambda, x)$ を

$$v_P(\lambda, x) = e^{-\lambda(H_P(x))}$$

によって定める. $-H_P(x) \in \mathfrak{a}_M^G$ に注意する.

補題 3.3. 固定した $x \in G(\mathbb{A})$ について, $\{v_P(\lambda, x) \,|\, P \in \mathcal{P}(M)\}$ は (G, M)-*family* となる.

そのため,

$$v_M(\lambda, x) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \frac{v_P(\lambda, x)}{\theta_P(\lambda)}$$

と置くと, 関数 $v_M(\lambda, x)$ は $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の滑らかな関数となり, 極限

$$v_M(x) = \lim_{\lambda \to 0} v_M(\lambda, x)$$

は値を持つ. 特に $v_M(x)$ は $\mathfrak{a}_M^G$ 上の点 $-H_P(x)$, $P \in \mathcal{P}(M)$ を結ぶことで得られる convex hull の体積と一致することが知られている. そして, 幾何サイドの重み付き軌道積分の重み因子として現れる.

H, $X \in \mathfrak{a}_0^G$ についての関数 $\Gamma'_P(H, X)$ を等式

$$\widehat{\tau}_P(H - X) = \sum_{Q \supset P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^G} \, \widehat{\tau}_P^Q(H) \, \Gamma'_Q(H, X)$$

を用いて $\dim \mathfrak{a}_P^G$ に関して帰納的に定義する. もちろん, $\Gamma'_P(H, X)$ は H と X の $\mathfrak{a}_P^G$ への射影にのみ依存している.

補題 3.4. 任意に固定した X と P について関数 $H \mapsto \Gamma'_P(H, X)$ は $H \in \mathfrak{a}_P^G$ に関してコンパクトサポートを持つ. そして, 関数

$$X \mapsto \int_{\mathfrak{a}_P^G} \Gamma'_P(H, X) \mathrm{d}H, \quad X \in \mathfrak{a}_P^G$$

は X に関する $\dim \mathfrak{a}_P^G$ 次の斉次多項式となる.

関数 $\Gamma'_P(H, X)$ はテスト関数への $G(\mathbb{A})$ の共役の作用を考えたときに, 跡公式に自然に現れる. ここで

$$v'_P(\lambda, x) = \sum_{Q \supset P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^Q} \, v_Q(\lambda_Q, x) \, \widehat{\theta}_P^Q(\lambda)^{-1} \, \theta_Q(\lambda_Q)^{-1}$$

と置くと,

$$v'_P(\lambda, x) = \int_{\mathfrak{a}_P^G} \Gamma'_P(H, -H_P(x)) \, e^{\lambda(H)} \mathrm{d}H$$

が成り立つことが知られている.

3.3 (G, M)-family に関する公式

(G,M)-family $\{c_P(\lambda) \,|\, P \in \mathcal{P}(M)\}$ から別の family を作ろう．任意に $Q \in \mathcal{F}(M)$ を一つ固定する．M_Q の放物型部分群 $R \in \mathcal{P}^{M_Q}(M)$ に対して, $Q(R) \subset Q$ かつ $Q(R) \cap M_Q = R$ を満たす唯一の $Q(R) \in \mathcal{P}(M)$ が存在する．これより, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の関数 $c_R^Q(\lambda)$ を

$$c_R^Q(\lambda) = c_{Q(R)}(\lambda)$$

によって定義する．そして, このとき $\{c_R^Q(\lambda) \,|\, R \in \mathcal{P}^{M_Q}(M)\}$ は (M_Q, M)-family となる．次に任意に $L \in \mathcal{L}(M)$ を一つ固定する．$Q \in \mathcal{P}(L)$ に対して, $\lambda \in i\mathfrak{a}_L^*$ 上の関数 $c_Q(\lambda)$ を, $P \subset Q$ となる $P \in \mathcal{P}(M)$ を使って

$$c_Q(\lambda) = c_P(\lambda)$$

と定義する．この値は P の選択に依存しない．このとき, $\{c_Q(\lambda) \,|\, Q \in \mathcal{P}(L)\}$ は (G,L)-family となる．最後に, $\{d_P(\lambda) \,|\, P \in \mathcal{P}(M)\}$ も (G,M)-family として, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の関数 $(cd)_P(\lambda)$ を

$$(cd)_P(\lambda) = c_P(\lambda)\, d_P(\lambda)$$

と定義する．このとき, $\{(cd)_P(\lambda) \,|\, P \in \mathcal{P}(M)\}$ も (G,M)-family である．

補題 3.5. $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ について

$$(cd)_M(\lambda) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} c_M^Q(\lambda)\, d_Q'(\lambda_Q)$$

が成り立つ．特に

$$(cd)_M = \sum_{Q \in \mathcal{F}(M)} c_M^Q\, d_Q'$$

を得る．

k_1 を $\mathbb{Q}$ の拡大体とする．$k_1 = \mathbb{Q}$ でも良い．M は G の k_1 上の Levi 部分群 M_1 を含むと仮定する．k_1 上定義される M_1 上の指標 $X(M_1)_{k_1}$ を考えれば, $\mathfrak{a}_{M_1}$ 等が同様に定義できることが分かる．そして, $\mathfrak{a}_M$ は $\mathfrak{a}_{M_1}$ の部分空間となる．$\{c_{P_1}(\lambda) \,|\, P_1 \in \mathcal{P}(M_1)\}$ を (G,M_1)-family と仮定する．さらに, $P \in \mathcal{P}(M)$ に関して, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の関数 $c_P(\lambda)$ を, $P_1 \subset P$ となる $P_1 \in \mathcal{P}(M_1)$ を使って

$$c_P(\lambda) = c_{P_1}(\lambda)$$

と定義する．この値は P_1 の選択に依存しない．そして, $\{c_P(\lambda) \,|\, P \in \mathcal{P}(M)\}$ は (G,M)-family となる．各 $L_1 \in \mathcal{L}(M_1)$ について $\mathfrak{a}_{M_1}^{L_1}$ 上のハール測度を固定する．各 $L_1 \in \mathcal{L}(M_1)$ に対する正の実数 $d_{M_1}^G(M, L_1)$ を次のように定義する．まず自然な写像

$$\mathfrak{a}_{M_1}^M \oplus \mathfrak{a}_{M_1}^{L_1} \to \mathfrak{a}_{M_1}^G$$

が同型でないならば, $d^G_{M_1}(M, L_1) = 0$ と定める．もしその写像が同型ならば,

$$(\mathfrak{a}^G_{M_1}\text{上のハール測度}) \;=\; d^G_{M_1}(M, L_1) \times (\mathfrak{a}^M_{M_1} \oplus \mathfrak{a}^{L_1}_{M_1}\text{上のハール測度})$$

によって $d^G_{M_1}(M, L_1)$ を定める．さらに $\mathfrak{a}^M_{M_1}$ 上に一つの小さいベクトル ξ を固定する．もし $L_1 \in \mathcal{L}(M_1)$ かつ $d^G_{M_1}(M, L_1) \neq 0$ であるなら, $\xi + \mathfrak{a}^G_M$ と $\mathfrak{a}^G_{L_1}$ は一つの点で交わる．ある唯一の $Q_1 \in \mathcal{P}(L_1)$ が存在して, その点が $\mathfrak{a}^+_{Q_1}$ に属する．つまり, ベクトル ξ によって, $L_1 \in \mathcal{L}(M_1)$, $d^G_{M_1}(M, L_1) \neq 0$ に対して $Q_1 \in \mathcal{P}(L_1)$ を一つ定めることができる．

補題 3.6. $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_M$ について

$$c_M(\lambda) = \sum_{L_1 \in \mathcal{L}(M_1)} d^G_{M_1}(M, L_1)\, c^{Q_1}_{M_1}(\lambda)$$

が成り立つ．特に

$$c_M = \sum_{L_1 \in \mathcal{L}(M_1)} d^G_{M_1}(M, L_1)\, c^{Q_1}_{M_1}$$

が成り立つ．

この補題の $k_1 = \mathbb{Q}$, $\mathcal{G} = G \times G$, $M_1 = \mathcal{M} = M \times M$ の場合を考えよう．$\mathcal{M} = M \times M$ に M を対角に埋め込んで, $M \subset \mathcal{M}$ とする．このとき, $\mathfrak{a}_M$ も $\mathfrak{a}_{\mathcal{M}} = \mathfrak{a}_M \oplus \mathfrak{a}_M$ への対角の埋め込みにより, $\mathfrak{a}_M$ を $\mathfrak{a}_{\mathcal{M}}$ の部分空間となる．そして, $\mathcal{G}$ の $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ に属する Levi 部分群はペア $L = (L_1, L_2)$, L_1, $L_2 \in \mathcal{L}(M)$ によって与えられる．さらに

$$d^{\mathcal{G}}_{\mathcal{M}}(M, L) = 2^{\frac{1}{2}\dim \mathfrak{a}^G_M}\, d^G_M(L_1, L_2)$$

が成り立つ．一方で, $P = (Q, Q) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Q \in \mathcal{P}(M)$ と $\lambda \in \mathfrak{a}^*_M$ について

$$\theta_P(\lambda) = 2^{\frac{1}{2}\dim \mathfrak{a}^G_M}\theta_Q(\lambda)$$

となることにも注意したい．これより下の補題で $2^{\frac{1}{2}\dim \mathfrak{a}^G_M}$ が現れない．小さいベクトル $\xi \in \mathfrak{a}^M_{\mathcal{M}}$ を一つ固定する．この ξ によりペア $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, L_1, $L_2 \in \mathcal{L}(M)$, $d^G_M(L_1, L_2) \neq 0$ からペア $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Q_1 \in \mathcal{P}(L_1)$, $Q_2 \in \mathcal{P}(L_2)$ への対応を得る．

$$\mathfrak{a}^M_{\mathcal{M}} = \{(H, -H) \mid H \in \mathfrak{a}_M\}$$

であり, $\mathfrak{a}^{L_1}_M \oplus \mathfrak{a}^{L_2}_M = \mathfrak{a}^G_M$ なので,

$$\xi = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2, \quad \xi_1 \in \mathfrak{a}^{L_1}_M, \quad \xi_2 \in \mathfrak{a}^{L_2}_M$$

と書くことができ,

$$\xi_1 \in \mathfrak{a}^+_{Q_1} \quad \text{and} \quad \xi_2 \in \mathfrak{a}^+_{Q_2}$$

が成り立つ．

補題 3.7. $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ について

$$(cd)_M(\lambda) = \sum_{L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2)\, c_M^{Q_1}(\lambda)\, d_M^{Q_2}(\lambda)$$

が成り立つ. 特に

$$(cd)_M = \sum_{L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2)\, c_M^{Q_1}\, d_M^{Q_2}$$

が成り立つ.

3.4 GL(3) の場合

まず $x \in G(\mathbb{A})^1$ を一つ固定する. $s \in W_0$ に対して

$$Y_s = -H_{sP_0}(x) \in \mathfrak{a}_0^G$$

と置く. この Y_s を具体的に計算することで, 跡公式の幾何サイドに関連する (G, M)-family の例

$$\{\, v_{sP_0}(\lambda, x) = e^{\lambda(Y_s)} \mid s \in W_0\}$$

の雰囲気を説明したい. $(s\alpha)(w_s a w_s^{-1}) = \alpha(a)$, $\alpha \in \mathfrak{a}_0^*$, $a \in A_0$ を思い出せば

$$\langle s^{-1} H_{sP_0}(w_s x w_s^{-1}), \alpha\rangle = \langle H_0(x), \alpha\rangle$$

が示せるので,

$$H_{sP_0}(x) = sH_0(w_s^{-1}x) \tag{3.1}$$

が成り立つことに注意しよう.

$$x = mnk \in G(\mathbb{A})^1, \quad m \in M_0(\mathbb{A}),\ n = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} \\ 0 & 1 & n_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_{P_0}(\mathbb{A}),\ k \in \mathbf{K}$$

と記号を定める. Y_s の計算を始める前に次の補題を与えておく.

補題 3.8. $n \in \mathbb{C}$ について

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+|n|^2)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (1+|n|^2)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(1+|n|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{n} \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. F を標数 0 の非アルキメデス的局所体とし, $\mathcal{O}$ をその整環, π を素元とする. e が 0 より大きい整数のとき, $n \in \pi^{-e}\mathcal{O}^\times$ について

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^e & 0 \\ 0 & \pi^{-e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pi^{-2e}\, n^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\pi^{-e}\, n^{-1} \\ \pi^e\, n & \pi^e \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

どちらも直接計算で簡単に証明できる. Iwasawa 分解になっていることに気をつけよう. $n=(n_v)\in\mathbb{A}$ に対して

$$\psi(n)=\sum_v \psi_v(n_v)\,,\ \psi_\infty(n_\infty)=\log(1+n_\infty^2)^{1/2}\,,\ \psi_v(n_v)=\max\{\log|n_v|_v\,,\ 0\}\ \text{if}\ v<\infty$$

と $\mathbb{A}$ 上の関数 ψ を定める. ただし, $v<\infty$ について $\psi_v(0)=0$ とする.

まず (12) について考えよう. $m\in M_0(\mathbb{A})$ について $H_{sP_0}(m)=H_0(m)$ なのだから, (3.1) より

$$Y_{(12)}-Y_e=-(12)H_0(\begin{pmatrix}1&0&n_{23}\\ n_{12}&1&n_{13}\\ 0&0&1\end{pmatrix})=-(12)H_0(\begin{pmatrix}1&0&0\\ n_{12}&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix})$$

を得る. よって補題 3.8 より

$$Y_{(12)}=-\psi(n_{12})(e_1-e_2)+Y_e$$

が得られた. これにより Y_e と $Y_{(12)}$ の位置関係が分かる. 特に (12) で固定される直線 $\mathfrak{a}_{M_{12}}^G$ と点 Y_e と点 $Y_{(12)}$ を結ぶ直線が垂直に交わることが分かる. 他の場合も同様に補題 3.8 より計算できる. $n_1=(n_{1,v})$, $n_2=(n_{2,v})\in\mathbb{A}$ に対して

$$\begin{aligned}&\psi(n_1,n_2)=\sum_v\psi_v(n_{1,v},n_{2,v})\,,\quad \psi_\infty(n_{1,\infty},n_{2,\infty})=\log(1+n_{1,\infty}^2+n_{2,\infty}^2)^{1/2}\,,\\ &\psi_v(n_{1,v},n_{2,v})=\max\{\log|n_{1,v}|_v\,,\ \log|n_{2,v}|_v\,,\ 0\}\ \text{if}\ v<\infty\end{aligned}$$

と $\mathbb{A}$ 上の関数 ψ を定める. このとき, 以下のようになる.

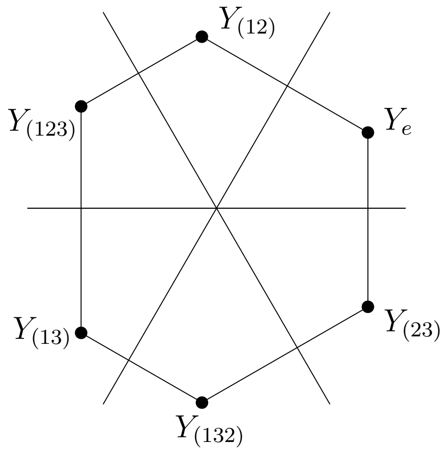
$$\begin{aligned}Y_{(12)}-Y_e=&-\psi(n_{12})(e_1-e_2)\,,\\ Y_{(23)}-Y_e=&-\psi(n_{23})(e_2-e_3)\,,\\ Y_{(123)}-Y_e=&\,\psi(n_{12})(e_2-e_3)-\psi(n_{12},n_{13})(e_1-e_3)\,,\\ Y_{(132)}-Y_e=&\,\psi(n_{23})(e_1-e_2)-\psi(n_{13}-n_{12}n_{23},n_{23})(e_1-e_3)\,,\\ Y_{(13)}-Y_e=&-\psi(n_{12},n_{13})(e_1-e_2)-\psi(n_{13}-n_{12}n_{23},n_{23})(e_2-e_3)\,.\end{aligned}$$

図の記述を簡単にするため $\alpha_{12}(-H_0(x))>0$ かつ $\alpha_{23}(-H_0(x))>0$ を仮定すると, 上の計算結果から Convex hull の図 6 が得られる. これらの結果や図からも分かるように, $P=sP_0\in\mathcal{P}$ に対して, $\alpha\in\Phi_P$ と adjacent なペア $s_\alpha P$ と P について, 非負整数 r_α が存在して,

$$Y_s-Y_{s_\alpha s}=r_\alpha\,\alpha^\vee$$

が成り立つことが分かる (cf. [A2]). 先に述べたように, この Convex hull の内部の体積と $v_{M_0}(x)$ の値が一致することが知られている.

図 6: Convex hull



次に $\Gamma'_P(H,X)$ を $P=P_0$, P_1, P_2, G に対して計算しよう (他の場合も同様に計算できる).

$$\begin{aligned} H =& H_1(e_1-e_2)+H_2(e_2-e_3)\in\mathfrak{a}_0^G \\ X =& X_1(e_1-e_2)+X_2(e_2-e_3)\in\mathfrak{a}_0^G \end{aligned}$$

と記号を定める. 明らかに任意の H, $X\in\mathfrak{a}_0^G$ について

$$\Gamma'_G(H,X)=1$$

である. 続いて定義から

$$\widehat{\tau}_{P_1}(H-X)=\widehat{\tau}_{P_1}(H)\,\Gamma'_G(H,X)-\widehat{\tau}_{M_{P_1}}(H)\,\Gamma'_{P_1}(H,X)$$

であり,

$$\widehat{\tau}_{P_1}(H)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad H_2>0\,, \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}, \quad \widehat{\tau}_{M_{P_1}}(H)=1$$

なので

$$\Gamma'_{P_1}(H,X)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad 0<H_2\le X_2\,, \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

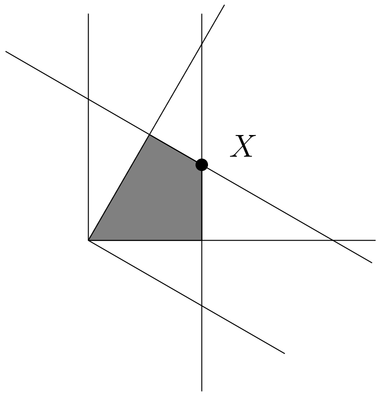
を得る. 同様に

$$\Gamma'_{P_2}(H,X)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad 0<H_1\le X_1\,, \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

が示せる. 定義より

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_{P_0}(H-X)=&\widehat{\tau}_{P_0}(H)\,\Gamma'_G(H,X)-\widehat{\tau}^{M_{P_1}}_{M_{P_1}\cap P_0}(H)\,\Gamma'_{P_1}(H,X) \\ &-\widehat{\tau}^{M_{P_2}}_{M_{P_2}\cap P_0}(H)\,\Gamma'_{P_2}(H,X)+\widehat{\tau}_{M_{P_0}}(H)\,\Gamma'_{P_0}(H,X) \end{aligned}$$

図 7: $\Gamma'_{P_0}(H, X)$ のサポート



であり,

$$\widehat{\tau}_{P_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad H_1 > 0 \text{ and } H_2 > 0\,, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \widehat{\tau}_{M_{P_0}}(H) = 1\,,$$

$$\widehat{\tau}^{M_{P_2}}_{M_{P_1} \cap P_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad H_1 - \frac{1}{2}H_2 > 0\,, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \widehat{\tau}^{M_{P_2}}_{M_{P_2} \cap P_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad -\frac{1}{2}H_1 + H_2 > 0\,, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ. そのため,

$$\Gamma'_{P_0}(H, X) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 0 < H_1 \leq X_1\,,\ 0 < H_2 \leq X_2\,,\ H_2 < 2H_1\,, \text{ and } H_1 < 2H_2\,, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ. よって, X を固定して $\Gamma'_{P_0}(H, X)$ を $H \in \mathfrak{a}_0^G$ に関する関数とみると, そのサポートは図 7 の影のようになることが分かる. 特に図 6 の convex hull の図を見れば, $X = Y_e$ としたとき, その Y_e から出ている直線と $\mathfrak{a}_{P_1}^G$ と $\mathfrak{a}_{P_2}^G$ で囲まれた図形と一致することが分かると思う.

補題 3.5 の二つ目の公式を図で見てみよう. 元 x とは異なるもう一つの元 $x' \in G(\mathbb{A})^1$ を一つ固定する. 同様に $s \in W_0$ に対して

$$Z_s = -H_{sP_0}(x') \in \mathfrak{a}_0^G$$

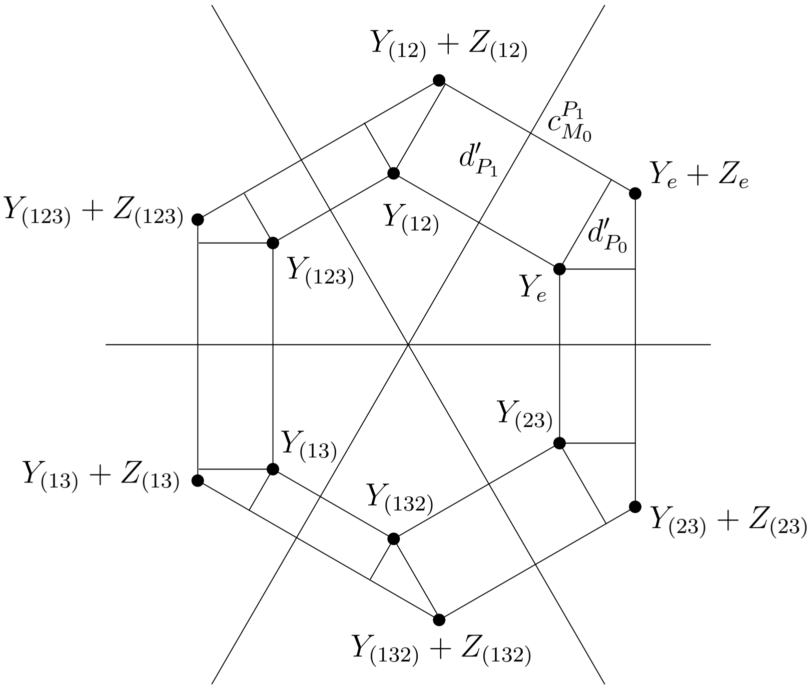
と置く.

$$c_{sP_0}(\lambda) = e^{\lambda(Y_s)}\,, \quad d_{sP_0}(\lambda) = e^{\lambda(Z_s)}$$

とすると, 二つの (G, M)-family $\{c_P(\lambda) \mid P \in \mathcal{P}\}$, $\{d_P(\lambda) \mid P \in \mathcal{P}\}$ が得られる. そして, それらの積から得られる (G, M)-family $\{(cd)_P(\lambda) \mid P \in \mathcal{P}\}$ が

$$(cd)_{sP_0}(\lambda) = e^{\lambda(Y_s + Z_s)}$$

図 8: Convex hull II



で定められる. Y_s と $Y_s + Z_s$ から得られる convex hull を図 8 に描いた. 補題 3.5 より,

$$\begin{aligned}(cd)_{M_0} =& c^G_{M_0} + c^{P_1}_{M_0}\, d'_{P_1} + c^{(13)P_1}_{M_0}\, d'_{(13)P_1} + c^{(23)P_1}_{M_0}\, d'_{(23)P_1} \\ & + c^{P_2}_{M_0}\, d'_{P_2} + c^{(12)P_2}_{M_0}\, d'_{(12)P_2} + c^{(13)P_2}_{M_0}\, d'_{(13)P_2} + \sum_{s\in W_0} d'_{sP_0}\end{aligned}$$

となる. もちろん $(cd)_{M_0}$ は $Y_s + Z_s$ の convex hull の内部の体積になる. 図 8 を見れば, この公式が図における $Y_s + Z_s$ の convex hull の分割に対応していることは明らかだと思う.

補題 3.6 と 3.7 の公式に関しても同様に図を使って考えることができる. この原稿には書かないが, 読者の方で興味のある方はぜひ図を描いてみてほしい.

4 細かい展開

このセクションでは [A1, §.18, 19, 20, 21] において説明されている $J_{\mathfrak{o}}(f)$ と $J_\chi(f)$ の細かい展開について述べる. これらの結果に関するアーサーの論文に関しては [A1] を参照されたい.

4.1 幾何サイド

$J_{\mathfrak{o}}(f)$ を重み付き軌道積分の和に細かく展開しよう．まずは記号を定めていく．

S を素点の有限集合とし, $\infty \in S$ とする．そして,

$$G(\mathbb{Q}_S) = \prod_{v\in S} G(\mathbb{Q}_v)$$

と置く．$G(\mathbb{Q}_S)^1 = G(\mathbb{Q}_S) \cap G(\mathbb{A})^1$ とし, $C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ は $G_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S))$ の関数を $G(\mathbb{Q}_S)^1$ へ制限して得られる関数から成る空間とする．χ_v を $\mathbf{K}_v$ の特性関数とし, $\chi^S = \prod_{v\notin S}\chi_v$ と置く．このとき, $C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ から $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ への単射が $f \to f\chi^S$ で与えられる．そこで, $C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ とこの単射の像を同一視する．

元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ について, $G_{\gamma,+}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義される γ の G における中心化群とする．そして, G_γ を 1 を含む $G_{\gamma,+}$ の連結成分とする．

元 $\gamma = (\gamma_v) \in M(\mathbb{Q})$ を一つ固定する．σ_v を γ_v の Jordan 分解の semisimple part とする．まず $G_\gamma \subset M$ となる場合には, $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S))$ について,

$$J_M(\gamma, f) = \Big|\prod_{v\in S}\det(1-\mathrm{Ad}(\sigma_v))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\sigma_v}}\Big|^{1/2}\int_{G_\gamma(\mathbb{Q}_S)\backslash G(\mathbb{Q}_S)} f(x^{-1}\gamma x)\, v_M(x)\,\mathrm{d}x$$

と $J_M(\gamma,f)$ を定義する．次に $G_\gamma \not\subset M$ の場合には, ある標準的な関数 $r_M^L(\gamma,a)$, $L \in \mathcal{L}(M)$, $a \in A_M(\mathbb{Q}_S)$ が存在して, a は $G_{a\gamma} \subset M \subset L$ を満たしながら動くようにしすることで上の場合に定義された $J_L(a\gamma, f)$ よって,

$$J_M(\gamma,f) = \lim_{a\to 1}\sum_{L\in\mathcal{L}(M)} r_M^L(\gamma,a)\, J_L(a\gamma,f)$$

と $J_M(\gamma,f)$ が定義される．

$S = S_1 \cup S_2$ (disjoint union) と二つの集合に分け,

$$f = f_1\, f_2\,,\quad f_1 \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_{S_1}))\,,\ f_2 \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_{S_2}))\,,$$

$$\gamma = \gamma_1\,\gamma_2\,,\quad \gamma_1 \in G(\mathbb{Q}_{S_1}))\,,\ \gamma_2 \in G(\mathbb{Q}_{S_2})$$

と仮定する．このとき, $G_\gamma \subset M$ の場合には, $J_M(\gamma,f)$ の定義と補題 3.7 より

$$J_M(\gamma,f) = \sum_{L_1,L_2\in\mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1,L_2)\, J_M^{L_1}(\gamma_1, f_{Q_1})\, J_M^{L_2}(\gamma_2, f_{Q_2})$$

が成り立つ．ただし, (L_1,L_2) に (Q_1,Q_2) が対応しており, $r = 1$ or 2 について, $\mathbf{K}_{S_r} = \prod_{v\in S_r}\mathbf{K}_v$ とし,

$$f_{r,Q_r}(m) = \delta_Q(m)^{1/2}\int_{\mathbf{K}_{S_r}}\int_{N_{Q_r}(\mathbb{Q}_{S_r})} f_r(k^{-1}mnk)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k\,,\ m \in M_{Q_r}(\mathbb{Q}_{S_r})\,,$$

と置いた．この公式を帰納的に使えば各素点上の積分の積に分解できることが分かる．

元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ を一つ固定する．σ を γ の Jordan 分解における semi-simple part とする．γ と γ' が (G,S)-同値であるとは, 次の条件 (i) と (ii) が成り立つことを意味する．

(i) σ と $\delta^{-1}\gamma'\delta$ の semi-simple part が一致するような $\delta \in G(\mathbb{Q})$ が存在する.

(ii) ユニポテント $\sigma^{-1}\gamma$ と $\sigma^{-1}\delta^{-1}\gamma'\delta$ は $G_\sigma(\mathbb{Q}_S)$ において共役である.

$(\mathcal{U}_{G_\sigma}(\mathbb{Q}))_{G_\sigma,S}$ を $G_\sigma(\mathbb{Q})$ のユニポテント元全体における (G_σ, S)-同値類の集合とする. $(\mathcal{U}_{G_\sigma}(\mathbb{Q}))_{G_\sigma,S}$ は有限集合であることに注意する.

定理 4.1. $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}$ を $G(\mathbb{Q})$ のユニポテント元全体の集合とする. 無限素点 ∞ を含む任意の素点の有限集合 S について, G, S, $u \in (\mathcal{U}_G(\mathbb{Q}))_{G,S}$ によって唯一に定まる定数 $a^G(S,u)$ が存在して, 任意の $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ について

$$J_{\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}}(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}} |W_0^M|\,|W_0^G|^{-1} \sum_{u\in(\mathcal{U}_M(\mathbb{Q}))_{M,S}} a^M(S,u)\, J_M(u,f)$$

が成り立つ. さらに任意の S に対して

$$a^M(S,1) = \mathrm{vol}(M(\mathbb{Q})\backslash M(\mathbb{A})^1)$$

が成り立つ.

さらにこの定理をすべての $\mathcal{O}$-同値類に対して拡張した結果を紹介しよう. 次のように記号を定める.

$$\varepsilon^G(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad A_{G_\sigma} = A_G\,, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\iota^G(\sigma) = G_{\sigma,+}(\mathbb{Q})/G_\sigma(\mathbb{Q})\,.$$

そして,

$$a^G(S,\gamma) = \varepsilon^G(\sigma)\,|\iota^G(\sigma)|^{-1} \sum_{u\in(\mathcal{U}_{G_\sigma}(\mathbb{Q}))_{G_\sigma,S}/\sim} a^{G_\sigma}(S,u)$$

と置く. 特に γ が semi-simple ならば

$$a^G(S,\gamma) = \varepsilon^G(\sigma)\,|\iota^G(\sigma)|^{-1}\,\mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{A})^1)$$

となる. $(M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o})_{M,S}$ を $M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}$ における (M,S)-同値類の有限集合とする.

定理 4.2. 任意の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ に対して, 無限素点 ∞ を含むある素点の有限集合 $S_\mathfrak{o}$ が存在して, 任意の $S \supset S_\mathfrak{o}$ と任意の $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ について

$$J_\mathfrak{o}(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}} |W_0^M|\,|W_0^G|^{-1} \sum_{\gamma\in(M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o})_{M,S}} a^M(S,\gamma)\, J_M(\gamma,f)$$

が成り立つ.

4.2 スペクトルサイド

$L^2_{\mathrm{disc}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1) = \oplus_{\pi\in\widehat{M(\mathbb{A})^1}} m_{\mathrm{disc}}(\pi)\cdot\pi$ とする．ただし，$m_{\mathrm{disc}}(\pi)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は π の重複度とする．$\pi\in\widehat{M_P(\mathbb{A})}^1$ について，$\mathcal{H}_{P,\pi}$ を $\phi\in\mathcal{H}_P$ で $\phi_x\in m_{\mathrm{disc}}(\pi)\cdot\pi$ となるもの全体の空間とする．そして，$\mathcal{H}_{P,\chi,\pi}=\mathcal{H}_{P,\chi}\cap\mathcal{H}_{P,\pi}$ と置く．このとき，

$$\mathcal{H}_{P,\chi} = \bigoplus_{\pi\in\widehat{M_P(\mathbb{A})}^1} \mathcal{H}_{P,\chi,\pi}$$

と直和分解する．$\mathcal{I}_{P,\chi}(\lambda)$ の $\mathcal{H}_{P,\chi,\pi}$ への制限を $\mathcal{I}_{P,\chi,\pi}$ と書く．次に $W(M)=W^G(M)=W(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M)$ とする．例えば $G=\mathrm{GL}(3)$ の場合，

$$W^{M_{12}}(M) = \begin{cases} \{e\,,\ (12)\} & \text{if } M=M_0, \\ \{e\} & \text{if } M=M_{12} \end{cases}$$

となる．$s\in W(M)$ で固定される部分空間を $\mathfrak{a}_M^s=\{H\in\mathfrak{a}_M \,|\, t(H)=H\}$ と置く．有限群 $W^L(M)$ の正則元から成る部分集合 $W^L(M)_{\mathrm{reg}}$ が

$$W^L(M)_{\mathrm{reg}} = \{t\in W^L(M)\,|\,\mathfrak{a}_M^t=\mathfrak{a}_L\}$$

と定義される． スペクトルサイドの細かい展開の記述のために，最後に intertwing operator の記号を定めよう． $P,\ Q\in\mathcal{P}(M)$，$s\in W(M)$，$\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ に対して，ユニタリ表現 $(\mathcal{I}_P(\lambda),\mathcal{H}_P)$ と $(\mathcal{I}_Q(s\lambda),\mathcal{H}_Q)$ に対して，ある unitary intertwing operator $M_{Q|P}(s,\lambda)\,:\,\mathcal{H}_P\to\mathcal{H}_Q$ が存在する．$M_{Q|P}(\lambda)=M_{Q|P}(1,\lambda)$，$M_P(s,0)=M_{P|P}(s,\lambda)$ と置く．$M_{P|P}(s,\lambda)$ は λ から独立していることに注意する．

$$M_Q(\Lambda,\lambda,P) = M_{Q|P}(\lambda)^{-1}M_{Q|P}(\lambda+\Lambda)\,,\quad \Lambda\in i\mathfrak{a}_M^*\,,\ Q\in\mathcal{P}(M)$$

と置くと，

$$\{M_Q(\Lambda,\lambda,P)\,|\,Q\in\mathcal{P}(M)\}$$

は $\Lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ についての (G,M)-family となり，

$$M_L(\lambda,P) = \lim_{\Lambda\to 0}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L)} M_Q(\Lambda,\lambda,P)\,\theta_Q(\Lambda)^{-1}$$

が定義される．

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1) = \{f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)\,|\,f \text{ は } \mathbf{K}\text{-有限}\,\}$$

とする．次の公式が $J_\chi(f)$ の細かい展開である．

定理 4.3. 任意の $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ について

$$J_\chi(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)}\sum_{L\in\mathcal{L}(M)}\sum_{\pi\in\widehat{M(\mathbb{A})^1}}\sum_{s\in W^L(M)_{\mathrm{reg}}} |W_0^M|\,|W_0|^{-1}\,|\det(s-1)_{\mathfrak{a}_M^G}|^{-1}$$
$$\times\int_{i\mathfrak{a}_L^*/i\mathfrak{a}_G^*}\mathrm{tr}(M_L(\lambda,P)\,M_P(s,0)\,\mathcal{I}_{P,\chi,\pi}(\lambda,f))\mathrm{d}\lambda$$

が成り立つ．

4.3 GL(3) の場合

GL(3) の $J_{\mathfrak{o}}(f)$ について具体例を与える.

$$\gamma=\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{pmatrix}\in M_0(\mathbb{Q})\,,\quad a_1\neq a_2\,,\ a_1\neq a_3\,,\ a_2\neq a_3$$

とする. 明らかに $G_\gamma=M_0$ となる. γ の属する $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ は γ の $G(\mathbb{Q})$-共役類である. S を $S_{\mathfrak{o}}$ を含む十分大きい素点の有限集合とする. 定義より

$$J_{M_0}(\gamma,f)=D_S(a_1,a_2,a_3)\int_{M_0(\mathbb{Q}_S)\backslash G(\mathbb{Q}_S)}f(x^{-1}\gamma x)\,v_{M_0}(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$D_S(a_1,a_2,a_3)=\prod_{v\in S}|a_1^{-1}a_3(1-a_1a_2^{-1})(1-a_2a_3^{-1})(1-a_1a_3^{-1})|_v$$

となる. サブセクション 3.4 を見れば, $v_{M_0}(x)$ の値が分かる. $M\in\mathcal{L}$, $M\neq M_0$ について, $M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}$ の元 σ は $A_{M_\sigma}=A_M$ を満たさないことに気をつければ, 定理 4.2 より

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=\mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{A})^1)\,J_{M_0}(\gamma,f)$$

を得る. このような $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ に関しては $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ を直接に計算することでも上の等式は得られる (cf. [A1, §.11]).

次に $J_{\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}}(f)$ を定理 4.2 に従って書き下してみよう.

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}}(f)=&\frac{1}{6}\,\mathrm{vol}(M_0(\mathbb{Q})\backslash M_0(\mathbb{A})^1)\,J_{M_0}(1,f)\\&+\frac{1}{3}\Big\{\mathrm{vol}(M_{12}(\mathbb{Q})\backslash M_{12}(\mathbb{A})^1)\,J_{M_{12}}(1,f)+a^{M_{12}}(S,u_{12})\,J_{M_{12}}(u_{12},f)\Big\}\\&+\frac{1}{3}\Big\{\mathrm{vol}(M_{13}(\mathbb{Q})\backslash M_{13}(\mathbb{A})^1)\,J_{M_{13}}(1,f)+a^{M_{13}}(S,u_{13})\,J_{M_{13}}(u_{13},f)\Big\}\\&+\frac{1}{3}\Big\{\mathrm{vol}(M_{23}(\mathbb{Q})\backslash M_{23}(\mathbb{A})^1)\,J_{M_{23}}(1,f)+a^{M_{23}}(S,u_{23})\,J_{M_{23}}(u_{23},f)\Big\}\\&+\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)\,J_G(1,f)+a^G(S,u_1)\,J_G(u_1,f)++a^G(S,u_2)\,J_G(u_2,f),\end{aligned}$$

$$u_{12}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,\ u_{13}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,\ u_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$u_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,\ u_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

と展開される.

参考文献

[A1] J. Arthur, An introduction to the trace formula, Clay Mathematics Proceedings 4 (2005), 1–263.

[A2] J. Arthur, The characters of discrete series as orbital integrals, Inv. Math. **32** (1976), 205–261.

[A3] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(Q)$, Duke Math. J. **45** (1978), no. 4, 911–952.

[A4] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. II. Applications of a truncation operator, Compositio Math. **40** (1980), no. 1, 87–121.

[A5] J. Arthur, The local behaviour of weighted orbital integrals, Duke Math. J. **56** (1988), 223–293.

[A6] J. Arthur, The trace formula in invariant form, Ann. of Math. (2) **114** (1981), 1–74.

[A7] J. Arthur, The invariant trace formula. I. Local theory, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 2, 323–383.

[A8] J. Arthur, The invariant trace formula. II. Global theory, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 3, 501–554.

[Bor] A. Borel, Linear algebraic groups, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[PR] V. P. Platonov, A. S. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen, Pure and Applied Mathematics **139**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[Ser] J.-P. Serre, Complex Semisimple Lie Algebras, Springer, New York, 1987.

[TW] 都築 正男, 若槻 聡, GL(2) の跡公式, 本報告集.

Satoshi Wakatsuki

Faculty of Mathematics and Physics, Institute of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakumamachi, Kanazawa, Ishikawa, 920-1192, Japan

E-mail address: `wakatuki[at]kenroku.kanazawa-u.ac.jp`

索 引

内視論入門 *

今野拓也†

2010 年 10 月 7 日

導入

世上では endoscopy は内視鏡 (endoscope) の機能開発を図る医学分野で、数学者でなくてもその意義は一目瞭然であろう。これを受けて私の原稿でも endoscopy を内視論と訳している。しかし我々にとっての endoscopy は Langlands によって創始され、我々の消化器官ではなく、保型表現論に現れる L パケット (または A パケット) の内部を見る理論である。

よく知られているように GL_2 やその内部形式上の保型表現はその標準 L 関数の性質をもって記述され、特に (分岐因子を除く!) 標準 L 関数たちで一意に決まる。すなわち保型形式の数論的な寄与はすべて L 関数から決まっている。この性質はある種の志村曲線や Hilbert モジュラー多様体のゼータ関数を記述する際に大きな役割を果たしている [BBG+79], [BL84]。

例えば総実代数体 F 上の完全不定符号四元数体 $\mathscr{B}$ の乗法群を $\mathbb{Q}$ 上の代数群と見たものを G と書く。$\mathbb{Q}$ のアデール環を $\mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ として、部分群

$$K_\infty := \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ -\beta_v & \alpha_v \end{pmatrix} \right)_v \in \prod_v \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R}) \right\}$$

および $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の開かつコンパクトな部分群 K を (適当に小さく) 取れば複素多様体

$$S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash (G(\mathbb{R})/K_\infty \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})/K) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})/K$$

---

* 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」の報告集原稿。

† 九州大学大学院数理学研究院。〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地
電子メール：takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ：http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/

($K := K_\infty \times K_{\mathrm{fin}}$) が考えられる。その Betti コホモロジーは松島・村上の公式により

$$\mathrm{H}^i(S_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} (\mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty) \otimes \pi_{\mathrm{fin}}^K)^{\oplus m(\pi)}$$

で与えられる。ここで $\Pi(G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合で、$m(\pi)$ はそのカスプ形式の空間での重複度、$\pi_\infty, \pi_{\mathrm{fin}}$ はそれぞれ π の $G(\mathbb{R})$ および $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分である。$\mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty)$ は π_∞ の Harish-Chandra 加群の相対 Lie 環コホモロジー、π_{fin}^K は π_{fin} の K 固定ベクトルの空間を表す。S_K は $\mathbb{Q}$ 上の標準模型を持ち、その (分岐因子を除く) Hasse-Weil ゼータ関数は π のある保型 L 関数 $L(s, \pi, r)$ を用いて

$$Z^\Sigma(s, S_K) = \prod_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} L^\Sigma\Big(s - \frac{d}{2}, \pi, r\Big)^{n(\pi,K)m(\pi)} \tag{†}$$

で与えられることが [BBG+79] の主結果の一つである。ただし Σ は適当な分岐素点の集合、$d = [F : \mathbb{Q}]$ である。また $n(\pi, K)$ は $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty)$ の Euler-Poincaré 標数と $\dim \pi_{\mathrm{fin}}^K$ の積である。これは Lefschetz 跡公式によって S_K の有限体上の有理点の構造に帰着され、その有限体上の点の数の記述を Selberg 跡公式の幾何サイドにインプットすることで証明された。

ところがこの性質は一般線型群以外ではほとんど成り立たない。例えば代数体の二次拡大 E/F と、E のイデール類指標 η で F イデール上で自明なもの $\eta : \mathbb{A}_E^\times / E^\times \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^1$ を取る。非自明指標 $\psi : \mathbb{A}_F/F \to \mathbb{C}^1$ を止めれば、F の各素点 v で局所テータ対応によりたかだか二つの $\mathrm{SL}_2(F_v)$ の既約ユニタリ表現 $\pi(\eta_v, \psi_v^a)$, $(a \in F_v^\times / \mathrm{N}_{E_v/F_v}(E_v^\times))$ が作れる。さらに $a \in \mathbb{A}_F^\times / \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ に対して、制限テンソル積

$$\pi(\eta, \psi^a) := \bigotimes_v \pi(\eta_v, \psi_v^{a_v})$$

は定義可能な $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)$ の既約ユニタリ表現である。さらに $\eta^2 \neq \mathbb{1}$ としたとき Labesse-Langlands によって次が知られている。

- $\pi(\eta, \psi^a)$, $(a \in \mathbb{A}_F^\times / \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times))$ が SL_2 のカスプ形式の空間に現れるためには、$a \in F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ が必要十分で、そのとき $\pi(\eta, \psi^a)$ のカスプ形式の空間での重複度は 1 である。
- $\pi(\eta, \psi^a)$, $(a \in F^\times / \mathrm{N}_{E/F}(E^\times))$ はあらゆる保型 L 関数を共有するカスプ表現である。

すなわち保型形式は L 関数で決まらず、しかも L 関数を共有する既約表現にかたや

カスプ形式、かたや保型表現でないものがあるというわけである。これを L 不可分性 (L-*indistinguishability*) の問題という。

こうした現象は早くから観測されており、その表現論から見た根拠も Labesse-Langlands は 1970 年代初頭に理解していた。しかし (†) の類似を考えたとき、この現象は L 関数の肩に乗る指数が L 関数で決まらないことを意味している。当時 PEL 型志村多様体のゼータ関数を保型 L 関数で記述するというプログラムを追求していた Langlands はこの理由を (志村多様体の有限体有理点の数をインプットする) 跡公式の幾何サイドに求めなくてはならなかった。彼は 1970 年代をかけてこの問題を追求し、最終的にこれらの現象が共役類ごとの局所大域原理に起因するという解決策を論文 [Lan77], [Lan79c], [LL79], [Lan79b], [Lan79a] などに発表している。共役類の局所大域原理は跡公式の安定化というプロセスを通じて、内視群と呼ばれるより小さな群からの保型形式のリフトとして保型表現に影響する。

一方で齋藤 (裕) による捻り付き跡公式 (twisted trace formula) を用いたベースチェンジリフトの構成は、共役類を記述する Galois コホモロジー群より L 群の半単純自己同型を中心に内視論を構成すべきであるという新視点を与えた。特にそれまで障害と考えられていた内視論が、むしろ保型表現のリフトを構成できる有用な枠組みであると考えられるようになった。この新しい枠組みでの内視論は主に Kottwitz によって構成され、その成果は [Kot84], [Kot86], [KS99] などに発表されている。またその際に必要となる捻り付き Arthur-Selberg 跡公式は Clozel-Labesse-Langlands によって開発され [CLL]、その結果は [Art86] 以降の Arthur の論文に見ることができる。この方向では保型表現の記述がよくわかっている一般線形群の外部自己同型に関する内視群に古典群が現れることを用いて、古典群の保型表現を記述しようというプログラムが重要である [Art90], [Art05]。

残念ながらこの講演では外部自己同型に関するいわゆる捻り付き内視論 (twisted endoscopy) については触れないが、Langlands が最初に行った形で内視論の構成を紹介する。これは Langlands の構成が最も内視論のアイディアがわかりやすいことと、共役類の問題から出発することで L パケットや局所 Langlands 対応など依然として仮説的な概念を用いずにすむからである。その一方で保型表現に対する内視論の帰結については全く触れられないため、構成の動機、特に L 群を用いることの意義が分かりづらいことは否めない。この点については平賀さんの解説を参照してもらうことにして、この講演ではその際に障害とならないよう Kottwitz ([Kot84], [Kot86]) による L 群を用いた定式化を積極的に採用するにとどめる。

以下にこの原稿の大まかな構成を述べよう。まず 1 節では内視論全体を通して基礎的な道具となる群コホモロジーについて復習する。少し冗長すぎる記述もあるが、保型表現な

ど解析的な分野を中心に勉強している大学院生の読者が理解しやすいよう心がけたつもりである。ついで 2 で局所大域原理の雛形ともなるトーラスの Langlands 対応を解説する。内視論は志村理論の影響を強く受けており、その構成においては極大トーラスやアーベル商などの関連するトーラスに多くの構成を帰着する。その際にはこの節の内容が繰り返し用いられる。

続く 3 節で連結簡約群についての基本的な定義や記号を準備したあと、4 節で代数体上の連結簡約群の共役類の局所大域原理を記述する。これは半単純単連結群に対してはシンプルな捻子の考察によって容易に達成できるが、一般の簡約群に対しては Kottwitz によるアーベル商への帰着を用いる。得られた局所大域原理は群の中では共役類ごとの局所的なものであるから、それを群全体の上の関数空間に実現される保型表現の情報に変換する跡公式が必要になる。5 節ではこうした局所大域公式としての側面を強調しつつ、Arthur-Selberg 跡公式をかなり簡単に紹介する。局所大域原理のインプットを説明するという我々の目的には跡公式の楕円正則項だけを考えるのが最適である。この原稿の最後の節ではまず内視論の主役である内視データの定義を復習する。Kottwitz によるこの定義は L 群の半単純元を中核に据えているため、現実に考える共役類との関連が見えにくい。そこで極大トーラスとその L 群それぞれの許容埋め込みという概念を用いることにより、共役類の構造への内視データの寄与を明らかにする。それにより局所大域原理を盛り込んだ跡公式が、自然に内視データによる展開を持つことを見てこの稿は完了である。

ここまでの構成は Galois コホモロジーを用いた共役類の記述のみによる純代数的なものである。跡公式の安定化のためには内視データによる展開の各項を、対応する内視群上の超関数で展開するという調和解析的問題を解かなくてはならない。それが次稿で解説する軌道積分の移行の問題である。

最後になったが今回サマースクールで内視論をテーマにした講演をする機会を与えてくださった、主催者の若槻聡、平賀郁両氏に感謝したい。サマースクールでは今回執筆した内視論への導入、軌道積分の移行の問題、楕円項の安定化に加えて、応用として玉河数についての Weil の予想の解決についても紹介した。本来はそれについても概説を書くつもりであったが、私の不徳と時間、力量の不足により原稿に取りかかることすらかなわなかった。参加者、関係者の皆さんにはこの場を借りてお詫びしたい。

目次

1　群コホモロジー

この節では内視論の記述で一貫して用いられる群コホモロジーの定義を復習し、その基本性質をまとめておく。詳細については [Wei94] など任意のホモロジー代数のテキストを参照されたい。この節では添字のないテンソル積は $\mathbb{Z}$ 上のそれを表す。

1.1　定義

G を群とする。G の $\mathbb{Z}$ 係数の群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の左加群を G 加群と呼び、それらの間の $\mathbb{Z}[G]$ 準同型を単に G 準同型という。G 加群のなすアーベル圏を $G\text{-}\mathcal{Mod}$, $A, B \in G\text{-}\mathcal{Mod}$ の間の射からなるアーベル群を $\mathrm{Hom}_G(A, B)$ で表す。またアーベル群の圏を $\mathcal{Ab}$ と書く。G 加群 M を取る。共変関手 $G\text{-}\mathcal{Mod} \ni N \mapsto \mathrm{Hom}_G(M, N) \in \mathcal{Ab}$ は左完全だが完全ではない。すなわち $G\text{-}\mathcal{Mod}$ の短完全列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ に対して

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M, N'')$$

は完全列だが、最後の準同型は全射とは限らない。その右導来関手が $N \mapsto \mathrm{Ext}^{\bullet}_G(M, N)$ であった。

もう少し詳しく復習しよう。G 加群 P (I) が射影的 (単射的) とは、任意の全射 (単射) G 準同型 $A \to B$ において勝手な G 準同型 $P \to B$ $(A \to I)$ が G 準同型 $P \to A$ に持ち上がる ($B \to I$ に延びる) ことだった。

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\exists"'] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

また G 加群 A の射影 (単射) 分解 $P_{\bullet}$ $(I^{\bullet})$ とは、完全系列 $\cdots \to P^1 \to P^0 \to A \to 0$ $(0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \cdots)$ で各 P_n (I^n) が射影 (単射) G 加群であるもののことだった。任意の $A \in G\text{-}\mathcal{Mod}$ は射影および単射分解を持つことが知られている [Wei94, 補題 2.2.5, 演習 2.3.5]。このとき N の単射分解 $I^{\bullet}$ および M の射影分解 $P_{\bullet}$ に対して

$$\mathrm{Ext}^i_G(M, N) := \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_G(M, I^{\bullet})) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_G(P_{\bullet}, N)), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

となるのだった。あるいは M の任意の分解、つまり完全列 $0 \to M \to K^0 \to K^1 \to \cdots$

を取って、$\mathrm{Ext}^i_G(M,N)$ を i 次コチェイン写像 $K^\bullet \to I^\bullet[i]$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & K^0 \arrow[r] \arrow[d] & K^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
I^{i-1} \arrow[r] & I^i \arrow[r] & I^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

のホモトピー同値類の群 $\mathrm{Hom}_{K(G\text{-}\mathcal{Mod})}(K^\bullet, I^\bullet[i])$ と定義しても同じ結果が得られる。特に M が自明な G 加群 $\mathbb{Z}$ の場合が N 係数の i 次 G コホモロジー群

$$\mathrm{H}^i(G,N) := \mathrm{Ext}^i_G(\mathbb{Z},N), \quad i = 0,1,2,\dots$$

である。

定義から $\mathrm{Ext}^i_G(M,\cdot)$ は不変コホモロジー δ 関手である。すなわち以下の性質を持つ。

(i) G-$\mathcal{Mod}$ の短完全列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ に対して、長完全列

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow &\mathrm{Hom}_G(M,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M,N'') \\
&\xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_G(M,N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(M,N'') \\
&\xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^2_G(M,N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_G(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_G(M,N'') \longrightarrow \dots
\end{aligned}$$

を与えるような準同型 $\delta : \mathrm{Ext}^i_G(M,N'') \to \mathrm{Ext}^{i+1}_G(M,N')$ がある。

(ii) 各行が完全列である可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_1' \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & N_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N_1'' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_2' \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_2'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して、次の図式は可換になる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^i_G(M,N_1') \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Ext}^i_G(M,N_1) \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Ext}^i_G(M,N_1'') \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Ext}^{i+1}_G(M,N_1') \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Ext}^i_G(M,N_2') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i_G(M,N_2) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^i_G(M,N_2'') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{i+1}_G(M,N_2')
\end{tikzcd}$$

1.2　非斉次コチェイン

さらに具体的に $\mathrm{H}^i(G,A)$ を計算しておく。L_r を G^{r+1} ($r+1$ 個の直積) で生成される自由アーベル群とし、

$$\begin{aligned} d_r : L_r \ni & \sum_{(g_0,\ldots,g_r)\in G^{r+1}} n_{g_0,\ldots,g_r}(g_0,\ldots,g_r) \\ & \longmapsto \sum_{(g_0,\ldots,g_r)\in G^{r+1}} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j n_{g_0,\ldots,g_r}(g_0,\ldots \hat{g}_j,\ldots,g_r) \in L_{r-1} \end{aligned}$$

と定めれば、完全列 $\cdots L_r \xrightarrow{d_r} L_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} L_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ は $\mathbb{Z}$ の自由 $\mathbb{Z}[G]$ 加群による分解、従って射影分解になっている。特に $\mathrm{H}^i(G,A)$ はコチェイン複体

$$0 \longrightarrow C^0(G,A) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{r-1}} C^r(G,A) \xrightarrow{d_r} C^{r+1}(G,A) \xrightarrow{d_{r+1}} \cdots$$
$$C^r(G,A) := \mathrm{Hom}_G(L_r,A) = \{a : G^{r+1} \to A \,|\, a(gg_0,\ldots,gg_r) = g.a(g_0,\ldots,g_r)\}$$
$$d_r a(g_0,\ldots,g_{r+1}) = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j a(g_0,\ldots \hat{g}_j,\ldots,g_{r+1})$$

の i 次コホモロジー群である。

定義から $a \in C^r(G,A)$ は $c(g_1,\ldots,g_r) := a(1,g_1,g_1g_2,\ldots,g_1\cdots g_r)$ で決まる。よって $C^r(G,A)$ は写像 $c : G^r \to A$ の群と同一視され、そこでの微分は

$$\begin{aligned} d_r c(g_1,\ldots,g_{r+1}) = g_1.c(g_2,\ldots,g_{r+1}) + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j c(g_1,\ldots,g_j \overset{j}{\vee}\! g_{j+1},\ldots,g_{r+1}) \\ +(-1)^{r+1} c(g_1,\ldots,g_r) \end{aligned}$$

で与えられる。この複体 $C^\bullet(G,A)$ を標準複体という。

特に我々の目的に必要となるのは $r = 1, 2$ の場合である。

(i) $\mathrm{H}^1(G,A)$ は G 上の A 値 1 コサイクルの群

$$Z^1(G,A) := \ker d_1 = \{c : G \to A \,|\, c(xy) = c(x) + x.c(y)\}$$

を 1 コバウンダリの群

$$B^1(G,A) := \mathrm{im}\, d_0 = \{\partial a(g) := a - g.a \,|\, a \in A\}$$

で割ったものである。

(ii) A 値 2 コサイクルの群 $Z^2(G,A)$ は関数 $c: G^2 \to A$ で

$$c(x,y) + c(xy,z) = c(x,yz) + x.c(y,z) \tag{1.1}$$

を満たすものからなる。他方 2 コバウンダリの群 $B^2(G,A)$ は 1 コチェイン $a: G \to A$ のコバウンダリ

$$\partial a : G^2 \ni (x,y) \longmapsto a(x) + x.a(y) - a(xy) \in A \tag{1.2}$$

たちからなる。2 コサイクル条件 (1.1) から $c(g,1) = g.c(1,1)$, $c(1,g) = c(1,1)$, $(g \in G)$ が従う。他方 2 コバウンダリは $\partial a(1,1) = a(1)$ で与えられる。そこで必要なら適当な 2 コバウンダリを差し引いて、実践に際しては 2 コサイクルは $c(1,1) = 0$ を、2 コバウンダリは $a(1) = 0$ を満たすコチェインのコバウンダリだけを考えればよい。

1.3 副有限群の場合

ここからは G が副有限群、つまり有限群からなる射影系の射影極限であるとする。これは G がコンパクトな完全不連結群であることに同値である。これから G の閉部分群は再び副有限群で、G を正規閉部分群で割った商群も副有限群になることが分かる。特に副有限群とその間の連続準同型の圏では像や核が考えられる。副有限群の開部分群は有限指数を持つため閉部分群でもあることに注意せよ。

G 加群 M が離散的あるいは滑らかとは各 $m \in M$ の固定化群 $\mathrm{Stab}(m,G) := \{g \in G \mid g.m = m\} \subset G$ が開部分群であることとする[*1]。滑らかな G 加群のなすアーベル圏を $\mathcal{Mod}_G$ と書く。滑らかな G 加群が有限生成であるためにはアーベル群として有限生成であることが必要十分であることに注意しよう。

一般に G 加群 M に対して、すべての開部分群 $K \subset G$ についての合併 $\bigcup_{K \subset G} M^K$ (M^K は K で固定される元のなすアーベル群) は滑らかな G 加群になる。これを M の滑らかな部分 (*smooth part*) と呼んで M^∞ で表すことにすれば、$M \in \mathcal{Mod}_G$, $N \in G\text{-}\mathcal{Mod}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_G(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_G(M,N^\infty)$$

である。特に単射 G 加群 I に対して I^∞ は $\mathcal{Mod}_G$ の単射加群になるから、任意の滑らか

*1 「滑らか」という用語は p 進群の表現論からの転用で一般的ではない。しかし保型表現論では「離散」は別の意味に頻繁に用いるので、以下ではもっぱら「滑らか」の方を用いる。

な G 加群 N は $\mathcal{M}od_G$ での単射分解 $I^\bullet$ を持つ。これを用いて

$$\mathrm{Ext}^i_G(M,N) := \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_G(M,I^\bullet)),\quad \mathrm{H}^i(G,N) := \mathrm{Ext}^i_G(\mathbb{Z},N)\quad i=0,1,2,\ldots$$

と定める。特に 1.2 節の群コホモロジーの定義ではコチェインを連続 (局所定数) であるものに限ることになる。この場合も得られた連続コチェインの複体を標準複体と呼ぶことにする。なお G が離散群でなければ $\mathcal{M}od_G$ は十分な射影対象を持たない。

1.4　群についての関手性

副有限群の間の (連続) 準同型 $f: H \to G$ が与えられているとする。$M \in \mathcal{M}od_G$ を $H \times M \ni (h,m) \mapsto f(h).m \in M$ により H 加群と見たものを $f^*M \in \mathcal{M}od_H$ と書く。こうして得られる関手 $f^*: \mathcal{M}od_G \to \mathcal{M}od_H$ は完全関手で単射加群を単射加群に送る。特に $N \in \mathcal{M}od_G$ の単射分解 $I^\bullet$ に対して $\mathrm{Hom}_G(M,I^\bullet) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_H(f^*M, f^*I^\bullet)$ から導来関手の射

$$f^* = \mathrm{Ext}^i_G(f^*) : \mathrm{Ext}^i_G(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_H(f^*M, f^*N)$$

が得られる。

(i) $H \subset G$ を閉部分群、$\iota: H \hookrightarrow G$ を自然な埋め込みとするとき、

$$\mathrm{res}^G_H := \iota^* : \mathrm{Ext}^q_G(M,N) \to \mathrm{Ext}^q_H(M,N)$$

を制限射と呼ぶ。

(ii) $H \triangleleft G$ が正規閉部分群で $p: G \to G/H$ を自然な射影とする。$M, N \in \mathcal{M}od_G$ に対して $\mathrm{Hom}_H(M,N)$ は $(g.f)(m) := g.(f(g^{-1}.m)), (g \in G, f \in \mathrm{Hom}_H(M,N))$ により G 加群になる。これは一般にその滑らかな部分 $\mathrm{Hom}_H(M,N)^\infty$ に一致しないが、M が有限生成 G 加群なら両者は等しい。特に $N^H = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z},N)$ は滑らかな G 加群でさらに $N^H = p^*N^H \in \mathcal{M}od_{G/H}$ と見なすこともできる。このとき $M \in \mathcal{M}od_{G/H}, N \in \mathcal{M}od_G$ に対して

$$\mathrm{infl}^G_H : \mathrm{Ext}^i_{G/H}(M,N^H) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Ext}^i_G(M,N^H) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_G(M,N)$$

をインフレ射という。

注意 1.1. 上の (ii) で特に $M \in \mathcal{M}od_G$ が有限生成なら、正規開部分群 $U \subset G$ で $M^U = M$ となるものがある。このとき $\mathrm{Ext}^i_G(M,N)$ はインフレ射についての帰納系

$\{\mathrm{Ext}^i_{G/K}(M, N^K)\}_{K\subset U}$ の帰納極限に同型である。

$$\mathrm{Ext}^i_G(M,N) \cong \varinjlim_K \mathrm{Ext}^i_{G/K}(M, N^K)$$

1.5 スペクトル系列

まず一般の場合のスペクトル系列を引用しよう。

事実 1.2 ([Mil06] I 章 定理 0.3)**.** $H \triangleleft G$ が正規閉部分群で $M, N \in \mathcal{M}od_G$, $L \in \mathcal{M}od_{G/H}$ が $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(L, M) = 0$ を満たすとき、スペクトル系列

$$\mathrm{Ext}^i_{G/H}(L, \mathrm{Ext}^j_H(M,N)^\infty) \implies \mathrm{Ext}^{i+j}_G(L\otimes M, N)$$

がある。

スペクトル系列 $E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ は射 $d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1}$ を備えている。これから $E_3^{p,q} := \ker d_2^{p,q}/\operatorname{im} d_2^{p-2,q+1}$ および $d_3^{p,q} : E_3^{p,q} \to E_3^{p+3,q-2}$ が定まり、さらに帰納的に $E_{n+1}^{p,q} := \ker d_n^{p,q}/\operatorname{im} d_n^{p-n,q+n-1}$ および $d_{n+1}^{p,q} : E_{n+1}^{p,q} \to E_{n+1}^{p+n+1,q-n}$ が定まる。今、事実 1.2 のスペクトル系列は第一象限に入っているから

$$E_\infty^{p,q} := E_n^{p,q}, \quad \forall n \geq \max(p+1, q+2)$$

は n によらず定まる。スペクトル系列が E^r に収束するという意味は、E^r が $E_\infty^{0,r}, E_\infty^{1,r-1}, \ldots, E_\infty^{r,0}$ を階層に持つ減少フィルターを持つことであった。

■ $L = \mathbb{Z}$, $H = \{1\}$ で M が自由アーベル群のとき　事実 1.2 のスペクトル系列は $E_2^{p,q} := \mathrm{H}^p(G, \mathrm{Ext}^q(M,N)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_G(M,N)$ となる。仮定から $\mathrm{Ext}^p(M,N) = 0$ だから、$q \geq 1$ に対して $E_2^{p,q} = 0$ の部分商 $E_\infty^{p,q} = E_n^{p,q}, (n \geq \max(p-1, q-2, 2))$ は全て消えている。一方

$$E_\infty^{p,0} = E_{n+1}^{p,0} \simeq E_n^{p,0}/\operatorname{im} d_n^{p-n,n-1} = E_n^{p,0} \simeq \cdots \simeq E_2^{p,0} = \mathrm{H}^p(G, \mathrm{Hom}(M,N))$$

だから結局

$$\mathrm{Ext}^p_G(M,N) \simeq \mathrm{H}^p(G, \mathrm{Hom}(M,N)) \tag{1.3}$$

が成り立つ。

■ $L = M = \mathbb{Z}$ のとき　事実 1.2 のスペクトル系列は *Hochschild-Serre* のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(G/H, \mathrm{H}^q(H, M)) \implies \mathrm{H}^{p+q}(G, M)$$

にほかならない。まず E^1 のフィルタ

$$0 \longrightarrow (E_\infty^{1,0} = E_2^{1,0}) \longrightarrow E^1 \longrightarrow (E_3^{0,1} = \ker d_2^{0,1})$$

から

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{infl}_H^G} \mathrm{H}^1(G, M) \xrightarrow{\mathrm{res}_H^G} \mathrm{H}^1(H, M)^{G/H} \\ \xrightarrow{d_2^{0,1}} \mathrm{H}^2(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{infl}_H^G} \mathrm{H}^2(G, M) \end{aligned} \tag{1.4}$$

は完全列である。さらに $\mathrm{H}^q(H, M) = 0, (1 \le \forall q \le r-1)$ が成り立つなら、$1 \le p \le r-1$ に対して $E_2^{p,r-p} = \mathrm{H}^p(G/H, \mathrm{H}^{r-p}(H, M)) = 0$ の部分商 $E_\infty^{p,r-p}$ は消えている。これからさらに

$$\begin{gathered} E_\infty^{r,0} = E_{r+1}^{r,0} = E_r^{r,0}/\operatorname{im} d_r^{0,r-1} = E_r^{r,0} = \cdots = E_2^{r,0} = \mathrm{H}^r(G/H, M^H), \\ E_{q+1}^{0,r} = \ker(E_q^{0,r} \to E_q^{q,r-q+1}) = E_q^{0,r} = \cdots = E_2^{0,r} \\ = \mathrm{H}^r(H, M)^{G/H}, \quad (1 \le q \le r), \\ E_\infty^{0,r} = E_{r+2}^{0,r} = \ker d_{r+1}^{0,r}, \\ d_{r+1}^{0,r} : (E_{r+1}^{0,r} = \mathrm{H}^r(H, M)^{G/H}) \longrightarrow (E_{r+1}^{r+1,0} = \mathrm{H}^{r+1}(G/H, M^H)) \end{gathered}$$

であるから、E^r のフィルタは次の完全列に単純化する。

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^r(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{infl}_H^G} \mathrm{H}^r(G, M) \xrightarrow{\mathrm{res}_H^G} \mathrm{H}^r(H, M)^{G/H} \\ \xrightarrow{d_{r+1}^{0,r}} \mathrm{H}^{r+1}(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{infl}_H^G} \mathrm{H}^{r+1}(G, M) \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.6　カップ積

一般に $L, M, N \in \mathcal{Mod}_G$ として $M \to I^\bullet, N \to J^\bullet$ を単射分解とする。

$$\mathrm{Hom}_G(I^\bullet, J^\bullet[p]) \times \mathrm{Hom}_G(L, I^q) \ni (\phi^\bullet, \psi) \longmapsto \phi^q \circ \psi \in \mathrm{Hom}_G(L, J^{p+q})$$

から $\mathbb{Z}$ 双線型写像 (合成積)

$$\mathrm{Ext}_G^p(M, N) \otimes \mathrm{Ext}_G^q(L, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^{p+q}(L, N)$$

が定まる。

$M, N, P \in \mathcal{M}od_G$ で N が自由アーベル群であるものと G 準同型 $\beta : M \otimes N \to P$ が与えられているとする。$M \ni m \mapsto \beta(m, \cdot) \in \mathrm{Hom}(N, P)$ は G 準同型だから (1.3) と併せて $\beta : \mathrm{H}^p(G, M) \to \mathrm{H}^p(G, \mathrm{Hom}(N, P)) = \mathrm{Ext}^p_G(N, P)$ が得られる。これと合成積から $\mathbb{Z}$ 双線型写像

$$\smile_\beta : \mathrm{H}^p(G, M) \otimes \mathrm{H}^q(G, N) \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}} \mathrm{Ext}^p_G(N, P) \otimes \mathrm{Ext}^q_G(\mathbb{Z}, N) \longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(G, P) \quad (1.6)$$

が得られる。これを β に付随するカップ積と呼ぶ。

1.7 非可換係数コホモロジー

非斉次コチェインによる G コホモロジー群の定義 (1.2 節) を用いて、G コホモロジーを係数群が非可換群の場合に拡張できる。G が別の群 K に滑らかに作用しているとする。すなわち各 $k \in K$ の G での固定化群は開部分群である。これまでと同様に

$$\mathrm{H}^0(G, K) := K^G$$

と定める。次に G 上の K 値 1 コサイクルとは局所定数写像 $a : G \to K$ で

$$a(gh) = a(g)(g.a(h)), \quad g,\, h \in G$$

を満たすものとし、それらの集合を $Z^1(G, K)$ と書く。特に $1 : G \ni g \mapsto 1 \in K$ は 1 コサイクルである。1 コサイクル $a, b \in Z^1(G, K)$ がコホモローグとは、ある $k \in K$ に対して

$$b(g) = k^{-1}a(g)(g.k), \quad g \in G$$

が成り立つこととする。これが同値関係であることは容易に確かめられる。このとき $\mathrm{H}^1(G, K)$ を $Z^1(G, K)$ をコホモローグという同値関係で割った商集合と定義する。これは $1 \in Z^1(G, K)$ の $\mathrm{H}^1(G, K)$ での像を原点として $\mathrm{H}^1(G, K)$ を原点付き集合 (*pointed set*) と見なされる。なお原点付き集合の射 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ とは写像 $f : X \to Y$ で $f(x_0) = y_0$ を満たすものを指す。このとき逆像 $\ker f := f^{-1}(y_0) \subset X$ を f の核という。特に原点付き集合の完全列が考えられる。

定義された 1 次コホモロジーまではコホモロジー関手の性質の類似が成り立つ。滑らかな G 作用付き群の完全列 $1 \to K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \to 1$, すなわち

- $i : K \to L$ は正規準同型[*2]で全射準同型 $p : L \to M$ の核は $i(K)$ に等しく、

[*2] 像が正規部分群である準同型のこと。

- i, p は G 同変である

ものが与えられているとする。

(i) $\mathrm{H}^0(G, M) = M^G$ の元 m に対して $\ell \in p^{-1}(m) \subset L$ を取る。$\partial\ell(g) := \ell^{-1}(g.\ell)$, ($g \in G$) と書けば、$p(\partial\ell(g)) = m^{-1}(g.m) = 1$ だから $i(k(g)) = \partial\ell(g)$ となる $k(g) \in K$ がただ一つある。こうして定まる $k : G \to K$ は 1 コサイクルで、そのコホモロジー類 $\delta(m) \in \mathrm{H}^1(G, K)$ は ℓ の取り方によらず、原点付き集合の射 $\delta : M^G \to \mathrm{H}^1(G, K)$ を定める。

(ii) さらに $i(K)$ が L の中心 $Z(L)$ に含まれているとする。$Z^1(G, M) \ni m$ に対して $p(\ell(g)) = m(g)$ となる $\ell : G \to L$ を取り、$\partial\ell(g, h) := \ell(g)(g.\ell(h))\ell(gh)^{-1}$, ($g$, $h \in G$) とおく。上と同様に $p(\partial\ell(g, h)) = 1$ なので $\partial\ell(g, h) = i(k(g, h))$ となる $k : G \times G \to K$ がただ一つある。$i(K) \subset Z(L)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\partial\ell(x, yz)(x.\partial(y, z)) =& \ell(x)(x.\partial(y, z))(x.\ell(yz))\ell(xyz)^{-1} \\ =& \ell(x)(x.\ell(y))(xy.\ell(z))(x.\ell(yz))^{-1}(x.\ell(yz))\ell(xyz)^{-1} \\ \partial\ell(x, y)\partial\ell(xy, z) =& \ell(x)(x.\ell(y))(xy.\ell(z))\ell(xyz)^{-1}\end{aligned}$$

は一致するから $k \in Z^2(G, K)$ であり、その $\mathrm{H}^2(G, K)$ でのクラス $\delta(m)$ は m のコホモロジー類のみで定まる。こうして原点付き集合の射 $\delta : \mathrm{H}^1(G, M) \to \mathrm{H}^2(G, K)$ が得られる。

命題 1.3 ([Ser79] VII 章の補遺の命題)**.** 滑らかな G 作用付き群の完全列 $1 \to K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \to 1$ に対して次の原点付き集合の完全列がある。

$$1 \to K^G \xrightarrow{i} L^G \xrightarrow{p} M^G \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G, K) \xrightarrow{i} \mathrm{H}^1(G, L) \xrightarrow{p} \mathrm{H}^1(G, M).$$

さらに $i(K) \subset Z(L)$ なら次も完全列である。

$$1 \to K^G \xrightarrow{i} L^G \xrightarrow{p} M^G \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G, K) \xrightarrow{i} \mathrm{H}^1(G, L) \xrightarrow{p} \mathrm{H}^1(G, M) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(G, K).$$

証明. 簡単なので読者自ら試みられたい。 □

1.8　Shapiro の補題

$H \subset G$ を閉部分群とし、K を滑らかな H 作用付き群とする。局所定数関数 $f : G \to K$ で $f(hx) = h.f(x), (h \in H, x \in G)$ を満たすものの集合を $\mathrm{Ind}_H^G K$ と書く。これは値の演算により群になり、G 作用 $g.f(x) = f(xg), (g \in G, f \in \mathrm{Ind}_H^G K)$ を備えている。これを K の G への誘導群 (*induced group*) と呼ぶ[*3]。

補題 1.4. $H \subset G$ を閉部分群とする。$M \in \mathcal{Mod}_G$ と $K \in \mathcal{Mod}_H$ に対して自然な同型

$$\mathrm{Ext}^i_G(M, \mathrm{Ind}_H^G K) \cong \mathrm{Ext}^i_H(M, K)$$

がある。同様に K が滑らかな H 作用付き群のときも次の自然な同型がある。

$$\mathrm{H}^i(G, \mathrm{Ind}_H^G K) \cong \mathrm{H}^i(H, K)$$

証明. まず K がアーベル群のとき、任意の $M \in \mathcal{Mod}_G$ に対して *Frobenius* 相互律 $\mathrm{Hom}_G(M, \mathrm{Ind}_H^G K) \cong \mathrm{Hom}_H(M, K)$ が成り立つ [BZ76, 2.28]。加えて $\mathrm{Ind}_H^G : \mathcal{Mod}_H \to \mathcal{Mod}_G$ は完全関手であるから K の単射分解 $I^\bullet$ に対して、$\mathrm{Ind}_H^G I^\bullet$ は $\mathrm{Ind}_H^G K$ の単射分解である。すなわち自然な同型

$$\mathrm{Ext}^i_G(M, \mathrm{Ind}_H^G K) \cong \mathrm{Ext}^i_H(M, K)$$

がある。

次に K が非可換な場合を考える。$(\mathrm{Ind}_H^G K)^G$ は K^H に値を持つ定数関数の集合だから $i = 0$ の場合は明らかである。1 次コホモロジーの場合を示すために単位元を含む $H \backslash G$ の完全代表系 Ξ を固定する。$Z^1(G, \mathrm{Ind}_H^G K)$ の元を $G \ni x \mapsto c_x(g) \in \mathrm{Ind}_H^G K$ と書こう。コサイクル条件から $c_{\xi x}(h) = c_\xi(h) c_x(h\xi)$, すなわち

$$c_x(h\xi) = c_\xi(h)^{-1} c_{\xi x}(h) = h.(c_\xi(1)^{-1} c_{\xi x}(1)), \quad x \in G,\, h \in H,\, \xi \in \Xi$$

ゆえ c は $G \ni g \mapsto c_g(1) \in K$ で決まる。次に $b(h\xi) := c_\xi(h) \in \mathrm{Ind}_H^G K, (h \in H, \xi \in \Xi)$ として $c'_x := b c_x (x.b)^{-1}$ とおけば、$c'_\xi(1) = c_1(1) c_\xi(1) c_\xi(1)^{-1} = 1$ より

$$c'_{h\xi}(1) = c'_h(1) c'_\xi(h) = c'_h(1) h.c'_\xi(1) = c'_h(1), \quad h \in H,\, \xi \in \Xi.$$

[*3] K がアーベル群のときは余誘導加群 (*coinduced module*) とも呼ばれる。

二つのコサイクル $c_i \in Z^1(G, \mathrm{Ind}_H^G K)$, $(i = 1, 2)$ がコホモローグなら対応する $c_i' \in Z^1(H, K)$ もコホモローグゆえ、単射 $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Ind}_H^G K) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(H, K)$ が得られた。逆に任意の $(h \mapsto c_h') \in Z^1(H, K)$ に対して

$$c_{h\xi}(1) = c_h', \quad c_g(h\xi) := h.(c_{\xi g}(1)), \quad h \in H, \xi \in \Xi, g \in G$$

とおくことにより $c \in Z^1(G, \mathrm{Ind}_H^G K)$ が得られ、上の射が全射であることも分かる。 □

2 トーラスの Langlands 対応

非可換な簡約群上の保型形式に生じる内視論の問題を考える前に、可換群上の保型形式、つまりトーラスの保型指標の記述を復習しておこう。

2.1 Galois コホモロジーの双対性

副有限群 Γ と滑らかな Γ 加群 C, それに開部分群 $\Delta \subset \Gamma$ に対する同型の族 $\{\mathrm{inv}_\Delta : \mathrm{H}^2(\Delta, C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}_\Delta$ からなる三つ組が類構造 (*class formation*) とは、次の二条件件が成り立つこととする。

- 任意の開部分群 $\Delta \subset \Gamma$ に対して $\mathrm{H}^1(\Delta, C) = 0$.
- 開部分群 $\Theta \subset \Delta \subset \Gamma$ に対して $\mathrm{inv}_\Theta \circ \mathrm{res}_\Theta^\Delta = [\Delta : \Theta] \cdot \mathrm{inv}_\Delta$.

合成積から $\mathbb{Z}$ 双線型写像

$$\mathrm{Ext}^i_\Gamma(M, C) \otimes \mathrm{H}^{2-i}(\Gamma, M) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\Gamma, C) \xrightarrow{\mathrm{inv}_\Gamma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

が定まる。位相アーベル群 G の有限位数の連続指標[*4]の群 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (離散 Pontrjagin 双対群) を G^* と書く。例えば離散捻れ群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ と副有限群 $\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は互いの離散 Pontrjagin 双対である。

[*4] 正標数の局所体の整数環の単元群のように指数有限でも開部分群でない部分群があるため連続性の条件は必要である。

定理 2.1 (Tate, [Mil06] 定理 1.8)**.** $(\Gamma, C, \{\mathrm{inv}_\Delta\})$ を類構造とし、$M \in \mathcal{Mod}_\Gamma$ が有限生成であるとする。
(i) (2.1) は $i \geq 2$ に対して、(抽象群の) 同型 $\alpha^i_\Gamma(M) : \mathrm{Ext}^i_\Gamma(M, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{2-i}(\Gamma, M)^*$ を与える。特に $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(M, C) = 0, (i \geq 3)$ である。
(ii) $i = 1$ の場合、(2.1) が与える準同型 $\alpha^1_\Gamma(M)$ は M が捻れ元を持たなければ全単射である。さらに任意の開部分群 $\Delta \subset \Gamma, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\alpha^1_\Delta(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : \mathrm{Ext}^1_\Delta(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\Delta, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ が全単射ならば、$\alpha^1_\Gamma(M)$ は全単射である。

この定理は証明しない。興味のある読者は [Mil06, I.1 節], あるいは [Hid00, 4.4.1 節] を参照されたい。

■局所 Tate・中山双対性　F を標数が 0 の非アルキメデス局所体とし、そのモジュラスを $|\ |_F : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と書く。F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定して絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を $\Gamma = \Gamma_F$ と書く。定義から Γ は有限次 Galois 拡大 E/F の Galois 群 $\Gamma_{E/F}$ の射影極限として副有限位相を備えている。常の通り F 代数群 G と有限次 Galois 拡大 E/F に対し、$\mathrm{H}^i(\Gamma, G(\bar{F}))$, $\mathrm{H}^i(\Gamma_{E/F}, G(E))$ をそれぞれ $\mathrm{H}^i(F, G)$, $\mathrm{H}^i(E/F, G(E))$ と書く。特に乗法群 $\mathbb{G}_m(R) := R^\times$ の Galois コホモロジー群 $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$ が F の *Brauer* 群である。Galois 理論の基本定理から Γ の開部分群はある有限次 Galois 拡大 E/F の絶対 Galois 群 $\Gamma_E = \mathrm{Gal}(\bar{F}/E)$ である。$(\Gamma, \mathbb{G}_m(\bar{F}) = \bar{F}^\times)$ と局所類体論の不変量射 [Ser67, 1.1 節] $\mathrm{inv}_E : \mathrm{H}^2(E, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は類構造をなす (Hilbert 90 定理と [Ser67, 定理 3])。

T を F 上定義されたトーラス、すなわち $T \otimes_F \bar{F}$ が乗法群の直積 $\mathbb{G}^r_m$ に同型であるような F 代数群とする。有限次拡大 E/F で $T \otimes_F E \simeq \mathbb{G}^r_{m,E}$ となるものが存在する。このような E を T の分解体 (*splitting field*) という。$X^*(T) := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ および $X_*(T) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ を T の指標群および余指標群という。$X^*(\mathbb{G}_m) = \mathrm{End}(\mathbb{G}_m) = \{x \mapsto x^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ であるから $X^*(T) \simeq \mathbb{Z}^r$ であり、完全 $\mathbb{Z}$ 双対性

$$\langle\, ,\, \rangle : X^*(T) \otimes X_*(T) \ni \chi \otimes \mu^\vee \longmapsto \chi \circ \mu^\vee \in \mathrm{End}(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$$

がある。$\mathcal{Mod}_\Gamma$ での自然な同型 $T(\bar{F}) \cong X_*(T) \otimes \bar{F}^\times \cong \mathrm{Hom}(X^*(T), \bar{F}^\times)$ に注意する。

以下 $X(T)_F := X^*(T)^\Gamma$ を T の F 有理指標の群とする。実ベクトル空間 $\mathfrak{a}_T := \mathrm{Hom}(X(T)_F, \mathbb{R})$ を導入し、準同型 $H_T : T(F) \to \mathfrak{a}_T$ を

$$\langle \chi, H_T(t) \rangle = \log |\chi(t)|_F, \quad \chi \in X(T)_F$$

と定める。その核 $T(F)^1 := \ker H_T$ は $T(F)$ の極大コンパクト部分群で、像は $X_*(T)^\Gamma$ に同型である。

例 2.2. E/F を $\bar{F}$ に含まれる有限次拡大とし、E の $\bar{F}$ への F 埋め込みの集合を $\Phi := \mathrm{Hom}_F(E, \bar{F})$ と略記する。

(i) $T := \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m$ を $\mathbb{G}_{m,E}$ の F への Weil 係数制限、すなわち任意の F 代数 R に $T(R) = (R \otimes_F E)^\times$ を対応させる F 代数群とする。$E \otimes_F E \simeq E^\Phi$ に注意すれば、$T \otimes_F E \simeq \mathbb{G}_{m,E}^\Phi$ および Γ 加群の同型 $X^*(T) \simeq \mathbb{Z}^\Phi = \mathrm{Ind}_{\Gamma_E}^{\Gamma} \mathbb{Z}$ がわかる。特に E は T の分解体である。

(ii) 上の状況で $\mathrm{N}_{E/F} : T \otimes_F E \simeq \mathbb{G}_{m,E}^\Phi \ni (a_\iota)_\iota \longmapsto \prod_{\iota\in\Phi} a_\iota \in \mathbb{G}_{m,E}$ は F トーラスの準同型 $\mathrm{N}_{E/F} : T \to \mathbb{G}_m$ に落ちる。その核 $S := \ker \mathrm{N}_{E/F} \subset T$ は F トーラスで、$X^*(S) = X^*(T)/\mathbb{Z}\,\mathrm{N}_{E/F}$ である。

ここで T の Langlands 双対トーラス $\hat{T} := X^*(T) \otimes \mathbb{C}/X^*(T)$ を導入する。Γ は $X^*(T)$ への作用を通して $\hat{T}$ および $\hat{\mathfrak{t}} := X^*(T) \otimes \mathbb{C}$ に作用する。有限次 Galois 拡大 E/F に対して $\hat{\mathfrak{t}}^{\Gamma_E}$ は再び $\mathbb{C}$ ベクトル空間なので可除群である。よって $\mathrm{H}^i(\Gamma_{E/F}, \hat{\mathfrak{t}}^{\Gamma_E}) = 0, (i \geq 1)$ となって $\mathrm{H}^i(\Gamma, \hat{\mathfrak{t}}) \simeq \varinjlim_E \mathrm{H}^i(\Gamma_{E/F}, \hat{\mathfrak{t}}^{\Gamma_E}) = 0, (i \geq 1)$ がわかる。これと定義から従う Γ コホモロジーの長完全列

$$\cdots \mathrm{H}^{i-1}(\Gamma, \hat{\mathfrak{t}}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\Gamma, \hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\Gamma, X^*(T)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\Gamma, \hat{\mathfrak{t}}) \cdots$$

より

$$\mathrm{H}^i(\Gamma, X^*(T)) \simeq \begin{cases} \hat{T}^\Gamma / \mathrm{im}(\hat{\mathfrak{t}}^\Gamma) \simeq \pi_0(\hat{T}^\Gamma) & i = 1 \text{ のとき} \\ \mathrm{H}^{i-1}(\Gamma, \hat{T}) & i \geq 2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.2}$$

である。ここで $\pi_0(X)$ は位相群 X の連結成分の群を表す。局所コンパクトアーベル群 X の Pontrjagin 双対を X^D と書く。$M = X^*(T) \in \mathcal{Mod}_\Gamma$ はアーベル群として有限生成自由である。これに定理 2.1 を適用して次が得られる。

命題 2.3 (局所 Tate・中山双対性). (i) F トーラスの圏からアーベル群の圏への関手の同型 $\alpha_T : \mathrm{H}^1(F, T) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ がある。
(ii) $T(F)$ を指数有限開部分群を単位元の基本近傍系とする位相について完備化したコンパクト群 $\widehat{T(F)}$ は離散群 $\mathrm{H}^2(F, X^*(T))$ の Pontrjagin 双対。

証明. 定理 2.1 (ii) から有限群の同型 $\alpha_\Gamma^1(X^*(T)) : \mathrm{Ext}_\Gamma^1(X^*(T), \bar{F}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T))^*$ がある。ここで (1.3), (2.2) から

$$\mathrm{Ext}_\Gamma^1(X^*(T), \bar{F}^\times) \simeq \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{Hom}(X^*(T), \bar{F}^\times)) \simeq \mathrm{H}^1(F, T),$$
$$\mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T))^* \simeq \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^* \simeq \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$$

ゆえ、(i) の関手的同型が得られる。(有限群なので離散 Pontrjagin 双対は Pontrjagin 双対に一致する。) (ii) は定理 2.1 (i) から直ちに従う。 □

注意 2.4. F がアルキメデス局所体のときも命題 2.3 の類似が成り立つ。$F=\mathbb{R}$ のとき $\Gamma\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は有限群なので、$M=X^*(T)$ に対する (2.1) は Tate コホモロジー群 [Ser79, VIII 章] のカップ積

$$\widehat{\mathrm{H}}^i(\mathbb{C}/\mathbb{R},\mathrm{Hom}(X^*(T),\mathbb{C}^\times))\otimes\widehat{\mathrm{H}}^{2-i}(\mathbb{C}/\mathbb{R},X^*(T))\xrightarrow{\smile}\mathrm{H}^2(\mathbb{C}/\mathbb{R},\mathbb{C}^\times)\overset{\mathrm{inv}_{\mathbb{R}}}{\xrightarrow{\sim}}\frac{1}{2}\mathbb{Z}\Big/\mathbb{Z}$$

になる。左辺の 2 項は共に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の直積であり、これが関手的同型 $\alpha_T:\mathrm{H}^1(\mathbb{R},T)\xrightarrow{\sim}\pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ および双対性 $\widehat{\mathrm{H}}^0(F_v,T)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^1(\Gamma_v,\hat{T})$ を与える。$F=\mathbb{C}$ のときは自明である。

■大域理論　次に F が代数体の場合を考えよう。やはり F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定し、絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を $\Gamma=\Gamma_F$ で表す。F の素点 v での完備化を F_v と書く。その代数閉包 $\bar{F}_v$ および、代数閉包の一意性から存在が保証される単射 F 準同型 $\bar{v}:\bar{F}\hookrightarrow\bar{F}_v$ を固定し、$\bar{F}_v/F_v$ の Galois 群を $\Gamma_v:=\Gamma_{F_v}$ と略記する。連続準同型 $\Gamma_v\ni\sigma\mapsto\bar{v}^{-1}\circ\sigma\circ\bar{v}\in\Gamma$ をやはり $\bar{v}$ で表すことにすれば、$M,N\in\mathcal{Mod}_\Gamma$ に対して 1.4 節の構成により準同型

$$\bar{v}:\mathrm{Ext}^i_\Gamma(M,N)\longrightarrow\mathrm{Ext}^i_{\Gamma_v}(M,N)$$

が定まる。なお記号を転用して $\bar{v}^*M$ を M と書いている。有限次拡大のときの分解群への制限の拡張としてこの写像を v での制限射などと言うことがある。F のアデール環を $\mathbb{A}=\mathbb{A}_F$ と書き、$\bar{F}$ 内の有限次 Galois 拡大 E/F に対する $\mathbb{A}_E$ の帰納極限を $\bar{\mathbb{A}}:=\varinjlim_E\mathbb{A}_E$ と書く。局所大域完全列 $1\to\bar{F}^\times\to\bar{\mathbb{A}}^\times\to\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times\to 1$ の Galois コホモロジー長完全列

$$F^\times\longrightarrow\mathbb{A}^\times\longrightarrow(\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)^\Gamma\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,\mathbb{G}_m)$$

と Hilbert 90 定理 $\mathrm{H}^1(F,\mathbb{G}_m)=0$ から $(\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)^\Gamma=\mathbb{A}^\times/F^\times$ がわかる。このとき $(\Gamma,\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)$ と類体論の不変量射 $\mathrm{inv}_E:\mathrm{H}^2(E,\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, ($E/F$ は有限次拡大) は類構造をなし、局所、大域不変量射は次の可換図式 (短完全列の同型) を与える [Tat67, §11]。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F,\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F,\bar{\mathbb{A}}^\times) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F,\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & {\scriptstyle(2.5)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{inv}_F} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\bigoplus\bar{v}} & \bigoplus_v\mathrm{H}^2(F_v,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\sum\mathrm{inv}_{F_v}} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.3}$$

T を F 上定義されたトーラスとし、E/F を $\bar{F}$ に含まれる有限次 Galois 拡大とする。$\bar{F} \xrightarrow{\bar{v}} \bar{F}_v$ の E への制限は E の素点 w を定め、$\Gamma_{E_w/F_v} \ni \sigma \mapsto w^{-1} \circ \sigma \circ w \in \Gamma_{E/F}$ により Γ_{E_w/F_v} は $\Gamma_{E/F}$ における w の固定化群と同一視される。$E_v := E \otimes_F F_v$ などと書くことにすれば、正規底定理から $F[\Gamma_{E/F}]$ 加群の同型

$$E_v \simeq F[\Gamma_{E/F}] \otimes_F F_v \simeq F_v[\Gamma_{E_w/F_v}] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_{E_w/F_v}]} \mathbb{Z}[\Gamma_{E/F}] \simeq \mathrm{Ind}_{\Gamma_{E_w/F_v}}^{\Gamma_{E/F}} E_w$$

がある。よって $T(E_v) \simeq \mathrm{Ind}_{\Gamma_{E_w/F_v}}^{\Gamma_{E/F}} T(E_w)$ だから Shapiro の補題 1.4 を使って

$$\mathrm{H}^i(E/F, T(E_v)) \simeq \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w))$$

を得る。次に有限個を除く非アルキメデス素点 v では $T_v := T \otimes_F F_v$ は不分岐、すなわち F_v 上不分岐な分解体を持つ。このとき T は F_v の整数環 $\mathcal{O}_v$ 上の滑らかで平坦なトーラススキームに延びる。その $\mathcal{O}_w$ 値点の群をやはり $T(\mathcal{O}_w)$ と書けば、[CF86, VI.1.2 命題 1] の証明と同様の議論により

$$\mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(\mathcal{O}_w)) = 0 \tag{2.4}$$

が証明できる。(詳しくは [KS99, 補遺 C] の補題 C.1.A の証明を参照のこと。) 以上を併せて同型

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^i(E/F, T(\mathbb{A}_E)) &\simeq \varinjlim_S \Big(\bigoplus_{v \in S} \mathrm{H}^i(E/F, T(E_v)) \times \prod_{v \notin S} \mathrm{H}^i(E/F, \bigoplus_{w|v} T(\mathcal{O}_w)) \Big) \\
&\simeq \varinjlim_S \Big(\bigoplus_{v \in S} \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w)) \times \prod_{v \notin S} \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(\mathcal{O}_w)) \Big) \\
&\simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w))
\end{aligned}$$

が得られる。インフレ射についての帰納極限を取って

$$\mathrm{H}^i(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^i(F_v, T_v) \tag{2.5}$$

を得る。ただし係数拡大 $T \otimes_F F_v$ を T_v と書いている。

簡単のために $\mathrm{H}^i(\mathbb{A}/F, T) := \mathrm{H}^i(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))$ と略記する。各素点 v で $\hat{T}^\Gamma \subset \hat{T}^{\Gamma_v}$ なので準同型 $\bar{v} : \pi_0(\hat{T}^\Gamma) \to \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})$ およびその Pontrjagin 双対射 $\bar{v}^* : \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ が定まることに注意する。

命題 2.5 (大域 Tate・中山双対性)**.** (i) F トーラスの圏からアーベル群の圏への関手の同型 $\alpha_T : \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ がある。
(ii) 次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) & \xrightarrow{\alpha_T} & \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D \\
\| & & & & \Big\uparrow \textstyle\prod_v \bar{v}^* \\
\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) & \xrightarrow{(2.5)} & \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_v) & \xrightarrow{\bigoplus_v \alpha_{T_v}} & \bigoplus_v \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D
\end{array}$$

(iii) $(T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^\Gamma$ を指数有限開部分群を単位元の基本近傍系とする位相で完備化したもの $(T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^{\Gamma,\wedge}$ と離散群 $\mathrm{H}^2(F, X^*(T))$ は Pontrjagin 双対である。

証明. 定理 2.1 を $M = X^*(T)$ に適用すると、$\mathrm{Hom}(X^*(T), \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \cong T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})$ から有限群の同型

$$\alpha_T : \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T))^* \overset{\alpha^1_\Gamma(X^*(T))}{\xrightarrow{\sim}} \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$$

を得る。つまり (i) が示された。(iii) も同様である。(ii) は次の可換図式から従う。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) \otimes \mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T)) & \xrightarrow{\smile} & \mathrm{H}^2(\mathbb{A}/F, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\mathrm{inv}_F} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \\
\mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \otimes \mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T)) & \xrightarrow{\smile} & \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) & & \Big\uparrow \textstyle\sum_v \\
\Big\downarrow {\scriptstyle (2.5)\otimes\prod \bar{v}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle 同型} & & \\
\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_v) \otimes \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, X^*(T_v)) & \xrightarrow{\bigoplus \smile_v} & \bigoplus_v \mathrm{H}^2(F_v, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\bigoplus \mathrm{inv}_{F_v}} & \bigoplus_v \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{array}$$

ただし左の上下のスクエアの可換性は合成積の関手性から従う。右のスクエアは (2.3) である。 □

2.2 Weil 群とトーラスの Langlands 対応

まず Weil 群の定義を思い出そう [Tat79]。F を標数 0 の局所体または代数体として

$$C_F := \begin{cases} F^\times & F \text{ が局所体のとき} \\ \mathbb{A}^\times/F^\times & F \text{ が代数体のとき} \end{cases}$$

と書く。$\bar{F}/F$ の Weil 群 W_F とは正確には

- 位相群 W_F.
- 像が稠密な連続準同型 $\varphi_F : W_F \to \Gamma$. すなわち有限次拡大 E/F に対して $W_E := \varphi_F^{-1}(\Gamma_E) \subset W_F$ は開部分群で φ_F が引き起こす写像 $W_F/W_E \to \Gamma/\Gamma_E$ は全単射である。
- 有限次拡大 E/F に対する同型 $r_E : C_E \to W_E^{\mathrm{ab}}$ の族。ただし W_E^{ab} は交換子群の閉包 $\overline{[W_E, W_E]}$ で W_E を割った位相群を表す。

からなる三つ組で次の条件を満たすものである。

(i) 合成 $C_E \overset{r_E}{\to} W_E^{\mathrm{ab}} \to \Gamma_E^{\mathrm{ab}}$ は類体論の相互律射に一致する。

(ii) $w \in W_F, \sigma := \varphi(w) \in \Gamma$ に対して次の図式は可換。

$$\begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E"] \arrow[d, "\sigma"'] & W_E^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(w)"] \\ C_E \arrow[r, "r_E"] & W_E^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

(iii) F の有限次拡大 $K \supset E$ に対して移行準同型 (*transfer*) $W_E^{\mathrm{ab}} \to W_K^{\mathrm{ab}}$ [Ser79, VII.8 節] を $t_{K/E}$ と書けば、次の図式は可換。(実は定義には最初の図式だけでよいが 2 つ目の図式もよく用いるので引用している。)

$$\begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E"] \arrow[d, hook] & W_E^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "t_{K/E}"] \\ C_K \arrow[r, "r_K"] & W_K^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_K \arrow[r, "r_K"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{K/E}"'] & W_K^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\ C_E \arrow[r, "r_E"] & W_E^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

(iv) $W_{E/F} := W_F \big/ \overline{[W_E, W_E]}$ と書くとき、$W_F = \varprojlim_E W_{E/F}$.

F が非アルキメデス局所体のとき、その剰余体を k_F と書いてその代数閉包 $\bar{k}_F$ を固定する。その絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ は幾何的 Frobenius 自己同型 $\mathrm{Fr}(x) = x^{1/q}$ $(q = |k_F|)$ を位相的生成元に持つ $\widehat{\mathbb{Z}}$ に同型な副有限群であった。自然な準同型 $\Gamma \to \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ の核 $I_F \subset \Gamma$ が F の惰性群 (*inertia group*) である。このとき Weil 群 W_F は行が完全列であ

る次の可換図式を満たす。

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_F \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_F \arrow[r] \arrow[u, equal] & W_F \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathrm{Fr}^{\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}
\tag{2.6}
$$

F が代数体のときには、各素点 v で固定した $\bar{v}: \bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_v$ が与える準同型 $\bar{v}: \Gamma_v \to \Gamma$ と有限次拡大 E/F に対して次の図式が可換となるような連続準同型 $\bar{v}: W_{F_v} \to W_F$ が $W_F^0 := \ker \varphi_F$ の共役を除いてただ一つ存在する。ただし w は $\bar{v}$ が定める E の素点で、後者の図式の右の列は $\bar{w} = \bar{v}|_{W_{E_w}} : W_{E_w} \to W_E$ が引き起こす準同型である。

$$
\begin{tikzcd}
W_{F_v} \arrow[r, "\varphi_{F_v}"] \arrow[d, "\bar{v}"'] & \Gamma_v \arrow[d, "\bar{v}"] \\
W_F \arrow[r, "\varphi_F"] & \Gamma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_w^\times \arrow[r, "r_{E_w}"] \arrow[d] & W_{E_w}^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\
\mathbb{A}_E^\times/E^\times \arrow[r, "r_E"] & W_E^{\mathrm{ab}}
\end{tikzcd}
$$

Weil 群は副有限でない位相群である。W_F が連続に作用する位相アーベル群 A に対して、1.2 節の標準複体を (抽象群の複体ということで) $C^\bullet_{\mathrm{abs}}(W_F, A)$ と書き、そのうち連続なコチェインのなす複体を $C^\bullet_{\mathrm{ct}}(W_F, A)$ と書くことにする。これらの複体の i 次コホモロジー群をそれぞれ $\mathrm{H}^i_{\mathrm{abs}}(W_F, A), \mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(W_F, A)$ で表す。

■トーラスの Langlands 対応　Weil 群は可換類体論を 1 パッケージにした群であり、特に Langlands によるトーラス上の保型形式の記述に用いられる。ここではその記述を Labesse の議論にそって概説する [Lab84], [Mil06]。ホモロジー群を使った Langlands 自身の構成 [Lan97] については [KS99, p.126] に概説がある。

まず群コホモロジーの余制限射を復習する [Ser79, VII.7 節]。群 G と指数有限部分群 $H \subset G$ が与えられているとする。$M \in G\text{-}\mathcal{Mod}$ に対して

$$\mathrm{cor}_H^G : \mathrm{H}^0(H, M) = M^H \ni m \longmapsto \mathrm{N}_{G/H}(m) := \sum_{\sigma \in G/H} \sigma(m) \in M^G = \mathrm{H}^0(G, M)$$

が定まる。これをコホモロジー関手の射に延ばすため、G 加群の完全列 $0 \to \mathfrak{I}_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$, ($\mathfrak{I}_G \subset \mathbb{Z}[G]$ は添加イデアル) から従う完全列

$$0 \longrightarrow (M = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M)) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], M) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_G, M)$$

を考える。$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], M)$ は G 加群、H 加群として余誘導的 (自明な部分群からの余誘導加群) であるから、その 1 次以上の G, H コホモロジー群は全て消えている。よって可

換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_H(\mathfrak{I}_G, M) \arrow[d, "\mathrm{N}_{G/H}"'] & (\mathrm{im}\,\pi)^H \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(H, M) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathrm{cor}_H^G"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_G(\mathfrak{I}_G, M) & (\mathrm{im}\,\pi)^G \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(G, M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

により $\mathrm{cor}_H^G : \mathrm{H}^1(H, M) \to \mathrm{H}^1(G, M)$ が定まる。以下この議論を繰り返して高次のコホモロジーに拡張すればよい。

Weil 群の状況に戻って F トーラス T を取り、T を分解する有限次 Galois 拡大 K/F を固定する。定義から完全列

$$0 \longrightarrow (C_K \overset{r_K}{\xrightarrow{\sim}} W_K^{\mathrm{ab}}) \longrightarrow W_{K/F} \longrightarrow \Gamma_{K/F} \longrightarrow 0$$

がある。上の構成を $G = W_{K/F} \triangleright H = W_K^{\mathrm{ab}}$ に適用して、ノルム写像 $\mathrm{N}_{K/F} : \hat{T} \ni t \mapsto \sum_{\sigma\in\Gamma_{K/F}} \sigma(t) \in \hat{T}^\Gamma$ は余制限射

$$\mathrm{cor} : \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_K^{\mathrm{ab}}, \hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_{K/F}, \hat{T})$$

を与える。

命題 2.6. 上の状況で余制限射は同型 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T})_{\Gamma_{K/F}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T})$ を与える。

証明の概略. 有限群 $\Gamma_{K/F}$ 上の加群 $M(T) := \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_K^{\mathrm{ab}}, \hat{T}) \overset{r_K^*}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}(C_K, \hat{T})$ の Tate コホモロジー群 $\widehat{\mathrm{H}}^q(\Gamma_{K/F}, M(T))$, $(q \in \mathbb{Z})$ が考えられる [Ser79, VIII 章]。その定義から完全列

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(\Gamma_{K/F}, M(T)) \longrightarrow M(T)_{\Gamma_{K/F}} \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/F}} M(T)^{\Gamma_{K/F}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, M(T)) \longrightarrow 0$$

がある。一方で定義から従う完全列 $0 \to W_K^{\mathrm{ab}} \to W_{K/F} \to \Gamma_{K/F} \to 0$ に付随するインフレ・制限完全列 (1.5)

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma_{K/F}, \hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_{K/F}, \hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_K^{\mathrm{ab}}, \hat{T})^{\Gamma_{K/F}} \longrightarrow \mathrm{H}^2(\Gamma_{K/F}, \hat{T})$$

もある。ここで

- カップ積 $\widehat{\mathrm{H}}^i(\Gamma_{K/F}, \mathrm{Hom}(C_K, \hat{T})) \otimes \widehat{\mathrm{H}}^2(\Gamma_{K/F}, C_K) \to \widehat{\mathrm{H}}^{i+2}(\Gamma_{K/F}, \hat{T})$ [Ser79, VIII.3 節] と類体論の基本類 $u_{K/F} \in \widehat{\mathrm{H}}^2(\Gamma_{K/F}, C_K) = \mathrm{H}^2(K/F, C_K)$ [Tat67, 11.2 節] が定める写像

$$\smile u_{K/F} : \widehat{\mathrm{H}}^i(\Gamma_{K/F}, M(T)) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{H}}^{i+2}(\Gamma_{K/F}, \hat{T}) \tag{2.7}$$

は同型 [Lab84, 命題 4.1]。

- 余制限射 cor : $M(T) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_{K/F}, \hat{T})$ は $M(T)_{\Gamma_{K/F}}$ を経由する [Lab84, 補題 3.1]。

に注意すれば、次の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(\Gamma_{K/F}, M(T)) \arrow[r] \arrow[d, "\smile u_{K/F}"'] & M(T)_{\Gamma_{K/F}} \arrow[r, "\mathrm{N}_{K/F}"] \arrow[d, "\mathrm{cor}"'] & M(T)^{\Gamma_{K/F}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, M(T)) \arrow[d, "-(\smile u_{K/F})"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\Gamma_{K/F}, \hat{T}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_{K/F}, \hat{T}) \arrow[r] & M(T)^{\Gamma_{K/F}} \arrow[r] & \mathrm{H}^2(\Gamma_{K/F}, \hat{T})
\end{tikzcd}$$

ここで左の二つのスクエアは可換であることがそれぞれ [Lab84, 命題 3.3, 補題 3.2] で示されている。右のスクエアが可換なことは [Mil06, 補題 8.4] から従う。よって五項補題から中央の余制限射は同型である。それを連続コホモロジー群に制限すると命題の同型が得られる。 □

上の証明の最初の完全列と最後の可換図式を組み合わせて次が得られる。

系 2.7 ([Lab84] 命題 5.5)**.** 命題 2.6 の状況でインフレ射 $\mathrm{H}^2(\Gamma_{K/F}, \hat{T}) \to \mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T})$ は零写像である。

さて、T の L 群を半直積 ${}^LT := \hat{T} \rtimes_{\rho_T} W_F$ と定める。ここで W_F の作用 ρ_T は $W_F \twoheadrightarrow W_{K/F} \twoheadrightarrow \Gamma_{K/F}$ と $\Gamma_{K/F}$ の $\hat{T}$ への作用の合成である。連続準同型 $\varphi\colon W_F \to {}^LT$ で第二射影 $\mathrm{pr}_2 : {}^LT \to W_F$ との合成が W_F の恒等写像になるようなものを T の L パラメーターまたは *Langlands* パラメーターと呼ぶ。二つの L パラメーターが同値とはそれらが $\hat{T}$ 共役なこととする。T の L パラメーターの同値類の集合を $\Phi(T)$ と書く。容易に分かるように L パラメーター $\varphi\colon W_F \ni w \mapsto a(w) \rtimes w \in {}^LT$ に対して $a(w)$ は $\hat{T}$ 値連続 1 コサイクルであり、L パラメーターの同値は対応する 1 コサイクルがコホモローグであることにほかならない。つまり

$$\Phi(T) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_F, \hat{T}) \xleftarrow[\sim]{\mathrm{infl}} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T})$$

である。位相アーベル群 A に対して $\mathrm{Irr}\, A := \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(A, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(A, \mathbb{C}^\times)$ と書く。

定理 2.8 (トーラスの局所 Langlands 対応)**.** F が標数 0 の局所体のとき自然な同型 $\Phi(T) \ni \varphi \overset{\sim}{\mapsto} \chi_T(\varphi) \in \mathrm{Irr}\, T(F)$ (F トーラスの圏から位相群の圏への関手の同型) がある。

証明の概略. 双対トーラスの定義から $X^*(\hat{T}) = X_*(T)$ であるから、命題 2.6 の左辺において

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T}) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(K^\times, \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}^\times)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(K^\times \otimes X_*(T), \mathbb{C}^\times) \cong \mathrm{Irr}\, T(K)\end{aligned} \tag{2.8}$$

である。次に

$$\mathrm{Irr}\, T(K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(K), \mathbb{C}^1 \times \mathbb{R}) \cong T(K)^D \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(K), \mathbb{R})$$

に注意する。右辺の第一項については

$$T(F)^D = (T(K)^{\Gamma_{K/F}})^D = T(K)^D / \mathfrak{I}_{\Gamma_{K/F}} T(K)^D = (T(K)^D)_{\Gamma_{K/F}}$$

が成り立つ。アルキメデス的な場合も含めて $T(K)$ はただ一つの極大コンパクト部分群 $T(K)^1$ を持ち、

$$T(K)/T(K)^1 \simeq \begin{cases} X_*(T) & F \text{ が非アルキメデス的なとき} \\ X_*(T) \otimes \mathbb{R} & F \text{ がアルキメデス的なとき} \end{cases}$$

であるから、例 2.2 の直前の記述により

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(K), \mathbb{R})_{\Gamma_{K/F}} &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(K)/T(K)^1, \mathbb{R})_{\Gamma_{K/F}} \simeq \mathrm{Hom}(X_*(T), \mathbb{R})_{\Gamma_{K/F}} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(X_*(T)^{\Gamma_{K/F}}, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(F)/T(F)^1, \mathbb{R}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(F), \mathbb{R})\end{aligned}$$

を得る。つまり $(\mathrm{Irr}\, T(K))_{\Gamma_{K/F}} = \mathrm{Irr}\, T(F)$ である。これと (2.8) を命題 2.6 に代入すれば、同型

$$\Phi(T) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T}) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T})_{\Gamma_{K/F}} \cong \mathrm{Irr}\, T(F)$$

が得られる。

$L \supset K$ が共に T を分解する F の有限次 Galois 拡大のとき、自然な射のなす可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W_L^{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & W_{L/F} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \Gamma_{L/F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W_K^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & W_{K/F} \arrow[r] & \Gamma_{K/F} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

がある。このとき図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_K^{\mathrm{ab}}, \hat{T}) \arrow[r, "\mathrm{cor}"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T}) \arrow[d, "\pi^*"] \\ \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_L^{\mathrm{ab}}, \hat{T}) \arrow[r, "\mathrm{cor}"] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T}) \end{tikzcd}$$

は可換なので上で得られた同型は分解体 K の取り方によらない。 $\square$

注意 2.9 (不分岐な場合)**.** F が非アルキメデス的だとし、その素元 $\varpi \in \mathcal{O}$ を固定する。T が不分岐 F トーラス、つまりその分解体 K で F の有限次不分岐拡大であるものが取れるとする。このとき $T(F)$ の極大コンパクト部分群 $T(\mathcal{O})$ が定まっていた (20 頁参照)。T の余指標群の Galois 不変部分を $X_*(T)_F := X_*(T)^{\Gamma_{K/F}}$ と書けば、Cartan 分解 $T(F) = \coprod_{\mu^\vee \in X_*(T)_F} \mu^\vee(\varpi)T(\mathcal{O})$ が成り立つ。擬指標 $\chi \in \operatorname{Irr} T(F)$ が不分岐とはそれが $T(F)/T(\mathcal{O}) \simeq X_*(T)_F$ を経由することとする。

T の L パラメーター φ が不分岐とは、惰性群 $I_F \subset W_F$ の像 $\varphi(I_F) \subset {}^LT$ の $\hat{T}$ への射影が自明なことである。これは (2.6) に関するインフレ・制限完全列を使えば φ の同値類が $\mathrm{H}^1(\mathrm{Fr}^{\mathbb{Z}}, \hat{T}) \xrightarrow{\mathrm{infl}} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_F, \hat{T}) = \Phi(T)$ の像 $\Phi_{\mathrm{ur}}(T)$ に含まれることに同値である。幾何的 Frobenius 自己同型 $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ の W_F での逆像の元 w_σ を取れば、$\varphi \in \Phi_{\mathrm{ur}}(T)$ は $\varphi(w_\sigma) = a(w_\sigma) \rtimes w_\sigma$ の $\hat{T}$ 共役類、つまり $a(w_\sigma)$ の Γ 不変商 $\hat{T}_\Gamma$ での像で決まる。

このとき定理 2.8 の同型による $\Phi_{\mathrm{ur}}(T)$ の像は $\mathrm{Irr}(T(F)/T(\mathcal{O}))$ である。具体的には $\chi \in \mathrm{Irr}(T(F)/T(\mathcal{O}))$ に対応する L パラメーター $\varphi_\chi(w_\sigma) = a_\chi(w_\sigma) \rtimes w_\sigma$ は、$\hat{T}_\Gamma = \mathrm{Hom}(X_*(T)_F, \mathbb{C}^\times)$ の元

$$X_*(T)_F \ni \mu^\vee \longmapsto \mu^\vee(\varpi) \in T(F) \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times$$

に対応する。

次に F が代数体の場合を考えよう。各素点 v で準同型 $\bar{v} : \mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(W_F, A) \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(W_{F_v}, A)$ がある。

定理 2.10 (トーラスの Langlands 対応)**.** 自然な全射準同型 $\Phi(T) \ni \varphi \mapsto \chi_T(\varphi) \in \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})/T(F))$ で、次の図式が可換になるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} \Phi(T) \arrow[r, "\chi_T"] \arrow[d, "\prod \bar{v}"'] & \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})/T(F)) \arrow[d, "\text{制限テンソル積分解}"] \\ \prod_v \Phi(T_v) \arrow[r, "\prod \chi_{T_v}"] & \prod_v \operatorname{Irr} T(F_v) \end{tikzcd}$$

その核は有限群 $\text{Ш}^1(W_F, \hat{T}) := \ker[\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_F, \hat{T}) \to \prod_v \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{F_v}, \hat{T}_v)]$ である。

証明. 局所体の場合と同様に $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(X_*(T) \otimes C_K, \mathbb{C}^\times) \cong \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A}_K)/T(K))$

が成り立つ。よって Weil 群の可換図式 [Tat79, 1.6 節]

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & C_K \arrow[r] & W_{K/F} \arrow[r] & \Gamma_{K/F} \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_w^\times \arrow[r] \arrow[u] & W_{K_w/F_v} \arrow[r] \arrow[u] & \Gamma_{K_w/F_v} \arrow[r] \arrow[u] & 1
\end{tikzcd}$$

と命題 2.6 から可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\prod \bar{v}"'] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T})_{\Gamma_{K/F}} \cong \mathrm{Irr}((T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}) \arrow[d, "\prod \bar{v}"] \\
\prod_v \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K_w/F_v}, \hat{T}_v) \arrow[r, "\simeq"] & \prod_v \left(\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(K_w^\times, \hat{T}_v)_{\Gamma_{K_w/F_v}} \cong \mathrm{Irr}\, T(F_v)\right)
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

を得る。定理の関手的準同型 χ_T はこの第 1 行目と制限射 $\mathrm{Irr}((T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}) \to \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})/T(F))$ の合成と定めれば、(2.9) から定理の図式は可換である。

一方、$X_*(T) \otimes \mathbb{A}_K^\times/K^\times \cong T(\mathbb{A}_K)/T(K)$ などに注意して $1 \to T(K) \to T(\mathbb{A}_K) \to T(\mathbb{A}_K)/T(K) \to 1$ の $\Gamma_{K/F}$ コホモロジー完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
T(F) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & T(\mathbb{A}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & (T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{H}^1(K/F, X_*(T) \otimes K^\times) \arrow[d, equal] \\
\dfrac{T(F)}{\mathrm{N}_{K/F}\, T(K)} \arrow[r] & \dfrac{T(\mathbb{A})}{\mathrm{N}_{K/F}\, T(\mathbb{A}_K)} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes C_K) \arrow[r] & \widehat{\mathrm{H}}^1(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes K^\times)
\end{tikzcd}$$

から、$T(\mathbb{A})/T(F) \hookrightarrow (T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}$ の余核は $\widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes C_K)$ の $\widehat{\mathrm{H}}^1(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes K^\times)$ での像に同型である。ところが 24 頁の (2.7) と類似の同型

$$\smile u_{K/F} : \widehat{\mathrm{H}}^{-2}(\Gamma_{K/F}, X_*(T)) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes C_K)$$

から $\widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes C_K)$ は有限群 $\mathrm{H}_1(K/F, X_*(T))$ に同型だから、$T(\mathbb{A})/T(F)$ は $(T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}$ の指数有限部分群である。特に χ_T は全射でその核は有限なことがわかる。最後に定理の図式の右列は単射だから、χ_T の核が局所自明なクラスの群 $\text{Ш}^1(W_F, \hat{T})$ であることも従う。 □

最後にもう一度局所大域完全列 $0 \to T(\bar{F}) \to T(\bar{\mathbb{A}}) \to T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}) \to 0$ の Galois コホモロジー完全列を見直そう。Hilbert 90 定理 $\mathrm{H}^1(K, T) = 0$ から

$$0 \longrightarrow T(K) \longrightarrow T(\mathbb{A}_K) \longrightarrow (T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^{\Gamma_K} \longrightarrow 0 \tag{2.10}$$

は完全である。よって縦列がインフレ・制限完全列からなる可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(K/F, T(K)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(K/F, T(\mathbb{A}_K)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(K/F, T(\mathbb{A}_K)/T(K)) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(F, T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(K, T_K) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(K, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}_K/K, T)
\end{tikzcd}$$

を得る。Hilbert 90 定理と (2.4) から最下行は全て消えているから 2 行目と 3 行目の完全列は同型である。これと命題 2.5 から、定理 2.10 の χ_T の核は

$$\begin{aligned}
\frac{(T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}}{T(\mathbb{A})/T(F)} &\simeq \ker[\mathrm{H}^1(K/F, T(K)) \to \mathrm{H}^1(K/F, T(\mathbb{A}_K))] \\
&\simeq Ш^1(F, T) \simeq Ш^1(F, \hat{T})^D
\end{aligned} \tag{2.11}$$

の Pontrjagin 双対である。すなわちトーラスに対しては保型形式 (スペクトル) サイドの局所・大域 Langlands 対応の間の差が幾何サイドの局所大域完全列で記述される。

3　簡約代数群の状況

前節のトーラス上の保型形式の記述を非可換な簡約群に拡張しようとすると必然的に内視論が現れてくる。その過程を見てみよう。

3.1　保型表現

F を代数体とする。その無限素点での完備化の直和を $F_\infty := \prod_{v|\infty} F_v$, 有限アデール環を $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ で表す: $\mathbb{A} = F_\infty \oplus \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$. イデール群 $\mathbb{A}^\times$ 上のイデールノルム (モジュラス) を $|\ |_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ と書く。対角埋め込み $\mathbb{G}_m(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m(\mathbb{R}) = F_\infty^\times$ による $\mathbb{R}_+^\times$ の像をやはり $\mathbb{R}_+^\times$ と書く。

G を代数体 F 上定義された連結簡約線型代数群とする。アデール群 $G(\mathbb{A})$ は局所コンパクト位相群で F 値点の群 $G(F) \subset G(\mathbb{A})$ は離散部分群である。G の中心 Z_G 内の極大 F 分裂トーラスを A_G で表す。定義から F 同型 $\mathbb{G}_m^r \xrightarrow{\sim} A_G$ があり、$(F_\infty^\times)^r \xrightarrow{\sim} A_G(F_\infty)$ による $(\mathbb{R}_+^\times)^r$ の像を $\mathfrak{A}_G$ と書けば、これは $Z_G(F_\infty)$ 内の極大 $\mathbb{R}$ ベクトル部分群である。一方、G の F 有理指標群を $X(G)_F := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)^\Gamma$ として実ベクトル空間

$\mathfrak{a}_G := \mathrm{Hom}(X(G)_F, \mathbb{R})$ を導入し、準同型 $H_G : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_G$ を

$$\langle \chi, H_G(g) \rangle = \log |\chi(g)|_{\mathbb{A}}, \quad \chi \in X(G)_F$$

で定める。すると $H_G|_{\mathfrak{A}_G} : \mathfrak{A}_G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_G$ は同型であり、従って $G(\mathbb{A})^1 := \ker H_G$ として直積分解 $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})^1 \times \mathfrak{A}_G$ が成り立つ。イデールノルムの積公式から $G(F) \subset G(\mathbb{A})^1$ であることに注意しよう。

$G(\mathbb{A})$, $\mathfrak{A}_G$ 上の不変測度 dg, da を止めれば、右剰余類の空間 $G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}) \simeq G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の不変測度 dg/da が定まる。Siegel 基本領域の記述と岩澤分解の積分公式から $G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A})$ は測度有限である。可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ で

- $\phi(\gamma a g) = \phi(g), (\gamma \in G(F), a \in \mathfrak{A}_G)$;
- $G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}) \ni g \mapsto |\phi(g)|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は二乗可積分

を満たすものたちのなす Hilbert 空間を $\mathcal{L}(G)$ と書く。これは右移動作用

$$R(g)\phi(x) = \phi(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}), \phi \in \mathcal{L}(G)$$

に関して $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現と見なされる。この原稿では $\mathcal{L}(G)$ の既約部分商表現を $G(\mathbb{A})$ の保型表現 (*automorphic representation*) と呼び、特にそのうち $\mathcal{L}(G)$ の部分表現であるものを離散 (*discrete*) 保型表現ということにする。

注意 3.1. G がトーラス T の場合には $T(\mathbb{A})^1/T(F)$ はコンパクトである。従って Hilbert 直和分解

$$\mathcal{L}(T) \simeq \widehat{\bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})^1/T(F))}} \mathbb{C}\chi$$

成り立つ。一方 $\mathfrak{a}^*_{T,\mathbb{C}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_T, \mathbb{C})$ と書けば

$$\mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})^1/T(F)) \times \mathfrak{a}^*_{T,\mathbb{C}} \ni (\chi, \lambda) \overset{\sim}{\longmapsto} \chi_\lambda := e^{\langle \lambda, H_T(\cdot) \rangle}\chi \in \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})/T(F))$$

は同型である。

3.2 L 群

L 群の定義をトーラスから一般の連結簡約群に拡張しよう。F を標数 0 の局所体または代数体として、G を F 上の連結簡約線型代数群とする。係数拡大 $G_{\bar{F}} = G \otimes_F \bar{F}$ の *Borel* 部分群 (極大な連結可解部分群) B とその極大トーラス $T \subset B$ の対 (B, T) を *Borel*

対 (*Borel pair*) という。任意の二つの Borel 対は互いに $G(\bar{F})$ 共役である。また B の正規化群は B, T の B での正規化群は T 自身であるから [Spr98]、(B,T) の G での正規化群は T である。

G の Lie 環を $\mathfrak{g}$, 随伴表現を $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ と書く[*5]。その制限 $(\mathrm{Ad}|_T, \mathfrak{g}_{\bar{F}})$ に現れる $X^*(T)$ の非自明な元を T の G でのルートといい、その集合を $R(G,T)$ と書く。ルート $\alpha \in R(G,T)$ の $\mathrm{Ad}|_T$ での重複度は 1 であり、従ってその表現空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathbb{G}_a$ に同型である。B の Lie 環 $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_{\bar{F}}$ は $\mathrm{Ad}|_T$ の部分表現だが、そこに現れる $R(G,T)$ の元を B 正ルートと呼んでその集合を $R(B,T)$ で表す。さらに $\Delta(B,T)$ で B 単純ルート、すなわち複数の B 正ルートの和に書けない B 正ルートの集合を表す。$R(G,T)$ は被約ルート系 (*reduced root system*) をなし、$\Delta(B,T)$ はその基底である。(B,T) に各 $\alpha \in \Delta(B,T)$ に対する $\mathfrak{g}_\alpha(\bar{F})$ の元 X_α の族を加えた三つ組

$$\mathrm{spl} = (B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta(B,T)})$$

を $G_{\bar{F}}$ の分裂 (*splitting*) という。

任意の 2 つの分裂は互いに $G(\bar{F})$ 共役で、T での $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta(B,T)}$ の安定化群は $\Delta(B,T)$ の全ての元の核の交わり Z_G だから、$G_{\bar{F}}$ の分裂の集合には $G_{\mathrm{ad}}(\bar{F}) := (G/Z_G)(\bar{F})$ が単純推移的に作用している。$G_{\bar{F}}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ を G_{ad} で割った群 $\mathrm{Out}(G)$ を G の外部自己同型群という。分裂 spl を固定すれば、任意の $\bar{\theta} \in \mathrm{Out}(G)$ にその $\mathrm{Aut}(G)$ での逆像の元で spl を保つものを対応させることで完全列

$$1 \longrightarrow G_{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Out}(G) \longrightarrow 1$$

の分裂 $\mathrm{spl}: \mathrm{Out}(G) \to \mathrm{Aut}(G)$ が得られる。

■準分裂データ　G の F 分裂、つまり分裂 $\mathrm{spl} = (B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta(B,T)})$ で B, T が F 上定義されていて $\{X_\alpha\}$ が絶対 Galois 群 Γ の作用で安定なものがあるとき、G は F 準分裂 (*F-quasisplit*) であるという。一般に $G_{\bar{F}}$ の任意の分裂 spl を取れば、各 $\sigma \in \Gamma$ に対して $\sigma(\mathrm{spl}) = \mathrm{Ad}(u_\sigma^{-1})\mathrm{spl}$ となる $u_{\sigma,\mathrm{ad}} := u_\sigma Z_G(\bar{F}) \in G_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ がただ一つある。すると $\{u_{\sigma,\mathrm{ad}}\}_{\sigma \in \Gamma} \in Z^1(F, G_{\mathrm{ad}}) := Z^1(\Gamma, G_{\mathrm{ad}}(\bar{F}))$ ($G_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクルの集合 (1.7 節)) であり、G の Galois 作用を $\sigma \mapsto \mathrm{Ad}(u_\sigma) \circ \sigma$ と捻って得られる簡約代数群 G^* は F 準分裂である。すなわち G の Galois 作用を内部自己同型で捻った内部形式 (*inner form*) G^* で F 準分裂なものが同型を除いて一意に存在する。以下、このような G^* とその F 分裂

[*5] $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は可換 F 代数 R に $\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{g}(R))$ を対応させる代数群を表す。

$\mathrm{spl}_{G^*} = (B_0, T_0, \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)})$, それに同型 $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ で

$$\psi_G \circ \sigma(\psi_G)^{-1} := \psi_G \circ \sigma \circ \psi_G^{-1} \circ \sigma^{-1} = \mathrm{Ad}(u_\sigma) \in G^*_{\mathrm{ad}}(\bar{F}) \tag{3.1}$$

となるもの (内部捻り、*inner twist*) の三つ組 $(G^*, \mathrm{spl}_{G^*}, \psi_G)$ を固定しておく。 G がトーラスなら ψ_G は単に恒等射である。

例 3.2. $\mathscr{A}$ を n^2 次元の中心的単純 F 代数として、可換 F 代数 R に $G(R) := (\mathscr{A} \otimes_F R)^\times$ を対応させる F 代数群 G を考える。$\mathscr{A}$ の Brauer 群 $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$ でのクラスは $1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1$ の Galois コホモロジー完全列 (命題 1.3)

$$(\mathrm{H}^1(F, \mathrm{GL}_n) = 1) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, \mathrm{PGL}_n) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$$

による δ の像に含まれている。その逆像を代表する 1 コサイクル $\{u_{\sigma,\mathrm{ad}}\}_{\sigma\in\Gamma} \in Z^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ を取れば、同型 $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n$ で $\psi_G \circ \sigma(\psi_G)^{-1} = \mathrm{Ad}(u_\sigma)$ となるものがある。

■L 群データ　各 $\alpha \in R(G,T)$ に対して、$\ker\alpha \subset T$ の G での中心化群の導来群を G_α と書く。$T_\alpha := T \cap G_\alpha$ はその極大トーラスである。このとき $\alpha^\vee \in X_*(T_\alpha) \subset X_*(T)$ で $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ となるものがただ一つある。これを α のコルートという。部分集合 $S \subset R(G,T)$ に対して $S^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in S\}$ と書く。四つ組

$$RD(\mathrm{spl}) = (X^*(T), \Delta(B,T), X_*(T), \Delta^\vee(B,T))$$

を分裂 spl の基底付きルートデータ (*based rood datum*) という。(基底付き) ルートデータやその射の定義については [Spr79, 1 節] を参照されたい。二つの分裂 spl, spl$'$ に対して $\mathrm{spl}' = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{spl}$ となる唯一の $g_{\mathrm{ad}} \in G_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ は同型 $\mathrm{Ad}(g) : RD(\mathrm{spl}) \xrightarrow{\sim} RD(\mathrm{spl}')$ を与える。G の基底付きルートデータを $RD(\mathrm{spl})$ たちのこの同型に関する射影極限

$$RD(G) = (X^*, \Delta, X_*, \Delta^\vee) := \varprojlim_{\mathrm{spl}} RD(\mathrm{spl})$$

と定義する。これは G への Γ 作用から定まる Γ 作用を備えている。この作用は $RD(\mathrm{spl}_{G^*})$ への Γ 作用の ψ_G による引き戻しに一致する。

トーラス T の L 群は $X^*(T) = X_*(\hat{T})$ となる複素トーラス $\hat{T}$ から構成されていた。今、$RD(G)$ の前後のデータを入れ替えた

$$RD^\vee(G) := (X_*, \Delta^\vee, X^*, \Delta)$$

は再び基底付きルートデータである。よって Chevalley の定理 [Spr98, 9.6, 10.1] から $\mathbb{C}$ 上の連結簡約線型代数群 $\hat{G}$ で $RD(\hat{G}) = RD^\vee(G)$ となるものが同型を除いてただ一つある。これを G の *Langlands* 双対群という。その分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\})$ を固定すれば、Γ 作用 $\rho_G : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\hat{G})$ で $\mathrm{spl}_{\hat{G}}$ を保ち、合成 $\Gamma \overset{\rho_G}{\to} \mathrm{Aut}(\hat{G}) \twoheadrightarrow \mathrm{Out}(\hat{G})$ が

$$\mathrm{Aut}(RD(G)) \cong \mathrm{Aut}(RD^\vee(G) = RD(\hat{G})) \cong \mathrm{Out}(\hat{G})$$

によって $RD(G)$ への Γ 作用に対応するものがただ一つある。このとき G の L 群を

$${}^L G = \hat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$$

と定義する。ただし ρ_G と $\varphi_F : W_F \to \Gamma$ の合成を再び ρ_G と書いている。定義から明らかに G の L 群は G^* の L 群に一致する。

例 3.3. (i) GL_n の上三角元からなる Borel 部分群を B, 対角元からなる極大トーラスを T と書けば、$X^*(T)$ は $e_i(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n)) = t_i$ で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群で、対する $X_*(T)$ の双対基底 $\{e_i^\vee\}_{1 \le i \le n}$ は $e_i^\vee(t) = \mathrm{diag}(1, \dots, \overset{\overset{i}{\vee}}{t}, \dots, 1)$ で与えられる。

$$R(\mathrm{GL}_n, T) = \{e_i - e_j \,|\, 1 \le i \ne j \le n\} \supset R(B, T) = \{e_i - e_j \,|\, 1 \le i < j \le n\}$$

で $\Delta(B, T) = \{\alpha_i := e_i - e_{i+1}\}_{1 \le i < n}$ であり、$e_i - e_j$ のコルートは $e_i^\vee - e_j^\vee$ である。よって

$$RD(\mathrm{GL}_n) = \Big(\sum_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i, \{e_i - e_{i+1}\}, \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i^\vee, \{e_i^\vee - e_{i+1}^\vee\}\Big)$$

の双対 $RD^\vee(\mathrm{GL}_n)$ は e_i と $e_i^\vee$ を入れ替えることで $RD(\mathrm{GL}_n)$ に同型である。$RD(\mathrm{GL}_n)$ への Γ 作用は自明であるから、${}^L\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times W_F$ である。

(ii) E/F を有限次拡大として可換 F 代数 R に $\mathbb{M}_n(R \otimes_F E)^\times$ を対応させる代数群 $\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$ を考える。例 2.2 と同様の議論、記号を使って $\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n \otimes_F E \simeq \mathrm{GL}_{n,E}^\Phi$ がわかる。特に ${}^L\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n = \mathrm{Ind}_{\Gamma_E}^\Gamma \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rtimes W_F$ である。ただし Γ_E は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に自明に作用し、W_F は Γ を経由して $\mathrm{Ind}_{\Gamma_E}^\Gamma \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に作用する。

(iii) E/F を二次拡大としてその Galois 群 $\Gamma_{E/F}$ の生成元を σ と書く。$\mathscr{A} := \mathbb{M}_n(E)$ 上の第二種対合 ι を

$$x^\iota := \mathrm{Ad}(I_n)^t\sigma(x), \quad I_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{n-1} & & & \end{pmatrix}$$

と定義して、$\mathrm{U}_n(R) := \{g \in \mathscr{A} \otimes_F R \,|\, gg^{\iota_R} = 1\}$ で定まる F 代数群 U_n を考える。ただし $\iota_R := \iota \otimes \mathrm{id}_R$ と書いている。$x^{\iota'} := \mathrm{Ad}(I_n)^t x$ とおけば、$E \otimes_F E \simeq E^{\Gamma_{E/F}}$ から

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_n \otimes_F E &\simeq \{(g, \bar{g}) \in \mathrm{GL}_{n,E} \,|\, (g, \bar{g})(\bar{g}^{\iota'}, g^{\iota'}) = 1\} \\ &\simeq \{(g, g^{-\iota'}) \,|\, g \in \mathrm{GL}_{n,E}\} \simeq \mathrm{GL}_{n,E} \end{aligned}$$

を得る。ただし $g^{-\iota'} := (g^{\iota'})^{-1}$ と書いている。自己同型 $-\iota'$ は (i) の標準 Borel 対 (B, T) を保ち、$RD(\mathrm{GL}_n)$ に $e_i^{-\iota'} = -e_{n+1-i}$ と作用する。よって ${}^L\mathrm{U}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rtimes_{\rho_{\mathrm{U}_n}} W_F$ において W_F は $\Gamma_{E/F}$ を経由して $\rho_{\mathrm{U}_n}(\sigma)g = g^{-\iota'}$ と作用する。

3.3　導来群、単連結被覆、z 拡大

ここでは G を一般の標数 0 の体 F 上で定義された連結簡約線型代数群とする。G の導来群、つまり G の元の交換子たちで生成される閉部分群を G_{der} と書く。G の連結簡約性から $D_G := G/G_{\mathrm{der}}$ はトーラスであり、自然な準同型 $Z_G \to D_G$ は G_{der} の中心 $Z_{G_{\mathrm{der}}}$ を核とする同種射である。分裂 $\mathrm{spl} = (B, T, \{X_\alpha\})$ に対して $(B_{\mathrm{der}} := B \cap G_{\mathrm{der}}, T_{\mathrm{der}} := T \cap G_{\mathrm{der}}, \{X_\alpha\})$ は G_{der} の分裂であり、$T/T_{\mathrm{der}} = D_G$ である。よって

$$X^*(D_G) = \{\chi \in X^*(T) \,|\, \langle \chi, \alpha^\vee \rangle = 0,\, \alpha^\vee \in \Delta^\vee\} \subset X^*(T)$$

と見なされ、

$$\begin{aligned} RD(G_{\mathrm{der}}) &= (X^*_{\mathrm{der}}, \Delta, X_{*,\mathrm{der}}, \Delta^\vee), \\ X^*_{\mathrm{der}} = X^*(T)/X^*(D_G), &\quad X_{*,\mathrm{der}} := X_* \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta^\vee \end{aligned}$$

が成り立つ。$\hat{G}$ の中心を $Z_{\hat{G}}$ とすると、上の同一視から $X^*(D_G) = X_*(Z_{\hat{G}})$ だから $\hat{D}_G = Z^0_{\hat{G}}$ である。

さて単純コルートたちで張られる格子を $X_{*,\mathrm{sc}} := \mathbb{Z}[\Delta^\vee] \subset X_{*,\mathrm{der}}$, その $X^*_{\mathrm{der}} \otimes \mathbb{Q}$ における双対格子を

$$X^*_{\mathrm{sc}} := \{\lambda \in X^*_{\mathrm{der}} \otimes \mathbb{Q} \,|\, \langle \lambda, X_{*,\mathrm{sc}} \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

と定めれば、$(X^*_{\mathrm{sc}}, \Delta, X_{*,\mathrm{sc}}, \Delta^\vee)$ は基底付きルートデータである。再び Chevalley の定理からこれを基底付きルートデータに持つ $\bar{F}$ 連結簡約代数群 $G_{\mathrm{sc},\bar{F}}$ が同型を除いてただ一つある。単準同型 $X^*_{\mathrm{der}} \hookrightarrow X^*_{\mathrm{sc}}$ は [Spr79, 1.7] の意味の同種射 $RD(G_{\mathrm{der}}) \to RD(G_{\mathrm{sc},\bar{F}})$ を与え、従って [Spr79, 定理 2.9 (ii)] から中心的同種 $G_{\mathrm{sc},\bar{F}} \twoheadrightarrow G_{\mathrm{der},\bar{F}}$ (核が有限な全射準同型) がある。定義からこれは準分裂な F 形式の中心的同種 $G^*_{\mathrm{sc}} \twoheadrightarrow G^*_{\mathrm{der}}$ から

来ている。最後に $(G_{\rm sc})_{\rm ad}=(G_{\rm der})_{\rm ad}=G_{\rm ad}$ だから、G に対する $\{\mathrm{Ad}(u_\sigma)=\psi_G\circ\sigma(\psi_G)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}\in Z^1(F,G_{\rm ad})$ で $G_{\rm sc}^*$ の Galois 作用を捻って、F 同種 $G_{\rm sc}\twoheadrightarrow G_{\rm der}$ が得られる。これを $G_{\rm der}$ の単連結被覆 (*simply connected cover*) と呼ぶ。$G=G_{\rm der}Z_G$ から全射 $G_{\rm sc}\times Z_G\ni(g_{\rm sc},z)\longmapsto\bar{g}_{\rm sc}z\in G$ があって、その核は $\{(z_{\rm sc},\bar{z}_{\rm sc}^{-1})\,|,z_{\rm sc}\in Z_{G_{\rm sc}}\}$ である。このことを

$$G\simeq G_{\rm sc}*_{Z_{G_{\rm sc}}}Z_G \tag{3.2}$$

と書き表す。

一般に半単純線型代数群 G は $G=G_{\rm sc}$, つまり余指標格子がコルートで張られるとき単連結と呼ばれる。半単純単連結群に対する Steinberg の定理を二つ引用しておこう。

定理 3.4 ([Ste68] 定理 8.1)**.** (i) G を半単純単連結線型代数群、θ をその半単純自己同型 (つまり θ は G の Lie 環上の半単純線型変換を引き起こす) とするとき、その固定部分 G^θ は連結簡約群である。
(ii) 特に連結簡約線型代数群 G が $G_{\rm der}=G_{\rm sc}$ を満たすとき、半単純元 $\gamma\in G(F)$ の中心化群 G^γ は連結簡約群である。

次に半単純元 $\gamma\in G(\bar{F})$ の共役類 $C_{\bar{F}}\subset G_{\bar{F}}$ が F 有理的、つまり $\Gamma=\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 不変であればそれは G の共役類 C から来ているが、C は F 値点を持たないことがある[*6]。実際、任意の F 有理共役類が F 値点を持つためには G が F 準分裂であることが必要である [Ste65, 定理 9.1]。

定理 3.5 ([Ste65] 定理 9.8)**.** G が半単純単連結線型代数群で F 準分裂なら、G の任意の F 有理共役類は F 有理点を持つ。

この定理は後に Kottwitz によって次の形に拡張された。

定理 3.6 ([Kot82] 定理 4.1)**.** F 準分裂な連結簡約群 G が $G_{\rm der}=G_{\rm sc}$ を満たすなら、G の任意の F 有理共役類は F 有理点を持つ。

単連結群の Galois コホモロジーに関しては次の二つが基本的である。

[*6] 例えば D を局所体 F 上の中心的四元数体として、$G(R)=(D\otimes_F R)^\times$ で与えられる F 代数群 G を考える。$G_{\bar{F}}\simeq\mathrm{GL}_2$ の半単純共役類はその特性多項式で決まる。このとき F 上可約な特性多項式を持つ半単純共役類は F 有理点を持たない。

定理 3.7 (Kneser の消滅定理 [Kne65a], [Kne65b]). F が標数 0 の非アルキメデス局所体で G が F 上定義された半単純単連結線型代数群のとき $\mathrm{H}^1(F,G)$ は自明である。

定義から G_{sc} の Langlands 双対群 $\widehat{G_{\mathrm{sc}}}$ ($\hat{G}$ の単連結被覆 $\hat{G}_{\mathrm{sc}}$ ではない!) の基底付きルートデータは $RD(\hat{G}_{\mathrm{sc}}) = (\mathbb{Z}[\Delta^\vee], \Delta^\vee, X^*_{\mathrm{sc}}, \Delta)$ だから、

$$\widehat{G_{\mathrm{sc}}} = \hat{G}/Z_{\hat{G}}$$

である。T_{der} の $G_{\mathrm{sc}} \twoheadrightarrow G_{\mathrm{der}}$ による逆像を T_{sc} と書けば、$\hat{T}_{\mathrm{sc}} = \hat{T}/Z_{\hat{G}}$ で $X^*(\hat{T}_{\mathrm{sc}}) = \mathbb{Z}[\Delta^\vee(B,T)]$ だから $X^*(Z_{\hat{G}}) = X_*/\mathbb{Z}[\Delta^\vee]$ が従う。これと $X^*(Z^0_{\hat{G}}) = X_*(D_G) = X_*/X_{*,\mathrm{der}}$ を併せて

$$\mathrm{cok}[X^*(Z_{\hat{G}}) \to X^*(Z^0_{\hat{G}})] = \mathrm{cok}[X_*/\mathbb{Z}[\Delta^\vee] \to X_*/X_{*,\mathrm{der}}] \simeq X_{*,\mathrm{der}}/\mathbb{Z}[\Delta^\vee]$$

を得る。特に次が従う。

補題 3.8. $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ であるためには、$Z_{\hat{G}}$ が連結であることが必要十分。

連結簡約群の中心拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ が z 拡大とは

- $G_{1,\mathrm{der}} = G_{1,\mathrm{sc}}$;
- Z_1 は $\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m$ の形のトーラスの直積

であることとする。

補題 3.9. (i) 任意の連結簡約群 G は z 拡大を持つ。
(ii) 二つの z 拡大 $G_i \twoheadrightarrow G, (i = 1, 2)$ に対して、双方を経由する z 拡大 $G_3 \twoheadrightarrow G$ がある。

証明の概略. $(B,T) \subset G$ を Borel 対とし、T の分解体 E で F の有限次 Galois 拡大であるものを取る。$M := X_*(T)/X_*(T_{\mathrm{sc}})$ を含む $\Gamma_{E/F}$ 加群の完全列 $0 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$ で P_0 は有限生成自由アーベル群、P_1 が自由 $\mathbb{Z}[\Gamma_{E/F}]$ 加群であるものがある。

$$Q := \{(\xi, \mu^\vee) \in P_0 \times X_*(T) \,|\, \pi(\xi) \equiv \mu^\vee \mod X_*(T_{\mathrm{sc}})\}$$

とおけば次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & X_*(T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & X_*(T_{\mathrm{sc}}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d] & X_*(T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Z_1, T_1 をそれぞれ $X_*(Z_1) = P_1, X_*(T_1) = Q$ となるトーラスとすれば、定義から互いに双対な完全列

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}[\Delta^\vee(B,T)] \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z}[\Delta^\vee(B,T)] \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & X_*(Z_1) \arrow[r] & X_*(T_1) \arrow[r] & X_*(T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow X^*(T) \longrightarrow X^*(T_1) \longrightarrow X^*(Z_1) \longrightarrow 0$$

を得る。このとき $RD(B_1, T_1) = (X^*(T_1), \Delta(B,T), X_*(T_1), \Delta^\vee(B,T))$ は基底付きルートデータとなり、それに付随する簡約群が求める G_1 である。しかしその F 形式が (B,T) によらないことを保証しなくてはならないから、$T_1 \twoheadrightarrow T \twoheadrightarrow T_{\mathrm{ad}}$ の核を Z_{G_1} とおけば次の可換図式が成り立つことに注意する。

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_{G_1} \arrow[r] \arrow[d] & Z_G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & T_1 \arrow[r] & T \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

このとき $G_1 = G_{\mathrm{sc}} *_{Z_{G_{\mathrm{sc}}}} Z_{G_1}$ は z 拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ を与えている。 $\square$

G の z 拡大 G_1 に対しては、Shapiro の補題 1.4 と Hilbert 90 定理から $\mathrm{H}^1(F, Z_1) = 0$ ゆえ $G(F) \simeq G_1(F)/Z_1(F)$ が成り立ち、$G(F)$ の表現論を導来群が単連結な $G_1(F)$ のそれに帰着できる。一方、証明中の完全列から完全列

$$1 \longrightarrow \hat{Z}_1 \longrightarrow \hat{G}_1 \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow 1 \tag{3.3}$$

がある。

4 共役類ごとの局所大域原理—安定共役

この時点で非可換簡約群 G に対しては 2.2 節のような保型形式の記述を望み得ないことは明らかである。第一に商空間 $T(F)\backslash T(\mathbb{A})$ の記述 (2.11) に用いられた局所大域完全列 $1 \to T(\bar{F}) \to T(\bar{\mathbb{A}}) \to T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}) \to 1$ の類似は存在しない。Langlands の内視論のアイディアの出発点は代わりに (正則半単純) 共役類ごとに局所大域原理を記述することである。この節でも F は標数 0 の局所または大域体を表すものとし、前節の記号を引き続き用いる。

4.1 安定共役

$G(\bar{F}) \ni \gamma$ の中心化群を $G^\gamma := Z_G(\gamma)$, その単位元の連結成分を $G_\gamma := Z_G(\gamma)^0$ と書くことにする。$\gamma \mapsto \dim G_\gamma$ が最小値 (G の階数になる) を取る γ を正則 (*regular*) 元という。正則元の全体は G の開部分多様体 G_{reg} をなす。任意の $\gamma \in G(\bar{F})$ は Jordan 分解を持つ [Spr98, 2.4.8] からその半単純性が考えられる。G_{reg} の半単純元がなす部分多様体を G_{rs} と書く。これも G の開部分多様体である。

まず一般に半単純元 $\gamma \in G(F)$ を考える。その共役類を $C(\gamma)$ と書けば同型

$$G^\gamma\backslash G \ni G^\gamma g \xmapsto{\simeq} \gamma^g := g^{-1}\gamma g \in C(\gamma)$$

がある。ここで $C(\gamma, F) \simeq (G^\gamma(\bar{F})\backslash G(\bar{F}))^\Gamma$ と γ の $G(F)$ 共役類 $\gamma^{G(F)} \simeq G^\gamma(F)\backslash G(F)$ は異なる。安定共役類はこの両者の間にある同値類である。すなわち半単純な $\gamma, \gamma' \in G(F)$ が安定共役 (*stably conjugate*) とは、ある $G_\gamma(\bar{F})g \in (G_\gamma(\bar{F})\backslash G(\bar{F}))^\Gamma$ に対して $\gamma' = \gamma^g$ であることとする。このとき $G_\gamma(\bar{F})g = G_\gamma(\bar{F})\sigma(g)$, $(\sigma \in \Gamma)$ から $\{\partial g_\sigma := g\sigma(g)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ は $G_\gamma(\bar{F})$ 値 1 コサイクルであり、その $\mathrm{H}^1(F, G_\gamma)$ でのクラスは g の取り方によらず定まる。γ の安定共役類を $\gamma^G(F)$ と書けば、全単射

$$\begin{aligned} \gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F)) \ni (\gamma^g)^{G(F)} &\xmapsto{\simeq} [\partial g \text{ のクラス}] \in \mathfrak{D}(G_\gamma), \qquad (4.1)\\ \mathfrak{D}(G_\gamma) = \mathfrak{D}^G(G_\gamma) &:= \ker[\mathrm{H}^1(F, G_\gamma) \to \mathrm{H}^1(F, G)] \end{aligned}$$

が得られる。実際、$(\gamma^g)^{G(F)} = (\gamma^{g'})^{G(F)} \subset \gamma^G(F)$ であるためには $g' \in G_\gamma(\bar{F})gG(F)$, すなわち $\partial g'$ と ∂g が $G_\gamma(\bar{F})$) でコホモローグなことが必要十分である。

以下では特に γ が正則半単純な場合を考える: $\gamma \in G(F)_{\mathrm{rs}}$. 従って $T := G_\gamma$ は G の極大トーラスであり、$\gamma^g \in \gamma^G(F)$ なら $\mathrm{Ad}(g)^{-1} : T \xrightarrow{\sim} G_{\gamma^g} = T^g$ は $g \in T(\bar{F})g$ の取り方

によらない F 同型である。この場合であっても $\mathfrak{D}(T)$ は点付き集合の射の核であるから (1.7 節)、$\mathrm{H}^1(F,T)$ の部分群になるとは限らないことに注意する。

例 4.1. (i) $G=\mathrm{GL}_n$ のとき、半単純な $\gamma\in G(F)$ の $\mathbb{M}_n(F)$ での中心化環は中心的単純 F 代数の直和だから、$G_\gamma\simeq\prod_{i=1}^r\mathscr{B}_i^\times$ と書ける。ここで $\mathscr{B}_i$ は中心的単純 F 代数で、可換 F 代数 R に群 $(\mathscr{B}_i\otimes_F R)^\times$ を対応させる F 代数群を $\mathscr{B}_i^\times$ と書いている。Hilbert 90 定理の帰結 $\mathrm{H}^1(F,\mathscr{B}_i^\times)=\{1\}$ [Ser79, X.1 節 演習 2] から $\mathfrak{D}(G_\gamma)=\{1\}$ である。すなわち GL_n においては安定共役は $G(F)$ 共役に一致する。

(ii) $n=p+q$ となる自然数 n,p,q に対して、指数 (p,q) のシャッフルの集合

$$\mathrm{Shuff}(p,q):=\{s\in\mathfrak{S}_n\,|\,s \text{ は } \{1,\dots,p\},\{p+1,\dots,n\} \text{ 上単調増加 }\}$$

を思い出す。$\mathrm{U}_{p,q}$ を可換 $\mathbb{R}$ 代数 R に

$$\mathrm{U}_{p,q}(R):=\{g\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}R)\,|\,gI_{p,q}{}^t\sigma_R(g)=I_{p,q}\},\quad I_{p,q}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_p & \\ & -\mathbf{1}_q\end{pmatrix}$$

を対応させる $\mathbb{R}$ 代数群とする。ここで $\Gamma_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ の生成元を σ として $\sigma_R:=\sigma\otimes\mathrm{id}_R$ と書いている。その対角元からなる極大トーラスを $T=\{\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_i\in\mathrm{U}_1\}$ とすれば、$\mathrm{H}^1(\mathbb{R},\mathrm{U}_1)=\mathbb{R}^\times/\mathrm{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^\times)\simeq\boldsymbol{\mu}_2(\mathbb{R})=\{\pm1\}$ だから、$\mathrm{H}^1(\mathbb{R},T)\simeq\boldsymbol{\mu}_2(\mathbb{R})^n$ である。このとき

$$\mathfrak{D}(T)=\{(\epsilon_{s(1)},\dots,\epsilon_{s(n)})I_{p,q}\,|\,s\in\mathrm{Shuff}(p,q)\}\simeq\mathrm{Shuff}(p,q),$$
$$\epsilon_i:=\begin{cases}1 & 1\le i\le p \text{ のとき}\\ -1 & p<i\le n \text{ のとき}\end{cases}$$

である。

$G_{\mathrm{sc}},T_{\mathrm{sc}}$ を 3.3 節の通りとして、

$$\mathfrak{E}(T)=\mathfrak{E}^G(T):=\mathrm{im}[\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})\to\mathrm{H}^1(F,T)]$$

とおく。次の二つの補題により共役類の局所大域原理はアーベル群係数 Galois コホモロジー群のそれに帰着される。

補題 4.2. F を代数体とする。半単純な $\gamma,\gamma'\in G(\bar{F})$ が $G(\mathbb{A})$ 共役ならば、それらは $G(\bar{F})$ 共役である。

証明. 極大トーラス $T, T' \subset G_{\bar{F}}$ で $\gamma \in T(\bar{F})$, $\gamma' \in T'(\bar{F})$ なるものを取る。T, T' は $G(\bar{F})$ 共役だから [Spr98, 6.3.5]、必要なら γ' をその $G(\bar{F})$ 共役類の元で置き換えて γ, $\gamma' \in T(\bar{F})$ としてよい。素点 v を取れば、仮定から $\gamma' = \gamma^{g_v}$ となる $g_v \in G(\bar{F}_v)$ がある。このとき $T_\gamma(\bar{F}_v), T_\gamma^{g_v}(\bar{F}_v)$ はともに γ' を含む、言い換えればともに $I_{\gamma', \bar{F}_v}$ の極大トーラスだから、$T_{\gamma, \bar{F}_v} = (T_{\gamma, \bar{F}_v}^{g_v})^{h_v}$ となる $h_v \in I_{\gamma'}(\bar{F}_v)$ がある。つまり $g_v h_v \in N_{G(\bar{F}_v)}(T_{\gamma, \bar{F}_v})$ だから、その T_γ の Weyl 群 $\Omega(G, T_\gamma)$ での像の $N_{G(\bar{F})}(T_\gamma)$ での代表元 $\nu \in G(\bar{F})$ が取れる。このとき $\gamma \in T_\gamma(\bar{F})$ から

$$\gamma^\nu = \gamma^{g_v h_v} = {\gamma'}^{h_v} = \gamma'$$

となって証明終わり。 □

補題 4.3. (i) $\mathfrak{D}(T_{\mathrm{sc}}) \to \mathfrak{D}(T)$ は全射。
(ii) $\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{E}(T)$. 特に F が非アルキメデス局所体なら $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{E}(T)$.

証明. (i) は自然な Γ 同変全単射 $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F}) \backslash G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}) \xrightarrow{\sim} T_{\mathrm{der}}(\bar{F}) \backslash G_{\mathrm{der}}(\bar{F}) \xrightarrow{\sim} T(\bar{F}) \backslash G(\bar{F})$ (後半の全単射は $G = T \cdot G_{\mathrm{der}}$ から従う) から明らか。(i) から

$$\mathfrak{D}(T) = \mathrm{im}[\mathfrak{D}(T_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F, T)]$$

だから (ii) の最初の主張も直ちに従う。最後に F が非アルキメデス局所体なら、上で Kneser の消滅定理 3.7 から $\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}})$ は消えているから $\mathfrak{D}(T)$ と $\mathfrak{E}(T)$ は一致する。特にこのとき $\mathfrak{D}(T)$ は $\mathrm{H}^1(F, T)$ の部分群になる。 □

4.2 簡約群の Galois コホモロジー

この時点でトーラスの Galois コホモロジー群についての命題 2.3, 2.5 を簡約群に拡張しておく [Kot86]。

■局所理論　F を標数 0 の局所体、G を連結簡約 F 代数群とする。各 $\delta \in \mathrm{H}^1(F, G)$ に対して有限次 Galois 拡大 E/F で、$\mathrm{res}^{\Gamma_F}_{\Gamma_E}(\delta) = 0$ かつその上で G が分解するものを取る。この E/F に補題 3.9 の証明の構成を適用すると z 拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ で Z_1 が E 分裂トーラスの Weil 係数制限であるものを作れる。このとき Galois コホモロジー

完全列 (命題 1.3) のなす可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F, G_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(F, Z_1) \arrow[d, hook] \\
1 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(E, G_{1,E}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(E, G_E) \arrow[r] & \mathrm{H}^2(E, Z_{1,E})
\end{tikzcd}$$

において (1.4) から右端の射は単射である。従って $\delta \in \mathrm{im}[\mathrm{H}^1(F, G_1) \to \mathrm{H}^1(F, G)]$ がわかる。一方、完全列 $1 \to G_{1,\mathrm{sc}} \to G_1 \to D_{G_1} \to 1$ の Galois コホモロジー列を書くと、補題 3.8 から $\hat{D}_{G_1} = Z_{\hat{G}_1}$ ゆえ、命題 2.3 を併せて

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F, G_1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{H}^1(F, D_{G_1}) \arrow[r, "\alpha_{D_{G_1}}"] & \pi_0(Z_{\hat{G}_1}^{\Gamma})^D \arrow[d, "(3.3)"] \\
& \mathrm{H}^1(F, G) & & \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D
\end{tikzcd}$$

を得る。δ の $\mathrm{H}^1(F, G_1)$ での逆像の $\pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ での像を $\alpha_G(\delta)$ とおく。これは z 拡大の取り方によらず、$\alpha_G : \mathrm{H}^1(F, G) \to \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ を与えることが Kottwitz により示されている。すなわち次が成り立つ。

命題 4.4 ([Kot86] 定理 1.2)**.** (i) F 上の連結簡約群とその間の正規準同型からなる圏からアーベル群の圏への関手の射 $\alpha_G : \mathrm{H}^1(F, G) \to \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ で、極大トーラス $T \subset G$ に対する命題 2.3 の同型との可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G) \arrow[r, "\alpha_G"] & \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D \\
\mathrm{H}^1(F, T) \arrow[r] \arrow[u] & \pi_0(\hat{T}^{\Gamma})^D \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

を満たすものがただ一つある。ただし右列は $T \twoheadrightarrow D_G$ から引き起こされる準同型である。
(ii) F が非アルキメデス的なとき、α_G は自然な同型である。$F = \mathbb{R}$ のときには完全列

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G) \xrightarrow{\alpha_G} \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D \longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{G}})^D$$

が成り立つ。ここで最後の準同型は $\mathrm{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : Z_{\hat{G}} \to Z_{\hat{G}}^{\Gamma}$ から引き起こされるものである。

これの証明はしない。興味のある読者は原論文に当たるかまたは [Lab99, I 章] を参照されたい。

■不分岐な場合　F が標数 0 の非アルキメデス局所体の場合を考える。G が F 上不分岐とは、F の整数環 $\mathcal{O}$ 上の滑らかで簡約な群スキーム $\mathscr{G}$ に延びることとする。これは G が F 準分裂である不分岐有限次拡大 E/F 上で分裂する極大トーラスを持つことに同値である [Tit79, 1.10, 3.8]。このとき G の Tits ビルは超スペシャル点を持ち、$\boldsymbol{K} := \mathscr{G}(\mathcal{O})$ はある超スペシャル点の固定化群、すなわち超スペシャル (*hyperspecial*) 極大コンパクト部分群である。このとき Lang の定理[*7]を用いて次が証明できる。

命題 4.5 ([PR94] 定理 6.8)**.** G および有限次 Galois 拡大 E/F が共に不分岐なら $\mathrm{H}^1(E/F, \mathscr{G}(\mathcal{O}_E)) = \{1\}$. ここで $\mathcal{O}_E$ は E の整数環である。

証明の議論は $\mathrm{H}^1(E/F, \mathcal{O}_E^\times)$ の消滅の証明の類似なのでここでは割愛する。気になる方は引用した文献をご覧になるとよい。

この機会に不分岐な場合の安定共役についての準備をしておこう。半単純な $\gamma \in \boldsymbol{K}$ と $\gamma \in T(F)$ となる任意の極大トーラス $T \subset G$ のルート α に対して $\alpha(\gamma)$ は $\mathcal{O}$ の $\bar{F}$ での整閉包 $\bar{\mathcal{O}}$ に属する。T の任意のルート α に対して $\alpha(\gamma) - 1 \in \bar{\mathcal{O}}^\times$ または $\alpha(\gamma) = 1$ となる半単純な $\gamma \in \boldsymbol{K}$ の集合を $\boldsymbol{K}_{\mathrm{ss}}$ と書く。

補題 4.6. G が F 上不分岐でその導来群が単連結であるとする。$\boldsymbol{K}_{\mathrm{ss}} \ni \gamma$ に対して、G_γ は不分岐で $G_\gamma(F) \cap \boldsymbol{K}$ は $G_\gamma(F)$ の超スペシャル極大コンパクト部分群である。さらに $\gamma^G(F) \cap \boldsymbol{K} = \gamma^{\boldsymbol{K}} := \mathrm{Ad}(\boldsymbol{K})\gamma$ が成り立つ。

証明. 勝手な $\gamma \in \boldsymbol{K}_{\mathrm{ss}}$ を取り、$T \subset G$ を $\gamma \in T(F)$ となる極大トーラスとする。

証明には T が F 分裂 (特に G も F 分裂) である場合にいくつか準備が必要である。必要なら T を取り替えて $\boldsymbol{K}$ が固定する超スペシャル点が T のアパートに入っているとしてよい。すると T は $\mathscr{G}$ の極大トーラス $\mathscr{T}$ に延びて $\gamma \in \boldsymbol{K} \cap T(F) = \mathscr{T}(\mathcal{O})$ が成り立つ。各 $\alpha \in R(G,T)$ のルートベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ (と $R(G,T)$ 上の順序) と $X_*(\mathscr{T})$ の基底 $\{\mu_i\}$ を固定すれば、G の座標関数 $\{x_\alpha\} \amalg \{x_i\}$ が定まり、アファイン群スキーム $\mathscr{G}$ は多項式環 $\mathcal{O}[x_\alpha, x_i]_{\alpha,i}$ のある剰余環 $\mathcal{O}[\mathscr{G}]$ のスペクトルである。中心化群 $\mathscr{G}_\gamma$ はその $\mathrm{Ad}(\gamma)$ 不変商 $\mathscr{O}_{G,\gamma}$ のスペクトルだが、$\mathrm{Ad}(\gamma)x_\alpha = \alpha(\gamma)x_\alpha$ と $\alpha(\gamma) - 1$ についての仮定から $\mathscr{O}_{G,\gamma}$ は $\mathcal{O}[\{x_\alpha\}_{\alpha(\gamma)=1}, \{x_i\}_i]$ の $\mathcal{O}[\mathscr{G}]$ での像にほかならない。仮定から $\mathscr{G}$ は $\mathcal{O}$ 上平坦ゆえ、これは $\mathscr{G}_\gamma$ も $\mathcal{O}$ 上平坦であることを意味する。$\mathscr{G}_\gamma$ の生成幾何ファイバーおよ

[*7] 有限体 $\mathbb{F}$ 上の線型代数群 G の Galois コホモロジー集合 $\mathrm{H}^1(\mathbb{F}, G)$ は消えている。

びスペシャル幾何ファイバーが同じ次元を持つ連結簡約群スキームであることは仮定から明らかだから、$\mathscr{G}_\gamma$ は滑らかで簡約な群スキームである。よって G_γ は不分岐でなくてはならず、$G_\gamma(F)\cap \boldsymbol{K} = \mathscr{G}_\gamma(\mathcal{O})$ はその超スペシャル極大コンパクト部分群である。準備の最後に次の主張を示しておこう。

主張 4.6.1. 上の状況で $\gamma^{G(F)}\cap \boldsymbol{K} = \gamma^{\boldsymbol{K}}$ である。

証明. 議論を理解するには $G=\mathrm{SL}_2$ の場合を見れば十分なのでそのときのみ解説する。$B=TU$ をその上三角 Borel 部分群とし、$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ に共役な $\gamma' = \gamma^g \in \boldsymbol{K}, (g\in G(F))$ を取る。岩澤分解 $G(F)=T(F)U(F)\boldsymbol{K}$ から $g=tuk, (t\in T(F), u\in U(F), k\in \boldsymbol{K})$ と書け、$\gamma^u\gamma^{-1} = \mathrm{Ad}(k)\gamma'\gamma^{-1}\in \boldsymbol{K}$ である。ここで $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ と書けば

$$\gamma^u\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\alpha(\gamma)-1)b \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

で $\alpha(\gamma)-1\in\mathcal{O}^\times$ だから、$u\in \boldsymbol{K}$, つまり $\gamma'\in\gamma^{\boldsymbol{K}}$ である。 □

さて、一般の場合に補題を証明しよう。任意の $\gamma'\in\gamma^G(F)$ に対して有限次 Galois 拡大 E/F で

- T は E 上分裂し、
- γ' と γ は $G(E)$ 共役

であるものを取る。E 分裂極大トーラス $T_0\subset G$ で $\boldsymbol{K}$ を定める超スペシャル点が T_0 のアパートに入っているものと、$\gamma_0\in\mathscr{T}_0(\mathcal{O}_E) = T_0(E)\cap\mathscr{G}(\mathcal{O}_E)$ で γ,γ' に $G(E)$ 共役なものが取れる。先の分裂する場合の議論から $\mathscr{G}_{\mathcal{O}_E,\gamma_0}$ は滑らかな連結簡約群スキームで、主張 4.6.1 から γ,γ' は $\gamma_0^{\mathscr{G}(\mathcal{O}_E)}$ に属する。これからまず $(\mathscr{G}_\gamma)_{\mathcal{O}_E}\simeq\mathscr{G}_{\mathcal{O}_E,\gamma_0}$ も滑らかな連結簡約群スキームである。よって $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E\to\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ での fpqc 降下を適用して $\mathscr{G}_\gamma$ も $\mathcal{O}$ 上の滑らかな連結簡約群スキームであり [Gro67, 2.6-7 節]、これから分裂する場合と同様にして補題の前半の主張が従う。

今や G_γ は不分岐だから上の E/F を不分岐拡大に取れる。後半を示すために $\gamma'=\gamma^k$, $k\in\mathscr{G}(\mathcal{O}_E)$ と書く。4.1 節と同様にして ∂k は $G_\gamma(E)\cap\mathscr{G}(\mathcal{O}_E) = \mathscr{G}_\gamma(\mathcal{O}_E)$ に値を取る $\Gamma_{E/F}$ 上の 1 コサイクルである。命題 4.5 からある $\ell\in\mathscr{G}_\gamma(\mathcal{O}_E)$ があって $\partial k = \partial\ell^{-1}$, すなわち $\ell k\in\mathscr{G}(\mathcal{O}_E)^{\Gamma_{E/F}} = \boldsymbol{K}$ で、$\gamma^{\ell k}=\gamma'$ であるから後半も示された。 □

■大域理論　次に F を代数体とする。E/F を $\bar{F}$ に含まれる有限次 Galois 拡大とすると、(非可換係数の) Shapiro の補題 1.4 から 19 頁の記号で

$$\mathrm{H}^1(E/F, G(E_v)) \simeq \mathrm{H}^1(E_w/F_v, G(E_w))$$

が成り立つ。さらに有限個を除く非アルキメデス素点 v では $G_v = G \otimes_F F_v$ は不分岐で、整数環 $\mathcal{O}_v \subset F_v$ 上の滑らかな連結簡約群スキーム $\mathscr{G}_v$ に延びる。この延長をうまく取れば、G のアデール群は位相的帰納極限

$$G(\mathbb{A}) = \varinjlim_S \Big(\prod_{v \in S} G(F_v) \times \prod_{v \notin S} \mathscr{G}_v(\mathcal{O}_v) \Big)$$

に一致する。ここで S はアルキメデス素点全部と G が不分岐でない全ての非アルキメデス素点を含む F の素点の有限集合を走る。よって命題 4.5 からトーラスの場合 (2.5) と同様の議論により次を得る。

$$\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_v). \tag{4.2}$$

さて、z 拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ に付随して行が完全列である可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z_1(\bar{\mathbb{A}}) \arrow[r] & G_1(\bar{\mathbb{A}}) \arrow[r] & G(\bar{\mathbb{A}}) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z_1(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & Z_{G_1}(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & Z_G(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1
\end{tikzcd}$$

を考えれば、完全列 $1 \to Z_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_1(\bar{F}) \to G_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_{G_1}(\bar{F}) \to G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F}) \to 1$ が得られ、従って Galois コホモロジー完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_{G_1}(\bar{F})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{A}/F, Z_1)$$

が成り立つ。局所的な場合と同様に任意の $\delta \in \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F}))$ に対して、それが $\mathrm{H}^1(F, G_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_{G_1}(\bar{F}))$ の像に含まれるような z 拡大が取れる。それをに対する図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_{G_1}(\bar{F})) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, D_{G_1}) \arrow[r, "\alpha_{D_{G_1}}"] & \pi_0(Z_{\hat{G}_1}^{\Gamma})^D \arrow[d, "(3.3)"] \\
\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) & & \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D
\end{tikzcd}$$

による $\delta \in \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F}))$ の逆像の $\pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ での像を $\alpha_G(\delta)$ と書く。

命題 4.7 ([Kot86] 定理 2.2, 系 2.5)**.** (i) F 上の連結簡約群の圏からアーベル群の圏への関手の射 $\alpha_G : \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \to \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ で命題 2.3 の同型を拡張するものがただ一つある。さらに次は完全列である。

$$\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{ad}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \xrightarrow{\alpha_G} \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$$

(ii) 次の局所大域可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d, "(4.2)"'] & \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \arrow[r, "\alpha_G"] & \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D \\
\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_v) \arrow[rr, "\bigoplus \alpha_{G_v}"] & & \bigoplus_v \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma_v})^D \arrow[u, "\sum \bar{v}"']
\end{tikzcd}$$

ただし $\bar{v} : \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ は $Z_{\hat{G}}^{\Gamma} \hookrightarrow Z_{\hat{G}}^{\Gamma_v}$ が引き起こす準同型である。さらにこの図式の一行目の射の合成の核は $\mathrm{H}^1(F, G) \to \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}))$ の像である。

最後に Hasse 原理について簡単に復習しておこう。上の状況で

$$\text{Ш}^1(F, G) = \ker[\mathrm{H}^1(F, G) \to \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}))] = \ker\Big(\mathrm{H}^1(F, G) \to \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_v)\Big)$$

とおく (Shafarevich-Tate 群の一種)。同様に $A \in \mathcal{M}od_{\Gamma}$ に対しても

$$\text{Ш}^i(F, A) = \ker\Big(\mathrm{H}^i(\Gamma, A) \to \prod_v \mathrm{H}^i(\Gamma_v, A)\Big)$$

と定める。

命題 4.8 (Kneser, Chernousov)**.** G が半単純単連結線型代数群なら $\text{Ш}^1(F, G) = \{1\}$ である。

証明. G が E_8 型単純因子を持たないときは [Kne66], E_8 型単純群のときは [Che89] を参照されたい。 □

さて T を F トーラスとすると、Galois コホモロジー完全列と Tate・中山双対性 (命題

2.3 (ii), 2.5 (iii))

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{A}) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{“双対”}"'] & (T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^{\Gamma} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{“双対”}"'] & \mathrm{H}^1(F,T) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})) \\
\prod_v \mathrm{H}^2(F_v, X^*(T)) & \mathrm{H}^2(F, X^*(T)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

および (2.2) から

$$\text{Ш}^1(F,T) \cong \mathrm{cok}[T(\mathbb{A}) \to (T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^{\Gamma}] \cong \text{Ш}^2(F, X^*(T))^D \cong \text{Ш}^1(F,\hat{T})^D$$

である。これは連結簡約群 G で導来群が単連結なものに対しても命題 4.8 を使って

$$\text{Ш}^1(F,G) \cong \text{Ш}^1(F,D_G) \cong \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})^D$$

と拡張される。さらに一般の連結簡約線型代数群 G に対しては、その z 拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ を取れば

$$\text{Ш}^1(F,G) = \text{Ш}^1(F,G_1), \quad \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}}) = \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}_1})$$

が成り立つ。以上の構成により次が得られた。

命題 4.9 ([Kot84] 4 節、[Lab99] 1.6-7 節)**.** F 上の連結簡約線型代数群とその間の正規準同型の圏から点付き集合の圏への関手の同型 $\text{Ш}^1(F,G) \cong \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})^D$ がある。さらに $I \subset G$ がある極大トーラス $T \subset G$ を含む連結簡約部分群のとき、可換図式

$$\begin{tikzcd}
\text{Ш}^1(F,I) \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ш}^1(F,G) \arrow[d] \\
\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}})^D \arrow[r] & \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})^D
\end{tikzcd}$$

が成り立つ。ここで 2 行目の射は制限射 $X_*(Z_{\hat{G}_1}) = X^*(G_1) \to X^*(I_1) = X_*(Z_{\hat{I}_1})$ から引き起こされる。

4.3 捻子の復習

群 G が集合 X に右から単純推移的に作用しているとき、X は主 G 等質空間 (*principal G-homogeneous space, G-torsor*) であるということにする。さらに第二の群 Γ が主 G 等質空間 X に作用している状況を考える。すなわち作用

$$\Gamma \times G \ni (\sigma, g) \longmapsto \sigma(g) \in G, \quad \Gamma \times X \ni (\sigma, x) \longmapsto \sigma(x) \in X$$

が与えられ、
$$\sigma(x.g)=\sigma(x).\sigma(g),\quad \sigma\in\Gamma, g\in G, x\in X$$
が成り立つとする。このような Γ 作用付きの主 G 等質空間を Γ 上の G 捻子 (G-*torsor*) と呼ぶ。G 捻子 X,Y の間の射とは、G 同変な写像 $\varphi: X\to Y$ で Γ 作用と可換なものである。Γ 上の G 捻子の圏を $\mathcal{Tors}_G$ と書く。

さて $X\in\mathcal{Tors}_G$ の点 $x\in X$ を止めれば、主 G 等質空間の定義から $\sigma\in\Gamma$ に対して $\sigma(x)=x.g_\sigma$ となる $g_\sigma\in G$ が唯一つある。容易に確かめられるように $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ は G に値を持つ Γ 上の 1 コサイクルであり、そのコホモロジー類 $\operatorname{inv}X\in\mathrm{H}^1(\Gamma,G)$ は $x\in X$ によらず定まる。次の補題はこれらの定義から明らかである。

補題 4.10. (a) $X\mapsto\operatorname{inv}X$ は Γ 上の G 捻子の同型類の集合から $H^1(\Gamma,G)$ への全単射を定めている。
(b) 更に G がアーベル群のとき、X が Γ 不動点を持つ: $X^\Gamma\neq\varnothing$ ためには $\operatorname{inv}X=0$ が必要十分である。

4.4 正則半単純共役類の局所大域原理

さて 3.2 節の状況に戻って代数体 F 上の連結簡約群 G とその準分裂データ (G^*,ψ_G) を取る。以下、簡単のために G の導来群は単連結であるとする。正則半単純な $\gamma\in G(F)_{\mathrm{rs}}$ に対してその局所、大域安定共役類 $\gamma^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A}), \gamma^G(F)$ の差を記述するだけでは十分ではない。準分裂でない G に対しては F 有理点は持たないが $\mathbb{A}$ 値点を持つ半単純共役類があるからである。そこで定理 3.5 とその直前の注意を考慮して $\gamma_*\in G^*(F)_{\mathrm{rs}}$ の共役類から出発し、その $\psi_G^{-1}: G^*_{\bar{F}}\xrightarrow{\sim}G^*_{\bar{F}}$ による像の局所大域原理を記述したい。

問題を正確に述べよう。上の状況で $\gamma_{\mathbb{A}}=(\gamma_v)_v\in G(\mathbb{A})$ が γ_* をアデール像 (*adelic image*) に持つとは、各素点 v で $\psi_G(\gamma_v)$ と γ_* が $G^*(\bar{F}_v)$ 共役であることとする。これは後で見るように
$$\mathrm{Ad}(g)\psi_G(\gamma_{\mathbb{A}})=\gamma_*,\quad g\in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})\tag{4.3}$$
に同値になる。

問題 4.11. $\gamma_{\mathbb{A}}\in G(\mathbb{A})$ が $\gamma_*\in G^*(F)_{\mathrm{rs}}$ をアデール像に持つとする。$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ となるための必要十分条件を求めよ。

4.4.1 G_{sc} での共役類

これを解決するため、まずは $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ を $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$ で置き換えた類似の問題を考える。これは $T := G^*_{\gamma_*}$ として次に解説する Γ 上の $T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 捻子で記述される。$\tilde{X} = \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ を $h \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ と $\eta : T_{\bar{F}} \hookrightarrow G_{\bar{F}}$ の対で

- $\eta = \psi_G^{-1} \circ \mathrm{Ad}(\delta)|_{T_{\bar{F}}}, (\delta \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F}))$;
- $\eta(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}$

を満たすものの集合とする。これは (4.3) から $(\psi_G^{-1}(g), \psi_G^{-1})$ を含むから空でなく、Γ 作用

$$\sigma(h, \eta) = (\sigma(h), \sigma(\eta) := \sigma \circ \eta \circ \sigma^{-1}), \quad \sigma \in \Gamma$$

を備えている。

補題 4.12. $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$ が F 有理点を持つためには、$\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma \neq \varnothing$ が必要十分である。

証明. まず $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$ が F 有理点 $\mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}} =: \gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F), (h \in G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A}))$ を持つとする。(4.3) から

$$\gamma = \mathrm{Ad}(h\psi_G^{-1}(g)^{-1})\psi_G^{-1}(\gamma_*)$$

なので補題 4.2 により、ある $\delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ に対して $\gamma = \mathrm{Ad}(\delta)\psi_G^{-1}(\gamma_*)$ である。そこで $\eta := \mathrm{Ad}(\delta) \circ \psi_G^{-1}|_{T_{\bar{F}}} : T_{\bar{F}} \hookrightarrow G_{\bar{F}}$ とおく。(3.1) の記号で

$$\eta^{-1} \circ \sigma(\eta) = \psi_G \circ \mathrm{Ad}(\delta^{-1}\sigma(\delta)) \circ \psi_G^{-1} = \mathrm{Ad}(\psi_G(\delta^{-1}\sigma(\delta))u_\sigma), \quad \sigma \in \Gamma$$

だが、$\eta^{-1} \circ \sigma(\eta)(\gamma_*) = \eta^{-1} \circ \sigma \circ \eta(\gamma_*) = \eta^{-1}(\gamma) = \gamma_*$ なので $\psi_G(\delta^{-1}\sigma(\delta))u_\sigma \in T(\bar{F})$, $(\sigma \in \Gamma)$ が従う。つまり $\eta : T \hookrightarrow G$ は F 準同型で $(h, \eta) \in \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ だから、条件は必要である。

逆に $(h, \eta) \in \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ があれば、$\eta(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}$ は $G(\bar{F}) \cap G(\mathbb{A}) = G(F)$ に属するから条件は十分である。 □

次に $\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ には $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ が左から

$$\delta.(h, \eta) := (\delta h, \mathrm{Ad}(\delta) \circ \eta), \quad \delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$$

と作用する。この作用で $\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ を割ったものを $X = X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ とおく。

$$X := G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})\backslash\tilde{X} \xrightarrow{\sim} \left\{ G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})(h, \eta_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \bullet \quad h \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}) \\ \bullet \quad \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}} = \psi_G^{-1}(\gamma_*) \end{array} \right\}.$$

ここで $\eta_0 := \psi_G^{-1}|_{T_{\bar F}} : T_{\bar F} \xrightarrow{\sim} G_{\bar F}$ と書いている。

系 4.13. $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\rm sc}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ が空でないためには、$X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma \neq \varnothing$ が必要十分。

証明. 補題 4.12 から、$X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ が空でなければ $\tilde X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ も同様なことを見れば十分。$G_{\rm sc}(\bar F)(h,\eta) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ とすれば、$\sigma \in \Gamma$ に対してある $\delta_\sigma \in G_{\rm sc}(\bar F)$ があって

$$\sigma(h,\eta) = (\delta_\sigma^{-1} h, \mathrm{Ad}(\delta_\sigma^{-1}) \circ \eta)$$

が成り立つ。特に第一成分に注目して $\delta_\sigma = h\sigma(h)^{-1}$ であるから、$\{\delta_\sigma\}_\sigma$ は $G_{\rm sc}(\bar F)$ 値 1 コサイクルでそのクラスは $\text{Ш}^1(F, G_{\rm sc})$ に属する。よって命題 4.8 からある $\delta_1 \in G_{\rm sc}(\bar F)$ があって $\delta_\sigma = \delta_1^{-1}\sigma(\delta_1), (\sigma \in \Gamma)$ である。このとき $\delta_1.(h,\eta) \in \tilde X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ である。 □

さて、$\tilde X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ には $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ が右から

$$(h,\eta).t := (\eta(t)^{-1}h, \eta), \quad t \in T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$$

と作用し、これから $X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ への $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ 作用が定まる。任意の $G_{\rm sc}(\bar F)(h,\eta_0)$, $G_{\rm sc}(\bar F)(h',\eta_0) \in X$ に対して $\eta_0(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h')\gamma_{\mathbb{A}} = \mathrm{Ad}(h'h^{-1})\eta_0(\gamma_*)$ から $h'h^{-1} \in \eta_0(T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}}))$ だから、この $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ 作用は推移的である。さらに $(\eta(t)^{-1}h, \eta) \in G_{\rm sc}(\bar F)(h,\eta)$ であるためには $\eta(t) \in \eta(T_{\rm sc})(\bar F)$ が必要十分だから、X は $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\rm sc}(\bar F)$ 捻子である。$X = X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ の $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\rm sc})$ でのクラス $\mathrm{inv}\, X$ (補題 4.10) の Tate・中山同型

$$\alpha_{T_{\rm sc}} : \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\rm sc}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\widehat{T_{\rm sc}}^\Gamma)^D = \pi_0((\hat T/Z_{\hat G})^\Gamma)^D$$

による像を $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ と書く。系 4.13 と補題 4.10 (b) から次は明らかである。

命題 4.14. $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ が $\gamma_* \in G^*(F)_{\rm rs}$ をアデール像に持つとき、$\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\rm sc}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ が空でないためには $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = 1$ が必要十分である。

後で用いやすいように $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ のもう一つの表示を与えておこう。(3.1), (4.3) の記号で

$$v_\sigma := g u_\sigma \sigma(g)^{-1} \in G_{\rm sc}^*(\bar F)$$

とおく。$\mathrm{Ad}(v_\sigma)\gamma_* = \mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G \circ \sigma(\mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G)^{-1}\gamma_* = \gamma_*$ ゆえ $v = \{v_\sigma\}$ は $T_{\rm sc}(\bar F)$ 値 1 コチェイン (1.2 節) で $\partial v = \partial u \in Z^2(\Gamma, Z_{G_{\rm sc}^*}(\bar F))$ を満たす。従ってその $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\rm sc})$ での像は定義可能である。その $\alpha_{T_{\rm sc}}$ による像を $\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}) \in \pi_0((\hat T/Z_{\hat G})^\Gamma)^D$ と書く。

補題 4.15. 上の状況で $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = \mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{-1}$.

証明. $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})(h, \eta_0) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ を取る。$\mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_* = \mathrm{Ad}(\psi_G(h)) \circ \psi_G(\gamma_{\mathbb{A}})$ から $t := \psi_G(h)g^{-1} \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ に注意する。$\sigma \in \Gamma$ に対して

$$\sigma(h, \eta_0) = \delta_\sigma^{-1}.(h, \eta_0).t_\sigma, \quad \delta_\sigma \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), t_\sigma \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$$

と書いたとき、$\{t_\sigma^{-1}\}_{\sigma \in \Gamma}$ の $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}})$ でのクラスが $\mathrm{inv}\, X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ であった[*8]。この等式の第一成分に注目して、

$$\begin{aligned} t_\sigma =& \eta_0^{-1}(h\sigma(h)^{-1}\delta_\sigma^{-1}) = \psi_G(h)\psi_G(\sigma(h))^{-1}\psi_G(\delta_\sigma)^{-1} \\ =& \psi_G(h)\big(\psi_G \circ \sigma(\psi_G)^{-1} \circ \sigma(\psi_G(h))\big)\psi_G(\delta_\sigma)^{-1} \\ =& \psi_G(h)u_\sigma\sigma(\psi_G(h))^{-1}u_\sigma^{-1}\psi_G(\delta_\sigma)^{-1} \\ =& tgu_\sigma\sigma(g)^{-1}\sigma(t)^{-1}u_\sigma^{-1}\psi_G(\delta_\sigma)^{-1} \\ =& tv_\sigma\sigma(t)^{-1}(\psi_G(\delta_\sigma)u_\sigma)^{-1} \end{aligned}$$

を得る。ここで第二成分の等式は

$$\psi_G^{-1} \circ \mathrm{Ad}(u_\sigma)|_T = \sigma(\psi_G)^{-1}|_T = \sigma(\eta_0) = \psi_G^{-1} \circ \mathrm{Ad}(\psi_G(\delta_\sigma))^{-1}|_T$$

と書けるから $\psi_G(\delta_\sigma)u_\sigma \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}) \cap G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}) = T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ である。よって t_σ の $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}})$ でのクラスは $\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ に等しい。 □

4.4.2 G_{sc} から G への移行

まず T の双対トーラス $\hat{T} = \mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbb{C}^\times)$ について次が成り立つ。

[*8] $T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ は $X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ に右から作用するので t_σ の逆元になる。

補題 4.16. (i) $(X_*(T)=X^*(\hat{T}),\mathbb{Z})$ の Galois Ext 群は次で与えられる。

$$\mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z})=\begin{cases}X(T)_F & n=0\text{ のとき}\\ \pi_0(\hat{T}^\Gamma) & n=1\text{ のとき}\\ \mathrm{H}^{n-1}(\Gamma,\hat{T}) & n\geq 2\text{ のとき}\end{cases}$$

(ii) 特に長完全列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow & X(G)_F\longrightarrow X(T)_F\longrightarrow X(T_{\mathrm{sc}})_F\\ \longrightarrow & \pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma)\longrightarrow \pi_0(\hat{T}^\Gamma)\longrightarrow \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)\\ \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}})\longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma,\hat{T})\longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma,\hat{T}/Z_{\hat{G}})\longrightarrow\dots\end{aligned}$$

がある。

証明. (i) まず定義から $\mathrm{Ext}^0_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(X_*(T),\mathbb{Z})^\Gamma=X(T)_F$ である。また完全列 $1\to\mathbb{Z}\overset{2\pi i}{\to}\mathbb{C}\overset{\exp}{\to}\mathbb{C}^\times\to 1$ の長完全列

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}^\times) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C})\\ \hat{\mathfrak{t}}^\Gamma \arrow[r, "\exp"] & \hat{T}^\Gamma & & \end{tikzcd}$$

において、1.5 節 (1.3) から $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C})\simeq\mathrm{H}^1(\Gamma,\hat{\mathfrak{t}})\cong\varinjlim_E\mathrm{H}^1(\Gamma_{E/F},\hat{\mathfrak{t}})=0$ だから $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z})\simeq\pi_0(\hat{T}^\Gamma)$ である。同様に $n\geq 1$ のとき $1\to\mathbb{Z}\overset{2\pi i}{\to}\mathbb{C}\overset{\exp}{\to}\mathbb{C}^\times\to 1$ の長完全列と (1.3) から

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}^\times) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^{n+1}_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}) \arrow[d, equal]\\ \mathrm{H}^n(\Gamma,\hat{\mathfrak{t}})=0 & \mathrm{H}^n(\Gamma,\hat{T}) & & \mathrm{H}^n(\Gamma,\hat{\mathfrak{t}})=0\end{tikzcd}$$

ゆえ $\mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z})\simeq\mathrm{H}^{n-1}(\Gamma,\hat{T})$, $(n\geq 2)$ が成り立つ。

(ii) は $0\to X_*(T_{\mathrm{sc}})\to X_*(T)\to X_*(D_G)\to 0$ に付随する長完全列にほかならない。Ext 群の第一変数についての導来関手性については [Wei94, 定理 10.7.4] などを見よ。 □

上の補題の連結射 $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)\to\mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}})$ による $\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})$ の逆像を $\mathfrak{K}(T)=\mathfrak{K}^G(T)$ と書く。以前の通り $\gamma_*\in G^*(F)_{\mathrm{rs}}$ とそれをアデール像に持つ $\gamma_{\mathbb{A}}\in G(\mathbb{A})$ を取り、$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D$ の $\mathfrak{K}(T)$ への制限を $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ と書く (*Kottwitz* 障害)。この節の目的はこれまでの議論を関手性によって拡張し、命題 4.14 から次の定理を引き出すことである。

定理 4.17. $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{rs}}$ をアデール像に持つ $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ の $G(\mathbb{A})$ 共役類が $G(F)$ の元を含むためには $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ が消えることが必要十分である。

証明. まず $\mathfrak{K}(T)$ の Pontrjagin 双対を計算しよう。補題 4.16 (ii) と制限射の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma, Z_{\hat{G}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}}) \end{array}$$

から

$$\mathfrak{K}(T) = \ker\Big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) \to \prod_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v}) \to \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})\Big)$$

である。Pontrjagin 双対を取れば、

$$A : \bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \ni (\kappa_v)_v \longmapsto \prod_v \kappa_v \circ \bar{v} \in \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D$$

として

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(T)^D =& \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D \Big/ A\Big(\bigoplus_v \mathrm{im}\big(\mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})^D \to \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D\big)\Big) \\ =& \pi_0(\hat{T}_{\mathrm{sc}}^\Gamma)^D \Big/ A\Big(\bigoplus_v \ker\big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D\big)\Big) \end{aligned}$$

を得る。よって $B_v : \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D$, $B := \bigoplus_v B_v$ として $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ が消えるためには次が必要十分である。

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) \in A(\ker B) \tag{4.4}$$

主張 4.17.1. $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing$ であるためには、$\gamma'_{\mathbb{A}} = \gamma_{\mathbb{A}}^{h_1} \in G(\mathbb{A}), h_1 \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ で

(i) $\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = 1$;
(ii) ∂h_1 の $\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})$ でのクラスは自明。

を満たすものがあることが必要十分。

証明. 実際 $\gamma = \gamma_{\mathbb{A}}^h \in G(F), h \in G(\mathbb{A})$ ならば、$h = h_1 t, (h_1 \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}), t \in G_\gamma(\bar{\mathbb{A}}))$ として $\gamma'_{\mathbb{A}} := \gamma_{\mathbb{A}}^{h_1} = \mathrm{Ad}(t)\gamma = \gamma$ は主張の条件を満たす:

$$\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = \mathrm{obs}_1(\gamma, \gamma_*) = 0,$$
$$(\partial h_1)_\sigma = ht^{-1}\sigma(th^{-1}) = (\partial \mathrm{Ad}(h)t^{-1})_\sigma, \quad \sigma \in \Gamma.$$

逆に主張の条件が成り立つとする。(ii) からある $t \in G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ があって $\partial h_1 = \partial t^{-1}$ だから $h := th_1 \in G(\mathbb{A})$ で、(i) から

$$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} = \gamma_{\mathbb{A}}^{hG(\mathbb{A})} = \gamma_{\mathbb{A}}'^{\,G(\mathbb{A})} \supset \gamma_{\mathbb{A}}'^{\,G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$$

は $G(F)$ の元を含む。 □

主張の条件 (i) は補題 4.15 から

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = \frac{\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma'_{\mathbb{A}})}{\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})} \tag{(i)$'$}$$

に同値である。一方 $\mathrm{Ad}(g\psi_G(h_1)) \circ \psi_G(\gamma'_{\mathbb{A}}) = \gamma_*$ であるから、$\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma'_{\mathbb{A}})$ を与える 1 コチェイン v' は

$$\begin{aligned} v'_\sigma &= g\psi_G(h_1)u_\sigma\sigma(\psi_G(h_1))^{-1}\sigma(g)^{-1} = g\psi_G(h_1)u_\sigma\sigma(\psi_G(h_1))^{-1}u_\sigma^{-1}u_\sigma\sigma(g)^{-1} \\ &= g\psi_G((\partial h_1)_\sigma)u_\sigma\sigma(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g)\psi_G((\partial h_1)_\sigma) \cdot v_\sigma \end{aligned}$$

となる。つまり (i)$'$ の $\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma'_{\mathbb{A}})/\,\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ は ∂h_1 のコホモロジー類の

$$\varphi : \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G} \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}}) \xrightarrow{\alpha_{T_{\mathrm{sc}}}} \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D$$

による像に他ならない。定義から ∂h_1 のコホモロジー類は下の C の核に含まれるが、主張の (ii) はそれが $\ker D$ に属することを意味する。

$$\begin{aligned} C &: \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})), \\ D &: \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \end{aligned}$$

結局、$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ が F 有理点を持つためには、$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) \in \varphi(\ker C \cap \ker D)$ が必要十分である。これと (4.4) から、定理は次の主張に帰着される。

主張 4.17.2. $A(\ker B) = \varphi(\ker C \cap \ker D)$.

証明. まず命題 2.5 から次の可換図式がある。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G"] \arrow[d, "D"'] & \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus \alpha_{T_{\mathrm{sc},v}}"] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}}) \arrow[d, "\alpha_{T_{\mathrm{sc}}}"] \\ \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G"'] & \bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"] & \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D \\ \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r, "\bigoplus \alpha_{T_v}"] & \bigoplus_v \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D & \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

ここで φ は 1 行目で右端に行って一つ下がる射だから

$$\begin{aligned}\varphi(\ker C \cap \ker D) \subset \varphi(\ker D) \subset \varphi\Big(\ker\Big(B \circ \bigoplus \alpha_{T_{\mathrm{sc},v}} \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G\Big)\Big) \\ \subset A(\ker B)\end{aligned}$$

は直ちにわかる。

逆向きの包含関係を示そう。仮定から $\gamma_{\mathbb{A}}$ ほとんど全ての非アルキメデス成分 γ_v の中心化群 G_{γ_v} および $G_{\gamma_v,\mathrm{sc}} := G_{\gamma_v} \cap G_{\mathrm{sc},v}$ は F_v 上の不分岐トーラスである。よって (2.5) と同様に

$$\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v,\mathrm{sc}})$$

が成り立つ。この同型により両者を同一視すれば、Kneser の消滅定理 3.7 から

$$\ker C = \bigoplus_{v|\infty} \ker\big(\mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v,\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc}})\big) \oplus \bigoplus_{v\nmid\infty} \mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v,\mathrm{sc}})$$

である。ここで再び (4.5) から $\varphi = A \circ \bigoplus \alpha_{T_{\mathrm{sc}},v} \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G$ だから有限成分に関しては

$$\begin{aligned}\varphi(\ker C \cap \ker D) &\supset \varphi\Big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker\big(\mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v,\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v})\big)\Big) \\ &= \bigoplus_{v\nmid\infty} \ker\big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D\big) = \bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v\end{aligned}$$

を得る。このとき実は次が成り立つので $\varphi(\ker C \cap \ker D) \supset A(\ker B)$ が従う。

主張 4.17.3. $A(\ker B) = A(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v)$.

証明. $\ker B_{\mathrm{fin}} := \bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v$, $\ker B_\infty := \bigoplus_{v|\infty} \ker B_v$ と書けば示すべき主張は $\ker A \cap \ker B + \ker B_{\mathrm{fin}} = \ker B$, すなわち

$$\ker A \cap \ker B \hookrightarrow \ker B_\infty \oplus \ker B_{\mathrm{fin}} \twoheadrightarrow \ker B_\infty$$

が全射であることである。

まず各行が完全系列からなる可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[ddd] & \mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus \alpha_{T_{\mathrm{sc}},v}"'] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[d, "\alpha_{T_{\mathrm{sc}}}"] \\
 & \bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D \arrow[d] \\
 & \bigoplus_v \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D \arrow[r] & \pi_0(\hat{T}^{\Gamma})^D \\
\mathrm{H}^1(F,T) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[u, "\bigoplus \alpha_{T_v}"] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F,T) \arrow[u, "\alpha_T"']
\end{tikzcd}$$

を考える。右上のスクエアの可換性から $\ker A$ は $\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})$ の $\bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D$ での像である。よって左のスクエアの可換性から $\ker A\cap\ker B$ は $\text{Ш}^1(F,T)$ の $\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})$ での逆像の $\bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D$ での像である。よって $\ker[\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})\to\mathrm{H}^1(F,T)]$ の

$$\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \xrightarrow{\bigoplus \alpha_{T_{\mathrm{sc}},v}} \bigoplus_{v|\infty} \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D$$

による像が $\ker B_\infty$ であることを示せば十分である。

そこで 1, 2 行目が $1\to T_{\mathrm{sc}}\to T\to D_G\to 1$ の Galois コホモロジー完全列、3 行目が補題 4.16 の完全列の Pontrjagin 双対からなる可換図式

$$\begin{tikzcd}
D_G(F) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathrm{H}^1(F,T) \arrow[d] \\
D_G(F_\infty) \arrow[r] \arrow[d, "(\dagger)"'] & \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v,T) \arrow[d] \\
\bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}})^D \arrow[r, "\bigoplus \delta_v"] & \bigoplus_{v|\infty} \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "B_\infty"] & \bigoplus_{v|\infty} \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D
\end{tikzcd}$$

を考える。問題の像は $\mathrm{im}(\gamma\circ\beta\circ\delta)$ で $\ker B_\infty = \mathrm{im}\bigoplus_{v|\infty}\delta_v$ だから、第一列の射 $D_G(F)\to\bigoplus_{v|\infty}\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}})^D$ のが全射であることを示せばよい。

これは直接計算で証明できる。まず (2.2) により $\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}})\simeq\widehat{\mathrm{H}}^2(F_v,X^*(D_G))$ で、Tate コホモロジー群のカップ積

$$\smile\colon \widehat{\mathrm{H}}^2(F_v,X^*(D_G))\otimes\widehat{\mathrm{H}}^0(F_v,D_G)\longrightarrow\widehat{\mathrm{H}}^2(F_v,\mathbb{G}_m)\subset\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

は有限群の完全双対性だから $\mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})^D$ は $\widehat{\mathrm{H}}^0(F_v, D_G) = D_G(F_v)/N_{\Gamma_v} D_G(\bar{F}_v)$ に標準同型である。ただし $N_{\Gamma_v} t = \prod_{\sigma\in\Gamma_v} \sigma(t)$ と書いている。よって上の図式中の射 (†) は自然な射影 $D_G(F_v) \twoheadrightarrow D_G(F_v)/N_{\Gamma_v} D_G(\bar{F}_v)$, $(v|\infty)$ の直和である。$\prod_{v|\infty} N_{\Gamma_v} D_G(\bar{F}_v) \subset D_G(F_\infty)$ は開部分群で $D_G(F) \subset D_G(F_\infty)$ は稠密だから、件の全射性が従う。 □

5 局所と大域を結ぶ跡公式

前節で得られた共役類ごとに局所大域原理を跡公式に組み込むことで大域的な保型表現の記述を行う。実際の込み入った公式を眺める前に、なぜ跡公式が局所情報を大域的効果に変換してくれるべきかをおもちゃの模型で見てみよう。

5.1 雛形—有限群の誘導指標

有限群 G の部分群 $\mathit{\Gamma}$ とその ($\mathbb{C}$ 係数) 有限次元表現 (ρ, V) に対して、(余) 誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathit{\Gamma}}^G(\rho, V) = \mathrm{Hom}_{\mathit{\Gamma}}(\mathbb{Z}[G], V)$ の指標公式を思い出そう。G 等質空間 $X := \mathit{\Gamma}\backslash G$ 上の G 同変ベクトル束

$$\mathcal{V}_\rho := V \times G \Big/ \langle (v, hg) - (\rho(h^{-1})v, g) \,|\, h \in \mathit{\Gamma} \rangle \longrightarrow\!\!\!\!\to X$$

を考えると、$\phi \in \mathrm{Ind}_{\mathit{\Gamma}}^G(V)$ は切断 $X \ni \mathit{\Gamma} g \mapsto (g, \phi(g)) \in \mathcal{V}_\rho$ と同一視される。

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{V}_\rho) := \mathrm{Ext}^i_{\mathit{\Gamma}}(\mathbb{Z}[G], V) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathit{\Gamma}}(\mathbb{Z}[G], V) & i = 0 \text{ のとき} \\ 0 & i > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおけば次が成り立つ。証明は学部学生向けのよい演習問題である。

事実 5.1. X 内の $g \in G$ の固定点の集合を $\mathrm{Fix}(g, X) := \{\mathit{\Gamma} x \in X \,|\, \mathit{\Gamma} x g^{-1} = \mathit{\Gamma} x\}$ と書くとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\mathrm{Ind}_{\mathit{\Gamma}}^G(\rho, g) &= \sum_{\substack{\mathit{\Gamma} x \in \mathit{\Gamma}\backslash G \\ \mathrm{Ad}(x) g \in \mathit{\Gamma}}} \mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Ad}(x)g) \\ &= \mathrm{tr}(g, \mathrm{H}^*(X, \mathcal{V}_\rho)) = \sum_{\mathit{\Gamma} x \in \mathrm{Fix}(g, X)} \mathrm{tr}(g, \mathcal{V}_{\rho, \mathit{\Gamma} x}). \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{V}_{\rho, \mathit{\Gamma} x}$ は $\mathit{\Gamma} x$ 上の $\mathcal{V}_\rho$ のファイバーである。

上は同一の等式を二通りに書いたものだが、前者は Frobenius 相互律を表し、後者は Lefschetz 跡公式のおもちゃ (toy model) になっている。Lefschetz 跡公式はベクトル束のコホモロジー空間全体への g 作用のトレースを、各固定点のファイバー上の局所トレースで表すことを特徴としている。

ここからは (ρ, V) が単位表現の場合をさらに詳しく考えてみよう。$\Gamma \ni \gamma$ の共役類を γ^Γ と書けば、右辺は

$$\mathrm{Fix}(g, X) = \{\Gamma x \in X \mid \mathrm{Ad}(x)g \in \Gamma\} = \coprod_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} \{\Gamma x \in X \mid \mathrm{Ad}(x)g \in \gamma^\Gamma\}$$

の濃度である。一方、左辺は X 上の関数空間 $\mathcal{L}(X) = \mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ 上の G の右移動表現 R の指標だから、$f : G \to \mathbb{C}$ に対するおもちゃの跡公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(R(f)|\mathcal{L}(X)) &:= \sum_{g \in G} f(g)\, \mathrm{tr}(R(g)|\mathcal{L}(X)) \\
&= \sum_{g \in G} f(g) \sum_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} |\{\Gamma x \in X \mid \mathrm{Ad}(x)g \in \gamma^\Gamma\}| \\
&= \sum_{g \in G} f(g) \sum_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} |\{\Gamma_\gamma x \in X \mid \mathrm{Ad}(x)g = \gamma\}| \\
&= \sum_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} \sum_{g \in G} |\{\Gamma_\gamma x \in X \mid \gamma^x = g\}| \cdot f(g) \\
&= \sum_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} |\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma| \sum_{g \in \gamma^G} f(g)
\end{aligned}$$

が得られる。すなわち Arthur-Selberg 跡公式の幾何サイドは Lefschetz 跡公式の局所項からなるサイドの類似になっている。

5.2 跡公式弾丸ツアー

3 節の状況に戻って $G(\mathbb{A})$ の右移動表現 $(R, \mathcal{L}(G))$ を思い出す。アルキメデス素点 v では $G(F_v)$ の極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_v$ を固定し、$G(F_v)$ 上の (複素数値) コンパクト台付き両側 $\boldsymbol{K}_v$ 有限関数の空間を $\mathcal{H}(G(F_v))$ と書く。非アルキメデス素点 v では $G(F_v)$ 上のコンパクト台付き局所定数関数の空間を $\mathcal{H}(G(F_v))$ と書く。G_v が不分岐な有限素点 v では超スペシャル極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_v = G(\mathcal{O}_v) \subset G(F_v)$ があった。

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})) = \bigcup_S \Big(\bigotimes_{v \in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v \notin S} 1_{\boldsymbol{K}_v} \Big)$$

を $G(\mathbb{A})$ 上の *Hecke* 環と呼び、これが跡公式のテスト関数の空間である。以下常に G の任意の簡約部分群 H のアデール群 $H(\mathbb{A})$ 上の不変測度として玉河測度を採用することにする。

前半の講演で解説されたとおり、$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対する作用素

$$R(f) : \mathcal{L}(G) \ni \phi(x) \longmapsto \int_{G(\mathbb{A})} f(g)\phi(xg)\,dg \in \mathcal{L}(G)$$

は積分核

$$K(x,y) = \sum_{\gamma \in G(F)} f^0(x^{-1}\gamma y), \quad f^0(g) := \int_{\mathfrak{A}_G} f(zg)\,dz$$

を持つ積分作用素である。G の導来群が F 上非等方的、すなわち $G(F)$ が半単純元だけからなるとき、$G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ はコンパクトである [BHC62]。このとき Selberg 跡公式は上の核関数の対角部分集合上の積分

$$T^G(f) = \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} K(x,x)\,dx$$

を幾何サイドとスペクトルサイドという二通りに展開することで得られる。特に $T^G(f)$ は跡族作用素 $R(f)$ の (拡張された意味の) トレースになっている。

一般の G に対しては上の積分は収束しない。この場合、Arthur の跡公式は $R(f)$ のある意味での「正規化されたトレース」を幾何サイドとスペクトルサイドに展開することで得られる。幾何サイドの正規化は上の積分を収束させるために積分領域のカスプの周りを切り落とすことである。スペクトルサイドのそれは $R(f)$ の連続スペクトルへの制限が跡族でない問題を截頭作用素により解決している。これら両サイドの正規化が等価な操作であることが基本等式 [Lab86] で保証され、粗い跡公式が得られる。截頭作用素などの正規化に現れる道具は G の極小 Levi 部分群や $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群など多くの補助データに依存していて、包含関係もない簡約代数群の間でこうした補助データを整合するように選ぶことは不可能である。そこでこの依存性を排除するために跡公式の細かい展開を作り [CLL], [Art86], [Art82a], [Art82b]、さらにそれを ($G(\mathbb{A})$ の随伴作用で) 不変な化身に置き換えた不変跡公式を構成する [Art88a], [Art88b]。こうして得られる不変な正規化されたトレースを $T^G(f)$ と書くことにする。

5.2.1 幾何サイド

G の極小放物型部分群の Levi 成分 M_0 を固定して、それを含む Levi 部分群の集合を $\mathscr{L} = \mathscr{L}^G$ と書く。$A_0 = A_{M_0}$ は G 内の極大な F 分裂トーラスである。その相対 Weyl

群を $W = W^G := \mathrm{Norm}(A_0, G(F))/M_0(F)$ で表す。テスト関数 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して十分大きな F の素点の有限集合 S を取れば、不変跡公式の幾何展開は

$$T^G(f) = \sum_{M \in \mathscr{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma \in M(F)_{M,S}} a^M(S,\gamma) I_M(\gamma, f^0) \tag{5.1}$$

で与えられる [Art88b, 定理 3.3]。ここで $M(F)_{M,S}$ は $M(F)$ の元の (M,S) 同値類の集合である。ただし $\gamma, \gamma' \in M(F)$ が (M,S) 同値とは、両者の Jordan 分解における半単純部分が $M(F)$ 共役、ユニポテント部分が $M(F_S) = \prod_{v \in S} M(F_v)$ で共役なことだった。主要項 $I_M(\gamma, f^0)$ は f^0 の重み付き軌道積分 $J_M(\gamma, f^0)$ の不変な化身として得られる不変超関数 (*invariant distribution*) である。係数 $a^M(S,\gamma)$ は粗い跡公式のユニポテント項を重み付き軌道積分で展開する際の係数から定まり、一般には計算できない。

半単純な $\gamma \in G(F)$ が楕円的とは Z_{G_γ}/A_G が非等方的なことであった。$G(F)$ 内の楕円半単純元の集合を $G(F)_{\mathrm{ell}}$ と書く。$G(F)$ 共役で不変な部分集合 $\Xi \subset G(F)$ 内の半単純 $G(F)$ 共役類の集合を $\mathit{\Gamma}(\Xi) = \mathit{\Gamma}^G(\Xi)$ と書くとき、直和分解

$$\mathit{\Gamma}(G(F)) = \coprod_{[M] \in \mathcal{L}/W} \mathit{\Gamma}^M(M(F)_{\mathrm{ell}})/W(M)$$

がある。ここで $W(M) := \mathrm{Norm}(M, G(F))/M(F)$ と書いている。容易に計算できるように $M \in \mathcal{L}$ の W 軌道の濃度は

$$|[M]| = \frac{|W|}{|W^M||W(M)|}$$

で与えられる。よって (5.1) の $M = G$ の項のうち、半単純な γ に対する部分は

$$\begin{aligned}
T^G_{\mathrm{ell}}(f) &= \sum_{\gamma^{G(F)} \in \mathit{\Gamma}(G(F))} a^G(S,\gamma) I_G(\gamma, f^0) \\
&= \sum_{[M] \in \mathcal{L}/W} \frac{1}{|W(M)|} \sum_{\gamma^{M(F)} \in \mathit{\Gamma}^M(M(F)_{\mathrm{ell}})} a^G(S,\gamma) I_G(\gamma, f^0) \\
&= \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W|} \sum_{\gamma^{M(F)} \subset M(F)_{\mathrm{ell}}} a^G(S,\gamma) I_G(\gamma, f^0).
\end{aligned}$$

となる。ここで [Art86, 定理 8.2] から、十分大きな S に対しては

$$a^G(S,\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{vol}(G_\gamma(F)\mathfrak{A}_G \backslash G_\gamma(\mathbb{A}))}{[G^\gamma(F) : G_\gamma(F)]} & \gamma \in G(F)_{\mathrm{ell}} \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。

$G(F)_{\rm ell} \ni \gamma$ の連結中心化群を以下、$I_\gamma := G_\gamma$ と書くことにする。玉河測度に関する $I_\gamma(F)\mathfrak{A}_G\backslash I_\gamma(\mathbb{A})$ の測度、つまり I_γ の玉河数を $\tau(I_\gamma)$ で表す。また $G(\mathbb{A}), G_\gamma(\mathbb{A})$ 上の玉河測度 dg, di についての γ での大域軌道積分を

$$O_\gamma(f^0) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f^0(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg}{di}$$

と定義する。4 節までの通り G の導来群が単連結であるとする。前段落からこのとき玉河測度に関する $T^G_{\rm ell}(f)$ は

$$T^G_{\rm ell}(f) = \sum_{\gamma^{G(F)}\in G(F)_{\rm ell}} \tau(I_\gamma) O_\gamma(f^0) \tag{5.2}$$

と書ける。これを跡公式の楕円項と呼び、私の講演ではもっぱらこの部分のみを扱う。

例 5.2. $G = \mathrm{GL}_n$ のとき、半単純な $\gamma \in G(F)$ の共役類はその特性多項式を $\Phi_\gamma(x) \in F[x]$ で決まる。特に $\gamma \in G_{\rm rs}(F)$ のとき、$F(\gamma) = F[x]/(\Phi_\gamma(x))$ として $T_\gamma \simeq \mathrm{Res}_{F(\gamma)/F}\mathbb{G}_m$ であるから、γ が楕円的であるためには $F(\gamma)$ が体、すなわち $\Phi_\gamma(x) \in F[x]$ が既約であることが必要十分である。

次に分解 $n = dm$ と d 次既約多項式 $\Phi_\alpha(x) \in F[x]$ を取り、埋め込み $i : F(\alpha) := F[x]/(\Phi_\alpha(x)) \hookrightarrow \mathbb{M}_d(F)$ を固定する。このとき $i \otimes \mathrm{id} : F(\alpha) \otimes_F \mathbb{M}_m(F) \hookrightarrow \mathbb{M}_n(F)$ による $\alpha \otimes 1$ の像を $\gamma \in G(F)$ とすれば、

$$\begin{aligned} G_\gamma(F) =& Z_{\mathbb{M}_n(F)}(\gamma)^\times \simeq \big(Z_{\mathbb{M}_d(F)}(i(\alpha)) \otimes_F \mathbb{M}_m(F)\big)^\times \\ \simeq& \big(F(\alpha) \otimes_F \mathbb{M}_m(F)\big)^\times \simeq \mathrm{GL}_m(F(\alpha)) \end{aligned}$$

より $Z_{G_\gamma} = \mathrm{Res}_{F(\alpha)/F}\mathbb{G}_m$ は $A_G = \mathbb{G}_m$ を法として非等方的なので γ は楕円的である。この場合でも G_γ は非自明なユニポテント元を持つことに注意しよう。すなわち (5.1) の $M = G$ の部分でさらに γ の Jordan 分解 $\gamma = \gamma_s\gamma_u$ の半単純成分 γ_s が $G(F)_{\rm ell}$ に入っていても、$\gamma_u \neq 1$ となることがあり、そのような γ の項を明示的に計算することはおそらく不可能である[*9]。

[*9] 非常に特別なテスト関数を固定した場合には計算できることもある。ただし保型表現のリフトの証明などに用いる場合にはテスト関数を広範に走らせる必要がある。

5.2.2 スペクトルサイド

スペクトル展開は幾何サイドよりずっと込み入っていて解説が困難である。まずもっとも基本的で重要な部分は離散項

$$
\begin{aligned}
T^G_{\mathrm{disc}}(f) &= \sum_{M\in\mathscr{L}} T^G_{\mathrm{disc},M}(f) \\
T^G_{\mathrm{disc},M}(f) & \\
= \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \sum_{w\in W(M)_{\mathrm{reg}}} & \frac{|W^M|}{|W||\det(w-1|_{\mathfrak{a}^G_M})|}\,\mathrm{tr}(M_{P,\pi}(w,0)\mathcal{I}^G_{P,\pi}(0,f))
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

である。ここで $\Pi(M(\mathbb{A})^1)$ は $M(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_M$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合を表し、$w\in W(M)$ で $\det(w-1|_{\mathfrak{a}^G_M})\neq 0$ となるものからなる部分集合を $W(M)_{\mathrm{reg}}$ と書いている。以前は $\mathfrak{a}_G=\mathrm{Hom}(X(G)_F,\mathbb{R})$ と定義していたが、$\mathfrak{a}_G=X_*(A_G)\otimes\mathbb{R}$ と見ても同じことである。$A_G\subset A_M$ から自然に $\mathfrak{a}_G\subset\mathfrak{a}_M$ であり、商空間 $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G$ を $\mathfrak{a}^G_M$ と書いている。$\mathcal{I}^G_{P,\pi}(0)$ は保型スペクトル $\mathcal{L}(M)$ の π 等型部分空間 $\mathcal{L}(M)_\pi$ からの放物型誘導表現 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A})}_{P(\mathbb{A})}(\mathcal{L}(M)_\pi\boxtimes\mathbb{1}_{U(\mathbb{A})})$ を表し、$M_{P,\pi}(w,0):\mathcal{I}^G_{P,\pi}(0)\to\mathcal{I}^G_{P,w(\pi)}(0)$ はよく知られた絡作用素である。特に離散項の中の $M=G$ の項

$$
T^G_{\mathrm{disc},G}(f)=\sum_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A})^1)} m(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi(f)
$$

は、離散保型表現の直和からなるいわゆる離散スペクトル $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ への $R(f)$ の制限のトレースを与えている。ここで $m(\pi)$ は π の $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ での重複度である。一方の $T^G_{\mathrm{disc},M}(f)$, ($M\subsetneq G$) たちは跡公式の構成の過程で絡作用素の "多重対数微分" を取る際に孤立した点での微分として得られるもので、Arthur の言うところの連続スペクトルの寄与の生き残り (surviving remnents) である。

例 5.3. 例えば $G=\mathrm{GL}_2$ なら $B=TU$ をその上三角元からなる Borel 部分群として、

$$
\begin{aligned}
T^G_{\mathrm{disc},G}(f) &= \sum_{\substack{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A})^1)\\ \dim\pi=\infty}} m_0(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi(f)+\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{A}^1/F^\times)}\chi\circ\det(f),\\
T^G_{\mathrm{disc},T}(f) &= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{A}^1/F^\times)}\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,M(\chi\otimes\chi)\mathcal{I}^G_B(\chi\otimes\chi,f)\\
&= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{A}^1/F^\times)}\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,\mathcal{I}^G_B(\chi\otimes\chi,f)
\end{aligned}
$$

である。

さてスペクトル展開の全体は

$$T^G(f)=\sum_{M\in\mathscr{L}}\frac{|W^M|}{|W|}\sum_{M_1\supset M}\sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\int_{i\mathfrak{a}_M^{M_1,*}}a^M_{\mathrm{disc}}(\pi)r_M^{M_1}(\pi_\lambda)I_{M_1}(\pi_\lambda,f)\,d\lambda \quad (5.4)$$

となる。ここで $a^M_{\mathrm{disc}}(\pi)$ は T^M_{disc} を既約指標で展開した際の係数から定まる定数であり、$r_M^{M_1}(\pi_\lambda)$ は絡作用素の正規化因子から "多重対数微分" で得られる関数である。$I_{M_1}(\pi_\lambda,f)$ は重み付き指標 $J_{M_1}(\pi_\lambda,f)$ の不変な化身である。特に $M\neq M_1$ に付随するいわゆる連続項たちは連続なパラメーターについての積分を含むため、比較の際には比較的容易に離散項と切り離すことができる。この理由から連続項についてもこれ以上の説明はしない。

5.3　局所情報のインプット

跡公式の幾何サイドに 4.4 節で得た共役類ごとの局所大域原理を編み込む過程を見てみよう。G の z 拡大 $1\to Z_1\to G_1\to G\to 1$ を取れば、F の各素点 v で $\mathrm{H}^1(F_v,Z_{1,v})=0$ であるから (2.4) と併せて完全列

$$1\longrightarrow Z_1(\mathbb{A})\longrightarrow G_1(\mathbb{A})\longrightarrow G(\mathbb{A})\longrightarrow 1$$

が得られる。特に $G(\mathbb{A})$ の保型表現は $G_1(\mathbb{A})$ の保型表現でその中心指標が $Z_1(\mathbb{A})$ 上自明であるものとして記述できる。よって必要なら G をその z 拡大で置き換えて G の導来群が単連結であるとしてよい。この節の目的には楕円項 (5.2) のさらに正則項だけからなる部分を扱うのが最適である。前記の仮定からそれは

$$T^G_{\mathrm{ell,rs}}(f)=\sum_{\gamma^{G(F)}\subset G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\tau(T_\gamma)O_\gamma(f^0)$$

と書かれる。ここで $G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}:=G(F)_{\mathrm{ell}}\cap G_{\mathrm{rs}}(F)$ と書いており、$T_\gamma:=I_\gamma\subset G$ は極大トーラスであることに注意する。まず和を安定共役類ごとにまとめると、安定共役な γ, $\gamma'\in G_{\mathrm{rs}}(F)$ に対しては $T_\gamma\simeq T_{\gamma'}$ だからそれらの玉河数は一致するので次を得る。

$$\begin{aligned}T^G_{\mathrm{ell,rs}}(f)&=\sum_{\gamma^G(F)\subset G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\sum_{\gamma'^{G(F)}\subset\gamma^G(F)}\tau(T_{\gamma'})O_{\gamma'}(f^0)\\&=\sum_{\gamma^G(F)\subset G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\tau(T_\gamma)\sum_{\gamma'^{G(F)}\subset\gamma^G(F)}O_{\gamma'}(f^0).\end{aligned}$$

さて安定共役類 $\gamma^G(F)$ は正則半単純共役類 $\gamma^G\subset G$ の F 値点の集合である。準分裂データの $\psi_G:G_{\bar F}\xrightarrow{\sim}G^*_{\bar F}$ は内部捻りだから、それによる γ^G の像は再び F 有理半単純

共役類の幾何ファイバー $\psi_G(\gamma^G)_{\bar F}$ である。よって定理 3.6 から $\psi_G(\gamma^G)(F)$ は空でなく、従ってある $\gamma_* \in G^*_{\mathrm{rs}}(F)$ があって $\psi_G(\gamma^G)(F) = \gamma_*^{G^*}(F)$ である。加えて $T := G^*_{\gamma_*}$ は T_γ に同型だから、$T/A_{G^*} \simeq T_\gamma/A_G$ は非等方的で $\gamma_* \in G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ である。こうして ψ_G は楕円正則安定共役類の集合の間の単射 (定理 3.5 の直前の注意から全射とは限らない。)

$$\psi_G : G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}/\mathrm{Ad}(G(\bar F)) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}/\mathrm{Ad}(G^*(\bar F))$$

を与える。よって楕円正則項を

$$T^G_{\mathrm{ell,rs}}(f) = \sum_{\gamma_*^{G^*}(F) \subset G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}} \tau(T) \sum_{\gamma^{G(F)} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*^{G^*})(F)} O_\gamma(f^0) \tag{5.5}$$

と書くことができる。この内側の大域的な ($G(F)$ での) 共役類についての和を局所的な (アデール群での) 共役類についてのそれに置き換えたい。まず補題 4.2 から、半単純な γ, $\gamma' \in G(\bar F)$ が $G(\bar{\mathbb{A}})$ 共役ならばそれらは安定共役である: $\gamma^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(F) = \gamma^G(F)$. よって (5.5) の内側の和を $\gamma^{G(F)} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(F)$ についての和に置き換えられる。

系 5.4 (補題 4.2 の)**.** 半単純な $\gamma \in G(F)$ に対して、全単射 (4.1) は次の全単射に制限される。

$$(\gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F))/\mathrm{Ad}(G(F)) \xrightarrow{\sim} \ker\Big(\mathfrak{D}(G_\gamma) \to \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_\gamma)\Big).$$

証明. 実際、同補題から

$$(\gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F))/\mathrm{Ad}(G(F)) \subset \gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F)) \overset{(4.1)}{\xrightarrow{\sim}} \mathfrak{D}(G_\gamma)$$

が得られ、その像は明らかに系の右辺の集合に属する。そこで $\gamma^\delta \in \gamma^G(F)$, $(G_\gamma(\bar F)\delta \in (G_\gamma(\bar F)\backslash G(\bar F))^\Gamma)$ に対して $\partial\delta$ のクラスが系の右辺の集合に属するとしよう。仮定により各素点 v で $h_v \in G_\gamma(\bar F_v)$ であって

$$\partial\delta_{\bar v(\sigma)} = (\partial h_v^{-1})_\sigma, \quad \sigma \in \Gamma_v,$$

言い換えれば $g_v := h_v\delta \in G(F_v)$ で $\gamma^{g_v} = \gamma^\delta$ となるものがある。一方ほとんど全ての素点 v で $\gamma, \gamma^\delta \in \boldsymbol{K}_{v,\mathrm{ss}}$ だから、補題 4.6 からある $k_v \in \boldsymbol{K}_v$ があって $\gamma^\delta = \gamma^{k_v}$ である。そのような v では $g_v = k_v$ とできるから、$g = (g_v)_v \in G(\mathbb{A})$ で $\gamma^\delta = \gamma^g \in \gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F)$ である。 □

さて系の右辺の集合は命題 4.9 を使って

$$
\begin{aligned}
\ker[\text{Ш}^1(F,T_\gamma)\to\text{Ш}^1(F,G)] &\simeq \operatorname{cok}[\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\to\text{Ш}^1(F,\hat{T}_\gamma)]^D\\
&\simeq \operatorname{cok}[\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\to\text{Ш}^1(F,\hat{T})]^D
\end{aligned}
$$

とも書ける。さらに補題 4.16 の完全列からなる可換図式

$$
X(T)_F \longrightarrow X(T_{\mathrm{sc}})_F \longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma) \longrightarrow \pi_0(\hat{T}^\Gamma)
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\longrightarrow \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma,\hat{T})\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\prod_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v,\hat{T})
\end{array}
$$

から完全列

$$
X(T)_F \longrightarrow X(T_{\mathrm{sc}})_F \longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma) \longrightarrow \pi_0(\hat{T}^\Gamma)
$$

$$
\longrightarrow \mathfrak{K}(T) \longrightarrow \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}}) \longrightarrow \text{Ш}^1(F,\hat{T})
$$

が従う。ここで γ_* が楕円的なことから $X(T_{\mathrm{sc}})_F=0$ だから、この位数を取れば

$$
\frac{|\pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma)||\mathfrak{K}(T)||\text{Ш}^1(F,\hat{T})|}{|\pi_0(\hat{T}^\Gamma)||\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})|} = |\operatorname{cok}[\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\to\text{Ш}^1(F,\hat{T})]|
$$

を得る。以下、簡単のために相対玉河数

$$
\tau_1(G) := \frac{|\pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma)|}{|\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})|} \tag{5.6}
$$

を導入する。トーラス T に対しては小野の公式 $\tau(T)=\tau_1(T)$ が知られている。結局、$\gamma^{G(\mathbb{A})}$ 内の $G(F)$ 共役類の個数は

$$
|\operatorname{cok}[\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\to\text{Ш}^1(F,\hat{T})]| = \frac{\tau_1(G)|\mathfrak{K}(T)|}{\tau(T)}
$$

であるから、(5.5) の内側の和は $\gamma^{G(F)}$ から $\gamma^{G(\mathbb{A})}$ に置き換えて

$$
\frac{\tau_1(G)|\mathfrak{K}(T)|}{\tau(T)} \sum_{\substack{\gamma\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(F)\\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Ad}(G(\mathbb{A}))}} O_\gamma(f^0) = \frac{\tau_1(G)|\mathfrak{K}(T)|}{\tau(T)} \sum_{\substack{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\\ \gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing}} O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)
$$

定理 4.17 と有限群の指標の直交関係から

$$=\frac{\tau_1(G)}{\tau(T)}\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(T)}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)$$

と書ける。ここでテスト関数は $f=\bigotimes_v f_v$, $f_v\in\mathcal{H}(G(F_v))$ と制限テンソル積分解できるとしてよい。有限個を除く非アルキメデス的な v で G_v は不分岐で $\gamma_*\in\mathbf{K}_{v,\mathrm{ss}}$ で、さらに f_v は $\boldsymbol{K}_v$ の特性函数である。よって補題 4.6 から上の $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ についての和は実質的に有限和で、従って和の順序の交換が許される。結局、(5.5) 全体は次で与えられることが分かった。

補題 5.5. 跡公式の楕円正則項 $T_{\mathrm{ell,rs}}(f)$ は次のように書ける。

$$T_{\mathrm{ell,rs}}(f)$$
$$=\tau_1(G)\sum_{\gamma_*^{G^*}(F)\subset G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(T)}\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f).$$

6 内視データ

前節で見たように跡公式に編み込まれた共役類の局所大域原理は有限アーベル群 $\mathfrak{K}(T)$ に集約されている。この $\mathfrak{K}(T)$ をスペクトルサイドの保型表現のリフティングに翻訳するのが内視データである。まずその定義を思い出そう。

6.1 内視データとノルム

G の内視データ (*endoscopic datum*) とは

- F 準分裂な連結簡約群 H. その F 分裂 $\mathrm{spl}_H=(B_0^H,T_0^H,\{Y_\beta\})$, L 群データ ${}^LH=\hat{H}\rtimes_{\rho_H}W_F$, $\mathrm{spl}_{\hat{H}}=(\mathcal{B}_H,\mathcal{T}_H,\{\mathcal{Y}_{\beta^\vee}\})$ なども固定しておく。
- 位相群の分裂拡大 $1\to\hat{H}\to\mathcal{H}\xrightarrow{p}W_F\to 1$.
- $\hat{G}$ の半単純元 s.

- 連続準同型 $\xi : \mathcal{H} \to {}^L G$ で次の図式を可換にするもの。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "p"'] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$

からなる四つ組 $\mathcal{E} = (H, \mathcal{H}, s, \xi)$ で

(i) 仮定から $\mathcal{H} \twoheadrightarrow W_F$ の切断 $c : W_F \hookrightarrow \mathcal{H}$ があるが、これがある $\hat{H}/Z_{\hat{H}}$ 値 1 コサイクル $\{\bar{h}_w\}_{w \in W_F}$ に対して

$$\mathrm{Ad}(c(w))|_{\hat{H}} = \mathrm{Ad}(\bar{h}_w) \circ \rho_H(w), \quad w \in W_F$$

を満たす。

(ii) $\xi(\hat{H}) = \hat{G}_s$ (s の連結中心化群)。

(iii) 連続な 1 コサイクル $a : W_F \to Z_{\hat{G}}$ でそのクラスが $\text{Ш}^1(W_F, Z_{\hat{G}})$ (定理 2.10 参照) に属するものがあって

$$[s, \xi(h)] = s\xi(h)s^{-1}\xi(h)^{-1} = a(p(h)), \quad h \in \mathcal{H}.$$

を満たすものとする。内視データは L 群を用いて定義されるから G は準分裂内部形式 G^* と同じ内視データの同型類を持つ。

G の内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi), (H', \mathcal{H}', s', \xi')$ の間の同型とは、$g \in \hat{G}$ で

$$\mathrm{Ad}(g)\xi(\mathcal{H}) = \xi'(\mathcal{H}'), \tag{6.1}$$

$$\mathrm{Ad}(g)s = s' Z_{\hat{G}} \tag{6.2}$$

を満たすもののことである。G の内視データの同型類の集合を $\mathscr{E}(G)$ と書く。

注意 6.1. 内視データ $\mathcal{E} = (H, \mathcal{H}, s, \xi)$ から $\mathcal{E}' = (H', \mathcal{H}', s', \xi')$ への同型 $g \in \hat{G}$ に対して次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[rr, "\xi'^{-1} \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \xi"] \arrow[dr] & & \mathcal{H}' \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$

特に内視データの条件 (i) からこれは Γ 同変な同型

$$\bar{\alpha} : RD(H) \xrightarrow{\sim} RD(\hat{H})^\vee \xrightarrow{\sim} RD(\hat{H}')^\vee \xrightarrow{\sim} RD(H')$$

を与え、3.2 節の構成から F 代数群の同型 $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H'$ で $\alpha(\mathrm{spl}_H) = \mathrm{spl}_{H'}$ を満たすものが得られる。ここで $g\xi(\hat{H})$ の元は同じ $\bar{\alpha}$ を与え、H の F 分裂の集合には $H_{\mathrm{ad}}(F)$ が単純推移的に作用しているから、単射

$$\mathrm{Isom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')/\xi(\hat{H}) \ni g \longmapsto \alpha \in \mathrm{Isom}_F(H, H')/H_{\mathrm{ad}}(F) \tag{6.3}$$

がある。

このいささか素っ気のない定義は Kottwitz-Shelstad によるもので、1980 年代の後半にはすでにあったようである。一見簡素過ぎる印象を与える定義だが、要求される有限性や連続性が全て内包されている点については [KS99, 18–20 頁] に説明がある。内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ のうち前節の (γ_*, κ) に関連するのは (H, s) であり、$\xi : \mathcal{H} \to {}^LG$ は $H(\mathbb{A})$ の保型表現の $G(\mathbb{A})$ への内視リフトを特定するスペクトルサイドのデータである。後者の意味については次の講演でその局所類似を通して示唆するので、以下では幾何サイドに関連する (H, s) の方を考察する。まず我々の仮定 $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ のもとでは $\mathcal{H}$ に悩まされる必要はないことを見ておこう。

補題 6.2. G の導来群が単連結ならばその内視群 H の導来群も単連結である。

証明. $\hat{G}, \hat{H}$ の Borel 対 $(\mathcal{B}, \mathcal{T}), (\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H)$ を固定していた。仮定は

$$X^*(\mathcal{T}) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta(\mathcal{B}, \mathcal{T}) = \mathbb{Z}[\Delta(\mathcal{B}, \mathcal{T})]$$

に同値である。$\hat{H}$ を ξ で $\hat{G}_s$ と同一視し、必要なら $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ をその同型類の中で取り替えて $\xi(\mathcal{B}_H) \subset \mathcal{B}, s \in \xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}$ であるとしてよい。仮定の式の s と直交する部分を取れば

$$X^*(\mathcal{T}_H) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta(\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H) = \mathbb{Z}[\Delta(\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H)]$$

となって補題が得られる。 □

補題 6.3. G の導来群が単連結のとき、その内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ において $\mathcal{H}$ は ${}^LH$ に同型である。

証明. $\mathcal{H}$ は $\hat{H}$ に随伴作用で作用する。上で固定した $\hat{H}$ の Γ 分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{H}}$ の $\mathcal{H}$ での固定化群を $\mathcal{Z}$ と書けば、$\mathcal{Z} \cap \hat{H} = Z_{\hat{H}}$ だから位相群の中心拡大

$$1 \longrightarrow Z_{\hat{H}} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow W_F \longrightarrow 1$$

が得られる。各 $\bar{h}_w \in \hat{H}/Z_{\hat{H}}$ の $\hat{H}$ での代表元 h_w を固定すれば、定義から $h_w^{-1}c(w) \in \mathcal{Z}$ であり、上の中心拡大の同型類は

$$\begin{aligned} z(w_1, w_2) =& h_{w_1}^{-1}c(w_1)h_{w_2}^{-1}c(w_2)c(w_1w_2)^{-1}h_{w_1w_2} \\ =& \rho_H(w_1)(h_{w_2})^{-1}h_{w_1}^{-1}h_{w_1w_2} \in Z_{\hat{H}} \end{aligned}$$

の $\mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(W_F, Z_{\hat{H}})$ でのクラスで分類される。一方、$\mathrm{Ad}(h_w)^{-1} \circ \mathrm{Ad}(c(w)) = \rho_H(w)$ はある有限次 Galois 拡大 K/F の Galois 群を経由するから、$h_w = c(w), (w \in W_K)$ と取ることにより $z(w_1, w_2)$ がある $\Gamma_{K/F}$ 上のコサイクルのインフレーションになっているとしてよい。今、G の導来群は単連結だとしているから上の補題により H も同様である。ゆえに補題 3.8 から $Z_{\hat{H}}$ は連結でトーラス D_H の Langlands 双対トーラスになる。よって系 2.7 からある 1 コサイクル $\{z_w\} \in Z^1_{\mathrm{ct}}(W_F, Z_{\hat{H}})$ があって $z(w_1, w_2) = \partial z_{w_1, w_2}$ となる。すなわち $\{h_w z_w\}_{w \in W_F}$ は $\hat{H}$ 値 1 コサイクルで

$$\mathrm{Ad}(c(w))|_{\hat{H}} = \mathrm{Ad}(h_w z_w) \circ \rho_H(w), \quad w \in W_F$$

が成り立つ。このとき

$${}^L H \ni h \rtimes w \longmapsto h(h_w z_w)^{-1}c(w) \in \mathcal{H}$$

が望む同型を与える。 □

内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ が楕円的 (*elliptic*) とは $\xi(Z_{\hat{H}}^{\Gamma})^0$ が $Z_{\hat{G}}$ に含まれることとする。このとき $w \in W_F, z \in (Z_{\hat{H}}^{\Gamma})^0$ に対して内視データの条件 (i) から

$$\xi(\rho_H(w)z) = \xi(\mathrm{Ad}(c(w))z) = \mathrm{Ad}(\xi \circ c(w))\xi(z) = \rho_G(w)\xi(z)$$

ゆえ、自動的に $\xi(Z_{\hat{H}}^{\Gamma})^0 \subset (Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^0$ が従う。楕円性は内視データの同型類のみによる性質であるから、$\mathscr{E}(G)$ 内の楕円的な同型類の集合を $\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ と書く。

例 6.4. (i) G が一般線形群 GL_n の内部形式のとき、その楕円的内視データの同型類は $(G^*, {}^L G^*, \mathbf{1}_n, \mathrm{id}_{{}^L G^*})$ のみからなる。なおこの形の内視データを一般に自明な内視データという。

(ii) G が例 3.3 の U_n の内部形式のとき、$\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ は $p + q = n, p \geq q, \in \mathbb{N}$ に対する $\mathcal{E}_{p,q} = (H_{p,q}, {}^L H_{p,q}, s_{p,q}, \xi_{p,q})$:

$$H_{p,q} = \mathrm{U}_p \times \mathrm{U}_q, \quad s_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & \\ & -\mathbf{1}_q \end{pmatrix}$$

$$\xi_{p,q}((h,h')\rtimes w)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\chi(w)h & \\ & \chi'(w)h\end{pmatrix}\times w & w\in W_E \text{ のとき}\\ \begin{pmatrix} & h\chi(ww_\sigma^{-1})\\ h'\chi'(ww_\sigma^{-1}) & \end{pmatrix}\rtimes w & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

からなる。ここで $\omega_{E/F}:\mathbb{A}^\times/F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)\xrightarrow{\sim}\{\pm1\}$ として、$\chi,\chi':\mathbb{A}_E^\times/E^\times\to\mathbb{C}^\times$ は $\chi|_{\mathbb{A}^\times}=\omega_{E/F}^q, \chi'|_{\mathbb{A}^\times}=\omega_{E/F}^p$ を満たすイデール類指標である。また $w_\sigma\in W_F\setminus W_E$ を固定している。これらのデータは内視データの同型類には影響しない。

■ノルム　内視論の幾何サイドでの効用はノルムと呼ばれる H,G の間の共役類の対応の上に立脚している。それは極大トーラスの許容埋め込みを使って構成される。

$G^*_{\bar F}$ の Borel 対 (B,T) に対して $\mathrm{Ad}(g)(B,T)=(B_{0,\bar F},T_{0,\bar F})$ となる $g\in G(\bar F)$ を取る。同型 $\eta_{B,T}:=\mathrm{Ad}(g):T\xrightarrow{\sim}T_{0,\bar F}$ は $(B,T),(B_0,T_0)$ のみに依存し、上のような g の取り方にはよらない。これを T の擬対角化 (*pseudo-diagonalization*) という。L 群の定義から同一視 ${}^LT_0=\mathcal{T}\rtimes_{\rho_G}W_F$ がある。内視データ $(H,{}^LH,s,\xi)$ に対する同様の考察と併せて、$\xi:\mathcal{T}_H\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}$ の双対同型 $\xi^*:T_{0,\bar F}\xrightarrow{\sim}T^H_{0,\bar F}$ を得る。さらに Borel 対 $(B,T)\subset G^*_{\bar F}$, $(B_H,T_H)\subset H_{\bar F}$ に対して同型

$$A_{B,B_H}:T_H\xrightarrow{\eta_{B_H,T_H}}T^H_{0,\bar F}\xrightarrow{\xi^{*-1}}T_{0,\bar F}\xrightarrow{\eta_{B,T}^{-1}}T$$

が得られる。$T_H(\bar F)$ の元 γ_H が G 正則 (*G-regular*) とは $A_{B,B_H}(\gamma_H)\in G_{\mathrm{rs}}(\bar F)$ を満たすこととする。H 内の G 正則元のなす開部分多様体を $H_{G\text{-rs}}$ と書く。一般には $H_{G\text{-rs}}\subsetneq H_{\mathrm{rs}}$ であることに注意せよ。

補題 6.5 (極大トーラスの許容埋め込み)**.** G の導来群は単連結であるとする。F トーラス $T_H\subset H$ を含む $H_{\bar F}$ の Borel 対 $(B_H,T_{H,\bar F})$ に対して、F トーラス T を含む Borel 対 $(B,T_{\bar F})\subset G^*$ で同型 $A_{B,B_H}:T_{H,\bar F}\xrightarrow{\sim}T_{\bar F}$ が F 同型に落ちるものが安定共役を除いてただ一つある。

証明. これは定理 3.6 の帰結である。まず F トーラスを含む勝手な Borel 対 $(B',T'_{\bar F})\subset G^*$ を取れば、$\sigma\in\Gamma$ に対して

$$\sigma(A_{B',B_H}):T_{H,\bar F}\xrightarrow{\sigma^{-1}}T_{H,\bar F}\xrightarrow{\eta'}T'_{\bar F}\xrightarrow{\sigma}T'_{\bar F}$$

は $A_{\sigma(B'),\sigma(B_H)}$ に一致する。ここで $\omega(\sigma)\in\Omega(G^*,T'),\omega_H(\sigma)\in\Omega(H,T_H)$ を $\sigma(B')=$

$\omega(\sigma)(B'), \sigma(B_H) = \omega_H(\sigma)(B_H)$ なるものとすれば、$\eta_{\sigma(B'),T'} \circ \omega(\sigma) = \eta_{B',T'}$ などから

$$\begin{aligned}A_{\sigma(B'),\sigma(B_H)} &= \omega(\sigma) \circ \eta_{B',T'}^{-1} \circ \xi^{*-1} \circ \eta_{B_H,T_H} \circ \omega_H(\sigma)^{-1} \\ &= \omega(\sigma) A_{B',B_H} (\omega_H(\sigma))^{-1} \circ A_{B',B_H}\end{aligned}$$

である。つまり $\omega_\sigma := A_{B',B_H} \circ \sigma(A_{B',B_H})^{-1} = A_{B',B_H}(\omega_H(\sigma))\omega(\sigma)^{-1}$ は $\Omega(G^*, T')$ 値の 1 コサイクルである。

さて G 正則な $\gamma_H \in T_H(F)$ を取り、$\gamma := A_{B',B_H}(\gamma_H) \in T'(\bar{F})$ とおけば

$$\sigma(\gamma) = \sigma(A_{B',B_H}(\gamma_H)) = \sigma(A_{B',B_H}) \circ A_{B',B_H}^{-1}(\gamma) = \omega_\sigma^{-1}(\gamma)$$

だから γ の共役類は F 上定義されている。よって定理 3.6 からこの共役類は F 値点 $\gamma^g \in G(F), (g \in G(\bar{F}))$ を持つ。このとき $\gamma^g = \sigma(\gamma^g) = \omega_\sigma^{-1}(\gamma)^{\sigma(g)}$ で γ は G 正則だから $\omega_\sigma = \mathrm{Ad}(g\sigma(g)^{-1})|_{T'}, \sigma \in \Gamma$ を得る。そこで $(B, T) := (B', T')^g$ とおけば

$$\sigma(A_{B,B_H}) = \sigma(\mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ A_{B',B_H}) = \mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ A_{B',B_H} = A_{B,B_H}, \quad \sigma \in \Gamma$$

から A_{B,B_H} は F 上定義されている。

次に $A_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$, $A_{B',B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T'$ が共に F 有理的ならば、定義から $A_{B',B_H} \circ A_{B,B_H}^{-1} = \eta_{B',T'}^{-1} \circ \eta_{B,T}$ は $\mathrm{Ad}(g)^{-1}|_T, (g \in G(\bar{F}))$ と書け、しかも F 同型だから $T(\bar{F})g \in (T(\bar{F})\backslash G(\bar{F}))^\Gamma$ である。 □

上の補題の F 同型 A_{B,B_H} を T_H の G^* への許容埋め込み (*admissible embedding*) と呼んで $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ と書く。 特に T_H の H 自身への許容埋め込みも安定共役を除いて一意であるから、$\gamma_H \in T_H(F) \cap H(F)_{G\text{-rs}}$ に対して $\eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ の安定共役類は γ_H の安定共役類から一意に決まる。こうして得られる安定共役類の間の写像を

$$\mathcal{A}_{H/G^*} : H_{G\text{-rs}}(F)/\mathrm{Ad}(H(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

と書く。一方で 62 頁で見たように ψ_G は正則半単純な安定共役類の間の写像

$$\psi_G : G_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

を与える。安定共役類 $\gamma_H^H(F) \subset H_{G\text{-rs}}(F)$ が $\gamma^G(F) \subset G_{\mathrm{rs}}(F)$ の像 (*image*) またはノルムとは $\psi_G(\gamma^G) = \mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H^H)$ であることを言う。これはどちら向きにも写像にはなっていないことに注意していただきたい。

例 6.6. 例 6.4 の $G^* = \mathrm{U}_2$ とその内視データ $\mathcal{E}_{1,1}$ を考える。$\mathcal{A}_{H/G^*}$ は $(t_1, t_2) \in H(F)$, $t_1 \neq t_2 \in \mathrm{U}_1(F)$ に、t_1, t_2 を固有値に持つ $G^*(F)$ の元からなる安定共役類を対応させる

写像である。次に $\mathscr{D}$ を F 上の中心的四元斜体としてその主対合を $\imath : \mathscr{D} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ と書く。G を可換 F 代数 R に群

$$G(R) := \{g \in (\mathscr{D} \otimes_F R) \otimes_F E \,|\, g g^{\imath_R \otimes \sigma} = 1\}$$

を対応させる F 代数群とすると、内部捻り $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ がある。ただし例によって $\imath_R := \imath \otimes \mathrm{id}_R$ と書いている。このとき ψ_G による $G_{\mathrm{rs}}(F)$ の安定共役類の集合の像は、正則安定共役類 $\gamma^{G^*}(F)$ であって γ の固有値が二次拡大 K/F で $\mathscr{D} \otimes_F K \simeq \mathbb{M}_2(K)$ となるものを生成するようなものからなる。特に $\mathscr{D} \otimes_F E \not\simeq \mathbb{M}_2(E)$ なら任意の $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)$ は $G(F)$ の正則安定共役類のノルムにはなっていない。

補題 6.7. $(H, {}^L H, s, \xi)$ を G の楕円的内視データとする。G 正則な $\gamma_H \in H(F)$ が楕円的ならそれをノルムに持つ $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ も楕円的である。

証明. 中心化群 $T_H := H_{\gamma_H}$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を取る。T_{sc} が非等方的なことを示せばよい。G, H とも導来群は単連結だから $Z_{\hat{G}}, Z_{\hat{H}}$ はそれぞれ D_G, D_H の双対トーラスである。仮定から $T_{H,\mathrm{sc}}$ は非等方的だから

$$X(T_H)_F \otimes \mathbb{Q} = X(D_H)_F \otimes \mathbb{Q} = X_*(Z_{\hat{H}})^\Gamma \otimes \mathbb{Q} = X_*((Z_{\hat{H}}^\Gamma)^0) \otimes \mathbb{Q}$$

が成り立つ。よって η_{B,B_H} が F 同型であることから

$$X(T)_F \otimes \mathbb{Q} = X_*(\hat{T})^\Gamma \otimes \mathbb{Q} \simeq X_*(\hat{T}_H)^\Gamma \otimes \mathbb{Q} = X_*((Z_{\hat{H}}^\Gamma)^0) \otimes \mathbb{Q}$$

を得る。次元を考えると楕円的内視データの定義から

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Q}} X(T)_F \otimes \mathbb{Q} &= \dim_{\mathbb{Q}} X_*((Z_{\hat{H}}^\Gamma)^0) \otimes \mathbb{Q} \\ &\le \dim_{\mathbb{Q}} X_*((Z_{\hat{G}}^\Gamma)^0) \otimes \mathbb{Q} = \dim_{\mathbb{Q}} X(D_G)_F \otimes \mathbb{Q} \end{aligned}$$

である。自然な射影 $X(T)_F \otimes \mathbb{Q} \twoheadrightarrow X(D_G)_F \otimes \mathbb{Q}$ と併せてこれは $X(T)_F \otimes \mathbb{Q} = X(D_G)_F \otimes \mathbb{Q}$, すなわち T_{sc} が非等方的なことを意味する。 □

この補題から $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ が楕円的内視データである場合には $\mathcal{A}_{H/G^*}$ は楕円的安定共役類の集合の間の写像

$$\mathcal{A}_{H/G^*} : H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}/\mathrm{Ad}(H(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

を与える。ただし $H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}} := H_{G\text{-rs}}(F) \cap H(F)_{\mathrm{ell}}$ と書いている。

6.2 (γ_*, κ) と $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ の対応

補題 5.5 は (γ_*, κ) についての展開だが、これを内視データを用いた $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ に関する展開に書き直そう。まず極大トーラスの L 群の許容埋め込みを用意する。

補題 6.8. F 極大トーラスを含む Borel 対 $(B, T_{\bar{F}}) \subset G^*$ に対して、単射準同型 $\xi_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ で

(i) 次の図式は可換:
$$\begin{tikzcd} {}^L T \arrow[rr, "\xi_T"] \arrow[dr] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}.$$

(ii) $\xi_T|_{\hat{T}}$ は $\eta^{*,-1}_{B,T} : \hat{T} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T} = \hat{T}_0)$ に一致する。

を満たすものが T の L パラメーター倍を除いてただ一つある。これを ${}^L T$ の ${}^L G$ への許容埋め込みと呼ぶ。

証明. 擬対角化 $\eta_{B,T}$ は G^* の内部自己同型の制限であったから、1 コサイクル $\omega_T(\sigma) := \eta_{B,T} \circ \sigma(\eta_{B,T})^{-1}, (\sigma \in \Gamma)$ は Weyl 群 $\Omega(G^*, T_0)$ に値を持つ。これを同一視 $\Omega(G^*, T_0) = \Omega(\hat{G}, \mathcal{T})$ で移したものを同じ記号で表せば

$$\omega_T(\sigma) = \eta^{*,-1}_{B,T} \circ \rho_T(\sigma) \circ \eta^*_{B,T} \circ \rho_G(\sigma)$$

である。これは T を分裂させる有限次 Galois 拡大 K/F の Galois 群 $\Gamma_{K/F}$ を経由していることに注意する。さて $\Omega(\hat{G}, \mathcal{T})$ の $\mathrm{Norm}(\mathcal{T}, \hat{G})$ での完全代表系 $\{\hat{n}(\omega)\}_{\omega \in \Omega(\hat{G}, \mathcal{T})}$ を取れば、$\hat{n}_T(\sigma) := \hat{n}(\omega_T(\sigma))$ は 1 コチェインでそのコバウンダリ $\partial \hat{n}_T \in Z^2_{\mathrm{ct}}(W_F, \mathcal{T})$ が考えられる。系 2.7 から $\mathrm{infl}^{W_F}_{\Gamma_{K/F}} \partial \hat{n}_T$ を分解する連続 1 コチェイン $r_T^{-1} : W_F \to \mathcal{T}$ がある。

$$\mathrm{infl}^{W_F}_{\Gamma_{K/F}} \partial n_T(w_1, w_2) = r_T(w_1)^{-1} \rho_G(w_1)(r_T(w_2))^{-1} r_T(w_1 w_2), \quad w_i \in W_F.$$

このとき 2.2 節の記号で

$$\xi_T : {}^L T \ni t \rtimes w \longmapsto \eta^{*,-1}_{B,T}(t) r_T(w) \hat{n}_T(\varphi_F(w)) \rtimes w \in {}^L G$$

は補題の条件を満たす。

次に ξ_T, ξ'_T が共に補題の条件を満たせば $\mathrm{Ad}(\xi_T(w))|_{\mathcal{T}} = \mathrm{Ad}(\xi'_T(W))|_{\mathcal{T}}$ だから、$\xi'_T \xi_T^{-1}(w) = \eta^{*,-1}_{B,T}(t(w)), (t(w) \in \hat{T})$ と書ける。このとき $\varphi(w) := t(w) \rtimes w$ が T の L パラメーターであることは明らかである。 □

さてこの節の目標は次の二つの集合の間の全単射である。$K_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}}(F))$ を $\gamma_* \in G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ と $\kappa \in \mathfrak{K}(T = G^*_{\gamma_*})$ の対の安定共役類の集合とする。ただし (γ_*, κ) と (γ_*^g, κ') が安定共役とは $T(\bar{F})g \in (T(\bar{F})\backslash G(\bar{F}))^\Gamma$ で自然な同型 $\mathrm{Ad}(g)^{-1} : T \xrightarrow{\sim} T^g$ による κ の像が κ' であることとする。また $E_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}})$ を楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^LH, s, \xi)$ と $\gamma_H^H \subset H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ の対の同型類の集合とする。ただし $(\mathcal{E}, \gamma_H^H)$ と $(\mathcal{E}', \gamma_{H'}^{H'})$ が同型とは、同型 $g : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ があってそれに付随する $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H'$ が $\alpha(\gamma_H^H) = \gamma_{H'}^{H'}$ を満たすこととする。ここで $\alpha \circ H_{\mathrm{ad}}(F)$ は g から一意に決まるので 2 つ目の条件は α の取り方によらないことに注意する。

命題 6.9. 全単射 $E_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}}) \xrightarrow{\sim} K_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}}(F))$ がある。

これは次の 6.2.1, 6.2.2 節で証明される。

6.2.1 $(\mathcal{E}, \gamma_H^H)$ から $(\gamma_*^{G^*}, \kappa)$ へ

G の楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^LH, s, \xi)$ と $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ の安定共役類の組 $(\mathcal{E}, \gamma_H^H(F))$ が与えられているとする。中心化群 $T_H := H_{\gamma_H}$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を取り、$\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ とおく: $\mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H^H) = \gamma_*^{G^*}$.

次いで上の補題の許容埋め込み $\xi_T : {}^LT \hookrightarrow {}^LG$, $\xi_{T_H} : {}^LT_H \hookrightarrow {}^LH$ を取って $s_T := \xi_T^{-1}(s) \in \hat{T}$ とおく。

$$
{}^LT \xrightarrow{\eta^*_{B,B_H}} {}^LT_H \xhookrightarrow{\xi_{T_H}} {}^LH \xhookrightarrow{\xi} {}^LG
$$

も ${}^LT$ の許容埋め込みだから、補題 6.8 から ξ_T のある $\hat{T}$ 値 1 コサイクル倍である。よって $\xi(\hat{H}) = \hat{G}_s$ であったことに注意して

$$
\begin{aligned}
\rho_T(w)s_T =& \xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi_T(w))s) = \xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi \circ \xi_{T_H}(w))s) \\
=& \xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi(w))s)
\end{aligned}
$$

が従う。特に内視データの条件 (iii) の記号で

$$
\partial s_T(w) = s_T \rho_T(w)(s_T)^{-1} = \xi_T^{-1}([s, \xi(w)]) = a(w)
$$

を得る。この左辺はある有限次 Galois 拡大の Galois 群上の 1 コサイクルのインフレーションで右辺のクラスは $\text{Ш}^1(W_F, Z_{\hat{G}})$ に属する。すなわち s_T の $\hat{T}/Z_{\hat{G}}$ での像 κ は

$$
\mathfrak{K}(T) = \ker\Big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, Z_{\hat{G}}) \to \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})\Big)
$$

に属する。ここで γ_* の楕円性から $X_*((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) = X_*(\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma = X(T_{\rm sc})_F = 0$ だから $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) = (\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ に注意せよ。

6.2.2 $(\gamma_*^{G^*}, \kappa)$ から $(\mathcal{E}, \gamma_H^H)$ へ

逆に $\gamma_* \in G_{\rm rs}(F)_{\rm ell}$ と $\mathfrak{K}(T := G^*_{\gamma_*})$ の元 κ が与えられているとする。前節最後の注意から $\kappa = s_T Z_{\hat{G}} \in (\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma, s_T \in \hat{T}$ と書ける。許容埋め込み $\xi_T : {}^LT \hookrightarrow {}^LG$ を取り、

$$s := \xi_T(s_T) \in \hat{G}, \quad \hat{H} := \hat{G}_s, \quad \mathcal{H} := \hat{H}\xi_T(W_F) \subset {}^LG$$

と定める。$\hat{G} \supset \hat{T}$ それぞれの Lie 環を $\hat{\mathfrak{g}} \supset \hat{\mathfrak{t}}$, ルート $\alpha^\vee \in R(\hat{G}, \mathcal{T})$ のルート (表現) 空間を $\hat{\mathfrak{g}}_{\alpha^\vee} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ と書けば、定義から $\hat{H}$ の Lie 環は

$$\hat{\mathfrak{g}}_s = \hat{\mathfrak{t}} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha^\vee \in R(\hat{G}, \mathcal{T}) \\ \alpha^\vee(s)=1}} \hat{\mathfrak{g}}_{\alpha^\vee}$$

に等しい。ここで $s_T Z_{\hat{G}}$ の Γ 不変性から

$$\mathrm{Ad}(\xi_T(w))\alpha^\vee(s) = \alpha^\vee \circ \xi_T(\rho_T(w)^{-1}(s_T)) = \alpha^\vee(s), \quad w \in W_F$$

であるから $\mathcal{H} = \hat{H} \rtimes \xi_T(W_F)$ は定義可能であることに注意する。

$\hat{H}$ の分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{H}} = (\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H, \{\mathcal{Y}_{\beta^\vee}\})$ を $\mathcal{B}_H = \mathcal{B} \cap \hat{H}, \mathcal{T}_H = \mathcal{T}$ となるように選ぶ。作用 $\rho_H : W_F \to \mathrm{Aut}(\hat{H})$ で $\mathrm{spl}_{\hat{H}}$ を保ち、$\mathrm{Ad}(\xi_T(w))|_{\hat{H}} \in \mathrm{Ad}(\hat{H}) \circ \rho_H(w), (w \in W_F)$ となるものがただ一つある。${}^LH := \hat{H} \rtimes_{\rho_H} W_F$ を L 群に持つ F 準分裂な連結簡約群を H と書く。補題 6.2 から $Z_{\hat{H}}$ はトーラス (連結) で ρ_H は T を分裂する有限次 Galois 拡大の Galois 群を経由するから、補題 6.3 により同型

$$\begin{tikzcd} \xi : {}^LH \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr] & \mathcal{H} \arrow[r, hook] & {}^LG \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$

がある。

補題 6.10. $\mathcal{E} := (H, {}^LH, s, \xi)$ は G の楕円的内視データである。

証明. 内視データの定義条件のうち (iii) のみを確かめればよい。まず上の可換図式から $\xi(w) = \xi_T(w)h_w, (h_w \in \hat{H})$ と書ける。$\mathfrak{K}(T)$ の定義から $a := \partial s_T$ のクラスは

$\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{G}})$ に属するが、これを ξ_T で送れば $\mathrm{Ad}(\xi(w))s = \mathrm{Ad}(\xi_T(w))s = \xi_T(\rho_T(w)(s))$ に注意して

$$[s, \xi(w)] = s\mathrm{Ad}(\xi(w))s^{-1} = \xi_T(\partial s_T)(w) = a(w)$$

を得る。すなわち (iii) が成り立つ。次に T_{sc} が非等方的なことから

$$\begin{aligned}\xi(Z_{\hat{H}}^{\Gamma})^0 = (Z_{\hat{H}}^{\mathcal{H}})^0 = (Z_{\hat{H}}^{\xi_T(W_F)})^0 &\subset (\xi_T(\hat{T})^{\xi_T(W_F)})^0 \\ = \xi_T(\hat{T}^{\Gamma})^0 &\subset \xi_T(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^0 = (Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^0\end{aligned}$$

ゆえ $\mathcal{E}$ は楕円的である。 □

残る $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ を作るには、可換図式

$$\begin{tikzcd} \xi_T^H : {}^L T \arrow[r, hook, "\xi_T"] \arrow[dr] & \mathcal{H} \arrow[r, "\xi^{-1}"] & {}^L H \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$

に注意する。これから T_0^H の双対トーラス $\mathcal{T}_H = \xi_T^H(\hat{T}) = \mathcal{T}$ の Weyl 群 $\Omega(\hat{H}, \mathcal{T}_H)$ に値を持つ Γ 上の 1 コサイクル ω_T^H で

$$\xi_T^H \circ \rho_T(w) \circ {\xi_T^H}^{-1} = \mathrm{Ad}(\xi_T^H(w))|_{\mathcal{T}_H} = \omega_T^H(\varphi_F(w)) \circ \rho_{T_0^H}(w), \quad w \in W_F$$

となるものがある。すなわち ξ_T^H の双対同型 $\xi_T^{H,*} : T_{0,\bar{F}}^H \xrightarrow{\sim} T_{\bar{F}}$ は

$$\begin{aligned}\sigma((\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)) &= \sigma|_{T_0^H(\bar{F})} \circ (\xi_T^{H,*})^{-1} \circ \sigma^{-1}|_{T(\bar{F})}(\gamma_*) \\ &= \omega_T^H(\sigma)^{-1}((\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)), \quad \sigma \in \Gamma\end{aligned}$$

を満たす。特に $(\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*) \in H(\bar{F})$ の共役類は F 上定義されているから定理 3.6 により F 有理点 $\gamma_H = (\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)^h \in H(F), (h \in H(\bar{F}))$ を持つ。最後に $T_H := H_{\gamma_H}$ として $\eta_{B,B_H} := \xi_T^{H,*} \circ \mathrm{Ad}(h) : T_{H,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{\bar{F}} \subset G_{\bar{F}}^*$ とおく。定義から $\sigma \in \Gamma$ に対して

$$\eta_{B,B_H}^{-1} \circ \sigma(\eta_{B,B_H}) = \mathrm{Ad}(h)^{-1} \circ \omega_T^H(\sigma) \circ \mathrm{Ad}(\sigma(h)) \in \Omega(H, T_H)$$

であり、$\gamma_H \in H_{\mathrm{rs}}(F) \cap T_H(F)$ に対して

$$\sigma(\eta_{B,B_H})(\gamma_H) = \sigma(\eta_{B,B_H}(\gamma_H)) = \sigma(\gamma_*) = \eta_{B,B_H}(\gamma_H)$$

を満たすから $\sigma(\eta_{B,B_H}) = \eta_{B,B_H}$ である。これから γ_H を γ_* に送る許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ が得られる。

6.3　前安定化の完成

以上の準備のもとでいよいよこの稿の最終結果を述べることができる。G の内視データ $\mathcal{E}=(H,{}^LH,s,\xi)$ に対して注意 6.1 から有限群への単射

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{E})/\xi(\hat{H})\hookrightarrow \mathrm{Out}_F(H):=\mathrm{Aut}_F(H)/H_{\mathrm{ad}}(F)$$

がある。その像を $\mathrm{Out}(\mathcal{E})$ と書き、*Langlands* の ι 数を

$$\iota(G,H):=\frac{\tau_1(G)}{\tau_1(H)|\mathrm{Out}(\mathcal{E})|}$$

と定義する。

定理 6.11. 補題 5.5 の $T_{\mathrm{ell,rs}}(f)$ は

$$T_{\mathrm{ell,rs}}(f)=\sum_{\mathcal{E}\in\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)}\iota(G,H)\tau_1(H)\sum_{\gamma_H^H\subset H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H))^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f).$$

と書ける。

証明. $(\mathcal{E},\gamma_H^H)$ の $E_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}})$ での同型類を $[(\mathcal{E},\gamma_H^H)]$ と書けば、命題 6.9 から

$$T_{\mathrm{ell,rs}}(f)=\tau_1(G)\sum_{[(\mathcal{E},\gamma_H^H)]\in E_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}})}\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)$$

である。よって定理は次の主張から従う。

主張 6.11.1. $\mathrm{Out}(\mathcal{E})\ni\alpha\circ H_{\mathrm{ad}}(F)\mapsto(\mathcal{E},\alpha(\gamma_H^H))\in[(\mathcal{E},\gamma_H^H)]$ は全単射である。

証明. 全射性は $(\mathcal{E},\gamma_H^H)$ の同型類の定義から明らかである。単射性、つまり $\alpha\circ H_{ad}(F)$, $\alpha'\circ H_{\mathrm{ad}}(F)\in\mathrm{Out}(\mathcal{E})$ が $\alpha(\gamma_H)^H=\alpha'(\gamma_H)^H$ を満たせば、$\alpha^{-1}\circ\alpha'\in H_{\mathrm{ad}}(F)$ であることを示そう。定義から $\alpha'(\gamma_H)=\alpha(\gamma_H)^h,(h\in H(\bar{F}))$ であるから、

$$\beta:=\alpha^{-1}\circ\mathrm{Ad}(h)\circ\alpha'\in\mathrm{Aut}(H_{\bar{F}})$$

として $\beta(T_H,\gamma_H)=(T_H,\gamma_H)$ である。ここで α,α' がそれぞれ $g,g'\in\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ の像であるとして $\beta\equiv\alpha^{-1}\circ\alpha' \pmod{H}_{\mathrm{ad}}$ に注意すれば、$\beta|_{T_H}\in\mathrm{Aut}(T_H)$ は

$$(\xi\circ\xi_{T_H})^{-1}(\mathrm{Ad}(g'^{-1}g)) := \xi_{T_H}^{-1}\circ\xi^{-1}\circ\mathrm{Ad}(g'^{-1}g)\circ\xi\circ\xi_{T_H}\in\mathrm{Aut}(\hat{T}_H)$$

の双対自己同型である。許容埋め込み $\eta_{B,B_H}:T_H\xrightarrow{\sim}T\subset G^*$ を取れば、双対トーラスの許容埋め込みの一意性から $\xi_T\circ\eta^{*,-1}_{B,B_H}|_{\hat{T}_H}=\xi\circ\xi_{T_H}|_{\hat{T}_H}$ ゆえ、$\eta_{B,B_H}(\beta|_{T_H})\in\mathrm{Aut}(T)$ は

$$\eta^{*,-1}_{B,B_H}\circ(\xi\circ\xi_{T_H})^{-1}(\mathrm{Ad}(g'^{-1}g))=\xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(g'^{-1}g))\in\xi_T^{-1}(\Omega(\hat{G},\mathcal{T}))$$

の双対だから特に $\Omega(G^*,T)$ に属する。一方でこれは $\gamma_*=\eta_{B,B_H}(\gamma_H)\in G^*_{\mathrm{rs}}(F)$ を動かさないから、$\eta_{B,B_H}(\beta|_{T_H})=\mathrm{id}_T$, $\beta|_{T_H}=\mathrm{id}_{T_H}$ でなくてはならない。すなわち $\beta\in\mathrm{Aut}(H)$ は T_H を含む Borel 対 $(B_H,T_{H,\bar{F}})$ のルートデータに自明に作用するから、3.2 節の注意から $\beta\in H_{\mathrm{ad}}$ である。よって $\alpha^{-1}\circ\alpha'=\mathrm{Ad}(\alpha^{-1}(h))^{-1}\circ\beta\in H_{\mathrm{ad}}(\bar{F})\cap\mathrm{Aut}_F(H)=H_{\mathrm{ad}}(F)$ を得る。 □

参考文献

[Art82a] James Arthur. On a family of distributions obtained from Eisenstein series. I. Application of the Paley-Wiener theorem. *Amer. J. Math.*, Vol. 104, No. 6, pp. 1243–1288, 1982.

[Art82b] James Arthur. On a family of distributions obtained from Eisenstein series. II. Explicit formulas. *Amer. J. Math.*, Vol. 104, No. 6, pp. 1289–1336, 1982.

[Art86] James Arthur. On a family of distributions obtained from orbits. *Canad. J. Math.*, Vol. 38, No. 1, pp. 179–214, 1986.

[Art88a] James Arthur. The invariant trace formula. I. Local theory. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 1, No. 2, pp. 323–383, 1988.

[Art88b] James Arthur. The invariant trace formula. II. Global theory. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 1, No. 3, pp. 501–554, 1988.

[Art90] James Arthur. Unipotent automorphic representations: global motivation. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, pp. 1–75. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Art05] James Arthur. An introduction to the trace formula. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Vol. 4 of *Clay Math. Proc.*, pp. 1–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[BBG+79] Jean-François Boutot, Lawrence Breen, Paul Gérardin, Jean Giraud, Jean-Pierre Labesse, James Stuart Milne, and Christophe Soulé. *Variétés de Shimura et fonctions L*, Vol. 6 of *Publications Mathématiques de l'Université Paris VII [Mathematical Publications of the University of Paris VII]*. Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1979.

[BHC62] A. Borel and Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. *Ann. of Math.*, Vol. 75, pp. 485–535, 1962.

[BL84] J.-L. Brylinski and J.-P. Labesse. Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 17, No. 3, pp. 361–412, 1984.

[BZ76] I N Bernshtein and A V Zelevinskii. Representations of the group $\mathrm{GL}(n, K)$ where K is a local field. *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 31, No. 3, pp. 1–68, 1976.

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[Che89] V. I. Chernousov. The Hasse principle for groups of type E_8. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 306, No. 5, pp. 1059–1063, 1989.

[CLL] Laurent Clozel, Jean-Pierre Labesse, and Robert P. Langlands. Morning seminar on the trace formula. Mimeographed notes, Inst. Adv. Study, Princeton, 1984.

[Gro67] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 32, p. 361, 1967.

[Hid00] Haruzo Hida. *Modular forms and Galois cohomology*, Vol. 69 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Kne65a] M. Kneser. Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern. I. *Math. Zeit*, Vol. 88, pp. 40–47, 1965.

[Kne65b] M. Kneser. Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern. II. *Math. Zeit*, Vol. 89, pp. 250–272, 1965.

[Kne66] Martin Kneser. Hasse principle for H^1 of simply connected groups. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Vol. 9 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 159–163. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Kot82] Robert E. Kottwitz. Rational conjugacy classes in reductive groups. *Duke Math. J.*, Vol. 49, No. 4, pp. 785–806, 1982.

[Kot84] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.*, Vol. 51, No. 3, pp. 611–650, 1984.

[Kot86] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: elliptic singular terms. *Math. Ann.*, Vol. 275, No. 3, pp. 365–399, 1986.

[KS99] Robert E. Kottwitz and Diana Shelstad. Foundations of twisted endoscopy. *Astérisque*, No. 255, pp. vi+190, 1999.

[Lab84] J.-P. Labesse. Cohomologie, l-groupe et fonctorialité. *Composit. Math.*, Vol. 55, pp. 163–184, 1984.

[Lab86] Jean-Pierre Labesse. La formule des traces d'Arthur-Selberg. *Astérisque*, No. 133-134, pp. 73–88, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.

[Lab99] Jean-Pierre Labesse. Cohomologie, stabilisation et changement de base. *Astérisque*, No. 257, pp. vi+161, 1999. Appendix A by Laurent Clozel and Labesse, and Appendix B by Lawrence Breen.

[Lan77] R. P. Langlands. Shimura varieties and the Selberg trace formula. *Canad. J. Math.*, Vol. 29, No. 6, pp. 1292–1299, 1977.

[Lan79a] R. P. Langlands. Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pp. 205–246. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Lan79b] R. P. Langlands. On the zeta functions of some simple Shimura varieties. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 6, pp. 1121–1216, 1979.

[Lan79c] R. P. Langlands. Stable conjugacy: definitions and lemmas. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, pp. 700–725, 1979.

[Lan97] R. P. Langlands. Representations of abelian algebraic groups. *Pacific J. Math.*, No. Special Issue, pp. 231–250, 1997. Olga Taussky-Todd: in memoriam.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 4, pp. 726–785, 1979.

[Mil06] J.S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. Booksurge Publishing, 2nd. edition, 2006.

[PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, Vol. 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[Ser67] J. P. Serre. Local class field theory. In J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pp. 128–161. Thompson, Washington, D.C., 1967. Proceedings of the instructional conference held at the University of Sussex, Brighton, September 1–17, 1965. Reprint of the 1967 original.

[Ser79] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, Vol. 67 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg.

[Spr79] T.A. Springer. Reductive groups. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 3–27. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Spr98] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[Ste65] Robert Steinberg. Regular elements of semisimple algebraic groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 25, pp. 49–80, 1965.

[Ste68] Robert Steinberg. *Endomorphisms of linear algebraic groups*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[Tat67] J. T. Tate. Global class field theory. In J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pp. 162–203. Thompson, Washington, D.C., 1967. Proceedings of the instructional conference held at the University of Sussex, Brighton, September 1–17, 1965. Reprint of the 1967 original.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, Vol. 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cam-

bridge, 1994.

軌道積分の移行と基本補題*

今野拓也†

2011 年 1 月 31 日

概要

この原稿では前稿 [今野 11b] で跡公式の楕円正則項にインプットされた共役類ごとの局所大域原理を、表現論の情報に置き換えるための局所体上の問題を扱う。目標は [今野 11b, 定理 6.11] の等式の右辺の二行目を、内視群 $H(\mathbb{A})$ 上の安定軌道積分で表すことである。

目次

* 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集原稿。

† 九州大学大学院数理学研究院。〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地
電子メール：takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ：http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/

1 復習と動機

この原稿で扱う問題は重要だが技術的なものであり、前稿 [今野 11b] の内容がその導入の役割を果たしているから、ここで新たに導入を付け加えることはしない。その代わりに前稿を受けた局所体上の状況を説明し、この原稿で展開される構成の動機を特別な場合に述べることにする。

1.1 局所的な状況

この原稿を通して F は標数 0 の局所体とし、その正規化されたモジュラスを $|\ |_F$ と書く。F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定し、絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を $\Gamma = \Gamma_F$, $\bar{F}/F$ の Weil 群を W_F で表す [今野 11b, 2.2]。

G を F 上定義された連結簡約線型代数群として、その準分裂な内部形式 G^* および内部捻り $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ を取る。定義から G^* は F 分裂 $\mathrm{spl}_{G^*} = (B_0, T_0, \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)})$ を持ち、そのルートデータ $RD(\mathrm{spl}_{G^*})$ への Γ 作用は $RD(G) = RD(G^*)$ への作用に一致している。G の L 群 ${}^LG = \hat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$ は、定義から $RD(G)$ と双対なルートデータを持つ複素連結簡約群 $\hat{G}$ への W_F 作用 $W_F \to \Gamma \to \mathrm{Aut}(RD(G)) = \mathrm{Aut}(RD(\hat{G})) \xrightarrow{\mathrm{spl}_{\hat{G}}} \mathrm{Aut}(\hat{G})$ による半直積であった [今野 11b, 3.2]。ここで $\hat{G}$ の分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\}_{\alpha^\vee\in\Delta(\mathcal{B},\mathcal{T})})$ も固定されていることに注意する。

前稿と同様に G の中心を Z_G, 随伴群を $G_{\mathrm{ad}} := G/Z_G$, 導来群を G_{der}, その単連結被覆を G_{sc} と書く。G 内の正則半単純元のなす Zariski 開集合を G_{rs} で表す。定義から $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ の連結中心化群 $T = G_\gamma := Z_G(\gamma)^0$ は G の極大トーラスである。次に G^* の極大トーラス T を考える。$T_{\bar{F}}$ を含む Borel 部分群 $B \subset G^*_{\bar{F}}$ を取れば、$\mathrm{Ad}(g)(B,T) = (B_0, T_0)$ となる $g \in G^*(\bar{F})$ を用いて T の擬対角化 $\eta_{B,T} := \mathrm{Ad}(g)|_{T_{\bar{F}}} : T_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{0,\bar{F}}$ がで

きる。

1.2 内視データ

現在の局所的な状況で、四つ組 $\mathcal{E} = (H, \mathcal{H}, s, \xi)$ が G の内視データ (*endoscopic datum*) とは

- H は準分裂な F 上の連結簡約群。その F 分裂 $\mathrm{spl}_H = (B_0^H, T_0^H, \{Y_\beta\})$ と L 群 ${}^L H = \hat{H} \rtimes_{\rho_H} W_F$, それに $\hat{H}$ の Γ 不変な分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{H}} = (\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H, \{\mathcal{Y}_{\beta^\vee}\})$ も固定しておく。
- $\mathcal{H}$ は W_F の $\hat{H}$ による分裂拡大: $1 \to \hat{H} \to \mathcal{H} \xrightarrow{p} W_F \to 1$.
- $s \in \hat{G}$ は半単純元。
- ξ は連続準同型 $\xi : \mathcal{H} \to {}^L G$ で $\mathcal{H} \xrightarrow{\xi} {}^L G \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} W_F$ が $\mathcal{H} \xrightarrow{p} W_F$ であるもの。

であって次が成り立つこととする。

(i) $\xi(\hat{H}) = Z_{\hat{G}}(s)^0$.

(ii) $\mathcal{H} \overset{p}{\twoheadrightarrow} W_F$ の任意の切断 $c : W_F \hookrightarrow \mathcal{H}$ に対して、$\hat{H}/Z_{\hat{H}}$ 値 1 コサイクル $\{\bar{h}_w\}_{w \in W_F}$ があって

$$\mathrm{Ad}(c(w))|_{\hat{H}} = \mathrm{Ad}(\bar{h}_w) \circ \rho_H(w), \quad w \in W_F.$$

(iii) ある $z \in Z(\hat{G})$ に対して

$$[s, \xi(h)] = s\mathrm{Ad}(\xi(h))s^{-1} = z\rho_G(p(h))(z)^{-1}, \quad h \in \mathcal{H}.$$

代数体上の内視データの定義 [今野 11b, 6.1] と較べると $[s, \xi(h)]$ が局所自明なコサイクルからコバウンダリーになっている。内視データの同型の定義は代数体上の場合と同様である。G の内視データの同型類の集合を $\mathscr{E}(G)$ と書く。

さて、以下では簡単のために G の導来群は単連結であると仮定する: $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$. 前稿の補題 6.3 の証明は標数 0 の局所、あるいは大域体の Weil 群に関する系 2.7 のみによっている。すなわちこの仮定から、必要なら $\mathcal{E} = (H, \mathcal{H}, s, \xi)$ をその同型類の元で取り替えて、

$$\mathcal{H} = {}^L H \tag{1.1}$$

であるとしてよい。

内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を取る。必要なら同型な内視データで取り替えて $\xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}$, $\xi(\mathcal{B}_H) \subset \mathcal{B}$ であるとしてよい。大トーラス $T \subset G^*_{\bar{F}}$, $T_H \subset H_{\bar{F}}$ の擬対角化 $\eta_{B,T} : T_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{0,\bar{F}}$, $\eta_{B_H, T_H} : T_{H,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T^H_{0,\bar{F}}$ に対して、同型 $A_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$ が定ま

る [今野 11b, 6.1]。$T_H(\bar{F})$ の元 γ_H は $A_{B,B_H}(\gamma_H) \in G_{\mathrm{rs}}(\bar{F})$ のとき G 正則と呼ばれ、そのような元のなす H の Zariski 開集合を $H_{G\text{-rs}}$ で表していた。[同、補題 6.5] により、F 極大トーラス $T_H \subset H$ に対してはこの A_{B,B_H} が F トーラスの同型 $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ からくる (B_H, B) がある。これを T_H の G^* への許容埋め込みという。

仮定 $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ の下では半単純な $\gamma \in G(F)$ の安定共役類は γ の G での共役類 γ^G の F 値点の集合に等しい。$\gamma^G(F)$ は $G(\bar{F})$ での共役類と $G(F)$ の交わりに一致していた。このとき H も同様の仮定を満たすから ([同、補題 6.2])、$\gamma_H \in (T_H \cap H_{G\text{-rs}})(F)$ に $\eta_{B,B_H}(\gamma_H)$ の $G(\bar{F})$ 共役類を対応させることで、正則ノルム写像

$$\mathcal{A}_{H/G^*} : H_{G\text{-rs}}(F)/\mathrm{Ad}(H(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

ができる。他方で内部ひねり ψ_G は単射

$$\psi_G : G_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

を定める。G 正則な $\gamma_H \in H(F)$ と $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ が $\mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H^H) = \psi_G(\gamma^G)$ を満たすとき、γ_H は γ の像と呼ばれていた。そのような γ が存在しないとき、γ_H は G の像に属さないなどという。

1.3 軌道積分と安定超関数

まず F がアルキメデス的な場合を考える。極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K} \subset G(F)$ を固定する。これは $G(F)$ 共役を除いて一意なので表現論の記述には無害である。$G(F)$ 上のコンパクト台付き C^∞ 関数 f で両側 $\boldsymbol{K}$ 有限、すなわち $\{x \mapsto f(k_1^{-1} x k_2) \,|\, k_i \in \boldsymbol{K}\}$ が有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間を張るものからなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\mathcal{H}(G(F))$ で表す。正確な定義は略すが、これは Schwartz 空間のように Fréchet 空間になっている。その Fréchet 位相に関して連続な $\mathcal{H}(G(F))$ 上の線形汎関数を $G(F)$ 上の超関数 (*distribution*) と呼び、その空間を $\mathcal{D}(G(F))$ と書く。F が非アルキメデス的なときには、関数 $f : G(F) \to \mathbb{C}$ で

- 各 $x \in G(F)$ のある近傍 U_x 上で f は定数。
- $\mathrm{supp} f := \{x \in G(F) \,|\, f(x) \neq 0\}$ はコンパクト。

を満たすものの空間を $\mathcal{H}(G(F))$ と書き、その上の線形汎関数を $G(F)$ 上の超関数という。すなわち $G(F)$ 上の超関数の空間 $\mathcal{D}(G(F))$ は $\mathcal{H}(G(F))$ の双対空間である。

いずれの場合にも $T \in \mathcal{D}(G(F))$ で $G(F)$ 不変、すなわち $f^g(x) := f(gxg^{-1})$ として

$$T(f^g) = T(f), \quad g \in G(F),\, f \in \mathcal{H}(G(F))$$

を満たすものの空間を $\mathcal{I}(G(F))$ とおき、その元を $G(F)$ 上の不変超関数 (*invariant distribution*) と呼ぶ。

例 1.1. 不変超関数の例としては次の二つが基本的である。
(i) 正則半単純元 $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ の連結中心化群を T_γ と書き、$f \in \mathcal{H}(G(F))$ の γ での (正則) 軌道積分を

$$O_\gamma\Big(f, \frac{dg}{dt}\Big) := \int_{T_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\, \frac{dg}{dt}$$

で定義する。ここで dg は $G(F)$, dt は $T_\gamma(F)$ 上の不変測度である。これは F が非アルキメデス的なら [HC70, 補題 19], アルキメデス的な場合には [HC57, 定理 1] によって収束することが知られている。
(ii) F がアルキメデス的ならば $G(F)$ は実 Lie 群で、その Lie 環の複素化を $\mathfrak{g}$ として $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群が考えられる [Wal88, 3 章]。既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 (π, V) が $G(F)$ の Hilbert 空間上の連続表現 (π, H) の $\boldsymbol{K}$ 有限部分として得られるとする。このとき $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対して作用素

$$\pi(f) : H \ni \phi \longmapsto \int_{G(F)} f(g)\pi(g)\phi\, dg \in H$$

は跡族 (*trace class*) であり、そのトレース $\operatorname{tr}\pi(f)$ が考えられる [Wal88, 8.1]。こうして定まる $f \mapsto \operatorname{tr}\pi(f)$ は π の指標超関数 (*distribution character*) と呼ばれ、(π, V) の同型類のみで定まる。
(iii) F が非アルキメデス的なとき、$G(F)$ は局所コンパクト完全不連結群である。つまり開かつコンパクトな部分群からなる単位元の基本近傍系を持つ。よってその許容表現が考えられる [BZ76, 2.1]。$G(F)$ の既約許容表現の同型類の集合を $\operatorname{Irr} G(F)$ と書く。許容表現 (π, V) と $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対して作用素 (右辺の積分は実際には有限和になるので V の位相は定義に必要ない。)

$$V \ni v \longmapsto \pi(f)v := \int_{G(F)} f(g)\pi(g)v\, dg \in V$$

は階数有限であり、従ってそのトレース $\operatorname{tr}\pi(f)$ が考えられる [同 2.17]。この $\operatorname{tr}\pi$ も π の指標超関数と呼ばれ、(π, V) の同型類のみで決まる。

事実 1.2 (Harish-Chandra)**.** F が非アルキメデス的なとき、次の集合は $\mathcal{I}(G(F))$ の弱位相に関して稠密な部分空間を張る。

(i) $\left\{ O_\gamma\Big(f, \dfrac{dg}{dt}\Big) \,\middle|\, \gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F) \right\}$;

(ii) $\left\{ \mathrm{tr}\,\pi(f) \,|\, \pi \in \mathrm{Irr}\, G(F) \right\}$.

これを踏まえて次の定義を導入する。二つの元 $\gamma, \gamma' \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ が安定共役なとき、$\gamma' = \gamma^g := g^{-1}\gamma g$ となる $g \in G(\bar{F})$ は中心化群の同型 $\mathrm{Ad}(g) : T_{\gamma'} \xrightarrow{\sim} T_\gamma$ を与える。ここで剰余類 $gT_{\gamma'}(\bar{F})$ は γ, γ' から一意に定まり、$T_{\gamma'}$ はトーラス (可換) であるから上の同型は γ, γ' から一意に決まる。このとき $T_{\gamma'}(F)$ 上の不変測度を $T_\gamma(F)$ 上の不変測度 dt の上の同型による引き戻し dt^g に取る。こうして選んだ測度を用いて、$f \in \mathcal{H}(G(F))$ の γ での安定軌道積分 (*stable orbital integral*) を

$$SO_\gamma(f) := \sum_{\gamma^g \in \gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} O_{\gamma^g}\Big(f, \frac{dg}{dt^g}\Big) \tag{1.2}$$

と定義する。さらに $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ に対する SO_γ たちの張る $\mathcal{I}(G(F))$ の部分空間の弱位相に関する閉包を $S\mathcal{I}(G(F))$ と書き、その元を $G(F)$ 上の安定超関数 (*stable distribution*) という。

1.4 この原稿の目標

動機を述べるために前稿の大域的な状況にもどる。簡単のため G を代数体 F 上定義された準分裂な連結簡約線型代数群とし、引き続き $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ であると仮定する。その [今野 11b, 6.1] の意味の楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を取る。G 正則な $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)$ を取り、その中心化群 $T_H := Z_H(\gamma_H)$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$ を固定し、$\gamma := \eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in T(F)$ とおく。

素点 v で γ の安定共役類の元 $\gamma_v \in \gamma^{G_v}(F_v)$ を取る。定義から $\gamma_v = \gamma^{g_v}$ となる $g_v \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}_v)$ があるので、1 コサイクル $\{\partial g_{v,\sigma} := g_v \sigma(g_v)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ のコホモロジー類を

$$\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v) = \mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma_v) \in \mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}})$$

で表す。その $\mathrm{H}^1(F_v, T)$ での像を $\overline{\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v)}$ と書けば、[同、4.1] で見たように全単射

$$\gamma^{G_v}(F_v)/\mathrm{Ad}(G(F_v)) \ni \gamma_v^{G(F_v)} \longmapsto \overline{\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v)} \in \mathfrak{D}(T_v),$$
$$\mathfrak{D}(T_v) := \ker[\mathrm{H}^1(F_v, T) \to \mathrm{H}^1(F_v, G)]$$

がある。$\mathfrak{D}(T_v)$ は一般に群にならないので、代わりにそれを含む $\mathrm{H}^1(F_v, T)$ の部分群 $\mathfrak{E}(T_v) := \mathrm{im}[\mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F_v, T)]$ を考えるのだった。一方、Tate・中山双対性 $\mathrm{H}^1(F, T) \cong \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ ([同、命題 2.3]) から $\mathfrak{K}(T_v) := \mathrm{im}[\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v}) \to \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})]$ は $\mathfrak{E}(T_v)$ の Pontrjagin 双対である。

以上のもとで [今野 11b, 定理 6.11] の内側の和は

$$\mathfrak{K}(T) = \ker\Big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, Z_{\hat{G}}) \to \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})\Big)$$

の元 κ の $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) \to \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})$ による像 κ_v に対する κ_v 軌道積分

$$O_\gamma^{\kappa_v}\Big(f_v, \frac{dg_v}{dt_v}\Big) := \sum_{\gamma_v \in \gamma^{G_v}(F_v)/\mathrm{Ad}(G(F_v))} \kappa_v(\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v))^{-1} O_{\gamma_v}\Big(f_v, \frac{dg_v}{dt_v}\Big)$$

たちの Euler 積に等しい。おおざっぱに言うと、この講ではこの κ_v 軌道積分を $H(F_v)$ 上の安定軌道積分で展開することを目標とする。しかし $H(F_v)$ から $G(F_v)$ へは安定共役類の間の写像しか与えられないが、κ_v 軌道積分は $\gamma^{G_v}(F_v)/\mathrm{Ad}(G(F_v))$ 内の原点 $\gamma^{G(F_v)}$ の取り方によっている。また内視データの $\xi : {}^LH \hookrightarrow {}^LG$ には $D_H := H/H_{\mathrm{der}}$ の L パラメーター $\zeta : W_F \to Z_{\hat{H}} \rtimes_{\rho_H} W_F$ 倍する自由があるが、κ_v 軌道積分にはその情報が反映されない。つまり我々の目標が意味を持つためには、軌道積分にかかるウェイト $\kappa_v(\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v))$ を標準的でかつ ξ を反映するものに取り替えなくてはならない。それが以下に述べる移行因子である。

2 移行因子

ここでは Langlands-Shelstad の移行因子の定義を論文 [LS87] に沿って概説する。

1.1 節の状況にもどって、G は準分裂とは限らないが導来群が単連結な F 上の連結簡約群とし、その内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^LH, s, \xi)$ を取る。必要なら $\mathcal{E}$ を同型なデータで置き換えて

$$\xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}, \quad \xi(\mathcal{B}_H) \subset \mathcal{B}, \quad s \in \mathcal{T}$$

であるとしてよい。G 正則な $\gamma_H \in H(F)$ に対して、その中心化群 T_H の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を止めて $\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in (T \cap G_{\mathrm{rs}})(F)$ とおく。正則半単純な $\gamma \in G(F)$ を取る。

移行因子は $\Delta_{\mathrm{I}}(\gamma_H, \gamma)$, $\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H, \gamma)$, $\Delta_1(\gamma_H, \gamma; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})$, $\Delta_2(\gamma_H, \gamma)$, $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H, \gamma)$ と書かれる 5 つの関数から構成される。

2.1 $\Delta_{\mathrm{I}}(\gamma_H, \gamma)$ の定義

この項は $\gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))$ 内の原点、言い換えれば許容埋め込み η_{B,B_H} の取り方の影響を打ち消すためのものである。

F 分裂 $\mathrm{spl}_{G^*} = (B_0, T_0, \{X_\alpha\})$ を思い出す。T_0 の G^* での Weyl 群 $\Omega(G^*, T_0) = N_{G^*}(T_0)/T_0$ は単純ルート $\alpha \in \Delta(B_0, T_0)$ に付随する鏡映 r_α たちで生成される Coxeter 群である。さて $\alpha \in \Delta(B_0, T_0)$ のルートベクトル X_α に対して $-\alpha$ のルートベクトル $X_{-\alpha}$ で $H_\alpha := [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ が $[H_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$ (複号同順) を満たすものがただ一つ存在する。このとき

$$n(r_\alpha) = \exp(X_\alpha)\exp(-X_{-\alpha})\exp(X_\alpha)$$

は r_α の $N_{G^*}(T_0)(\bar{F})$ での代表元である [Spr98, 8.1.4]。次に一般の $\omega \in \Omega(G^*, T_0)$ に対してその単純鏡映の積による被約表示 $\omega = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$ ([同、8.3.1] 参照) を取り、

$$n(\omega) := n(r_{\alpha_1}) \cdots n(r_{\alpha_\ell})$$

とおく。これは被約表示の取り方によらないので ([同、9.3.3])、こうして得られた完全代表系 $\{n(\omega) \,|\, \omega \in \Omega(G^*, T_0)\} \subset N_{G^*}(T_0)(\bar{F})$ は $\sigma(n(\omega)) = n(\sigma(\omega))$, $(\sigma \in \Gamma)$ を満たす。

例 2.1. $G^* = \mathrm{SL}_2$ の時、B_0 を上三角元からなる Borel 部分群、T_0 を対角元からなる極大トーラスとしてその単純ルートは $\alpha : T_0 \ni \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \mapsto a^2 \in \mathbb{G}_m$ だけである。そのルートベクトルを $X_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ とすれば、対する $X_{-\alpha}$ は $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ b^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ である: $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. このとき

$$n(r_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

特に $n(r_\alpha)^2 = -1$ だから、$n : \Omega(G^*, T_0) \to N_{G^*}(T_0)$ は準同型ではない。

許容埋め込み η_{B,B_H} に現れる擬対角化 $\eta_{B,T} : T_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{0,\bar{F}}$ を使って

$$\omega_T(\sigma) := \eta_{B,T} \circ \sigma(\eta_{B,T})^{-1} = \eta_{B,T} \circ \sigma \circ \eta_{B,T}^{-1} \circ \sigma^{-1}, \quad \sigma \in \Gamma$$

とおくと、これは $\Omega(G^*, T_0)$ 値の 1 コサイクルである。しかし上の例で見たとおり $n_T(\sigma) := n(\omega_T(\sigma))$ は必ずしも 1 コサイクルにならない。そのコバウンダリー

$$\partial n_T(\sigma, \tau) := n_T(\sigma)\sigma(n_T(\tau))n_T(\sigma\tau)^{-1}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma$$

を分解するために T に対する a データ、すなわち T の G^* でのルート $\alpha \in R(G^*, T)$ に対する $a_\alpha \in \bar{F}^\times$ の族で

(i) $a_{\sigma(\alpha)} = \sigma(a_\alpha), (\sigma \in \Gamma)$;

(ii) $a_{-\alpha} = a_\alpha^{-1}$

を満たすものを固定する。これを用いて

$$x_T(\sigma) := \prod_{\substack{\alpha \in R(B,T) \\ \sigma(\alpha) \notin R(B,T)}} \alpha^\vee(a_\alpha) \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), \quad \sigma \in \Gamma$$

とおく。ただし $\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \to T_{\mathrm{sc},\bar{F}}$ は α のコルートである。このとき

$$\partial n_T(\sigma, \tau) = \eta_{B,T}(\partial x_T(\sigma, \tau))^{-1}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma$$

が成り立つ [LS87, 補題 2.2.A]。具体的には $\eta_{B,T} = \mathrm{Ad}(g_T)|_T, (g_T \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}))$ と書いて、

$$\begin{aligned} 1 &= x_T(\sigma)\sigma(x_T(\tau))g_T^{-1}\partial n_T(\sigma,\tau)g_T x_T(\sigma\tau)^{-1} \\ &= x_T(\sigma)g_T^{-1} \cdot \eta_{B,T} \circ \sigma(x_T(\tau))n_T(\sigma) \cdot \sigma(n_T(\tau))n_T(\sigma\tau)^{-1}g_T x_T(\sigma\tau)^{-1} \end{aligned}$$

定義から $\eta_{B,T} \circ \sigma = \omega_T(\sigma) \circ \sigma \circ \eta_{B,T}, \mathrm{Ad}(n_T(\sigma)) = \omega_T(\sigma)$ ゆえ

$$\begin{aligned} &= x_T(\sigma)g_T^{-1} \cdot n_T(\sigma)\sigma(\eta_{B,T}(x_T(\tau))) \cdot \sigma(n_T(\tau))n_T(\sigma\tau)^{-1}g_T x_T(\sigma\tau)^{-1} \\ &= x_T(\sigma)g_T^{-1}n_T(\sigma)\sigma(g_T) \cdot \sigma\Big(x_T(\tau)g_T^{-1}n_T(\tau)\tau(g_T)\Big) \\ &\qquad\qquad \sigma\tau(g_T)^{-1}n_T(\sigma\tau)g_T x_T(\sigma\tau)^{-1} \end{aligned}$$

となる。つまり $m_T(\sigma) := x_T(\sigma)g_T^{-1}n_T(\sigma)\sigma(g_T)$ は $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクルである。その $\mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}})$ でのクラスを $\lambda(T_{\mathrm{sc}})$ と書こう。

一方で $\eta_{B,T} : T_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{0,\bar{F}}$ の双対同型を $\eta_{B,T}^* : \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \hat{T}$ として $s_T := \eta_{B,T}^*(s) \in \hat{T}$ とおく。内視データの定義 (1.2 節) の条件 (ii) からある $z \in Z_{\hat{G}}$ があって $[s, \xi(w)] = z\rho_G(w)(z)^{-1}, (w \in W_F)$ が成り立つ。ここで ${}^L H \overset{\xi}{\hookrightarrow} {}^L G$ の Weil 群への制限を $\xi(w) = a(w) \rtimes w, (w \in W_F)$ と書けば、これは

$$s\mathrm{Ad}(a(w))\rho_G(w)(s)^{-1} = z\rho_G(w)(z)^{-1}, \quad w \in W_F,$$

となって sz^{-1} が $\mathrm{Ad}(\xi(W_F))$ 不変なことを意味する。これと内視データの条件 (i) から $sz^{-1} \in \xi(Z_{\hat{H}}^\Gamma)$ を得る。さて許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim}_F T$ は Γ 同変な同型

$$\hat{T}_H \xrightarrow{\eta_{B_H,T_H}^{*,-1}} \mathcal{T}_H \xrightarrow{\xi} \mathcal{T} \xrightarrow{\eta_{B,T}^*} \hat{T}$$

の双対であった。η_{B_H,T_H}^* は $Z_{\hat{H}}$ 上恒等写像だから $sz^{-1} \in \xi(Z_{\hat{H}}^\Gamma) \subset \xi \circ \eta_{B_H,T_H}^{*,-1}(\hat{T}_H^\Gamma)$ となることに注意して、結局 $s_T z^{-1} = \eta_{B,T}^*(sz^{-1}) \in \hat{T}^\Gamma$ がわかる。特に s_T の $\hat{T}/Z_{\hat{G}}$ での像 $s_{T_{\mathrm{sc}}}$ は Γ 不変である。

定義 2.2. 以上の下で $s_{T_{\mathrm{sc}}}$ の $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)$ での像を $\boldsymbol{s}_{T_{\mathrm{sc}}}$ として

$$\Delta_{\mathrm{I}}(\gamma_H,\gamma)=\langle \boldsymbol{s}_{T_{\mathrm{sc}}},\lambda(T)\rangle$$

と定義する。右辺のペアリングは T_{sc} の Tate・中山双対性である [今野 11b, 命題 2.3]。

2.2 $\Delta_1(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})$ の定義

この項は幾何サイドの主要項で $\kappa(\mathrm{inv}(\gamma_*,\gamma))$ の振る舞いをするものである。しかし $G\not\simeq G^*$ の場合には $\gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))$ 内の原点が特定されないため、次のような相対的な定義を採用する。なお 5 つの項のうちでこれだけが $\gamma\in G(F)$ に依存する。

内部ひねり ψ_G の定義から

$$\psi_G\circ\sigma(\psi_G)^{-1}:=\psi_G\circ\sigma\circ\psi_G^{-1}\circ\sigma^{-1}=\mathrm{Ad}(u_\sigma),\quad u_\sigma\in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$$

と書ける。定義から $\mathrm{Ad}(u_\sigma)\in G^*_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ は 1 コサイクルだから、そのコバウンダリー ∂u は $Z_{G_{\mathrm{sc}}}(\bar{F})$ に値を持つ。補助的に $\bar{\gamma}\in G_{\mathrm{rs}}(F)$ とその像である $\bar{\gamma}_H\in H_{G\text{-}\mathrm{rs}}(F)$ のペアを固定する。$\bar{T}_H:=Z_H(\bar{\gamma}_H)$ の許容埋め込み $\eta_{\bar{B},\bar{B}_H}:\bar{T}_H\xrightarrow{\sim}_F\bar{T}\subset G^*$ を取り、$\bar{\gamma}_*:=\eta_{\bar{B},\bar{B}_H}(\bar{\gamma}_H)$ とおく。

まず γ が γ_H の像である場合を考える。定義から $\psi_G(\gamma)=\gamma_*^g,\ g\in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ と書ける。そのような g を一つ取って

$$v_\sigma:=gu_\sigma\sigma(g)^{-1},\quad \sigma\in\Gamma$$

とおけば、$\gamma_*\in G^*(F),\gamma=\psi_G^{-1}(\gamma_*^g)\in G(F)$ に注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(v_\sigma)\gamma_*&=\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G\circ\sigma(\psi_G)^{-1}\sigma(\gamma_*^g)=\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G\circ\sigma(\psi_G^{-1}(\gamma_*^g))\\&=\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G(\gamma)=\gamma_*.\end{aligned}$$

つまり v は $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 値 1 コチェインで、そのコバウンダリーは明らかに u のコバウンダリーに等しい。同様に $\psi_G(\bar{\gamma})=\bar{\gamma}_*^{\bar{g}}$ となる $\bar{g}\in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ を使って $\bar{v}(\sigma):=\bar{g}u_\sigma\sigma(\bar{g})^{-1}$, $(\sigma\in\Gamma)$ とおく。ここでトーラス

$$\mathbb{T}=\mathbb{T}(T,\bar{T})=T_{\mathrm{sc}}*_{Z_{G_{\mathrm{sc}}}}\bar{T}_{\mathrm{sc}}:=T_{\mathrm{sc}}\times\bar{T}_{\mathrm{sc}}/\{(z,z^{-1})\,|\,z\in Z_{G_{\mathrm{sc}}}\}$$

を導入する。$\partial v=\partial\bar{v}=\partial u$ は $Z_{G_{\mathrm{sc}}}(\bar{F})$ 値なので、$(v,\bar{v}^{-1})$ の $\mathbb{T}(\bar{F})$ での像は定義可能な 1 コサイクルになる。そのコホモロジー類を

$$\mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H,\gamma}{\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}}\Big)\in\mathrm{H}^1(F,\mathbb{T})$$

と書く。

Langlands 双対群 $\hat{G}$ の導来群 $\hat{G}_{\mathrm{der}}$ の単連結被覆を $\hat{G}_{\mathrm{sc}}$ と書けば、これは G_{ad} の双対群である。同様に $T_{\mathrm{ad}} := T/Z_G$ の双対トーラスを $\hat{T}_{\mathrm{sc}}$ と書く。$B_{\mathrm{ad}} := B/Z_G$ とおけば、擬対角化 $\eta_{B_{\mathrm{ad}},T_{\mathrm{ad}}} : T_{\mathrm{ad},\bar{F}} \xrightarrow{\sim} (T_{0,\mathrm{ad}})_{\bar{F}}$ およびその双対 $\eta^*_{B_{\mathrm{ad}},T_{\mathrm{ad}}} : \mathcal{T}_{\mathrm{sc}} \xrightarrow{\sim} \hat{T}_{\mathrm{sc}}$ がある。ただし $\mathcal{T}_{\mathrm{sc}}$ は $\mathcal{T}$ の $\hat{G}_{\mathrm{sc}} \to \hat{G}$ による逆像である。

$$\Delta : Z_{\hat{G}_{\mathrm{sc}}} \hookrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{sc}} \xrightarrow{\eta^*_{B_{\mathrm{ad}},T_{\mathrm{ad}}} \times \eta^*_{\bar{B}_{\mathrm{ad}},\bar{T}_{\mathrm{ad}}}} \hat{T}_{\mathrm{sc}} \times \hat{\bar{T}}_{\mathrm{sc}}$$

とおけば、$\mathbb{T}$ の Langlands 双対トーラスは $\hat{\mathbb{T}} := \hat{T}_{\mathrm{sc}} \times \hat{\bar{T}}_{\mathrm{sc}}/\Delta(Z_{\hat{G}_{\mathrm{sc}}})$ で与えられる [LS87, p.246]。$s \in \mathcal{T}$ の $\mathcal{T}_{\mathrm{sc}}$ での勝手な逆像 $\tilde{s}$ を固定して $\tilde{s}_T := \eta^*_{B_{\mathrm{ad}},T_{\mathrm{ad}}}(\tilde{s})$ などとおけば、$s_{\mathbb{T}} := (\tilde{s}_T, \tilde{s}_{\bar{T}})$ は定義可能な $\hat{\mathbb{T}}^{\Gamma}$ の元で $\tilde{s}$ の取り方によらない。その $\pi_0(\hat{\boldsymbol{T}}^{\Gamma})$ での像を $\boldsymbol{s}_{\mathbb{T}}$ とする。

定義 2.3. $\Delta_{\mathrm{III},1}(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}) = \Delta_1(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}) := \left\langle \boldsymbol{s}_{\mathbb{T}}, \mathrm{inv}\left(\frac{\gamma_H,\gamma}{\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}}\right)\right\rangle.$

注意 2.4. $G = G^*$ の場合には u_σ が自明なので、v_σ はコサイクルでそのクラスは 1.4 節の記号で $\mathrm{inv}(\gamma_H,\gamma) \in \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}})$ である。よってこの場合には s_T の $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})$ での像を $\kappa_T = \boldsymbol{s}_{T_{\mathrm{sc}}}$ などとして

$$\Delta_1(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}) = \frac{\Delta_1(\gamma_H,\gamma)}{\Delta_1(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})}, \quad \Delta_1(\gamma_H,\gamma) := \kappa_T(\mathrm{inv}(\gamma_H,\gamma))^{-1}$$

となる。

2.3 $\Delta_2(\gamma_H,\gamma)$ の定義

この項はスペクトルサイドの主要項で、L 群の埋め込み ξ の取り方を反映している。その定義には [今野 11b, 補題 6.8] で導入された双対トーラスの許容埋め込みを使う。まずはその構成を具体的に実行しよう。

■${}^L T$ の許容埋め込みの具体的構成 Langlands 双対群の分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\})$ の単純ルートベクトル $\mathcal{X}_{\alpha^\vee}$ たちを使って、2.2 節と同様に Weyl 群 $\Omega(\hat{G},\mathcal{T})$ の $N_{\hat{G}}(\mathcal{T})$ での代表系 $\{\hat{n}(\omega)\}_{\omega\in\Omega(\hat{G},\mathcal{T})}$ ができる。Weyl 群の同一視 $\Omega(\hat{G},\mathcal{T}) = \Omega(G^*, T_0)$ を思い出そう。双対群の方でも 2.2 節の 1 コサイクル $\{\omega_T(\sigma)\}_{\sigma\in\Gamma}$ の持ち上げ $\hat{n}_T(\sigma) := \hat{n}(\omega_T(\sigma))$ は必ずしもコサイクルではない。そのコバウンダリーを記述する。

ルート系 $R(G^*,T)$ 上のゲージとは、関数 $p: R(G^*,T) \to \{\pm 1\}$ で $p(-\alpha) = -p(\alpha)$, $(\alpha \in R(G^*,T))$ を満たすもののこととする。ゲージ p に対して

$$\hat{t}_p(\sigma,\tau) := \prod_{\substack{p(\alpha)=1 \\ p(\sigma^{-1}(\alpha))=-1 \\ p((\sigma\tau)^{-1}(\alpha))=1}} \eta_{B,T}(\alpha)(-1) \in \mathcal{T}$$

と定める。ただし $\eta_{B,T}(\alpha): T_{0,\bar{F}} \overset{\eta_{B,T}^{-1}}{\to} T_{\bar{F}} \overset{\alpha}{\to} \mathbb{G}_m, \in R(G^*,T_0)$ を $\mathcal{T}$ のコルートと同一視している。例えば

$$p_B(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \in R(B,T) \text{ のとき} \\ -1 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とおけばこれは $R(G^*,T)$ 上のゲージになるが、実は $\partial\hat{n}_T(\sigma,\tau) = \hat{t}_{p_B}(\sigma,\tau)$ となるのである [LS87, 補題 2.1]。一方でこのような 2 コサイクルの Weil 群へインフレーション $\mathrm{infl}_{\Gamma_{K/F}}^{W_F} \partial\hat{n}_T$ は分解するのだった [今野 11b, 系 2.7]。次にその分解を具体的に与えよう。

まず χ データと呼ばれる補助データを導入する。T の G^* でのルート $\alpha \in R(G^*,T)$ に対して、$\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ における α の固定化群を Γ_α, $\{\pm\alpha\}$ の安定化群を $\Gamma_{\pm\alpha}$ と書き、それぞれの固定体を $F_\alpha, F_{\pm\alpha}$ と書く。T の χ データとは、$\alpha \in R(G^*,T)$ に対する連続指標 $\chi_\alpha: F_\alpha^\times \to \mathbb{C}^\times$ の族 $\{\chi_\alpha\}_\alpha$ であって

(i) $\chi_{-\alpha} = \chi_\alpha^{-1}$;

(ii) $\chi_{\sigma(\alpha)} = \sigma(\chi_\alpha) := \chi_\alpha \circ \sigma^{-1}, (\sigma \in \Gamma)$;

(iii) $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ が二次拡大の時には、$\chi_\alpha|_{F_{\pm\alpha}^\times}$ は $\omega_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}: F_{\pm\alpha}^\times/\mathrm{N}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}(F_\alpha^\times) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$ に一致する。

を満たすものである。このようなものを一つ固定し、さらに次の記号を用意する。

(a) ルート系 $R(G^*,T)$ の自己同型群の Γ 作用と -1 倍で生成される部分群を Σ とし、$R(G^*,T)$ 内の各 Σ 軌道 $\mathscr{O}$ の代表元 α を取る。

(b) $d := [F_\alpha : F_{\pm\alpha}]$, $n := [F_{\pm\alpha} : F]$ として、$W_{F_\alpha}\backslash W_{F_{\pm\alpha}}$ の代表系 $\{v_j\}_{0\le j<d}$, $W_{F_{\pm\alpha}}\backslash W_F$ の代表系 $\{w_i\}_{0\le i<n}$ を止める。ただし $v_0 \in W_{F_\alpha}$ とする。$w_i \in W_F$ の $W_F \overset{\varphi_F}{\to} \Gamma$ ([今野 11b, 2.2]) による像を σ_i と書く: $\mathscr{O} = \{\pm\sigma_i^{-1}(\alpha)\}_{0\le i<n}$.

$$p_0(\pm\sigma_i^{-1}(\alpha)) := \pm 1$$

として $R(G^*,T)$ 上のゲージが定まる。

(c) $w \in W_F$ と $0 \le i < n$ に対して、$w_i w = u_i(w) w_j, (\exists u_i(w) \in W_{F_{\pm\alpha}}, 0 \le \exists j < n)$ と書く。

(d) $u \in W_{F_{\pm\alpha}}$ に対して、$v_0 u = v_0(u) v_j$, ($\exists v_0(u) \in W_{F_\alpha}$, $0 \le \exists j < d$) と書く。

以上のもとで

$$r_0(w) := \prod_{\mathscr{O}\in R(G^*,T)/\Sigma} \prod_i \eta_{B,T}(\sigma_i^{-1}(\alpha))\Big(\chi_\alpha\big(v_0(u_i(w))\big)\Big) \in \mathcal{T}, \quad w \in W_F$$

とおけば、これは 1 コバウンダリー倍を除いて上記 (a)–(d) の補助データによらず定まり、$\hat{t}_{p_0}$ の W_F へのインフレーションを分解する [LS87, 補題 2.5.A]。二つのゲージ p, q に対して

$$s_{p/q}(\tau) := \prod_{\substack{p(\alpha)=q(\alpha)=1\\ p(\tau^{-1}(\alpha))=-1\\ q(\tau^{-1}(\alpha))=1}} \eta_{B,T}(\alpha)(-1) \prod_{\substack{q(\beta)=p(\beta)=1\\ q(\tau^{-1}(\beta))=-1\\ p(\tau^{-1}(\beta))=1}} \eta_{B,T}(\beta)(-1), \quad \tau \in \Gamma.$$

とおけば、$\hat{t}_p/\hat{t}_q = \partial s_{p/q}$ が成り立つ [同、補題 2.4.A]。これらから $r_T(w) := \mathrm{infl}_{\Gamma_{K/F}}^{W_F} s_{p_B/p_0}(w) r_0(w)$, ($w \in W_F$) が望む $\hat{t}_{p_B}$ の分解を与えることがわかる。

$$\partial \hat{n}_T(\varphi_F(v), \varphi_F(w)) = \partial r_T(v, w), \quad v, w \in W_F.$$

特に [今野 11b, 補題 6.8] の証明から

$$\xi_T : {}^L T \ni t \rtimes w \longmapsto \eta_{B,T}^{*,-1}(t) r_T(w) \hat{n}_T(\varphi_F(w)) \rtimes w \in {}^L G$$

は ${}^L T$ の許容埋め込みで、$\mathcal{T}$ 共役を除いて (a)–(d) の補助データによらず決まる。

■$\Delta_2(\gamma_H, \gamma)$ の定義　内視群 H と T_H に対しても、η_{B,B_H} によって $R(H, T_H) \subset R(G^*, T)$ と同一視することで、χ データ $\{\chi_\beta\}_{\beta\in R(H,T_H)} \subset \{\chi_\alpha\}_{\alpha\in R(G^*,T)}$ が定まる。許容埋め込み $\xi_{T_H} : {}^L T_H \hookrightarrow {}^L H$ を固定する。F 同型 $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ と併せて 2 種の許容埋め込み

$${}^L T \xhookrightarrow{\xi_T} {}^L G, \qquad {}^L T \xrightarrow{\eta_{B,B_H}^*} {}^L T_H \xhookrightarrow{\xi_{T_H}} {}^L H \xhookrightarrow{\xi} {}^L G$$

が得られる。よって [今野 11b, 補題 6.8] から L パラメーター $a : W_F \to {}^L T$ で

$$\xi \circ \xi_{T_H}(w) = a(w) \xi_T(w), \quad w \in W_F$$

となるものがあり、その $\mathrm{H}^1(W_F, \hat{T})$ でのクラス $\boldsymbol{a}$ に付随する連続指標 $\omega_{\boldsymbol{a}} : T(F) \to \mathbb{C}^\times$ が定まる [今野 11b, 定理 2.8]。(これは (a)–(d) のデータによらないことに注意。)

定義 2.5. $\Delta_{\mathrm{III},2}(\gamma_H, \gamma) = \Delta_2(\gamma_H, \gamma) := \omega_{\boldsymbol{a}}(\gamma_*)$.

2.4 $\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H, \gamma)$ の定義

この項は a データ、χ データの取り方の影響を相殺するとともに、$G(F), H(F)$ の表現論に現れる符号のずれを埋めてくれる。

定義 2.6. η_{B,B_H} によって $R(H, T_H) \subset R(G^*, T)$ と同一視する。

$$\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H, \gamma) := \prod_{\alpha \in (R(G^*,T) \smallsetminus R(H,T_H))/\Gamma} \chi_\alpha \left(\frac{\alpha(\gamma_*) - 1}{a_\alpha} \right)$$

と定義する。ただし積はルートの Γ 軌道の代表系を走る。各項が Γ 軌道の代表元 α の取り方によらないことは a, χ データの定義から容易に確かめられる。

2.5 $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H, \gamma)$ の定義

これは単に $G(F), H(F)$ の Weyl の分母の比で、それぞれの上の不変超関数の特異挙動のずれを埋めるものである。重み付き軌道積分など跡公式のほかの項も扱う場合には、Arthur のようにこの項を軌道積分の定義の方に組み込んでおく流儀もある。

正則半単純元 $\gamma \in G(F)$ の中心化群 T_γ の Lie 環を $\mathfrak{t}_\gamma$ として

$$\Delta_G(t) := |\det(\mathrm{Ad}(\gamma) - 1|_{\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{t}_\gamma(F)})|_F^{1/2}$$

とおく。

定義 2.7. $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H, \gamma) := \dfrac{\Delta_{G^*}(\gamma_*)}{\Delta_H(\gamma_H)}$.

2.6 移行因子とその正規化

上で定義された $\Delta_I, \Delta_{\mathrm{II}}, \Delta_{\mathrm{III},1}, \Delta_{\mathrm{III},2}, \Delta_{\mathrm{IV}}$ は $(\gamma_H, \gamma), (\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})$ に加えて以下の補助データによっていた。

- 分裂 $\mathrm{spl}_{G^*}, \mathrm{spl}_H$;
- 許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$;
- a データ $\{a_\alpha\}_{\alpha \in R(G^*,T)}$, χ データ $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in R(G^*,T)}$.

なお $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_H)$ に対しても類似のデータを固定していた。

定義 2.8. Langlands-Shelstad の相対移行因子を

$$\Delta(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}) := \frac{\Delta_I\Delta_{\mathrm{II}}\Delta_2\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H,\gamma)}{\Delta_I\Delta_{\mathrm{II}}\Delta_2\Delta_{\mathrm{IV}}(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})}\Delta_1(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})$$

と定義する。

定理 2.9 ([LS87], 定理 3.7.A)**.** (i) $\Delta(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})$ は上のすべての補助データによらない。
(ii) $G=G^*$ のとき、注意 2.4 の記号で

$$\Delta_0(\gamma_H,\gamma) := \Delta_I(\gamma_H,\gamma)\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H,\gamma)\Delta_1(\gamma_H,\gamma)\Delta_2(\gamma_H,\gamma)\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H,\gamma)$$

と定めれば、これは許容埋め込みや a,χ データにはよらないが、分裂 $\mathrm{spl}_{G^*},\mathrm{spl}_H$ に依存する。

実用上は定数 $\Delta(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})\in\mathbb{C}^\times$ を一つ固定して

$$\Delta(\gamma_H,\gamma) := \Delta(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})\Delta(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})$$

を正規化された移行因子として用いる。すなわち移行因子は定数倍を除いて一意に定まる。さらに $G=G^*$ の場合には、次のように表現論との相性のよい特別な $\Delta(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})\in\mathbb{C}^\times$ の取り方がある。

■Whittaker 正規化　分裂 $\mathrm{spl}_{G^*}=(B_0,T_0,\{X_\alpha\})$ から、準同型

$$\mathrm{Tr}_{U_0} : (U_0/[U_0,U_0])_{\bar{F}} \ni \prod_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)}\exp(x_\alpha X_\alpha)[U_0,U_0]_{\bar{F}} \overset{\simeq}{\longmapsto} \sum_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)} x_\alpha \in \mathbb{G}_{a,\bar{F}}$$

が定まる。集合 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)}$ は Γ 作用で保たれるから、これは実は F 上の準同型に落ちる。よって非自明な指標 $\psi_F : F\to\mathbb{C}^1$ に対して $U_0(F)$ の指標

$$\psi_{U_0} : U_0(F) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{U_0}} F \xrightarrow{\psi_F} \mathbb{C}^1$$

が定まる。この指標はその $B_0(F)$ での固定化群 $\{b\in B_0(F)\,|\,\psi_{U_0}\circ\mathrm{Ad}(b)=\psi_{U_0}\}$ が $Z_G(F)$ であるという意味で非退化である。Borel 部分群 $B_0\subset G^*$ とそのユニポテント根基 $U_0(F)$ の非退化指標の組 (B_0,ψ_{U_0}) を G^* の *Whittaker* データという。これから $G^*(F)$ の既約表現の Whittaker 模型が定義できるからである。

さて、$\mathbb{C}[\Gamma]$ 加群 $V_{G*} := X^*(T_0)\otimes\mathbb{C}$ の Artin L 因子の ε 因子を $\varepsilon(s,V_{G^*},\psi_F)$ と書く。なお我々は ε 因子を Langlands の慣習に則って記述するものとする [Tat79, (3.6)]。H に

ついても同様の定義をして、

$$\Delta_{\psi_{U_0}}(\gamma_H,\gamma) := \frac{\varepsilon(1/2, V_{G^*}, \psi_F)}{\varepsilon(1/2, V_H, \psi_F)}\Delta_0(\gamma_H,\gamma)$$

とおく。これが移行因子の Whittaker 正規化であり、例えば [LL79] で用いられている移行因子はこれである。

3 軌道積分の移行と基本補題

3.1 軌道積分の移行

$\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を G の内視データとする。G 正則な $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)$ が $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ の像であるとしよう。つまり $T_H = Z_H(\gamma_H)$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$ があって、$\psi_G(\gamma) = \gamma_*^g, (g \in G_{\mathrm{sc}}^*(\bar{F}), \gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H))$ である。

このとき $\psi_\gamma := \mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ も内部ひねりで

$$\psi_\gamma(\gamma) = \gamma_*, \quad \psi_\gamma : T_{\gamma,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{\bar{F}}$$

を満たす。特に $\sigma \in \Gamma$ に対して $\psi_\gamma \circ \sigma(\psi_\gamma)^{-1} \in \Omega(G^*, T)$ である。(内部自己同型で $T_{\bar{F}}$ を保っているから。) ところがこれは正則元 γ_* を動かさない。

$$\psi_\gamma \circ \sigma(\psi_\gamma)^{-1}(\gamma_*) = \psi_\gamma \circ \sigma \circ \psi_G(\gamma_*^g) = \psi_\gamma(\gamma) = \gamma_*.$$

つまり $\psi_\gamma \circ \sigma(\psi_\gamma)^{-1} = \mathrm{id}$ となって $\psi_\gamma : T_\gamma \xrightarrow{\sim} T$ が F 同型であることがわかる。さらに g の右剰余類 $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})g$ は γ, γ_* から一意に定まる。こうして F トーラスの同型

$$T_H \xrightarrow[\sim]{\eta_{B,B_H}} T \xrightarrow[\sim]{\psi_\gamma} T_\gamma$$

が安定共役を除いて一意に存在することがわかる。$T_H(F)$ 上の測度 dt_H を $T_\gamma(F)$ 上の不変測度 ((1.2) で用いた安定共役で不変なもの) の上の同型による引き戻しとする。

1.4 節で述べた目標を達成するための第一歩は次の結果である。

定理 3.1 (軌道積分の移行)**.** $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を G の内視データとし、その正規化された移行因子 $\Delta(\gamma_H, \gamma)$ を取る。$G(F), H(F)$ 上の不変測度 dg, dh を固定する。このとき任意の $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対して $f^H \in \mathcal{H}(H(F))$ で

$$SO_{\gamma_H}\Big(f^H, \frac{dh}{dt_H}\Big) = \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G_{\mathrm{rs}}(F)} \Delta(\gamma_H, \gamma) O_\gamma\Big(f, \frac{dg}{dt}\Big), \quad \forall \gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F) \tag{3.1}$$

を満たすものが存在する。ただし γ_H が γ の像のとき、$T_H(F)$ 上の不変測度 dt_H は同型 $T_H \xrightarrow{\sim} T_\gamma$ による $T_\gamma(F)$ 上の測度 dt の引き戻しに選ぶものとする。

この定理の証明の概略は後で紹介する。等式 (3.1) の関係を軌道積分の合致 (*matching orbital integrals*) と呼び、定理の条件を満たす f^H を f の H への移行 (*transfer*) という。ただしこれは軌道積分の間だけの関係だから f^H は f から一意に決まるわけではない。そこで以下ではこの関係を $f \rightsquigarrow f^H$ と書き表すことにする。

3.2 佐武同型と基本補題

この節では F を (標数 0 の) 非アルキメデス局所体とし、次の意味の不分岐な状況を考える。

- G は F 上不分岐 [今野 11b, 4.2]。すなわち G は F の整数環 $\mathcal{O}$ 上の滑らかな (連結簡約) 群スキーム $\mathcal{G}$ に延びる。このとき Bruhat-Tits 理論により $G(F)$ の *Bruhat-Tits* ビルは $G(F)$ での固定化群が $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ であるような超スペシャル点を持ち、従って G は準分裂で、ある有限次不分岐拡大上で分裂していなくてはならない。
- 内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ も不分岐。つまり H は F 上不分岐で ξ による惰性群 $I_F \subset W_F$ の像の $\hat{G}$ への射影が自明であるとする。

このとき G は準分裂な G^* の内部形式であるから G^* と同一視してよい。また $\psi_G(\mathrm{spl}_{G^*}) = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{spl}_{G^*}$ となる $g \in G(\bar{F})$ があるから、ψ_G を $\mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ \psi_G$ で取り替えて $\psi_G = \mathrm{id}_{G^*}$ としてよい。

T_0 の F 有理指標の群を $X^*(T_0)_F := \mathrm{Hom}(T_0, \mathbb{G}_m)^\Gamma$ と書き、$\mathfrak{a}_0 := \mathrm{Hom}(X^*(T_0)_F, \mathbb{R})$ とおく。これは実ベクトル空間で準同型 $H_0 : T_0(F) \to \mathfrak{a}_0$ が

$$\langle \mu, H_0(t) \rangle = \log |\mu(t)|_F, \quad \mu \in X^*(T_0)_F$$

で定まっている。T_0 を生成ファイバーに持つ標準的な $\mathcal{O}$ 群スキーム $\mathcal{T}_0$ ([BT84, 4.4] 参照) は $\mathcal{T}_0(\mathcal{O}) = T_0(F)^1 := \ker H_0$ を満たす [同、4.4.6 (2)]。

$A_0 \subset T_0$ を F 分裂な極大部分トーラスとし、$G(F)$ の Bruhat-Tits ビルの A_0 のアパート内の超スペシャル点に付随する G の $\mathcal{O}$ 上の模型を $\mathcal{G}$ とする [Tit79, 3.4.1]。すると $\mathcal{T}_0$ は $\mathcal{G}$ の閉部分群スキームであり、超スペシャル極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K} := \mathcal{G}(\mathcal{O}) \subset G(F)$ に対して

$$T_0(F) \cap \boldsymbol{K} = T_0(F)^1, \quad G(F) = B_0(F)\boldsymbol{K}$$

が成り立つ。$\mathcal{H}(G(F))$ 内の両側 $\boldsymbol{K}$ 不変な元からなる部分 $\mathbb{C}$ 代数を $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ と書き、$G(F)$ の不分岐 *Hecke* 環という。以下、この節では $G(F)$ 上の不変測度 dg を $\boldsymbol{K}$ の測度が 1 となるものとしておく。すると $\boldsymbol{K}$ の特性関数 $1_{\boldsymbol{K}}$ は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ の単位元である。

■**不分岐表現の Langlands 対応**　まず T_0 は不分岐な分解体を持つから [今野 11b, 注意 2.9] の不分岐 Langlands 対応

$$\mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1) \ni \chi \longleftrightarrow t(\chi) \in \mathcal{T}_\Gamma \tag{3.2}$$

が成り立っている。ここで $\mathcal{T}_\Gamma$ は $\mathcal{T}$ の Γ 不変商である。一方 $\chi \in \mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1)$ に対して、関数 $\phi : G(F) \to \mathbb{C}$ で

- ある開コンパクト部分群 $K_\phi \subset G(F)$ で右不変: $\phi(gk) = \phi(g)$, $(g \in G(F)$, $k \in K_\phi)$;
- $\phi(utg) = \chi(t)\delta_{B_0}(t)\phi(g)$, $(u \in U_0(F), t \in T_0(F), g \in G(F))$

を満たすものの空間を $I(\mathbb{C}_\chi)$ として、その上の $G(F)$ の許容表現

$$I(\chi, g)\phi(x) := \phi(xg), \quad g \in G(F),\ \phi \in I(\mathbb{C}_\chi)$$

を用意しておく (不分岐主系列表現)。ただし $U_0(F)$ 上の不変測度を du として、$\delta_{B_0}(t) := d\mathrm{Ad}(t)u/du$ と書いている (モジュラス指標)。

$G(F)$ の滑らかな表現 ([BZ76] の意味の代数表現) (π, V) が不分岐とは、V が $G(F)$ 加群として $\boldsymbol{K}$ 不変ベクトルの空間 $V^{\boldsymbol{K}}$ で生成されることとする。$G(F)$ の滑らかな不分岐表現のなすアーベル圏を $\mathscr{R}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ と書き、その既約対象の同型類の集合を $\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{K}}\, G(F)$ で表す。

(i) $G_{\mathrm{der}}(F)$ に対する [Bor76, 補題 4.7] と $G(F) = T_0(F)G_{\mathrm{der}}(F)$ から、$\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{K}}\, G(F)$ の任意の元はある $I(\chi)$, $(\chi \in \mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1))$ の組成因子である。

(ii) 従って [Ber84, 命題 2.10] から $\mathscr{R}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ は無限小指標 (あるいは超カスプ台) $(T_0, \mathcal{T}_\Gamma)$ を持つ滑らかな表現の圏 $(\mathrm{Alg}\, G(F))(T_0, \mathcal{T}_\Gamma)$ の充満部分圏である。ここで (3.2) により、$\mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1)$ を複素トーラス $\mathcal{T}_\Gamma$ と同一視している。

(iii) 岩澤分解から $I(\chi)^{\boldsymbol{K}}$ は 1 次元である。

(iv) 特に各 $I(\chi)$ は $\boldsymbol{K}$ 不変ベクトルを持つただ一つの組成因子 $\pi(\chi)$ を含む。A_0 の G での相対 Weyl 群 $W_0 := N_G(A_0)/T_0$ は $\mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1)$ に作用している。[BZ77, 定理 2.9] から $\pi(\chi)$ の同型類は軌道 $W_0.\chi$ のみで決まっている。

(i) および (iv) から全単射

$$\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{K}} G(F) \ni \pi(\chi) \overset{\simeq}{\longmapsto} W_0.t(\chi) \in \mathcal{T}_\Gamma/W_0 \tag{3.3}$$

がある。

上で W_0 は $\hat{G}$ の言葉で書ける。まず A_0 の G でのルート系を Σ_0 と書けば、[BT75, 定理 7.2] から W_0 は A_0 への作用を通じて Σ_0 の Weyl 群 $\Omega(\Sigma_0)$ と同一視される。幾何的 Frobenius 自己同型 $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ の Γ での逆像 σ を止め、簡略のため spl_{G^*} への σ 作用から定まる $G = G^*$ の F 自己同型を θ と書く:

$$\sigma \circ \mu \circ \sigma^{-1} = \mu \circ \theta^{-1}, \quad \sigma \circ \mu^\vee \circ \sigma^{-1} = \theta \circ \mu^\vee, \quad \mu \in X^*(T_0),\, \mu^\vee \in X_*(T_0).$$

T_0 は $X_*(T_0)$ の元の像で生成され、A_0 は $X_*(T_0)$ の Γ 不変、つまり θ 不変な元の像で生成されるから $A_0 = (T_0^\theta)^0$ である。特に Σ_0 は絶対ルート系 $R(G, T_0)$ の θ 不変部分 A_0 への制限ルート系 $R_\theta(G, T_0)$ である。([KS99, 1.3] 参照。そこでは $R_{\mathrm{res}}(G, T_0)$ と書かれている。) 定義から θ の双対同型は $\hat{\theta} := \rho_G(\sigma)$ の $\mathcal{T}$ への制限である。よって [同 (1.3.8)] から Γ 同変な全単射 $R_\theta(G, T_0) \to R_{\hat{\theta}}(\hat{G}, \mathcal{T})$ があり、特に前者の Weyl 群 W_0 は後者のルート系の不可分ルートの集合 $R(\hat{G}^{\hat{\theta}}, \mathcal{T}^{\hat{\theta}})$ [同 (1.3.4)] の Weyl 群 $\Omega(\hat{G}^{\hat{\theta}}, \mathcal{T}^{\hat{\theta}})$ に一致する。[同、1.1] の後半の議論と併せて結局、同一視

$$W_0 = \Omega(\hat{G}, \mathcal{T})^{\hat{\theta}} \tag{3.4}$$

が得られる[*1]。

元 $g \in \hat{G}$ が $\hat{\theta}$ 半単純とは自己同型 $\mathrm{Ad}(g) \circ \hat{\theta} \in \mathrm{Aut}(\hat{G})$ が準半単純、つまり $\hat{G}$ の導来群の Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{der}}$ への作用が半単純 (対角化可能) なこととする。$\hat{G}$ は自分自身に $\hat{\theta}$ 共役

$$\mathrm{Ad}_{\hat{\theta}}(g) : \hat{G} \ni x \longmapsto gx\hat{\theta}(g)^{-1} \in \hat{G}, \quad g \in \hat{G}$$

[*1] 記号を煩雑にしないよう、ここでは $\mathcal{T}^{\hat{\theta}}$ が連結であるかのように議論しているが、この問題は深刻ではない。Weyl 群だけが問題なので、連結性が気になる読者は G を G_{sc}, $\hat{G}$ を $\hat{G}/Z_{\hat{G}}$ で置き換えればよい。

で作用しているが、この作用による $\hat{G}$ 軌道を $\hat{\theta}$ 共役類と呼ぶ。$\hat{G}$ 内の $\hat{\theta}$ 半単純な元からなる $\hat{\theta}$ 共役類の集合を $\mathcal{C}\ell_{ss}(G,\hat{\theta})$ と書こう。一方、$\{t\hat{\theta}(t)^{-1}\,|\,t\in\mathcal{T}\}$ で生成される $\mathcal{T}$ の閉部分群を $\mathcal{T}(\hat{\theta})$ と書けば、$\mathcal{T}_\Gamma=\mathcal{T}/\mathcal{T}(\hat{\theta})$ である。このとき同一視 (3.4) と [KS99, 補題 3.2.A] から

$$\mathcal{C}\ell_{ss}(G,\hat{\theta})\ni C\longmapsto [C\cap\mathcal{T}\mod\mathcal{T}(\hat{\theta})]\in\mathcal{T}_\Gamma/W_0 \tag{3.5}$$

は全単射である。

連続準同型 $\varphi: W_F\to {}^LG$ で次の 2 条件を満たすものを G の不分岐 L パラメーターと呼ぶ。

- 各 $w\in W_F$ に対して $\mathrm{Ad}(\varphi(w))$ は $\hat{G}$ の準半単純自己同型。
- 惰性群の像 $\varphi(I_F)$ の $\hat{G}$ への射影は自明である。

二つの不分岐 L パラメーターが同値とは、それらが $\hat{G}$ 共役なこととし、不分岐 L パラメーターの同値類の集合を $\Phi_{\mathrm{ur}}(G)$ と書く。$\mathrm{Fr}\in\mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ の W_F での逆像の元 w_σ を取れば、

$$\Phi_{\mathrm{ur}}(G)\ni\varphi\longmapsto[\varphi(w_\sigma)\text{ の }\hat{G}\text{ 成分}]\in\mathcal{C}\ell_{ss}(G,\hat{\theta}) \tag{3.6}$$

は全単射である。

定理 3.2 (不分岐局所 Langlands 対応)**.** (3.6), (3.5), (3.3) の合成は全単射

$$\Phi_{\mathrm{ur}}(G)\ni[\varphi(w_\sigma)=t(\chi)\rtimes w_\sigma]\longmapsto\pi(\chi)\in\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{K}}G(F)$$

を与える。

■佐武同型　分裂簡約群に対する不分岐表現と不分岐 Hecke 環の記述は佐武一郎先生による [Sat63]。その証明は球関数の Bruhat-Tits ビル上の振る舞いを具体的に記述することによるが、ここでは p 進簡約群の表現に対する Bernstein の中心の理論 [Ber84] を用いた短い証明を与える。

19 頁 (ii) の圏 $(\mathrm{Alg}\,G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)$ の中心を $\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}$ と書く。[Ber84, 定理 2.13] と (ii) から

$$\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}\ni z\longmapsto[t(\chi)\mapsto I(\chi,z)]\in\mathbb{C}[\mathcal{T}_\Gamma]^{W_0} \tag{3.7}$$

は $\mathbb{C}$ 代数の同型である。一方 (ii) から [同、3.13] の記号で

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))=\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)$$

である。[同、定理 3.14] と (iii) から、$\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}$ は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)$ の中心で、$\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)})$ の開集合上で $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)$ は階数 1 の束屋 $\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}$ 代数である:

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)[1/z] = \mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}[1/z], \quad \exists z \neq 0, \in \mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}.$$

よって $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) = \mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}$ であり、(3.7) と併せて次の結果が得られた。

命題 3.3 (佐武同型)**.** 次は $\mathbb{C}$ 代数の同型である。

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \ni f \longmapsto [f^\vee : t(\chi) \mapsto I(\chi, f)] \in \mathbb{C}[\mathcal{T}_\Gamma]^{W_0}$$

特に不分岐 Hecke 環 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ は $\mathrm{rank}_F G$ 変数多項式環に同型である。

■基本補題　$H(F)$ に対しても $G(F)$ と同様に T_0^H に関してよい位置にある超スペシャル極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_H \subset H(F)$ を固定し、その不分岐 Hecke 環を $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_H}(H(F))$ とする。やはり Frobenius 元 σ の作用を $\hat{\theta}_H := \rho_H(\sigma)$ と書く。全単射 (3.5), (3.6) の合成を使って

$$\xi : \mathcal{T}_{H,\Gamma}/W_0^H \xrightarrow{\sim} \Phi_{\mathrm{ur}}(H) \xrightarrow{\varphi \mapsto \xi\circ\varphi} \Phi_{\mathrm{ur}}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_\Gamma/W_0$$

とおく。これによる引き戻しと佐武同型により Hecke 環の準同型

$$\xi^\vee : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathcal{T}_\Gamma/W_0] \xrightarrow{\xi^*} \mathbb{C}[\mathcal{T}_{H,\Gamma}/W_0^H] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_H}(H(F))$$

が得られる。

定理 3.4 (一般の基本補題)**.** 不分岐な状況で $f \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ と $\xi^\vee(f) \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_H}(H(F))$ に対して、軌道積分の合致 (3.1) が成り立つ。

4　証明の概要

定理 3.1, 3.4 はいずれも 1980 年代の半ばに Langlands-Shelstad によって定式化された。一般に $f \in \mathcal{H}(G(F))$ の軌道積分 $O_\gamma(f, dg/dt)$ は $\gamma \in T(F) \cap G_{\mathrm{rs}}(F)$ が $T(F)$ 内の正則でない元 δ に近づくとき、その中心化群 $G_\delta(F)$ のユニポテント共役類の幾何で統制される独特の振る舞いをすることが知られている。定理 3.1 はこの特異挙動が $G(F), H(F)$ の間で整合するという主張である。これは表現論に詳しいものにとっては非常に非自明な、

にわかには信じがたい予想であった。Langlands 自身も志村多様体のゼータ関数の研究からこうした主張にたどり着いたものの、当初は確信を持てなかったらしい。しかしアルキメデス的な場合に Shelstad が、極大トーラスの Cayley 変換に際しての軌道積分の振る舞いを記述する平井武先生の “patching condition” を用いて、定理 3.1 を証明した [She82] ことで予想として提出するに至ったという。

対する非アルキメデス的な場合は困難を極めた。Labesse-Langlands の SL_2 の場合の証明 [LL79] は対称空間 $\mathrm{SL}_2/\mathrm{SO}(2)$ の Cartan 分解で軌道積分が計算できる特殊事情によっていた。共役類の幾何の研究で中心的役割を果たす Grothendieck-Springer 多様体は、正則半単純元の上では Weyl 群の位数枚の有限被覆だが、特異半単純元ではその中心化群のユニポテント軌道に付随する因子が現れる複雑な特異性を持つ。Langlands は Grothendieck-Springer 多様体の類似である星多様体のファイバー積分として軌道積分を実現し、その特異性を具体的に解析する定理 3.1 への戦略を提案した [Lan83]。Kepler 予想への貢献でも知られる Hales は $\mathrm{U}_{E/F}(3)$ や Sp_2 などの低次の群の場合にこの戦略を実現して定理 3.1 を証明した [Hal89, Hal92]。しかし例えば Sp_3 であっても、星多様体は 48 個の Borel 部分群の位置関係を記述する 108 次元アフィン空間内の多様体で、その特異性を記述することは現実的ではない。

具体的な計算によらず特異多様体上のファイバー積分である軌道積分を調べるには、偏屈層の理論が唯一の手段とも思われる。しかし非アルキメデス局所体上の軌道積分はこうした理論で捉えることが難しく、両定理は 90 年代の終わり頃まで困難な予想として内視論や跡公式の応用の前に立ちふさがり続けた。

4.1 単位元への帰着

問題の解決に向けての第一歩は大域的な手法の導入であった。Hasse の局所類体論の構成のように、非アルキメデス局所理論を大域理論から引き出すのである。その最初の成果は、Hales がベースチェンジリフトの基本補題に対する Clozel の議論 [Clo90] を拡張して証明した次の結果である。

命題 4.1 (Hales, [Hal95])**.** 3.2 節の不分岐な状況にある任意の G とその内視データ $\mathcal{E}=(H,{}^L H,s,\xi)$ に対して、Hecke 環の単位元が軌道積分の合致

$$SO_{\gamma_H}\Big(1_{\boldsymbol{K}_H},\frac{dh}{dt_H}\Big)=\sum_{\gamma^{G(F)}\subset G_{\mathrm{rs}}(F)}\Delta(\gamma_H,\gamma)O_\gamma\Big(1_{\boldsymbol{K}},\frac{dg}{dt}\Big),\quad \forall\gamma_H\in H_{G\text{-rs}}(F) \tag{4.1}$$

を満たせば、基本補題 (定理 3.4) が成り立つ。

証明の概略. Clozel, Hales のアイディアは、考えている局所体上の群を適切な代数体 k 上の準分裂簡約群 G, H のある素点 w での係数拡大 G_w, H_w として実現することに始まる。その w では任意の Hecke 関数 $f_w\in\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_w}(G(k_w))$ と $f_w^H:=\xi^\vee(f_w)\in\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{H,w}}(H(k_w))$ をテスト関数に取る。それ以外の素点 v では有限体上の簡約群の Deligne-Lusztig 表現をインフレーションと誘導で持ち上げた超カスプ表現の行列成分や、特定の極大トーラスの共役類の上だけに台を持つ関数など特別なテスト関数 f_v, f_v^H を取る。こうしてできるテスト関数 $f=\bigotimes_v f_v$, $f^H=\bigotimes_v f_v^H$ に対しては、Arthur-Selberg 跡公式は Deligne-Kazhdan のシンプル跡公式と呼ばれる Selberg 跡公式のような単純な形になる [Hen83, 4.7–9]。特にその幾何サイドは [今野 11b, 5.3 節] の楕円正則項 $T^G_{\mathrm{ell,rs}}(f)$ だけとなるので、テスト関数の軌道積分の合致を仮定すれば次稿 [今野 11a] で紹介する議論により安定化することができる。

一方、上のような特殊なテスト関数に対しては、安定化に必要な軌道積分の合致が w 以外の素点で成り立ち、しかも安定化した跡公式は単一の内視群 H のみの寄与からなるようにできる。

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,R_0(f)&=T^G_{\mathrm{ell,rs}}(f)=\iota(G,H)ST^H_*(f^H),\\ \mathrm{tr}\,R_0(f^H)&=T^H_{\mathrm{ell,rs}}(f^H)=\iota(H,H)ST_*(f^H)\end{aligned}$$

ここで 1 行目の等式の証明には w での軌道積分の合致、つまり基本補題が必要だが、逆に w 以外の素点のテスト関数を走らせることにより、基本補題は

$$\mathrm{tr}\,R_0(f)-\frac{\iota(G,H)}{\iota(H,H)}\mathrm{tr}\,R_0(f^H)=0 \tag{4.2}$$

から従うこともわかる。

ここからはこの式を f_w の線型汎関数の等式と見て調和解析、一種の不確定性原理を使う。まず跡公式から (4.2) の左辺は楕円軌道積分 $O_\gamma(f_w)$, $O_{\gamma_H}(f_w^H)$, $(\gamma\in G_{\mathrm{rs}}(k_w)_{\mathrm{ell}}$, $\gamma_H\in H_{G\text{-rs}}(k_w)_{\mathrm{ell}})$ たちの有限線型結合である。楕円軌道積分は “コンパクト指標” と呼

ばれるある種の截頭された指標超関数で展開される [Clo89]。しかも Hecke 関数に対する不分岐既約表現 $\pi(\chi)$ のコンパクト指標は

$$\sum_{w\in W_0} \hat{\tau}_P^G(w(\lambda))w(\lambda)(t(\chi)), \quad \lambda \in X_*(T_0)^\Gamma$$

の形の関数の線型結合である [Clo90, 命題 2.1 の系]。ここで $\hat{\tau}_P^G$ は跡公式の構成にも登場する $\mathfrak{a}_0$ のある開錐の特性関数である [Art05, 6 節]。特に佐武変換 $f^\vee = \sum_{\lambda\in X_*(T_0)^\Gamma} a_\lambda \lambda$ において支配的な λ (の W_0 軌道) の項のみが消えていない Hecke 関数 f_w を考えればよい。また楕円的でない正則元での f_w, f_w^H の軌道積分は消えているとしてよく、G は随伴型であるとしてよい: $Z_G = \{1\}$.

さて、(4.2) の軌道積分による表記のコンパクト指標による展開には、$G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}, H_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ 上で非自明な指標を持つ、つまり楕円的な不分岐表現のみが寄与する。随伴型の群のそうした表現 $\pi(\chi)$ はある $I(\chi)$ の非自明な Langlands 商であり、特にそのような χ で $I(\chi)$ はユニタリ表現ではないことがわかる。

$$\mathrm{tr}\, R_0(f) - \frac{\iota(G,H)}{\iota(H,H)}\,\mathrm{tr}\, R_0(f^H) = \sum_{\chi; I(\chi)\ \text{非ユニタリ}} a_\chi e^{\langle \chi,\lambda\rangle}$$

一方、(4.2) の左辺そのものはユニタリ保型表現の局所成分の指標からなるから、もう一つの展開

$$\mathrm{tr}\, R_0(f) - \frac{\iota(G,H)}{\iota(H,H)}\,\mathrm{tr}\, R_0(f^H) = \sum_{\chi; I(\chi)\ \text{ユニタリ}} a'_\chi e^{\langle \chi,\lambda\rangle}$$

が得られる。ここで現れる λ は支配的なものの Weyl 群軌道に属するから、これらの表記が一致するためには両辺が消えるしかない。 □

4.2 Lie 環への帰着

Waldspurger は上記の Clozel や Hales の議論を Lie 環に拡張して、定理 3.1, 単位元に対する定理 3.4 の証明を以下で述べる特別な場合に帰着した。

■設定　まず Lie 環での状況を説明しよう。F を局所体として、$G, \psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$, $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を 3.1 節までの通りとする。特に G_{der} は単連結としている。G やその極大トーラス T の Lie 環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ などのドイツ小文字で表す。G の $\mathfrak{g}$ への随伴作用を Ad で表し、$X \subset \mathfrak{g}(F)$ の G での固定化群 (中心化群) を $G_X := \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}(g)X = X\}$ と書く。$X \in \mathfrak{g}$ が正則半単純とは $G_X \subset G$ が (極大) トーラスであることとし、正則半単純

元のなす開稠密集合を $\mathfrak{g}_{\mathrm{rs}} \subset \mathfrak{g}$ と書く。$X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ のときは G_X を T_X と書くことにして、$f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ の X での軌道積分

$$O_X\Big(f, \frac{dg}{dt}\Big) = \int_{T_X(F)\backslash G(F)} f(X^g)\, \frac{dg}{dt}$$

を導入する。ただし $X^g := \mathrm{Ad}(g)^{-1}X$ と略記している。

$X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ の安定軌道 $X^G(F)$ は今の場合、単に X の $G(\bar{F})$ 軌道 $X^{G(\bar{F})}$ と $\mathfrak{g}(F)$ の交わりである。$X^G(F)$ 内の $G(F)$ 軌道が $\mathfrak{D}(T_X)$ で記述されることなどは群の場合と同様である。また極大トーラスの許容埋め込み η_{B,B_H} に付随する射 $\eta_{B,B_H} : \mathfrak{t}_H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}^*$ を用いて、$\mathfrak{h}(F)$ 内の G 正則元の集合 $\mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ や $Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ が $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ の像であることなどが定義される。

ここからは懸案である F が非アルキメデス的な場合を解説する。適当な 0 の近傍 $\Omega \subset \mathfrak{g}(F)$ 上では指数写像 $\exp : \Omega \to G(F)$ が定義されている。H に対しても同様である。$X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ とその像 $Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ に対して、$\lambda \in F^\times$ で $\lambda^2 X, \lambda^2 Y$ が指数写像の定義域に入っているものを取り、Lie 環上の移行因子を

$$\Delta(Y, X) := \Delta(\exp \lambda^2 Y, \exp \lambda^2 X)$$

と定める。右辺は 2.6 節で定義した群上の移行因子であり、これは十分 0 に近い λ の取り方によらない。Y が X の像でない場合にはもちろん $\Delta(Y, X) := 0$ とする。

注意 4.2. 移行因子のうち $\Delta_{\mathrm{III},2}(\gamma_H, \gamma) = \omega_{\boldsymbol{a}}(\gamma_*)$ は十分 1 に近い γ_* に対して 1 である。よって $\Delta(Y, X)$ は $\Delta_{\mathrm{III},2}$ を定める $\xi|_{W_F}$ によらない。言い換えれば Lie 環上の内視論には Weil 群は必要ないのである。

■Lie 環の基本補題　ここでは一時的に G および $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ が 3.2 節の意味で不分岐であるとする。特に $G = G^*, \psi_G = \mathrm{id}_{G^*}$ としてよい。同節のように超スペシャル点とそれに付随する整数環 $\mathcal{O}$ 上の G の模型 $\mathcal{G}$ を取り、その Lie 環を $\mathscr{g}$ と書く。超スペシャル $\mathcal{O}$ 格子 $\mathscr{g}(\mathcal{O})$ の特性関数を $1_{\mathfrak{g}}$ と略記する。H に対しても同様に $\mathcal{O}$ 上の模型 $\mathcal{H}$ の Lie 環 $\mathscr{h}$ および $\mathscr{h}(\mathcal{O})$ の特性関数 $1_{\mathfrak{h}}$ が考えられる。$Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ での安定軌道積分を

$$SO_Y\Big(f^H, \frac{dh}{dt}\Big) := \sum_{Y' \in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))} O_{Y'}\Big(f^H, \frac{dh}{dt}\Big), \quad f^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$$

と定める。

定理 4.3 (Lie 環の基本補題)**.** 上の不分岐な状況で、ある定数 $c \in \mathbb{C}^\times$ があって任意の $Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ に対して

$$SO_Y\Big(1_{\mathfrak{h}}, \frac{dh}{dt}\Big) = c \sum_{X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} \Delta(Y, X) O_X\Big(1_{\mathfrak{g}}, \frac{dg}{dt}\Big)$$

が成り立つ。

この定理は Waldspurger と Laumon, Ngô らの仕事により最終的に 2008 年頃証明されたが、ここではまずこの定理を仮定して先に進もう。

■Fourier 変換とその応用　非自明な加法指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^1$ を止め、$G(F)$ の随伴作用で不変な非退化対称形式 $\langle\, ,\, \rangle_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}(F) \otimes_F \mathfrak{g}(F) \to F$ を取る。これにより $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ の *Fourier* 変換

$$\hat{f}(X') := \int_{\mathfrak{g}(F)} f(X)\psi(\langle X, X' \rangle_{\mathfrak{g}})\, dX$$

が定まる。ただし不変測度 dX は上の Fourier 変換について自己双対に取っておく。

ここからは軌道積分の特異性を相殺するため、

$$\Delta_G(X) := |\det(\mathrm{ad}(X)|\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{t}_X(F))|_F^{1/2}$$

とおいて、$J_G(X, f) := \Delta_G(X) O_X(f, dg/dt)$ を考える方が便利である。Fourier 変換 $\hat{J}_G(X, f) := J_G(X, \hat{f})$ を考える。[HC99, 定理 3] からこの Fourier 変換は次の等式が成り立つという意味での核関数 $\hat{i}^G : \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F) \times \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F) \to \mathbb{C}$ を持つ。

$$\hat{J}_G(X', f) = \sum_{\substack{T \subset G \\ \mathrm{mod}\ G(F)\ \text{共役}}} \frac{1}{|W(G, T)|} \int_{\mathfrak{t}(F)} J_G(X, f) \hat{i}^G(X', X)\, dX.$$

これを用いて

$$D_{G,H}(Y, X) := \gamma_\psi(\mathfrak{g}(F)) \sum_{X' \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} \Delta(Y, X') \hat{i}^G(X', X)$$

とおく。ここで $\gamma_\psi(V)$ は F 上の二次形式付き空間 $(V, (\, ,\,))$ の ψ に関する *Weil* 定数と呼ばれる不変量である。一方 $\mathfrak{h}(F)$ 上には、任意の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : \mathfrak{t}_H(F) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}(F)$ が二次空間の同型になるような非退化対称形式 $\langle\, ,\, \rangle_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h}(F) \otimes_F \mathfrak{h}(F) \to F$ がただ一つある。

これを使って G の場合と同様に軌道積分の Fourier 変換の核関数 $\hat{i}^H(Y',Y)$ を定め、

$$\tilde{D}_{G,H}(Y,X) := \gamma_\psi(\mathfrak{h}(F)) \sum_{\substack{Y' \in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F)) \\ Y'' \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)/\mathrm{Ad}(H(F))}} \frac{1}{|\mathfrak{D}(T_{Y''})|} \Delta(Y'',X)\hat{i}^H(Y',Y'')$$

とおく。

命題 4.4 ([Wal91] 定理 10.4)**.** $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$, $Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ に対して $D_{G,H}(Y,X) = \tilde{D}_{G,H}(Y,X)$ である。

証明の概略. まず考えている G, H を代数体 k 上の適当な簡約群 G とその内視群 H のある素点 w での係数拡大として実現する。アデール環上の Lie 環 $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ 上の Schwartz-Bruhat 関数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ に対して

$$I^G(\phi) := \int_{G(k)\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\xi \in \mathfrak{g}(k)} \phi(\mathrm{Ad}(g)^{-1}\xi)\, dg$$

とおく。非自明指標 $\psi : \mathbb{A}/k \to \mathbb{C}^1$ を固定すれば、それに関する Fourier 変換

$$\hat{\phi}(X') := \int_{\mathfrak{g}(\mathbb{A})} \phi(X)\psi(\langle X, X'\rangle_{\mathfrak{g}})\, dX, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$$

が考えられる。テスト関数 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ と $\hat{f}$ をともに楕円的な元の集合に台を持つ用に選べば、Poisson 和公式の両辺を積分することができて等式

$$I^G(f) = I^G(\hat{f})$$

が成り立つ。一方で $I^G(f)$ 内の和と積分の順序を入れ替えて、単純な幾何展開

$$I^G(f) = \sum_{\xi \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(k)_{\mathrm{ell}}/\mathrm{Ad}(G(k))} \tau(T_\xi) \prod_v J_G(\xi, f_v)$$

を得る。こうして上の等式が Lie 環における跡公式の代わりとなる。Lie 環を考える利点はスペクトルサイドに当たる右辺も Fourier 変換に対する幾何展開となることである。H に対しても同様の等式が考えられる。

上の等式を安定化する。固定した w 以外の素点 v では定理 4.3 などを使って軌道積分の合致が成り立つテスト関数 $f_v \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(k_v))$, $f_v^H \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}(k_v))$ を取り、さらに内視群のうち H 以外のものの寄与は消えるようにしておく。さらに w では $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ を固定して、

$f_w \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(k_w))$, $f_w^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(k_w))$ を軌道積分の合致を満たし、かつ次の等式が成り立つように具体的に作る [Wal91, §8]。

$$\sum_{X' \in \mathfrak{g}_{\rm rs}(k_w)/\mathrm{Ad}(G(k_w))} \Delta(Y, X') J_G(X', f_w) = c_1 \gamma_{\psi_w}(\mathfrak{g}(k_w))^{-1} D_{G,H}(Y, X),$$
$$\sum_{Y' \in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))} J_H(Y', f_w^H) = c_1 \gamma_\psi(\mathfrak{h}(k_w))^{-1} \tilde{D}_{G,H}(Y, X).$$

こうして得られたテスト関数 $f = \bigotimes_v f_v$, $f^H = \bigotimes_v f_v^H$ を用いて上の跡公式の類似を安定化すれば、等式

$$I^G(f) = c\frac{\tau(G^*)}{\tau(H)} I^H(f^H)$$

が得られる。これを Fourier 変換サイドに持って行った等式の両辺を比較して命題が証明される。 □

この命題は次に解説するような驚くべき帰結を持つ。$\mathfrak{g}(F)$ 内の冪零 $G(F)$ 軌道の集合を $\mathcal{N}(\mathfrak{g}(F))$ で表す。各 $\mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F))$ に対して *Shalika* 芽と呼ばれる $\mathfrak{g}_{\rm rs}(F)$ 内の 0 の近傍で定義された関数 $g^G(X, \mathfrak{o})$ があって、$J_G(X, f)$ は 0 の周りで漸近展開 (*Shalika* 芽展開)

$$J_G(X, f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F))} g^G(X, \mathfrak{o}) J_G(\mathfrak{o}, f)$$

を満たす。右辺の第二項は冪零軌道 $\mathfrak{o}$ 上の軌道積分である。内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ に対して、(G, H) 芽

$$g^{G,H}(Y, \mathfrak{o}) := \sum_{X' \in X^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} \Delta(Y, X') g^G(X', \mathfrak{o}), \quad Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$$

を用意する。[LS90] の結果により、軌道積分の移行予想 (定理 3.1) はすべての簡約群とその内視群に対して

$$g^{G,H}(Y, \mathfrak{o}) \in \mathrm{span}\{g^{H,H}(Y, \mathfrak{o}_H) \,|\, \mathfrak{o}_H \in \mathcal{N}(\mathfrak{h}(F))\}, \quad \mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F)) \tag{4.3}$$

が成り立つことに帰着される。

一方、Fourier 変換に対する Shalika 芽展開から

$$\hat{i}^G(X', X) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F))} g^G(X', \mathfrak{o}) \hat{i}^G(\mathfrak{o}, X) \tag{4.4}$$

が成り立つ。右辺の $\hat{\imath}^G(\mathfrak{o}), (\mathfrak{o}\in\mathcal{N}(\mathfrak{g}(F)))$ たちは線型独立なので、有限族 $\{X_i\}\subset\mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ があって逆に

$$g^G(X,\mathfrak{o})=\sum_i c_{\mathfrak{o}}(i)\hat{\imath}^G(X,X_i),\quad c_{\mathfrak{o}}(i)\in\mathbb{C}$$

と解くことができる。これを用いて (G,H) 芽は

$$\begin{aligned}g^{G,H}(X,\mathfrak{o})=&\sum_i c_{\mathfrak{o}}(i)\sum_{X'\in X^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))}\Delta(Y,X')\hat{\imath}^G(X',X_i)\\=&\gamma_\psi(\mathfrak{g}(F))^{-1}\sum_i c_{\mathfrak{o}}(i)D_{G,H}(Y,X_i)\end{aligned}$$

と展開される。ところが命題 4.4 によれば $D_{G,H}(Y,X_i)$ は

$$\frac{\tilde{D}_{G,H}(Y,X_i)}{\gamma_\psi(\mathfrak{h}(F))}=\sum_{\substack{Y'\in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))\\ Y''\in\mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)/\mathrm{Ad}(H(F))}}\frac{1}{|\mathfrak{D}(T_{Y''})|}\Delta(Y'',X_i)\hat{\imath}^H(Y',Y'')$$

X_i の像 Y_i を取って

$$=\sum_{Y'\in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))}\Delta(Y_i,X_i)\hat{\imath}^H(Y',Y_i)$$

H に対する (4.4) を使えば

$$\begin{aligned}&=\sum_{Y'\in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))}\Delta(Y_i,X_i)\sum_{\mathfrak{o}_H\in\mathcal{N}(\mathfrak{h}(F))}\hat{\imath}^H(\mathfrak{o}_H,Y_i)g^H(Y',\mathfrak{o}_H)\\&=\sum_{\mathfrak{o}_H\in\mathcal{N}(\mathfrak{h}(F))}\Delta(Y_i,X_i)\hat{\imath}^H(\mathfrak{o}_H,Y_i)g^{H,H}(Y,\mathfrak{o}_H)\end{aligned}$$

と書ける。すなわち (4.3) が示されてしまう。よって次が得られた。

系 4.5 (Waldspurger)**.** Lie 環の基本補題 (定理 4.3) が成り立てば、定理 3.1 は正しい。

また同じく Shalika 芽展開と [LS90] の結果を用いた議論により、定理 4.3 から Hecke 環の単位元に対する基本補題 (4.1) が従うことも示せる。よって後は Lie 環の基本補題を示せばよい。

4.3 正標数の場合

さらに Waldspurger は Lie 環の基本補題の証明において、p 進体 F を正標数の局所体で置き換えてよいことを証明した [Wal06]。なおこの主張だけについては Clucker-Loeser がより公理的な側面に限定した別証明を与えている [CL10]。この正標数の場合の Lie 環の基本補題は Laumon-Ngô のユニタリ群の場合の証明を経て、Bao Châu Ngô によって幾何的な手法を用いて証明された。その概要は 2010 年度 RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」でも紹介させていただいたので、興味のある読者の方はその講演スライド [Kon10] を参照されたい。

参考文献

[Art05] James Arthur. An introduction to the trace formula. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Vol. 4 of *Clay Math. Proc.*, pp. 1–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Ber84] J. N. Bernstein. Le “centre” de Bernstein. In *Representations of reductive groups over a local field*, pp. 1–32. Hermann, Paris, 1984. Edited by P. Deligne.

[Bor76] Armand Borel. Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup. *Invent. Math.*, Vol. 35, pp. 233–259, 1976.

[BT75] A. Borel and J. Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, Vol. 27, pp. 55–150, 1975.

[BT84] F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielle valuée. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 60, pp. 197–376, 1984.

[BZ76] I N Bernshtein and A V Zelevinskii. Representations of the group $\mathrm{GL}(n, K)$ where K is a local field. *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 31, No. 3, pp. 1–68, 1976.

[BZ77] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 10, No. 4, pp. 441–472, 1977.

[CL10] Raf Cluckers and François Loeser. Constructible exponential functions, motivic Fourier transform and transfer principle. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 171, No. 2, pp.

1011–1065, 2010.

[Clo89] Laurent Clozel. Orbital integrals on p-adic groups: a proof of the Howe conjecture. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 129, No. 2, pp. 237–251, 1989.

[Clo90] L. Clozel. The fundamental lemma for stable base change. *Duke Math. J.*, Vol. 61, pp. 255–302, 1990.

[Hal89] T. Hales. Shalika germs on $GSp(4)$. *Astérisque*, No. 171-172, pp. 195–256, 1989. Orbites unipotentes et représentations, II.

[Hal92] T. Hales. Orbital integrals on $U(3)$. In *The zeta functions of Picard modular surfaces*, pp. 303–333. CRM, Montreal, Quebec, 1992.

[Hal95] Thomas C. Hales. On the fundamental lemma for standard endoscopy: reduction to unit elements. *Canad. J. Math.*, Vol. 47, No. 5, pp. 974–994, 1995.

[HC57] Harish-Chandra. A formula for semisimple Lie groups. *Amer. J. Math.*, Vol. 79, pp. 733–760, 1957.

[HC70] Harish-Chandra. *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Vol. 162 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1970. Notes by G. van Dijk.

[HC99] Harish-Chandra. *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, Vol. 16 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. Preface and notes by Stephen DeBacker and Paul J. Sally, Jr.

[Hen83] Guy Henniart. La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, Vol. 11-12, pp. 1–186, 1983.

[Kon10] Takuya Konno. Fundamental lemma and its proof after bào châu ngô. 数理研研究集会「代数的整数論とその周辺」での講演スライド, 2010. `http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/modules/d3downloads/` からダウンロードできる。

[KS99] Robert E. Kottwitz and Diana Shelstad. Foundations of twisted endoscopy. *Astérisque*, No. 255, pp. vi+190, 1999.

[Lan83] R. P. Langlands. Orbital integrals on forms of $SL(3)$. *Amer. J. Math.*, Vol. 105, pp. 465–506, 1983.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 4, pp. 726–785, 1979.

[LS87] R. P. Langlands and D. Shelstad. On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, Vol. 278, No. 1-4, pp. 219–271, 1987.

[LS90] R. Langlands and D. Shelstad. Descent for transfer factors. In *The Grothendieck*

Festschrift, Vol. II, Vol. 87 of *Progr. Math.*, pp. 485–563. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Sat63] I. Satake. Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields. *Publ. Math. IHES*, Vol. 18, pp. 5–70, 1963.

[She82] D. Shelstad. l-indistinguishability for real groups. *Math. Ann.*, Vol. 259, pp. 385–430, 1982.

[Spr98] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wal88] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups I*, Vol. 132 of *Pure and Applied Math.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], San Diego, CA, 1988.

[Wal91] Jean-Loup Waldspurger. Le lemme fondamental implique le transfert. *Comp. Math.*, Vol. 3, No. 3, pp. 219–307, 1991.

[Wal06] J.-L. Waldspurger. Endoscopie et changement de caractéristique. *J. Inst. Math. Jussieu*, Vol. 5, No. 3, pp. 423–525, 2006.

[今野 11a] 今野拓也. 楕円項の安定化. 若槻聡, 平賀郁（編）, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集. 2011. この報告集.

[今野 11b] 今野拓也. 内視論入門. 若槻聡, 平賀郁（編）, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集. 2011. この報告集.

楕円項の安定化*

今野拓也†

2011 年 1 月 31 日

概要

この原稿では [今野 11b], [今野 11a] の構成を正則でない楕円共役類に拡張する。次にそれを用いて跡公式の楕円項を内視群上の安定超函数たちで展開する安定化の過程を解説する。

目次

---

* 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」における講演ノート。

† 九州大学大学院数理学研究院。〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地
電子メール：takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ：http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/

1 設定と復習

この原稿では [今野 11b, 3 節] の状況にもどって F を代数体とし、そのアデール環を $\mathbb{A}$ と書く。G は F 上定義された連結簡約線型代数群とし、$G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現 $(R, \mathcal{L}(G))$ を思い出す。ここでも簡単のために G の導来群は単連結であると仮定しよう。すると G の Arthur-Selberg 跡公式の楕円項は

$$T_{\mathrm{ell}}^G(f) = \sum_{\gamma^{G(F)} \in G(F)_{\mathrm{ell}}} \tau(I_\gamma) O_\gamma(f^0)$$

で与えられていた。ここで $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して f^0 はその $\mathfrak{A}_G \subset Z_G(F_\infty)$ 上の平均を表す [同 5.2 節]。テスト関数が $f = \bigotimes_v f_v, (f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ のとき、f^0 は f のアルキメデス成分 $f_\infty := \bigotimes_{v|\infty} f_v$ をその $\mathfrak{A}_G$ 上の平均

$$f_\infty^0(g) := \int_{\mathfrak{A}_G} f_\infty(ag)\, da$$

で置き換えたものであることに注意しよう。I_γ は γ の G での連結中心化群 $Z_G(\gamma)^0$ であり、$\tau(I_\gamma)$ はその玉河数であった。なお楕円元の定義から γ は半単純で I_γ の中心は A_G を法として非等方的である。

内視論は非可換群の等質空間 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の局所大域原理を、共役類ごとの局所大域原理に帰着するものであると述べた。そうすることで開稠密部分集合をなす正則半単純共役類に対しては、[今野 11b] で見たとおり局所大域原理が極大トーラスの Galois コホモロジー群のそれで記述できるのだった。Langlands によるこれらのアイディアは、自己同型群が極大トーラスである CM 点での相互律を用いて一意な標準模型を構成する志村多様体の理論に触発されたものであろう。一方で跡公式全体を安定化するには内視論の構成を、中心化群がアーベル群ではない非正則半単純元にも拡張しなくてはならない。以下ではその概要を解説するが、ここに紹介する Kottwitz の構成もやはり Deligne, Milne らによる志村多様体の共役の記述 [DMOS82] に現れるアイディアに強く依存している。

そういうわけで $T_{\mathrm{ell}}^G(f)$ 全体を安定化したいのだが、楕円項には中心 $Z_G(F)$ の項も含まれる。実は [LL79] にも見られるように、中心項の安定化には内視群の跡公式の特異項 (SL_2 の例ではユニポテント項) の寄与が現れ、楕円項だけで閉じた記述は得られない。そこで以下では Kottwitz [Kot86] に倣って

$$T_{\mathrm{ell}}^{G,*}(f) := \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G(F)_{\mathrm{ell}} \setminus Z_G(F)} \tau(I_\gamma) O_\gamma(f^0) \tag{1.1}$$

の安定化を考えることにする。

2 前安定化

我々はまだトーラスの玉河数についての小野の公式の一般の簡約代数群への拡張 [今野 11b, (5.6)] を示していないので、次元に関する次の帰納法の仮定をおくことにする。

$$\boxed{\dim I < \dim G \text{ なる簡約群 } I \text{ に対して} \quad \tau(I) = \tau_1(I) := \frac{|\pi_0(Z_{\hat{I}}^\Gamma)|}{|\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{I}})|}.} \tag{玉河}$$

なお本来書かれるはずであった次稿ではこの仮定の下で G も同様の主張を満たすことを安定跡公式の応用として証明する予定であった。

2.1 最初の変形

安定共役な $\gamma, \gamma' \in G(F)_{\text{ell}}$ に対して $\gamma' = \gamma^g, (g \in G(\bar{F}))$ と書けば、$I_{\gamma'}$ は I_γ の F 構造を $I_{\gamma,\text{ad}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクル $\{\text{Ad}(g\sigma(g)^{-1})\}_{\sigma\in\Gamma}$ でひねった内部形式である。(トーラスでないので F 同型とは限らない。) しかし仮定 (玉河) から $\tau(I_\gamma) = \tau(I_{\gamma'})$ なので、正則項の場合 [今野 11b, 5.3 節] と同様に安定共役類ごとに和をまとめて

$$\begin{aligned} T_{\text{ell}}^{G,*}(f) &= \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G(F)_{\text{ell}}} \sum_{\gamma'^{G(F)} \subset \gamma^G(F)} \tau(I_{\gamma'}) O_{\gamma'}(f) \\ &= \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G(F)_{\text{ell}}} \tau(I_\gamma) \sum_{\gamma'^{G(F)} \subset \gamma^G(F)} O_{\gamma'}(f) \end{aligned}$$

である。G の準分裂データ $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ を思い出す。$G(F)_{\text{ell}} \ni \gamma$ に対してその共役類の像 $\psi_G(\gamma^G)$ は [今野 11b, 定理 3.6] から F 値点を持つ: $\exists \gamma_* \in \psi_G(\gamma^G)(F)$. このとき I_{γ_*} は I_γ の内部形式であるからそれらの中心は同型である。よって $Z_{I_{\gamma_*}}/A_{G^*}$ も非等方的だから $\gamma_* \in G^*(F)_{\text{ell}}$ である。これにより $G(F)_{\text{ell}}$ 内の安定共役類の集合から $G^*(F)_{\text{ell}}$ 内の安定共役類の集合への単射ができて次を得る。

$$T_{\text{ell}}^{G,*}(f) = \sum_{\gamma_*^{G^*}(F) \subset G^*(F)_{\text{ell}} \smallsetminus Z_G(F)} \tau(I) \sum_{\gamma^{G(F)} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*^{G^*})(F)} O_\gamma(f^0)$$

[今野 11b, 補題 4.2] を使うと

$$= \sum_{\gamma_*^{G^*}(F) \subset G^*(F)_{\text{ell}} \smallsetminus Z_G(F)} \tau(I) \sum_{\gamma^{G(F)} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(F)} O_\gamma(f^0).$$

次に右辺に現れる軌道積分は $\gamma^{G(\mathbb{A})}$ のみで決まるから、右辺の内側の和を $G(\mathbb{A})$ 共役類ごとにまとめる。[今野 11b, 系 5.4] より $G(\mathbb{A})$ 共役類内の $G(F)$ 軌道の個数は

$$\begin{aligned}|(\gamma^{G(\mathbb{A})}\cap G(F))/\mathrm{Ad}(G(F))|=&\left|\ker\Big(\mathfrak{D}(G_\gamma)\to\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v,I_\gamma)\Big)\right|\\ =&|\ker(\text{Ш}^1(F,I_\gamma)\to\text{Ш}^1(F,G))|\\ =&|\operatorname{cok}(\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\to\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}}))|\end{aligned}$$

に等しい。[同, 補題 4.15] の (ii) の証明に用いた Ext 群の完全系列を $0\to X_*(D_{I_{\mathrm{sc}}})\to X_*(D_I)\to X_*(D_G)\to 0$ に適用して、局所大域可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & X(I_{\mathrm{sc}})_F\longrightarrow\pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma)\longrightarrow\pi_0(Z_{\hat{I}}^\Gamma) & & \\ \longrightarrow\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{I}})\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ \prod_v\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v}) & \longrightarrow & \prod_v\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}}) & \longrightarrow & \prod_v\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{I}})\end{array}\tag{2.1}$$

が得られる。ここで $\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)\to\mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}})$ による $\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})$ の逆像を $\mathfrak{K}(I)$ と書くことにすれば、完全列

$$1\longrightarrow\pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma)\longrightarrow\pi_0(Z_{\hat{I}}^\Gamma)\longrightarrow\mathfrak{K}(I)\longrightarrow\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\longrightarrow\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}})$$

がある。ここで γ が楕円的なことから $X(I_{\mathrm{sc}})_F=0$ であることに注意せよ。その位数を取って等式

$$|\operatorname{cok}(\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\to\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}}))|=\frac{|\pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma)||\mathfrak{K}(I)||\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}})|}{|\pi_0(Z_{\hat{I}}^\Gamma)||\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})|}=\frac{\tau_1(G)}{\tau(I)}|\mathfrak{K}(I)|$$

が従う。これを代入して

$$T_{\mathrm{ell}}^{G,*}(f)=\sum_{\gamma_*^{G^*(F)}\subset G^*(F)_{\mathrm{ell}}\smallsetminus Z_G(F)}\tau_1(G)|\mathfrak{K}(I)|\sum_{\substack{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\\ \gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing}}O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0).\tag{2.2}$$

を得る。

2.2 Kottwitz 障害

上の表記中の条件 $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing$ を Galois コホモロジーの言葉で書くには、[今野 11b, 4.4 節] の Kottwitz 障害を半単純元に拡張しなくてはならない[*1]。その議論は同節とほぼ並行なので概説するにとどめる。考える状況は次の通り。半単純元 $\gamma_* \in G^*(F)$ と $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ である $g \in G^*(\bar{\mathbb{A}})$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)\psi_G(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_* \tag{2.3}$$

を満たすものを考える。ここで $g \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ としてよい。$I := I_{\gamma_*}$ と書く。

2.2.1 $G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})$ 軌道の場合

まず $G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})$ 軌道 $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$ がいつ $G(F)$ の元を含むかを考える。元 $h \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ と単射準同型 $\eta : I_{\bar{F}} \hookrightarrow G_{\bar{F}}$ の対で

- ある $\delta_\eta \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ に対して $\eta = \psi_G^{-1} \circ \mathrm{Ad}(\delta_\eta)|_{I_{\bar{F}}}$;
- $\eta(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}$

を満たすものの集合を $\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ と書く。(2.3) から $(\psi_G^{-1}(g), \psi_G^{-1}) \in \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ だからこれは空ではない。$\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ は自然な Γ 作用と整合する $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 作用

$$\delta.(h, \eta) := (\delta h, \mathrm{Ad}(\delta) \circ \eta), \quad \delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$$

を備えている。それによる商集合を $X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}) := G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}) \backslash \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ と書く。

簡単のために $I^{\mathrm{sc}} := I \cap G_{\mathrm{sc}}$ と略記する。$X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ には $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ が右から

$$(h, \eta).i = (\eta(i)^{-1}h, \eta), \quad (h, \eta) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}),\, i \in I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$$

と作用している。二元 $(h, \eta), (h', \eta') \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ が与えられたとき、$G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 作用で動かして $\eta' = \eta$ だとしてよい。すると $\eta(\gamma_*)^h = \gamma_{\mathbb{A}} = \eta(\gamma_*)^{h'}$ であるから、ある $i \in I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ があって $(h', \eta) = i.(h, \eta)$ となる。よって上の $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ 作用は推移的である。次に $i \in I(\bar{\mathbb{A}})$, $(h, \eta) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ が $(h, \eta).i = (h, \eta)$ を満たすとすると、ある $\delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ に対して

$$\eta(i)^{-1}h = \delta h, \quad \mathrm{Ad}(\delta) \circ \eta = \eta.$$

[*1] 正則半単純な場合は Langlands 障害と呼ばれるべきで、ふつう Kottwitz 障害といえば半単純元まで拡張したものを指す。

前者を後者に代入して $\eta \circ \mathrm{Ad}(i)^{-1} = \eta$ だから、$i \in Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F}))$ である。よって $X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ は $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F})$ 捻子である。

補題 2.1. $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing$ であるためには、$(X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})/I^{\mathrm{sc}}(\bar{F}))^{\Gamma} \neq \varnothing$ が必要十分である。

証明. ある $h \in G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})$ に対して $\gamma := \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}} \in G(F)$ であるとする。(2.3) から γ, $\psi_G^{-1}(\gamma_*)$ は $G(\bar{\mathbb{A}})$ 共役だから、[今野 11b, 補題 4.2] により $\gamma = \mathrm{Ad}(\delta) \circ \psi_G^{-1}(\gamma_*)$ となる $\delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ がある。このとき $\eta := \mathrm{Ad}(\delta) \circ \psi_G^{-1}|_{I_{\bar{F}}} : I_{\bar{F}} \hookrightarrow G_{\bar{F}}$ とおけば、[同, (3.1)] の記号で

$$\eta^{-1} \circ \sigma(\eta) = \psi_G \circ \mathrm{Ad}(\delta^{-1}\sigma(\delta)) \circ \sigma(\psi_G)^{-1} = \mathrm{Ad}(\psi_G(\delta^{-1}\sigma(\delta))u_\sigma), \quad \sigma \in \Gamma$$

と書ける。また

$$\eta^{-1} \circ \sigma(\eta)(\gamma_*) = \eta^{-1} \circ \sigma(\eta(\gamma_*)) = \eta^{-1}(\gamma) = \gamma_*$$

だから $i_\sigma := \psi_G(\delta^{-1}\sigma(\delta))u_\sigma \in I^{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ である。以上から

$$\begin{aligned}\sigma(h, \eta) =& (h, \sigma(\eta)) = (h, \eta \circ \mathrm{Ad}(i_\sigma)) = (h, \mathrm{Ad}(\eta(i_\sigma)) \circ \eta) \\ =& (\eta(i_\sigma^{-1})h, \eta) = (h, \eta).i_\sigma\end{aligned}$$

となって、(h, η) は $(X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})/I^{\mathrm{sc}}(\bar{F}))^{\Gamma}$ の元である。つまり条件は必要である。

逆に $(h, \eta) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{\Gamma}$ を取れば、任意の $\sigma \in \Gamma$ に対して $\delta_\sigma \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), i_\sigma \in I^{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ があって

$$\sigma(h, \eta) = \delta_\sigma^{-1}.(h, \eta).i_\sigma = (\delta_\sigma^{-1}\eta(i_\sigma^{-1})h, \mathrm{Ad}(\delta_\sigma^{-1}) \circ \eta)$$

が成り立つ。この第一成分から $\{\eta(i_\sigma)\delta_\sigma = h\sigma(h)^{-1}\}_\sigma$ は $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクルで、そのクラスは $\text{Ш}^1(F, G_{\mathrm{sc}})$ に属する。従って [今野 11b, 命題 4.8] から、ある $\delta_1 \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ があって $\eta(i_\sigma)\delta_\sigma = \delta_1^{-1}\sigma(\delta_1), \sigma \in \Gamma$ と書ける。このとき $h_1 := \delta_1 h \in G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})$ で $\eta_1 := \mathrm{Ad}(\delta_1) \circ \eta : I \hookrightarrow G$ は F 上定義されているから、$\mathrm{Ad}(h_1)\gamma_{\mathbb{A}} = \eta_1(\gamma_*)$ は $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ の元である。 □

ここで I^{sc} に対する [今野 11b, 命題 4.7] (i) の完全列

$$\mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}/Z_{I^{\mathrm{sc}}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F})) \longrightarrow \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D$$

を思い出す。$I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F})$ 捻子 $X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ の同型類に [同, 補題 4.10] で対応する $\mathrm{inv}\,X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})\in \mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F}))$ の $\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D$ での像を $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ で表す。

命題 2.2. (2.3) の状況で $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ であるためには $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ が消えることが必要十分である。

証明. 実際、$(X(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)/I^{\mathrm{sc}}(\bar{F}))^{\Gamma}\neq\varnothing$ であるためには、$\mathrm{inv}\,X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ が $\mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}}/Z_{I^{\mathrm{sc}}})$ の像に含まれることが必要十分だから、命題は補題 2.1 から直ちに従う。 □

2.2.2 $G(\mathbb{A})$ 軌道への拡張

2.1 節で定義した部分群 $\mathfrak{K}(I)\subset\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})$ への $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D$ の制限を $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ とする。この分節の目標は次の定理である。

定理 2.3. (2.3) の状況で $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ であるためには $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in\mathfrak{K}(I)^D$ が消えることが必要十分である。

証明. ここからの証明は [今野 11b, 4.4.2 節] の素直な拡張である。まず (2.1) の 2 行目の左列の射の双対を

$$A:\bigoplus_v \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D\longrightarrow\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D,$$

自然な射 $\pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma_v})\to\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})$ の双対を B_v として $B:=\bigoplus_v B_v$ とおく。定義と (2.1) から $\mathfrak{K}(I)^D=\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D/A(\ker B)$ がわかるから、$\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ の消滅は

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in A(\ker B) \tag{2.4}$$

に等価である。

次に $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ の $\gamma_{\mathbb{A}}$ についての振る舞いは次のように記述される。一般に $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクル $\{a_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ に対して、その $(I^{\mathrm{sc}})_{\mathrm{ad}}(\bar{\mathbb{A}})=I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{\mathbb{A}})$ での像で $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ の Galois 作用を $\sigma\mapsto\mathrm{Ad}(a_\sigma)\circ\sigma$ とひねったものを $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})^a$ と書く。素点 v において、コサイクル $\{\mathrm{Ad}(a_\sigma)\}_\sigma$ の $\Gamma_v\xrightarrow{\bar{v}}\Gamma$ による引き戻しで $I_v^{\mathrm{sc}}:=I^{\mathrm{sc}}\otimes_F F_v$ の Γ_v 作用をひねった内部形式を I^{sc,a_v} と書けば、制限射の直和は同型

$$\mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})^a)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_v\mathrm{H}^1(F_v,I^{\mathrm{sc},a_v})$$

を与える ([今野 11b, (4.2)] と同様にして確かめられる)。双対群の中心は内部捻りの影響を受けないので、Tate・中山射は $\alpha_{I^{\mathrm{sc},a_v}}:\mathrm{H}^1(F_v,I^{\mathrm{sc},a_v})\to\pi_0(Z_{\hat{I}^{\mathrm{sc}}}^{\Gamma_v})^D$ となる [同, 命題 4.4]。以上を合成して "Tate・中山写像"

$$\alpha^a:\mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})^a)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_v\pi_0(Z_{\hat{I}^{\mathrm{sc}}}^{\Gamma_v})^D\xrightarrow{\Sigma\,\bar{v}}\pi_0(Z_{\hat{I}^{\mathrm{sc}}}^{\Gamma})^D$$

ができる。

さて $(h,\eta)\in X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ は $\sigma\in\Gamma$ に対して

$$\sigma(h,\eta)=(\delta_\sigma^{-1}\eta(a_\sigma^{-1})h,\mathrm{Ad}(\delta_\sigma^{-1})\circ\eta),\quad \delta_\sigma\in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}),\,a_\sigma\in I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$$

を満たしていた。定義から $\mathrm{inv}\,X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ は $\{a_\sigma\}_\sigma\in Z^1(\Gamma,I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F}))$ のコホモロジー類である。一方 $\mathrm{Ad}(h^{-1})\circ\eta:I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})\xrightarrow{\sim}G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ は同型で

$$\sigma\circ\mathrm{Ad}(h^{-1})\circ\eta=\mathrm{Ad}(h^{-1})\circ\eta\circ\mathrm{Ad}(a_\sigma)\circ\sigma,\quad\sigma\in\Gamma$$

だから、$G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}=I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})^a$ で上の構成により準同型

$$\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}:=\alpha^a:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})\longrightarrow\pi_0(Z_{\hat{I}^{\mathrm{sc}}}^{\Gamma})^D$$

を得る。以上の下で $\gamma'_{\mathbb{A}}\in\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})$ を取る。$Y(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}}):=\{g\in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})\,|\,\mathrm{Ad}(g)\gamma_{\mathbb{A}}=\gamma'_{\mathbb{A}}\}$ は明らかに右移動作用に関して $G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ 捻子になる。その $\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})$ でのクラスを $\mathrm{inv}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}})$ と書けば、

$$\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}},\gamma_*)=\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\mathrm{inv}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}}))\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\tag{2.5}$$

が成り立つ。

さて $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ であるためには、$\gamma'_{\mathbb{A}}\in\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ で ${\gamma'_{\mathbb{A}}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ なるものがあることが必要十分。後者の条件は命題 2.2 から $\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}},\gamma_*)=1$ に同値である。一方

$$D:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})$$

として $G(\bar{\mathbb{A}})=G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ に注意すれば、$\gamma'_{\mathbb{A}}\in\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ なるためには $\mathrm{inv}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}})\in\ker D$ が必要十分。以上を (2.5) に代入して、$\mathrm{inv}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}})$ は常に

$$C:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}))$$

の核に属することに注意すれば、$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ は

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker C\cap\ker D)\tag{2.6}$$

に同値なことがわかる。以上 (2.4), (2.6) から次を示せばよい。

主張 2.3.1. $A(\ker B) = \alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker C \cap \ker D)$ である。

証明. まず $\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ とその構成で I^{sc} を I で置き換えたもののなす可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_v \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"] & \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D \\
\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[r] & \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v}) \arrow[r] & \bigoplus_v \pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma_v})^D &
\end{tikzcd}$$

から $\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker C \cap \ker D) \subset \alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker D) \subset A(\ker B)$ は明らか。

逆向きの包含関係を示す。[今野 11b, 定理 3.7] から

$$\ker C = \bigoplus_{v|\infty} \ker\Big(\mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc}})\Big) \oplus \bigoplus_{v\nmid\infty} \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}),$$

従って

$$\begin{aligned}
\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker C \cap \ker D) \supset\, & \alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}\Big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker\big(\mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v})\big)\Big) \\
=\, & A\Big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker\big(\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \xrightarrow{B_v} \pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma_v})^D\big)\Big)
\end{aligned}$$

がわかる。よって $A(\ker B) \subset A\big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v\big)$ を示せば十分である。

短完全列 $1 \to I^{\mathrm{sc}} \to I \to D_G \to 1$ の Galois コホモロジー完全列と (2.1) の双対完全列を並べて得られる可換図式

$$\begin{tikzcd}
D_G(F) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, I) \arrow[d] \\
D_G(F_\infty) \arrow[r, "\delta_\infty"] \arrow[d] & \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, I^{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus \alpha_{I_v^{\mathrm{sc}}}"] & \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, I) \arrow[d, "\bigoplus \alpha_{I_v}"] \\
\bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \hat{D}_G)^D \arrow[r] & \bigoplus_{v|\infty} \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "\bigoplus B_v"] & \bigoplus_{v|\infty} \pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma_v})^D
\end{tikzcd}$$

を考える。ここで [今野 11b, 注意 2.4] から

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_v, \hat{D}_G)^D \simeq \widehat{\mathrm{H}}^0(F_v, D_G) = \begin{cases} D_G(F_v)/\,\mathrm{N}_{\bar{F}_v/F_v}(D_G(\bar{F}_v)) & F_v \simeq \mathbb{R} \text{ のとき} \\ 0 & F_v \simeq \mathbb{C} \text{ のとき} \end{cases}$$

である。[PR94, 命題 7.8] から $D_G(F)\subset D_G(F_\infty)$ は稠密、$D_G(F_v)\to \mathrm{H}^1(\Gamma_v,\hat{D}_G)^D$ は全射で $\bigoplus_{v|\infty}\mathrm{H}^1(\Gamma_v,\hat{D}_G)^D$ は有限群だから、先の図式の左の列の合成は全射である。よって

$$\delta(D_G(F))=\ker\Big(\mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}})\to\mathrm{H}^1(F,I)\Big)$$

の中央の列の射の合成による像は $\bigoplus_{v|\infty}\ker B_v$ に一致する。

ところで $\bigoplus_v \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D$ の部分群

$$\Big(\bigoplus_v \alpha_{I_v^{\mathrm{sc}}}\Big)\Big(\mathrm{im}\Big(\ker[\mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}})\to\mathrm{H}^1(F,I)]\to\bigoplus_v\mathrm{H}^1(F_v,I^{\mathrm{sc}})\Big)\Big)$$

は内側の核を取っていることと B の定義から $\ker B$ に含まれ、[今野 11b, 命題 4.7] の最後の主張から $\ker A$ にも含まれる。よって上と併せて、射影 $\ker B\twoheadrightarrow\bigoplus_{v|\infty}\ker B_v$ の $\ker A\cap\ker B$ への制限が全射であることが従う。すると勝手な $x=(x_\infty,x_{\mathrm{fin}})\in\ker B$, ($x_\infty\in\bigoplus_{v|\infty}\ker B_v$, $x_{\mathrm{fin}}\in\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker B_v$) に対して、$(x_\infty,y_{\mathrm{fin}})\in\ker A\cap\ker B$, ($y_{\mathrm{fin}}\in\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker B_v$) が取れる。このとき

$$A(x)=A((x_\infty,y_{\mathrm{fin}})+(0,x_{\mathrm{fin}}-y_{\mathrm{fin}}))=A(x_{\mathrm{fin}}-y_{\mathrm{fin}})\in A\Big(\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker B_v\Big)$$

となって、$A(\ker B)\subset A\big(\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker B_v\big)$ が示された。 □

2.3 前安定化

定理 2.3 を使って (2.2) を展開しよう。そこに現れる正則でない半単純元での軌道積分を定義するには *Kottwitz* の符号が必要である [Kot83]。

まず標数 0 の局所体 F 上の連結簡約線型代数群 G に対して、

$$e(G):=\begin{cases}(-1)^{(\dim X_{G^*}-\dim X_G)/2} & F\text{ がアルキメデス的なとき}\\ (-1)^{\mathrm{rk}_F G^*_{\mathrm{der}}-\mathrm{rk}_F G_{\mathrm{der}}} & F\text{ が非アルキメデス的なとき}\end{cases}$$

とおく。ここで F がアルキメデス的なときには、実 Lie 群 $G(F)$ の対称空間を X_G と書いており、$\mathrm{rk}_F G_{\mathrm{der}}$ は G_{der} の F ランク、つまり単純相対ルートの個数を表す。これを用いて半単純元 $\gamma\in G(F)$ に対して $e(\gamma)=e^G(\gamma):=e(G_\gamma)$ とおく。

次に G が代数体 F 上の連結簡約線型代数群の状況にもどって、アデール群の半単純元 $\gamma_{\mathbb{A}}=(\gamma_v)_v\in G(\mathbb{A})$ に対して

$$e(\gamma_{\mathbb{A}})=e^G(\gamma_{\mathbb{A}}):=\prod_v e(\gamma_v)$$

とおく。有限個を除く非アルキメデス素点 v で G_{γ_v} は不分岐 ([今野 11b, 補題 4.6] 参照) ゆえ、[Kot83, 295 頁系] から $e(\gamma_v) = 1$ で、従って右辺の Euler 積は実際には有限積である。さらに半単純な $\gamma \in G(F)$ に対しては積公式

$$\Big(e^G(\gamma) = \prod_v e^{G_v}(\gamma)\Big) = 1 \tag{2.7}$$

が成り立つ [同, 297 頁命題]。

さて (2.2) の軌道積分には $G(F)$ の元と共役な $\gamma_{\mathbb{A}}$ しか寄与しないから、そこに $e(\gamma_{\mathbb{A}}) = 1$ を挟んでも差し支えない。定理 2.3 と有限アーベル群 $\mathfrak{K}(I)$ 上の指標の直交関係を使えば (2.2) は

$$\begin{aligned} T^{G,*}_{\mathrm{ell}}(f) = \sum_{\gamma_*^{G^*(F)} \subset G^*(F)_{\mathrm{ell}} \smallsetminus Z_G(F)} \tau_1(G) \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A})} \\ \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I)} \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) e(\gamma_{\mathbb{A}}) O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0) \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。

3 内視論の拡張

次の操作は上の (γ_*, κ) についての和の順序を入れ替えて、さらにそれを楕円的内視データとその半単純元の対 $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ についての和で書くことである。

3.1 ノルム

一時的に F を標数が 0 の局所または大域体とする。G を F 上定義された連結簡約線型代数群で $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ を満たすものとし、$\mathcal{E} = (H, {}^LH, s, \xi)$ をその内視データとする。

半単純元 $\gamma_H \in H(F)$ に対して、それを含む極大トーラス $T_H \subset H$ とその許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を取る。このとき $\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H)$ の安定共役類は γ_H の安定共役類のみで定まり、T_H や η_{B,B_H} の取り方によらない。T_H の H でのルート系 $R(H, T_H)$ は η_{B,B_H} により $R(G^*, T)$ の部分集合と見なせる。このとき γ_H が (G, H) 正則あるいは γ_H, γ が等しく特異 (*equisingular*) とは、任意の $\alpha \in R(G^*, T) \smallsetminus R(H, T_H)$ に対して $\alpha(\gamma_H) \neq 1$ であることとする。このとき $I_H := I_{\gamma_H}$ と $I := I_{\gamma_*}$ のルート系は一致するから、許容埋め込み η_{B,B_H} は同型 $\eta^*_{I_H} : {}^LI \xrightarrow{\sim} {}^LI_H$ を与え、内部捻り $\eta_{I_H} : I_{H,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} I_{\bar{F}} \subset G^*_{\bar{F}}$ に延びる。H 内の (G, H) 正則半単純な元のなす開稠密部分集合

を $H_{G,H} \subset H$ と書く。ただし例外として $H = G^*$ のときだけは $G^* \setminus Z_G$ の半単純元のなす開稠密部分集合を $H_{G,H}$ と書く。

正則半単純共役類の場合と同様に ψ_G は $G(F)$ の半単純安定共役類の集合から $G^*(F)$ のそれへの単射を与える。(G,H) 正則な γ_H に対して上の記号で $\gamma_*^G(F)$ がある半単純安定共役類 $\gamma^G(F) \subset G(F)$ の ψ_G による像になっているとき、γ_H は γ の像あるいはノルムであるという。そのような γ がないとき、γ_H は $G(F)$ の像でないという。

3.2 $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ による展開

ふたたび F が代数体の場合にもどる。ここでは [今野 11b, 6.2 節] の対応を半単純な場合に拡張する。

$K_{\mathrm{ell}}(G(F))$ を $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{ell}}$ と $\kappa \in \mathfrak{K}(I = G^*_{\gamma_*})$ の対の安定共役類の集合とする。ここで (γ_*, κ) と (γ'_*, κ') が安定共役とは、

- ある $g \in G(\bar{F})$ に対して $\gamma'_* = \gamma_*^g$ かつ $\mathrm{Ad}(g)^{-1}|_I : I_{\gamma,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} I_{\gamma',\bar{F}}$ が内部捻り ($G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ から常に成り立つが) で、
- それが引き起こす同型 $\hat{I}_\gamma \simeq \hat{I}_{\gamma'}$ による κ の像が κ' である

ことである。次に $E_{\mathrm{ell}}(G)$ を楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ と (G,H) 正則な $\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ の対の同型類の集合とする。ただし $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ と $(\mathcal{E}', \gamma_{H'})$ が同型とは、同型 $g : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ があってそれに付随する $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H'$ が γ_H の安定共役類を $\gamma_{H'}$ のそれに移すこととする。ここで $\alpha \circ H_{\mathrm{ad}}(F)$ は g から一意に決まるので 2 つ目の条件は α の取り方によらない。

命題 3.1. 全単射 $E_{\mathrm{ell}}(G) \xrightarrow{\sim} K_{\mathrm{ell}}(G(F))$ がある。

証明. 証明の議論は [今野 11b, 6.2 節] とほぼ並行なので対応の概要のみを述べる。

まず $(\gamma_*, \kappa) \in K_{\mathrm{ell}}(G(F))$ が与えられているとする。$I = I_{\gamma_*}$ の極大トーラス T で楕円的、つまり T/A_I が非等方的なものと、その L 群の許容埋め込み $\xi_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ を取る。$T \twoheadrightarrow D_I \twoheadrightarrow D_G$ から $Z_{\hat{G}} \subset Z_{\hat{I}} \subset \hat{T}$ がある。T の楕円性から $(\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ は離散的ゆえ、その部分群 $(Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ も同様である。よって $\kappa \in (Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ の ξ_T による像 $sZ_{\hat{G}}$ および $\hat{H} := Z_{\hat{G}}(s)^0$ は定義可能である。このとき $\mathcal{H} = \hat{H} \rtimes \xi_T(W_F)$ は定義可能であることも [同, 6.2.3 節] のように確かめられる。[同, 補題 6.3] より同型 $\xi : {}^L H \xrightarrow{\sim} \mathcal{H} \hookrightarrow {}^L G$ がある。このとき $(H, {}^L H, s, \xi)$ は G の楕円的内視データになる。最

後に $\xi_T^H := \xi^{-1}\circ\xi_T : {}^LT \hookrightarrow {}^LH$ の双対 $\xi_T^{H,*} : T^H_{0,\bar F} \xrightarrow{\sim} T_{\bar F}$ による γ_* の逆像の H での共役類は F 上定義されている。よって [同, 定理 3.6] からその有理点 $\gamma_H \in H(F)$ が取れる。

逆に $(\mathcal{E},\gamma_H) \in E_{\mathrm{ell}}(G)$ を取ってくる。$I_H := I_{\gamma_H}$ の楕円的極大トーラス T_H とその許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$, $\xi_{T_H} : {}^LT_H \hookrightarrow {}^LH$ を取る。$\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H)$ は $G(F)$ の楕円的な元である。許容埋め込み $\xi_T : {}^LT \hookrightarrow {}^LG$ による s の逆像 s_T は $(\hat T/Z_{\hat G})^\Gamma$ の元を定める。一方、η_{B,B_H} が I_H と I の間の内部捻りに延びることから $\eta^*_{B,B_H}(Z_{\hat I}) = Z_{\hat I_H}$ であり、また二つの許容埋め込み $\xi_T, \xi\circ\xi_{T_H}\circ\eta^*_{B,B_H} : {}^LT \hookrightarrow {}^LG$ の $\hat T$ への制限は一致している。よって内視データの定義から

$$s \in \xi(Z_{\hat H}) \subset \xi\circ\xi_{T_H}(Z_{\hat I_H}) = \xi\circ\xi_{T_H}\circ\eta^*_{B,B_H}(Z_{\hat I}) \subset \xi_T(Z_{\hat I})$$

が成り立つ。つまり $s_T \in Z_{\hat I}$ でその $Z_{\hat I}/Z_{\hat G}$ での像 κ は Γ 不変である。[今野 11b, 6.2.1 節] と同様にして $\kappa \in \mathfrak{K}(I)$ であることも示せる。 □

(2.8) に戻ろう。[今野 11b, 補題 4.5] から $\gamma_{\mathbb{A}}$ についての和は有限なので、κ についての和と順序を入れ替えられる。さらに上の命題を使えば、[同, 6.3 節] の記号と議論により

$$\begin{aligned} T^{G,*}_{\mathrm{ell}}(f) =& \tau_1(G) \sum_{\gamma_*^{G^*(F)} \subset G^*(F)_{\mathrm{ell}} \setminus Z_G(F)} \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(I)} \\ & \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})} \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))e(\gamma_{\mathbb{A}})O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0) \\ =& \sum_{\mathcal{E}\in\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)} \iota(G,H)\tau_1(H) \sum_{\gamma_H^H \in H_{G,H}(F)_{\mathrm{ell}}} \\ & \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi_G^{-1}(\eta_{I_H}(\gamma_H))^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})} \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))e(\gamma_{\mathbb{A}})O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0). \end{aligned} \tag{3.1}$$

と書ける。

3.3 軌道積分の移行

次のステップは [今野 11b] で予告したように (3.1) の右辺の 2 行目を $H(\mathbb{A})$ 上の安定軌道積分で展開することである。そのために必要な局所体上の軌道積分の移行は [今野 11a] で解説した。しかしそこで得られたのは正則半単純元での軌道積分の移行であり、(3.1) に現れるすべての項を扱うにはそれを非正則な半単純元にも広げる必要がある。ここではその結果を [LS90] から引用する。

以下この節では F は標数 0 の局所体とする。G, H その他は 3.1 節の通りとする。[今野 11a, 定理 2.9] の直後に移行因子 $\Delta(\delta_H,\delta)$, $(\delta \in G_{\mathrm{rs}}(F), \delta_H \in H_{G\text{-rs}}(F))$ が定義さ

れていた。まずはこれを $H_{G,H}(F) \times G(F)$ に延ばそう。(G, H) 正則な $\gamma_H \in H(F)$ が半単純元 $\gamma \in G(F)$ の像でない場合には

$$\Delta(\gamma_H, \gamma) := 0$$

と定義すればよい。次に γ_H が γ の像のときには、γ_H を含む極大トーラス $T_H \subset H$ を取り、極限

$$\Delta(\gamma_H, \gamma) := \lim_{\substack{\delta_H \to \gamma_H, \delta \to \gamma \\ \delta_H \in T_H(F) \cap H_{G\text{-rs}}(F)}} \Delta(\delta_H, \delta) \tag{3.2}$$

を考える。ここで $\delta \in G(F)$ は δ_H を像に持つ元とする。これは T_H の取り方によらず定義可能になることが [LS90] の主定理を使って示せる。

さて半単純な $\gamma \in G(F)$ での安定軌道積分を

$$SO_\gamma\Big(f, \frac{dg}{di}\Big) := \sum_{\gamma'^{G(F)} \subset \gamma^G(F)} e(\gamma') O_{\gamma'}\Big(f, \frac{dg}{di'}\Big), \quad f \in \mathcal{H}(G(F))$$

と定義する。正則な場合と違って Kottwitz の符号 $e(\gamma') = e(I_{\gamma'})$ についての重み付き和になる。$I_{\gamma'}(F), (\gamma' \in \gamma^G(F))$ 上の不変測度 di' については次のような正規化を採用する。$I_{\gamma'}$ は I_γ の内部形式なので内部捻り $\psi_{\gamma'} : I_{\gamma', \bar{F}} \xrightarrow{\sim} I_{\gamma, \bar{F}}$ が I_γ の内部自己同型を除いてただ一つある。I_γ 上の F 上定義された最高次微分形式 ω を取れば、$\psi_{\gamma'}^* \omega$ も $I_{\gamma'}$ 上の F 有理微分形式である。F 上の不変測度 dx を取れば、これらの体積形式に付随して $I_\gamma(F)$, $I_{\gamma'}(F)$ それぞれの上の不変測度 $|\omega|_F, |\psi_{\gamma'}^* \omega|_F$ が決まる。不変測度は定数倍を除いて一意だから $di = c|\omega|_F, (c \in \mathbb{R}_+^\times)$ と書けるが、このとき $di' := c|\psi_{\gamma'}^* \omega|_F$ と選ぶことにする。次の補題は F がアルキメデス的なときは [She83, 補題 2.9.3], 非アルキメデス的なときは [Kot88, 命題 1] で証明されている。

補題 3.2. $SO_\gamma(dg/di)$ は [今野 11a, 1.3 節] の意味の安定超関数である。

以上の下で次が成り立つ。

命題 3.3 ([LS90] 補題 2.4.A)**.** 上の状況で $f \in \mathcal{H}(G(F))$ と $f^H \in \mathcal{H}(H(F))$ が [今野 11a, 定理 3.1] の意味の軌道積分の合致を満たすとする。このとき任意の (G, H) 正則な $\gamma_H \in H(F)$ に対して

$$SO_{\gamma_H}\Big(f^H, \frac{dh}{di_H}\Big) = \sum_{\gamma^{G(F)} \in G(F)} e(\gamma)\Delta(\gamma_H, \gamma) O_\gamma\Big(f, \frac{dg}{di}\Big)$$

が成り立つ。ただし γ_H が γ の像のとき、$I_{\gamma_H}(F)$ 上の不変測度 di_H は内部捻り $I_{\gamma_H, \bar{F}} \xrightarrow{\sim} I_{\gamma, \bar{F}}$ に関して $I_\gamma(F)$ 上の測度 di と整合するものを選んでいる。

これの証明は表現論からの準備が必要なため省略する。興味のある読者は原論文を参照いただきたい。

4 安定化

いよいよ安定化のプロセスも最終段階である。再び F が代数体の状況に戻る。まず $\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*))$ と移行因子の関係を調べよう。

4.1 積公式

補助的な $\bar{\gamma}_H \in H_{G\text{-rs}}(F), \bar{\gamma} \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ で $\bar{\gamma}_H$ が $\bar{\gamma}$ の像であるものを一組固定しておく。そして F の素点についての定数の族 $\{\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})\}_v$ で

- 有限個を除く v で $\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = 1$ で、
- $\prod_v \Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = 1$

を満たすものを選んでおく。

まず最初に $\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ が G 正則な場合を考える。例によって $T_H := H_{\gamma_H}$ の許容埋め込み $\eta_{B, B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を取り、$\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ とおく。すべての局所成分が正則な $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ に対して、移行因子

$$\Delta(\gamma_H, \gamma_v) = \Delta(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})$$

が定まる [今野 11a, 2.6 節]。この状況で γ_H が $\gamma_{\mathbb{A}}$ のアデール像 (*adelic image*) であるとは、$\gamma_{\mathbb{A}} \in \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}$ なることとする。もし γ_H が $\gamma_{\mathbb{A}}$ のアデール像でなければある素点 v で $\Delta(\gamma_H, \gamma_v) = 0$ である。なお上の移行因子は補助データによらないから、$R(G^*, T)$

に対する a データ $\{(a_{\alpha,v})_v\}$ を $\bar{F}^\times$ 内に取り、χ データ $\{(\chi_{\alpha,v})_v\}$ がイデール類指標 $\chi_\alpha : \mathbb{A}_{F_\alpha}^\times / F_\alpha^\times \to \mathbb{C}^1$ の局所成分からなるとしてよい。

命題 4.1 ([LS87] 定理 6.4.A)**.** $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)$ が $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ のアデール像であるとする。
(i) 有限個を除く素点 v で $\Delta(\gamma_H, \gamma_v) = 1$ である。
(ii) [今野 11a, 2 節] の記号で

$$\prod_v \Delta_I(\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_{\mathrm{III},2}(\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H, \gamma_v) = 1.$$

証明. 証明中は [今野 11a, 2 節] の記号を断りなく使う。

(i) 非アルキメデス素点 v で種々の補助データが不分岐であるものを考える。[今野 11b, (2.4)] から $\lambda(T_{\mathrm{sc}}) \in \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}})$ の $\mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}})$ での像は消えているから $\Delta_I(\gamma_H, \gamma_v) = 1$. χ データも不分岐、a データは単数群に含まれるから $\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H, \gamma_v) = 1$. さらに $\gamma_* \in T(\mathcal{O}_v)$ だから $\Delta_{\mathrm{III},2}(\gamma_H, \gamma_v) = 1$. $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H, \gamma_v) = 1$ が成り立つことも自明である。

(ii) Δ_I の積公式は Tate・中山双対性 [今野 11b, 命題 2.5] から、Δ_{II} と $\Delta_{\mathrm{III},2}$ は $\gamma_* \in T(F)$, $a_\alpha \in \bar{F}^\times$ と $\chi_\alpha|_{F_\alpha^\times} = \mathbb{1}$ から、Δ_{IV} についてはイデールノルムの積公式から明らかである。 □

系 4.2 (移行因子の積公式)**.** 命題 4.1 の状況で $\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) = \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*))$.

証明. やはり [今野 11a, 2 節] の記号を用いる。命題と $\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})$ の取り方から、

$$\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = \prod_v \left\langle \boldsymbol{s}_{\mathbb{T}}, \mathrm{inv}\left(\frac{\gamma_H, \gamma_v}{\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}}\right) \right\rangle$$

である。ここで右辺の局所コホモロジー類はコバウンダリー $\partial u_{\sigma,\tau} \in Z^2(F, T_{\mathrm{sc}})$ を相殺するために上記のような形をしていたのだった。しかしその

$$\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, \mathbb{T}) \to \mathrm{H}^1(F, \mathbb{T}(\bar{\mathbb{A}})) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, \mathbb{T})$$

による像は [今野 11b, 補題 4.14] の記号で $(\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{-1}, \mathrm{inv}(\bar{\gamma}_*, \bar{\gamma}))$ の

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}}) \times \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, \bar{T}_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, \mathbb{T})$$

による像にほかならない。([今野 11b, 補題 4.14] と [今野 11a, 2.2 節] の v_σ の定義を見較べよ。) よって Tate・中山双対性の局所大域可換性 ([今野 11b, 命題 2.5 (ii)]) から

$$\prod_v \left\langle \boldsymbol{s}_{\mathbb{T}}, \mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H, \gamma_v}{\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}}\Big) \right\rangle = \frac{\langle \boldsymbol{s}_{\bar{T}_{\mathrm{sc}}}, \mathrm{inv}(\bar{\gamma}_*, \bar{\gamma})\rangle}{\langle \boldsymbol{s}_{T_{\mathrm{sc}}}, \mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})\rangle} = \kappa(\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}))^{-1}$$

[同, 補題 4.14] から

$$= \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*))$$

となって系が得られる。 □

さて、我々の目的には正則でない $\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ に対しても同様の結論が必要である。すなわち次の予想を仮定しなくてはならない。

予想 4.3 (Kottwitz)**.** $\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ が (G, H) 正則で、ある $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ のアデール像であるとする。
(i) 有限個を除く素点 v で (3.2) の移行因子 $\Delta(\gamma_H, \gamma_v)$ は 1 に等しい。
(ii) $\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) = \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*))$.

残念ながら一般にこの予想を証明するアイディアは今のところ知られていない。しかし古典群の場合には、Waldspurger による移行因子を Weil 定数や二次指標など共役類の不変量で書き下した明示公式があり、それによってこの予想を確かめることはできると思われる。

4.2 安定跡公式

予想 4.3 の下で (3.1) の内側の和は

$$\sum_{\substack{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \text{ は } \gamma_H \text{ を} \\ \text{アデール像に持つ}}} \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)) e(\gamma_{\mathbb{A}}) O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0)$$

$$= \prod_v \Big(\sum_{\gamma_v^{G(F_v)} \subset G(F_v)} e(\gamma_v) \Delta(\gamma_H, \gamma_v) O_{\gamma_v}\Big(f_v, \frac{dg_v}{di_v}\Big)\Big)$$

と書ける。(正確にはアルキメデス素点だけはテスト関数 f_∞ を $\mathfrak{A}_G$ 上で平均した f_∞^0 を使っているので、$G(F_\infty) = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} G(\mathbb{R})$ を $\mathbb{Q}$ 代数群の $\mathbb{R}$ 値点の群と見て変形する必要がある。) 右辺の各素点の項は [今野 11a, 定理 3.1, 3.4] とその命題 3.3 による半単純元へ

の拡張を用いて、$H(F_v)$ 上の安定軌道積分で表すことができる。こうして次の定理が証明された。

定理 4.4 (跡公式の楕円項の安定化)**.** 予想 4.3 を仮定する。テスト関数 $f=\bigotimes_v f_v\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を取る。楕円的内視データ $\mathcal{E}=(H,{}^LH,s,\xi)$ と各素点で f_v に対して [今野 11a, 定理 3.1] の条件を満たす f_v^H があり、f_v が Hecke 環の単位元 $1_{\boldsymbol{K}_v}$ であるほとんどすべての素点では $f_v^H=1_{\boldsymbol{K}_v^H}$ に取れる。$f^H=\bigotimes_v f_v^H$ とおけば、跡公式の楕円項のうち中心項以外の部分 (1.1) は

$$T_{\mathrm{ell}}^{G,*}(f)=\sum_{\mathcal{E}\in\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)}\iota(G,H)ST_{\mathrm{ell},G}^H(f^H)$$

と展開される。ここで

$$ST_{\mathrm{ell},G}^H(f^H):=\sum_{\gamma_H^H\subset H_{G,H}(F)_{\mathrm{ell}}}\tau_1(H)SO_{\gamma_H}(f^H),$$
$$SO_{\gamma_H}(f^H)=\prod_v SO_{\gamma_H}(f_v^H)$$

と書いている。

注意 4.5. (i) 最初に除いた中心項 $\sum_{\zeta\in Z_G(F)}\tau(G)f(\zeta)$ は各項がすでに安定超関数であることが示せる。
(ii) たとえ H の安定跡公式が計算できても、(G,H) 正則項のみからなる部分 $ST_{\mathrm{ell},G}^H(f^H)$ は実質的に計算できない。従って定理のような部分的安定化を単独で応用するには、$ST_{\mathrm{ell},G}^H(f^H)=0$ となるようなテスト関数 f を取るしかない。

参考文献

[DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Vol. 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Kot83] Robert E. Kottwitz. Sign changes in harmonic analysis on reductive groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 278, No. 1, pp. 289–297, 1983.

[Kot86] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: elliptic singular terms. *Math. Ann.*, Vol. 275, No. 3, pp. 365–399, 1986.

[Kot88] Robert E. Kottwitz. Tamagawa numbers. *Ann. of Math.*, Vol. 127, pp. 629–646, 1988.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 4, pp. 726–785, 1979.

[LS87] R. P. Langlands and D. Shelstad. On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, Vol. 278, No. 1-4, pp. 219–271, 1987.

[LS90] R. Langlands and D. Shelstad. Descent for transfer factors. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Vol. 87 of *Progr. Math.*, pp. 485–563. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, Vol. 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[She83] Diana Shelstad. Orbital integrals, endoscopic groups and L-indistinguishability for real groups. In *Conference on automorphic theory (Dijon, 1981)*, Vol. 15 of *Publ. Math. Univ. Paris VII*, pp. 135–219. Univ. Paris VII, Paris, 1983.

[今野 11a] 今野拓也. 軌道積分の移行と基本補題. 若槻聡, 平賀郁（編）, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集. 2011. この報告集.

[今野 11b] 今野拓也. 内視論入門. 若槻聡, 平賀郁（編）, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集. 2011. この報告集.

安定跡公式入門: $GL(1)$ の捩じれた跡公式を例にとった解説

平賀 郁

Contents

1. 初めに

サマースクールでは GL_1 の捩じれた跡公式と Arthur の安定跡公式について解説を行いました. 本来はサマースクールでの講演にもとづき (simple version でない) 跡公式の安定化について解説を行うべきなのですが, 本概説では GL_1 の捩じれた跡公式を例にとり跡公式の安定化の解説を行うことにしました. その理由としては, Arthur 自身による 260 ページにもなる優れた概説論文 "An introduction to the trace formula" が既に存在しており, これより優れたものを本報告集にまとめるのは著者の能力を超えると思われたことと, GL_1 の捩じれた跡公式は初等的に安定化が行えるため表現論等を必要とせずに跡公式の安定化とはなにかを説明できることがあります.

一般の代数群に対しては, 跡公式の幾何側の主要部分である楕円項の安定化についての今野拓也氏による優れた解説が本報告集にあるのでそちらを読まれることをお薦めします.

本概説はサマースクールの報告集ということもあり日本語で記述しています. 安定跡公式とかエンドスコピーに関する日本語の専門用語は未だ一般に定着していないと思われますので, §A に本概説での日本語訳と元の英語との対照表をつけてあります.

捩じれたエンドスコピーは base change の一般化です. Base change に捩じれた跡公式を使うことは齋藤裕先生の論文 [Sai75] から始まりました.

2. Notations

本概説では F は数体とし, E を F の 2 次拡大体としています. また F の素点を v で表します. 更に次の記号を使います. (ヴェイユ群については [AT68, Chapter Fifteen] を参照してください.)

記号 2.1.

$\mathbb{A}$: F のアデール環
$\mathbb{A}_E$: E のアデール環
σ: $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元
$\overline{F}$: F の代数的閉体
Γ_F: F の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$
Γ_E: E の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$
W_F: F のヴェイユ群
W_E: E のヴェイユ群
W_{F_v}: F_v のヴェイユ群

ノルム写像を

$$N_{E/F}:\ E^\times \longrightarrow F^\times$$

とします. また $E^1 \subset E^\times$ を $N_{E/F}$ の核とします. つまり $E^1 = \{x \in E^\times \,|\, N_{E/F}x = 1\}$ です. ガロア群の元 σ の作用は $E \otimes_F F_v$ や $\mathbb{A}_E$ に自然に延長され, それも同じ記号 σ で表します. ノルム写像も $(E \otimes_F F_v)^\times$ や $\mathbb{A}_E^\times$ に自然に延長できますから, それらも同じ記号 $N_{E/F}$ で表すことにします.

$$N_{E/F} : (E \otimes_F F_v)^\times \longrightarrow F_v^\times$$
$$N_{E/F} : \mathbb{A}_E^\times \longrightarrow \mathbb{A}^\times$$

いまの場合 E/F は 2 次拡大体なので $E \otimes_F F_v$ は F_v の 2 次拡大体か $F_v \oplus F_v$ となります. 前者の場合 F_v の 2 次拡大体を E_v で表すことにします. 本概説では $E \otimes_F F_v = E_v$ となる素点全体のなす集合を $\mathfrak{P}_I$

で表し, $E\otimes_F F_v = F_v\oplus F_v$ となる素点全体のなす集合を $\mathfrak{P}_{NI}$ と表すことにします. つまり

$$E\otimes_F F_v = \begin{cases} E_v, & v\in\mathfrak{P}_I \\ F_v\oplus F_v, & v\in\mathfrak{P}_{NI}\end{cases}$$

となります.

いま $\mathbb{A}_F^\times/F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ は位数 2 の群になりますから, その非自明な指標を ω で表します. また $v\in\mathfrak{P}_I$ の場合にも $F^\times/N_{E/F}E^\times$ は位数 2 の群になりますから, その非自明な指標を ω_v で表します. 素点 $v\in\mathfrak{P}_{NI}$ に対しては $F_v^\times/N_{E/F}(E\otimes_F F_v)^\times$ は自明な群なので ω_v は自明な指標とします. またそれぞれを $\mathbb{A}_F^\times$, $F_v^\times$ の指標とみなします. つまり

$$\omega : F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \text{ で自明な } \mathbb{A}^\times \text{ の非自明な指標}$$

$$\omega_v : \begin{cases} N_{E/F}E_v^\times \text{ で自明な } F_v^\times \text{ の非自明な指標}, & v\in\mathfrak{P}_I \\ F_v^\times \text{ の自明な指標} & v\in\mathfrak{P}_{NI}\end{cases}$$

とします.

類体論により準同形写像

$$W_F \longrightarrow F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$$
$$W_{F_v} \longrightarrow F_v^\times$$

が得られるので, これにより $F^\times$ 上自明な $\mathbb{A}^\times$ の指標と W_F の 1 次元指標を同一視し, $F_v^\times$ の指標と W_{F_v} の 1 次元指標を同一視します.

素点 $v\in\mathfrak{P}_I$ に対しては σ_v を $\mathrm{Gal}(E_v/F_v)$ の自明でない元とし, 素点 $v\in\mathfrak{P}_{NI}$ に対しては σ_v を自明な $F_v\oplus F_v$ への作用とします (よって σ の $F_v\oplus F_v$ への作用とは異なります). 本概説を通じて W_E に含まれない W_F の元 w_σ を固定し, 素点 $v\in\mathfrak{P}_I$ に対しても W_{E_v} に含まれない W_{F_v} の元 w_{σ_v} を固定しておきます. また素点 $v\in\mathfrak{P}_{NI}$ に対しては $w_{\sigma_v}=1$ としておきます.

Remark 2.2. いま

$$W_F/W_E = \Gamma_F/\Gamma_E = \langle\sigma\rangle$$

なので $w_\sigma^2\in W_E$ となりますが, w_σ^2 の準同形写像

$$W_E \longrightarrow E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$$

での像は $\mathbb{A}^\times - F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ に入ります. よって

$$\omega(w_\sigma^2) = -1$$

です. 同様に $v\in\mathfrak{P}_I$ に対しては

$$\omega_v(w_{\sigma_v}^2) = -1$$

が成り立ちます.

ユニタリ群は

$$\{\delta \in GL_1(E) |\, \delta\sigma(\delta) = 1\}$$

ですが, F 上定義された代数群を考えたいので, 次のように U_1 を定義します. まず

$$G = \mathrm{Res}_{E/F} GL_1$$

とします. 記号 $\mathrm{Res}_{E/F}$ は Weil restriction of scalars を意味しています. つまり G は F 上定義された代数群で, $\overline{F}$ 上では $GL_1 \times GL_1$ と同形ですがガロア群 Γ_F の作用が

$$\tau(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} (\tau(\delta_1), \tau(\delta_2)), & \tau \in \Gamma_E \\ (\tau(\delta_2), \tau(\delta_1)), & \tau \in \Gamma_F - \Gamma_E \end{cases} \qquad (\delta_1, \delta_2) \in G$$

となるものです. すぐに分かるように G に対しては

$$G(F) = \{(\delta, \sigma(\delta)) |\, \delta \in GL_1(E)\} \simeq GL_1(E) = E^\times$$

が成り立ちます. ここで

$$\overline{(\delta_1, \delta_2)} = (\delta_2, \delta_1), \qquad (\delta_1, \delta_2) \in G$$

とすると $\bar{\cdot}$ は F 上定義された同形写像で, $E^\times$ への σ の作用を $G(F) \simeq E^\times$ により $G(F)$ に引き戻したものになっています. (ガロア群の元としての σ の G への作用とは異なっているので別の記号にしてあります.) 代数群としての U_1 を

$$U_1 = \{\delta \in G |\, \delta\overline{\delta} = 1\}$$

により定めます. 定義から

$$U_1(F) = \{(\delta, \sigma(\delta)) |\, \delta \in E^\times, \delta\sigma(\delta) = 1\}$$

となりますから, これは確かにユニタリ群です.

Remark 2.3. U_1 は E 上定義された写像

$$U_1 \ni (\delta, \delta^{-1}) \mapsto \delta \in GL_1$$

により GL_1 と同形になりますから G は U_1 の base change に対応する代数群です.

素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ では U_1 は E_v/F_v に対応するユニタリ群になります. 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ では G は $GL_1 \times GL_1$ と F_v 上同形になり U_1 は同形写像

$$U_1 \ni (\delta_v, \delta_v^{-1}) \mapsto \delta_v \in GL_1$$

により F_v 上 GL_1 と同形になります.

3. L-群と Langlands 対応

3.1. L-**群.** ここでは L-群について簡単に説明します. いま F 上定義された代数群 T で $\overline{F}$ 上 $GL_1 \times \cdots \times GL_1$ と同形になっているもの (G も U_1 もそうです) について

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, GL_1)$$
$$X_*(T) = \mathrm{Hom}(GL_1, T)$$

と定義します. ここで X^* と X_* が入れ替わるものが双対群 $\hat{T}$ です. つまり

$$\hat{T} = X^*(T) \otimes GL_1(\mathbb{C})$$

と定義されます. $X^*(T)$ にはガロア群 Γ_F が作用していますから, $GL_1(\mathbb{C})$ に Γ_F を自明に作用させることにより, $\hat{T}$ への Γ_F の作用が定まります. よって準同形写像 $W_F \longrightarrow \Gamma_F$ を経由してヴェイユ群 W_F が $\hat{T}$ に作用します. T の L-群とは半直積

$${}^LT = \hat{T} \rtimes W_F$$

のことです. G と U_1 に対しては

$$\hat{G} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times, \qquad \tau(g_1, g_2) = \begin{cases} (g_1, g_2), & \tau \in \Gamma_E \\ (g_2, g_1), & \tau \in \Gamma_F - \Gamma_E \end{cases}$$
$$\hat{U}_1 = \mathbb{C}^*, \qquad \tau(h) = \begin{cases} h, & \tau \in \Gamma_E \\ h^{-1} & \tau \in \Gamma_F - \Gamma_E \end{cases}$$

となります. 素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ のときも同様で, $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ のときには $\hat{T}, \hat{G}$ に Γ_{F_v} が自明に作用します.

F 上定義された準同形写像 $T_1 \longrightarrow T_2$ に対して, 自然な準同形写像 $X^*(T_2) \longrightarrow X^*(T_1)$ が存在しますが, これは Γ_F の作用と可換なので Γ_F の作用と可換な双対群の間の準同形写像

$$\hat{T}_2 \longrightarrow \hat{T}_1$$

と L-群の間の自然な準同形写像

$${}^LT_2 \longrightarrow {}^LT_1$$

が定まります.

F 上定義された G の同形写像 θ を

$$\theta(\delta_1, \delta_2) = (\delta_2^{-1}, \delta_1^{-1}), \quad (\delta_1, \delta_2) \in G$$

と定めます. これに対応して双対群 $\hat{G}$ の同形写像

$$\hat{\theta} \colon (g_1, g_2) \mapsto (g_2^{-1}, g_1^{-1}), \quad (g_1, g_2) \in \hat{G}$$

が得られます. いま準同形写像

$$\hat{U}_1 \ni h \mapsto (h, h^{-1}) \in \hat{G}$$

が存在し, その像は $\{g \in \hat{G} | \, \hat{\theta}(g) = g\}$ となります. この準同形写像の双対となる準同形写像は

$$G \ni (\delta_1, \delta_2) \mapsto \delta_1\delta_2^{-1} \in U_1$$

なので $G(F) \simeq E^\times$ から $U_1(F) \simeq E^1$ への写像としては

$$E^\times \ni \delta \mapsto \delta\sigma(\delta)^{-1} \in E^1$$

となります.

3.2. **Langlands 対応.** 完全列

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & F^\times & \longrightarrow & E^\times & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \delta & \longrightarrow & \delta\sigma(\delta)^{-1} & & \end{array}$$

に対応して代数群の完全列

$$1 \longrightarrow GL_1 \longrightarrow G \longrightarrow U_1 \longrightarrow 1$$

とその双対

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longleftarrow & {}^LGL_1 & \longleftarrow & {}^LG & \xleftarrow{\xi_1} & {}^LU_1 & \longleftarrow & 1 \\ & & & & (h, h^{-1}) \rtimes w & \longleftarrow & h \rtimes w & & \end{array}$$

があります.

定義 3.1. U_1 の L-パラメーターとは連続な準同形写像

$$\phi \colon W_F \longrightarrow {}^LU_1 = \hat{U}_1 \rtimes W_F$$

で第 2 因子への射影が恒等写像となっているもののことです. (G, GL_1 の L-パラメーターも同様です.)

Tate–中山双対により U_1 の L-パラメーターと $U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})$ の 1 次元指標とが対応しています. この対応を以下で説明します. L-パラメーター $\phi \colon W_F \longrightarrow {}^LU_1$ があると, ξ_1 との合成により L-パラメーター

$$\xi_1 \circ \phi \colon W_F \longrightarrow {}^LU_1 \xrightarrow{\xi_1} {}^LG$$

が得られます. $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \simeq E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ なので $\xi_1 \circ \phi$ は $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標を定めるはずですが, それは $\xi_1 \circ \phi$ を W_E に制限して $\hat{G} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ の第 1 因子への射影をとった準同形写像

$$proj_1 \circ (\xi_1 \circ \phi)|_{W_E} \colon W_E \longrightarrow {}^LG \xrightarrow{proj_1} \mathbb{C}^\times$$

に類体論で対応するものです. この $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標は $\mathbb{A}^\times$ に制限すると自明になるので

$$\mathbb{A}^\times E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times \simeq U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})$$

の 1 次元指標を定めます. これが L-パラメーター $\phi\colon W_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対応する 1 次元指標です. 素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しても同様にして L-パラメーター $\phi_v : W_{F_v} \longrightarrow {}^L U_1$ と $U_1(F_v) \simeq E_v^1$ の 1 次元指標が対応します. 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ のときには $U_1 \simeq GL_1$ なので L-パラメーターと $U_1(F_v) \simeq F_v^\times$ との対応は局所類体論の定めるものになります.

定義 3.2. L-パラメーター $\phi\colon W_F \longrightarrow {}^L U_1$ に対応する $U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})$ の 1 次元指標を ρ_ϕ と表すことにし, L-パラメーター $\varphi : W_F \longrightarrow {}^L G$ に対応する $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \simeq E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標を π_φ と表すことにします. 局所的な L-パラメーターに関しても同様に表すことにします.

L-パラメーター $\phi\colon W_F \longrightarrow {}^L U_1$ を W_{F_v} へ制限すると, 局所的な L-パラメーター ϕ_v が得られ,

$$\rho_\phi = \otimes_v \rho_{\phi_v}$$

となっています.

以下では説明を分かりやすくする為, $G(F)$ を $E^\times$ と同一視し, $U_1(F)$ を E^1 と同一視します. また $G(\mathbb{A})$ を $\mathbb{A}_E^\times$ と同一視します. 同様に $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しては $G(F_v)$ を $E_v^\times$ と同一視し, $U_1(F_v)$ を E_v^1 と同一視します. また $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ に対しても $G(F_v)$ を $F_v^\times \times F_v^\times$ と同一視し, $U_1(F_v)$ を $F_v^\times$ と同一視します.

$G(\mathbb{A}_F) \simeq \mathbb{A}_E^\times$ により θ を $\mathbb{A}_E^\times$ の同形写像とみると

$$\theta(\delta) = \sigma(\delta)^{-1}, \quad \delta \in \mathbb{A}_E^\times$$

となります. 局所体のときも同様です.

4. G の捩じれた跡公式の安定化

4.1. G **の捩じれたエンドスコピー.** §3.2 の Langlands 対応の記述から

$$\pi_{\xi_1\circ\phi}(\delta) = \rho_\phi(\delta\overline{\delta}^{-1})$$
$$\pi_{\xi_1\circ\phi_v}(\delta_v) = \rho_{\phi_v}(\delta_v\overline{\delta_v}^{-1})$$

となることが分かります. これはエンドスコピーによる移送

$$\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G : \rho_\phi \longrightarrow \pi_{\xi_1\circ\phi}$$

を定めます.

このとき, $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G$ の像は §3.2 の Langlands 対応の記述から

$$\pi|_{E^\times\mathbb{A}_F^\times} \equiv 1$$

をみたす $\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標の全体となります. いま $\delta\theta(\delta)^{-1} \in GL_1$ ($\mathbb{A}_E^\times$ と同一視すると $\delta\theta(\delta)^{-1} = \delta\sigma(\delta) \in \mathbb{A}_F^\times$) なので, このような π は θ-不変です. また次が成り立つこともわかります.

Remark 4.1. π が θ-不変 $\Longleftrightarrow \pi|_{E^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times} \equiv 1$

ですから θ-不変な π には $\mathrm{Tran}^{G}_{U_1,\xi_1}$ の像に入らないものがあります．実は $\xi_1 : {}^LU_1 \longrightarrow {}^LG$ の他にもうひとつ

$$\xi_2 : {}^LU_1 \longrightarrow {}^LG$$

が存在しています．これは $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の指標 μ として $\mathbb{A}_F^\times$ に制限したとき ω となるものをひとつ固定して,

$$\begin{aligned}\xi_2(h \rtimes w) &= (h\mu(w), h\mu(w)) \rtimes w, \quad h \rtimes w \in \hat{U}_1 \rtimes W_E\\ \xi_2(1 \rtimes w_\sigma) &= (1, -1) \rtimes w_\sigma\end{aligned}$$

と定めることにより得られます．準同形写像 ξ_2 による 1 次元指標の間の対応は

$$\pi_{\xi_2\circ\phi}(\delta) = \rho_\phi(\delta\overline{\delta}^{-1})\mu(\delta)$$

により与えられます．この対応を

$$\mathrm{Tran}^{G}_{U_1,\xi_2} : \rho_\phi \mapsto \pi_{\xi_2\circ\phi}$$

と表すと, $\mathrm{Tran}^{G}_{U_1,\xi_2}$ の像は $\mathbb{A}_F^\times$ への制限が ω となる $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標の全体となるので, $\mathrm{Tran}^{G}_{U_1,\xi_1}$ と $\mathrm{Tran}^{G}_{U_1,\xi_2}$ の像の合併が θ-不変な $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標の全体と一致します．

2 個の $(U_1,\xi_1), (U_1,\xi_2)$ ([KS99] の記号で $(U_1, {}^LU_1, 1, \xi_1), (U_1, {}^LU_1, 1, \xi_2)$) が G の θ に対応する捩じれたエンドスコピーの同値類の代表系になります．

素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しても上記と同様のことが成り立ちます． 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ に対しては $\mathrm{Tran}^{G}_{U_1,\xi_1}$ と $\mathrm{Tran}^{G}_{U_1,\xi_2}$ の像は一致していて両方とも θ-不変な $F_v^\times \times F_v^\times$ の 1 次元の全体となります．

4.2. U_1 **の跡公式.** U_1 の跡公式は Poisson の和公式そのものです．$\mathcal{H}(U_1(\mathbb{A}))$ を $U_1(\mathbb{A})$ 上の滑らかでコンパクトな台をもつ関数全体の集合とします．また $f \in \mathcal{H}(U_1(\mathbb{A}))$ と $\gamma \in U_1(\mathbb{A})$ と $U_1(\mathbb{A})$ の 1 次元指標 ρ に対して

$$\begin{aligned}J(\gamma, f) &= f(\gamma)\\ J(\rho, f) &= \int_{U_1(\mathbb{A})} \rho(x) f(x)\, dx\end{aligned}$$

と定めます．また $U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})$ の 1 次元指標全体の集合を $\Pi(U_1)$ と表すことにします．このとき U_1 の跡公式は

$$\sum_{\gamma\in U_1(F)} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))\cdot J(\gamma, f) = \sum_{\rho\in\Pi(U_1)} 1\cdot J(\rho, f)$$

となります．これは安定跡公式になっています．

記号 4.2. U_1 の跡公式の両辺を $\hat{S}^{U_1}(f)$ と表すことにします．

4.3. G **の捩じれた跡公式.** いま

$$\mathfrak{A}_G = \left\{ (x, x, \dots, x) \in \prod_{v:\text{ archimedean}} G(F_v) \middle| \, x \in \mathbb{R}^\times_{>0} \right\}$$

として, $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$ への θ の作用 $I(\theta)$ を

$$(I(\theta)\psi)(x) = \psi(\theta^{-1}(x)), \quad \psi \in L^2(G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$$

と定義します. $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$ には $G(\mathbb{A})$ が右移動 r で作用します. つまり $\delta \in G(\mathbb{A})$ が $r(\delta) : \psi(x) \mapsto \psi(x\delta)$ により作用しています. これは $G(\mathbb{A})$ の表現です. いま $G(\mathbb{A})$ 上の滑らかでコンパクトな台をもつ関数全体の集合を $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ と表し, $\tilde{f} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}))$ への作用を

$$(r(\tilde{f})\psi)(x) = \int_{G(\mathbb{A})} \tilde{f}(y)\psi(xy)\, dy$$

で定義します. $G(\mathbb{A})$ の既約表現 π に対しても同様に作用素 $\pi(\tilde{f})$ を定めます. $G(\mathbb{A})$ の捩じれた跡公式は $r(\tilde{f}) \circ I(\theta)$ の跡についての公式です. $\Pi^\theta(G)$ を r の既約分解に現れる $G(\mathbb{A})$ の表現 π で $\pi(\theta^{-1}(\delta)) = \pi(\delta)$ をみたすもの全体の集合とします. $\pi \in \Pi^\theta(G)$ とするとき π への $I(\theta)$ の制限も同じ記号 $I(\theta)$ で表します. (実際にはこのとき $I(\theta)$ の π への制限は恒等写像です.)

定義 4.3. $\delta, \delta' \in G(F)$ が θ-共役とは

$$\delta' = x^{-1}\delta\theta(x)$$

となる $x \in G(F)$ が存在することです. このとき

$$\delta' \sim_\theta \delta$$

と表すことにします.

Remark 4.4. いま

$$x^{-1}\delta\theta(x) = x^{-1}\theta(x)\delta = N_{E/F}(x^{-1})\delta$$

なので

$$U_1 = \{x \in G| \, x^{-1}\delta\theta(x) = \delta\}$$

であり, $G(F) \simeq E^\times$ の θ-共役類は $E^\times / N_{E/F}E^\times$ と同一視されます.

捩じれた軌道積分を

$$J^\theta(\delta, \tilde{f}) = \int_{U_1(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \tilde{f}(x^{-1}\delta\theta(x))\, dx$$

と定義します.

このとき捩じれた跡公式は次のようになります.

命題 4.5.

$$2\cdot \sum_{\delta\in E^\times/N_{E/F}E^\times} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))J^\theta(\delta,\tilde{f}) = \sum_{\pi\in\Pi^\theta(G)} 1\cdot \mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))$$

(左辺は $G(F)\simeq E^\times$ により $\delta\in G(F)$ を $E^\times$ の元とみています.)

Proof.

$$\begin{aligned}(r(\tilde{f})\circ I(\theta)\psi)(x) &= \int_{G(\mathbb{A})}\tilde{f}(y)\psi(\theta^{-1}(xy))\,dy = \int_{G(\mathbb{A})}\tilde{f}(x^{-1}\theta(y))\psi(y)\,dy\\ &= \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}\sum_{\delta\in G(F)}\int_{\mathfrak{A}_G}\tilde{f}(x^{-1}\delta\theta(y)a)\psi(y)\,da\,dy\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(r(\tilde{f})\circ I(\theta)) &= \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}\sum_{\delta\in G(F)}\int_{\mathfrak{A}_G}\tilde{f}(x^{-1}\delta\theta(x)a)\,da\,dx\\ &= 2\int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})}\sum_{\delta\in G(F)}\int_{\mathfrak{A}_G}\tilde{f}(a^{-1}x^{-1}\delta\theta(xa))\,da\,dx\end{aligned}$$

を変形していくと幾何側がでます. 一方, スペクトル側が

$$\sum_{\pi\in\Pi^\theta(G)} 1\cdot\mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))$$

となることはすぐに分かります. □

4.4. G **の安定** θ**-共役.**

定義 4.6. $\delta,\delta'\in G(F)$ が安定 θ-共役とは

$$\delta' = x^{-1}\delta\theta(x)$$

となる $x\in G(\overline{F})$ が存在することです. このとき

$$\delta' \sim_{st,\theta} \delta$$

と表すことにします. 同様にして $\delta_v,\delta'_v\in G(F_v)$ が安定 θ-共役であるということも定義されます. (F を F_v に書き換えるだけです.)

補題 4.7. $\delta,\delta'\in G(F)$ が θ-共役になる為の必要十分条件は, $G(F)\simeq E^\times$ により $E^\times$ の元とみて

$$\delta'\in\delta N_{E/F}E^\times$$

が成り立つことです. 一方で $\delta,\delta'\in G(F)\simeq E^\times$ が安定 θ-共役になる為の必要十分条件は

$$\delta'\in\delta F^\times$$

が成り立つことです.

Proof. θ-共役については既に示してあるので, 安定 θ-共役について証明します.

$x=(x_1,x_2)\in G(\overline{F})$ とするとき

$$x^{-1}\theta(x)=(x_1^{-1},x_2^{-1})(x_2^{-1},x_1^{-1})=(x_1^{-1}x_2^{-1},x_2^{-1}x_1^{-1})$$

です. よって $x\in G(\overline{F})$ に対して $N_{E/F}(x)=x\theta(x)^{-1}=x\overline{x}$ と定めると

$$N_{E/F}G(\overline{F})=\{(y,y)|\,y\in GL_1(\overline{F})\}$$

なので

$$N_{E/F}G(\overline{F})\cap G(F)=\{(y,y)|\,y=\sigma(y),y\in GL_1(E)\}\simeq F^\times$$

となり,

$$\delta'\sim_{\theta,st}\delta\Longleftrightarrow\delta'=x^{-1}\theta(x)\delta,\quad {}^\exists x\in G(\overline{F})$$

より, 安定 θ-共役の場合が証明されます. □

系 4.8. $\delta,\delta'\in G(F)$ に対して

$$\delta'\theta(\delta')=\delta\theta(\delta)\Longleftrightarrow\delta'\sim_{\theta,st}\delta.$$

Proof. $\delta',\delta\in E^\times$ とみて

$$\delta'\sim_{st,\theta}\delta\Longleftrightarrow\delta'\in\delta F^\times\Longleftrightarrow\delta'\sigma(\delta')^{-1}=\delta\sigma(\delta)^{-1}$$

なので $x\in G$ に対して $\overline{x}=\theta(x)^{-1}$ であることからいえます. ($G(F)$ での $\bar{\cdot}$ の作用は $E^\times$ では σ になっていました.) □

Remark 4.9. 素点 $v\in\mathfrak{P}_I$ でも同様の結果が成り立ちます. 素点 $v\in\mathfrak{P}_{NI}$ では

$$\delta'_v\sim_{st,\theta}\delta_v\Longleftrightarrow\delta'_v\sim_\theta\delta_v\Longleftrightarrow\delta'_v\theta(\delta'_v)=\delta_v\theta(\delta_v)$$

が成り立ちます.

定義 4.10. $\delta',\delta\in G(\mathbb{A})$ が $G(\mathbb{A})$ の下で θ-共役とは $\delta'=x^{-1}\delta\theta(x)$ をみたす $x\in G(\mathbb{A})$ が存在することです. 同様に $\overline{\mathbb{A}}=\mathbb{A}\otimes_F\overline{F}$ として $G(\overline{\mathbb{A}})$ の下での θ-共役も定義されます. それぞれ $\delta'\sim_{\mathbb{A},\theta}\delta$, $\delta'\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta$ と表すことにします.

補題 4.11. $\delta',\delta\in G(\mathbb{A})$ に対して次が成り立ちます.

$$\begin{aligned}\delta'\sim_{\mathbb{A},\theta}\delta &\Longleftrightarrow\delta'\in\delta N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times &&\Longleftrightarrow\delta'_v\sim_\theta\delta_v,\ {}^\forall v\\ \delta'\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta &\Longleftrightarrow\delta'\in\delta\mathbb{A}^\times &&\Longleftrightarrow\delta'_v\sim_{st,\theta}\delta_v,\ {}^\forall v\end{aligned}$$

系 4.12. $\delta',\delta\in G(F)$ に対しては

$$\delta'\sim_\theta\delta\Longleftrightarrow\delta'\sim_{\mathbb{A},\theta}\delta$$

$$\delta'\sim_{st,\theta}\delta\Longleftrightarrow\delta'\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta$$

も成り立ちます.

Proof. θ-共役については補題 4.7 と補題 4.11 と $(N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \cap E^\times) = N_{E/F}E^\times$ から従います. 安定 θ-共役については補題 4.7 と補題 4.11 と $\mathbb{A}^\times \cap E^\times = F^\times$ から従います. □

定義 4.13. $\delta'_v, \delta_v \in G(F_v)$ が安定 θ-共役になっているとき

$$\mathbf{inv}(\delta'_v, \delta_v) = \delta'_v\delta_v^{-1} \text{ の } F_v^\times / N_{E/F}(E \otimes_F F_v)^\times \text{ での像}$$

と定義します.

定義 4.14. $\delta \in G(\mathbb{A})$ と $\gamma \in U_1(\mathbb{A})$ が

$$\gamma = \delta\theta(\delta)$$

をみたすとき γ は δ のノルムであるといいます. δ を $\mathbb{A}_E^\times$ の元とみると $\delta\theta(\delta)$ は $\delta\sigma(\delta)^{-1}$ となります. （G を U_1 の base change とみたときのノルムです.）局所体の場合も同様に $\gamma_v = \delta_v\theta(\delta_v)$ によりノルムを定めます.

Remark 4.15. 補題 4.11 から $\delta', \delta \in G(\mathbb{A})$ に対して次がいえます.

$$\delta' \text{ と } \delta \text{ のノルムが等しい} \iff \delta' \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta$$

定義 4.16. 以下, 各 $\gamma \in U_1(F)$ に対して γ が $\delta^\gamma \in G(F)$ のノルムとなるような δ^γ を固定しておきます. また $\delta \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta^\gamma$ となる $\delta \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$\mathbf{obs}(\delta) = \delta(\delta^\gamma)^{-1} \text{ の } \mathbb{A}^\times / F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \text{ での像}$$

と定義します. よって $\mathbf{obs}(\delta)$ は $\prod_v \mathbf{inv}(\delta_v, \delta_v^\gamma)$ の $\mathbb{A}^\times / F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ での像です. (無限積は実際は有限個を除いて 1 です.)

Remark 4.17. 本概説では $\mathbf{obs}$ をノルムが $U_1(F)$ に入る $\delta \in G(\mathbb{A})$ に対して定義しています. 本概説での $\mathbf{inv}, \mathbf{obs}$ は [KS99] のものとは少し異なっています.

補題 4.18. $\mathbf{obs}(\delta)$ は δ^γ の取り方に拠っていません. また次が成り立ちます.

$$\mathbf{obs}(\delta) = 1 \iff \delta \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta' \textit{ for some } \delta' \in G(F)$$

Proof. $\mathbf{obs}(\delta) = 1$ とすると $\delta = \delta^\gamma tx,\, t \in F^\times, x \in N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ と書かれるので, $\delta' = \delta^\gamma t \in G(F)$ とおくと $\delta \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta'$ となります. 逆に $\delta' \in G(F)$ に対して $\delta \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta'$ が成り立つとすると, $\delta' \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta^\gamma$ となることと系 4.12 から $\delta' \in \delta^\gamma F^\times$ が分かります. よって $\delta \in \delta' N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \in \delta^\gamma F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ となります. 最後に右辺の条件は δ^γ の取り方に拠らないので $\mathbf{obs}$ は δ^γ の取り方に拠らないことが分かります. □

4.5. **移送.**

定義 4.19. $\gamma \in U_1(\mathbb{A})$ が $\delta \in G(\mathbb{A})$ のノルムであるとき, 移送因子 Δ_ξ ($\xi = \xi_1, \xi_2$) を

$$\Delta_{\xi_1}(\gamma, \delta) = 1$$
$$\Delta_{\xi_2}(\gamma, \delta) = \mu(\delta)$$

と定義します. γ が δ のノルムでないときには $\xi = \xi_1, \xi_2$ のどちらに対しても

$$\Delta_\xi(\gamma, \delta) = 0$$

とします. 局所体 F_v の場合も同様に移送因子を定めます.

Remark 4.20. γ が δ のノルムであるとき $x \in \mathbb{A}^\times$ に対して

$$\Delta_{\xi_1}(\gamma, \delta x) = \Delta_{\xi_1}(\gamma, \delta)$$
$$\Delta_{\xi_2}(\gamma, \delta x) = \omega(x)\Delta_{\xi_2}(\gamma, \delta)$$

が成り立ちます. 局所体 F_v の場合も同様です.

補題 4.21. 定義から $\gamma \in U_1(F)$ と $\delta \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta^\gamma$ をみたす $\delta \in G(\mathbb{A})$ に対して次が成り立つことが分かります.

$$\Delta_\xi(\gamma, \delta) = \begin{cases} 1, & \xi = \xi_1 \\ \omega(\mathbf{obs}(\delta)), & \xi = \xi_2 \end{cases}$$

補題 4.22. $\tilde{f} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $\xi = \xi_1, \xi_2$ に対して f^ξ を

$$J(\gamma, f^\xi) = f^\xi(\gamma) = \sum_{\delta \in \mathbb{A}_E^\times / N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times} \Delta_\xi(\gamma, \delta) J^\theta(\delta, \tilde{f})$$

により定めると $f^\xi \in \mathcal{H}(U_1(\mathbb{A}))$ となります.

Remark 4.23. 一般の簡約代数群の跡公式を扱うときには, 上記の補題は局所体上の 2 つの定理に分解されます. ひとつは移送の存在定理で, もうひとつは基本補題です.

4.6. G **の捩じれた跡公式の安定化.**

まずスペクトル側の安定化を行います. $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi}^G$ の定義と f^ξ の定義から次の補題が成り立つことが分かります.

補題 4.24. $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の *1* 次元指標 ρ と $\xi = \xi_1, \xi_2$ に対して $\pi^\xi = \mathrm{Tran}_{U_1,\xi}^G(\rho)$ と定めると, $\pi^\xi \in \Pi^\theta(G)$ であり, しかも

$$\mathrm{trace}(\pi^\xi(\tilde{f}) \circ I(\theta)) = \mathrm{trace}(\pi^\xi(\tilde{f})) = J(\rho, f^\xi)$$

が成り立ちます. (いまの場合は $I(\theta)$ は恒等写像です.)

定理 4.25. G の捩じれた跡公式のスペクトル側は下のように安定化されます.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi\in\Pi^{\theta}(G)} 1\cdot\mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))\\
&=\sum_{\substack{\pi\in\Pi^{\theta}(G)\\ \pi|_{\mathbb{A}^{\times}}\equiv 1}} 1\cdot\mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))+\sum_{\substack{\pi\in\Pi^{\theta}(G)\\ \pi|_{\mathbb{A}^{\times}}\equiv \omega}} 1\cdot\mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))\\
&=\sum_{\rho\in\Pi(U_1)} J(\rho,f^{\xi_1})+\sum_{\rho\in\Pi(U_1)} J(\rho,f^{\xi_2})\\
&=\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_1})+\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_2})
\end{aligned}$$

また, これまで説明してきたことを使うと G の捩じれた跡公式の幾何側は次のようにして安定化されることが分かります.

定理 4.26.

$$\begin{aligned}
&2\cdot\sum_{\delta\in E^{\times}/N_{E/F}E^{\times}} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))J^{\theta}(\delta,\tilde{f})\\
=&2\cdot\sum_{\gamma\in U_1(F)}\sum_{\substack{\delta\in E^{\times}/N_{E/F}E^{\times}\\ \delta\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta^{\gamma}}} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))J^{\theta}(\delta,\tilde{f})\\
=&2\cdot\sum_{\gamma\in U_1(F)}\sum_{\substack{\delta\in \mathbb{A}_E^{\times}/N_{E/F}\mathbb{A}_E^{\times}\\ \delta\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta^{\gamma}}} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))\frac{1}{2}(1+\omega(\mathbf{obs}(\delta)))J^{\theta}(\delta,\tilde{f})\\
=&2\cdot\sum_{\gamma\in U_1(F)}\sum_{\substack{\delta\in \mathbb{A}_E^{\times}/N_{E/F}\mathbb{A}_E^{\times}\\ \delta\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta^{\gamma}}} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))\frac{1}{2}(\Delta_{\xi_1}(\gamma,\delta)+\Delta_{\xi_2}(\gamma,\delta))J^{\theta}(\delta,\tilde{f})\\
=&\sum_{\gamma\in U_1(F)} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))(J(\gamma,f^{\xi_1})+J(\gamma,f^{\xi_2}))\\
=&\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_1})+\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_2})
\end{aligned}$$

5. パケットと安定跡公式: 変則的な解説

この節では安定跡公式とパケット・重複度公式とがどのように関係しているかについて説明したいと思いますが, 残念ながら G の捩じれた跡公式のスペクトル側はこの節の目的からすると良い例になっていません. しかし, 幾何側とスペクトル側は “双対” と考えられ, G と U_1 の跡公式の幾何側をスペクトル側に見立てると, パケットがどのようなものなのかを大まかに説明することができます. (但し本来のパケットは捩じれていないエンドスコピーにより記述されるので, その意味でも

ここでの説明はあくまでも類似として捉えておいてください.）この節では以後, 幾何側とスペクトル側の役割を入れ替えて, 幾何側をスペクトル側に見立てて説明をしていきたいと思います.

$$\boxed{\text{スペクトル側}} \overset{\text{役割を入れ替えて説明}}{\longleftrightarrow} \boxed{\text{幾何側}}$$

この節の内容は幾何側とスペクトル側, 捩じれたエンドスコピーと捩じれていないエンドスコピーを混同したようなものになっています. ですから, この節の定義や用語等をそのまま信じてはいけません! 必要なときには, 必ずきちんとした文献で定義や用語を確認してください.

5.1. **局所パケットの類似.** §4.5 で定めた対応 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A})) \ni \tilde{f} \mapsto f^{\xi} \in \mathcal{H}(U_1(\mathbb{A}))$ と同様に局所体上でも

$$J(\gamma_v, f_v^{\xi}) = f_v^{\xi}(\gamma_v) = \sum_{\delta_v \in E_v^{\times}/N_{E/F}(E\otimes_F F_v)^{\times}} \Delta_{\xi}(\gamma_v, \delta_v) J^{\theta}(\delta_v, \tilde{f}_v)$$

により $\mathcal{H}(G(F_v)) \ni \tilde{f}_v \mapsto f_v^{\xi} \in \mathcal{H}(U_1(F_v))$ を定めることができます. 但し $\Delta_{\xi}(\delta_v, \gamma_v)$ もアデール上のものと同様に

$$\Delta_{\xi_1}(\gamma_v, \delta_v) = \begin{cases} 1, & \gamma_v \text{ が } \delta_v \text{ のノルム} \\ 0, & \gamma_v \text{ が } \delta_v \text{ のノルムではない} \end{cases}$$

$$\Delta_{\xi_2}(\gamma_v, \delta_v) = \begin{cases} \mu_v(\delta_v), & \gamma_v \text{ が } \delta_v \text{ のノルム} \\ 0, & \gamma_v \text{ が } \delta_v \text{ のノルムではない} \end{cases}$$

定義します. これにより $\mathcal{H}(U_1(F_v))$ 上の線形形式 $l\colon \mathcal{H}(U_1(F_v)) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{H}(G(F_v)) \ni \tilde{f} \mapsto f^{\xi} \mapsto l(f^{\xi}) \in \mathbb{C}$$

により $\mathcal{H}(G(F_v))$ 上の線形形式に持ち上げることができます. このようにして得られた $\mathcal{H}(G(F_v))$ 上の線形形式を $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi}^{G}(l)$ と表します. 以下素点としては $v \in \mathfrak{P}_I$ のときだけを説明します. 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ では状況が簡単になるので考えてみてください. いま $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi}^{G}$ により線形形式

$$J(\gamma_v)\colon f_v \mapsto J(\gamma_v, f_v), \quad \gamma_v \in U_1(F_v),\, f_v \in \mathcal{H}(U_1(F_v))$$

を持ち上げると, 定義から

$$\begin{aligned} \mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^{G}(J(\gamma_v)) &= J^{\theta}(\delta_v^{\gamma_v}) + J^{\theta}(\delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v) \\ \mathrm{Tran}_{U_1,\xi_2}^{G}(J(\gamma_v)) &= \mu_v(\delta_v^{\gamma_v}) J^{\theta}(\delta_v^{\gamma_v}) - \mu(\delta_v^{\gamma_v}) J^{\theta}(\delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v) \end{aligned}$$

となることが分かります. 但し $\delta_v^{\gamma_v}$ は γ_v が $\delta_v^{\gamma_v}$ のノルムとなるようなものを一つ固定して, ϵ_v も $F_v^{\times} - N_{E/F}E_v^{\times}$ の元をひとつ固定していま

す．このように $J(\gamma_v)$ から $\mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi_1}, \mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi_2}$ によって持ち上げられた線形形式に現れる θ-共役類が局所的な "A-パケット" です．つまり

$$\{\delta_v^{\gamma_v}, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v\}$$

が γ_v と対応する G の局所的な "A-パケット" ということになります.

Remark 5.1. 実際の表現の場合には対応は A-パラメーターを使って表されると予想されています. L-パケットと A-パケットとは一般には別のものです. 齋藤–黒川リフトの場合のように, 一般の L-パケットに対しては上記のような記述は成り立ちません.

定義 5.2. $\xi = \xi_1, \xi_2$ と $\delta_v^{\gamma_v}, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v$ とのペアリングを

$$\begin{aligned}\langle \xi_1, \delta_v^{\gamma_v}\rangle &= 1\\ \langle \xi_2, \delta_v^{\gamma_v}\rangle &= 1\\ \langle \xi_1, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v\rangle &= 1\\ \langle \xi_2, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v\rangle &= -1\end{aligned}$$

と定めます．また γ_v が $\gamma \in U_1(F)$ の局所因子になっているときには $\delta_v^{\gamma_v}$ を δ^γ の局所因子にとります.

Remark 5.3. 定数倍を除いて $\mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi}(J(\gamma_v))$ における $J^\theta(\delta_v^{\gamma_v}), J^\theta(\delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v)$ の係数と一致するようにペアリングを定義します．今の場合は $\delta_v^{\gamma_v}$ を決めてそれが 1 になるように定義していますが, 一般に定数倍を除いて定義すると, 定数倍のとりかたによる不定性がでてきます, この不定性は本来の A-パケットの場合にも現れます. 簡約代数群が quasi-split の場合には Whittaker functional を用いて定数倍の不定性を扱うことができると予想されています.

S-群を

$$S = \{\xi_1, \xi_2\}$$

と定め, 群構造を

$$\begin{array}{ccc} S = \{\xi_1, \xi_2\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \xi_1 & \longrightarrow & 0 \\ \xi_2 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

により定義します．上記の $\langle\,,\,\rangle$ は $\delta_v^{\gamma_v}, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v$ に S の指標を対応させています.

5.2. **重複度公式の類似.** この節では安定跡公式を用いて重複度公式の類似を説明します．ここではスペクトル側ではなく幾何側を類似として扱いますが, 安定跡公式の幾何側は §4.6 で既に安定化されているので, ここでの説明は実際にはトートロジーです.

いま $U_1(F)$ の元がノルムになるような $\delta \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$\langle \xi, \delta \rangle = \prod_v \langle \xi, \delta_v \rangle, \qquad \xi = \xi_1, \xi_2$$

と定めると, 有限個の素点を除いて $\langle \xi, \delta_v \rangle$ は 1 となり, しかも定め方から

$$\langle \xi_1, \delta \rangle = 1$$
$$\langle \xi_2, \delta \rangle = \begin{cases} 1, & \delta \text{ は大域的} \\ -1, & \delta \text{ は大域的でない} \end{cases}$$

となります. ここで δ が大域的とはある $G(F)$ の元と $G(\mathbb{A})$ の下で θ-共役であることとします. つまり $\omega(\mathbf{obs}(\delta)) = 1$ となることです.

Remark 5.4. ここでの "大域的" という用語はスペクトル側を扱うときの大域的な保型表現の類似として使用しています.

我々は既に跡公式の幾何側を知っていますが, 説明の都合上それは一旦忘れて

$$\sum_{\delta \in \mathbb{A}_E^\times / N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times} a_\delta J^\theta(\delta, \tilde{f}) = \hat{S}^{U_1}(f^{\xi_1}) + \hat{S}^{U_1}(f^{\xi_2})$$

という形から議論を始めることにします. ここで a_δ は δ に対して決まる数でこれが最終的に知りたいものであると思ってください. (通常はスペクトル側に知りたい情報があり, そちらは幾何側を安定化した段階では分かっていないという想定です. ここでは幾何側をスペクトル側に見立てているので幾何側が分かっていない状態から始めます.)

Remark 5.5. 本来の跡公式ではスペクトル側の係数が重複度と関わっています.

いま $\gamma \in U_1(F)$ に対して

$$\Pi_\gamma(G) = \{\delta \in \mathbb{A}_E^\times / N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \mid \text{全ての素点で } \gamma_v \text{ は } \delta_v \text{ のノルム}\}$$

とおきます.

Remark 5.6. $\Pi_\gamma(G)$ は局所因子が大域的な A-パラメーターの定める局所的な A-パケットに含まれているような表現の集合の類似です.

すると

$$\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G(J(\gamma))(\tilde{f}) = \sum_{\delta \in \Pi_\gamma(G)} \langle \xi_1, \delta \rangle J^\theta(\delta, \tilde{f})$$
$$\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_2}^G(J(\gamma))(\tilde{f}) = \sum_{\delta \in \Pi_\gamma(G)} \langle \xi_2, \delta \rangle J^\theta(\delta, \tilde{f})$$

となるので,

$$a_\gamma = \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))$$

と表すことにすると,

$$\begin{aligned}
\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_1}) + \hat{S}^{U_1}(f^{\xi_2}) &= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma J(\gamma, f^{\xi_1}) + \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma J(\gamma, f^{\xi_2}) \\
&= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \left(J(\gamma, f^{\xi_1}) + J(\gamma, f^{\xi_2})\right) \\
&= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \left(\mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi_1}(J(\gamma))(\tilde{f}) + \mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi_2}(J(\gamma))(\tilde{f})\right) \\
&= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \left(\sum_{\delta\in\Pi_\gamma(G)} \langle\xi_1,\delta\rangle J^\theta(\delta,\tilde{f}) + \sum_{\delta\in\Pi_\gamma(G)} \langle\xi_2,\delta\rangle J^\theta(\delta,\tilde{f})\right) \\
&= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \left(\sum_{\delta\in\Pi_\gamma(G)} \left(\langle\xi_1,\delta\rangle + \langle\xi_2,\delta\rangle\right) J^\theta(\delta,\tilde{f})\right) \\
&= 2\sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \sum_{\delta\in\Pi_\gamma(G)} \left(\frac{1}{2}(\langle\xi_1,\delta\rangle + \langle\xi_2,\delta\rangle)\right) J^\theta(\delta,\tilde{f})
\end{aligned}$$

となります. よって $\Pi_\gamma(G)$ に含まれている δ に対して

$$a_\delta = 2a_\gamma\left(\frac{1}{2}(\langle\xi_1,\delta\rangle + \langle\xi_2,\delta\rangle)\right)$$

が成り立つことになります. このようにして a_δ が S の指標 $\langle\ ,\ \rangle$ により表されることになります.

Remark 5.7. 今の場合は捩じれた跡公式なので θ の $\mathfrak{A}_G$ への作用から 2 がついています.

Remark 5.8. スペクトル側であれば a_δ に対応するものが重複度と関係しているので S-群の指標を使って重複度が表せることになります.

Appendix A. 日本語 ⟷ 英語

跡公式	trace formula
捩じれた跡公式	twisted trace formula
安定跡公式	stable trace formula
θ-共役	θ-conjugate
安定 θ-共役	stably θ-conjugate
跡	trace
安定化	stabilization
楕円項	elliptic terms
幾何側	geometric side
スペクトル側	spectral side
パケット	packet
エンドスコピー	endoscopy
移送	transfer
移送因子	transfer factor
双対群	dual group

Appendix B. 安定跡公式の文献の至極簡単な紹介

現在は Arthur 自身による跡公式の解説 “An introduction to the trace formula” [Art05] があります. 第 1 部で “unrefined trace formula” までが解説され, 第 2 部で “stable trace formula” と古典群への応用が解説されています. 全体で 260 ページの分量がありますが, 第 1 部は基本的なことから解説してありますから読みやすいと思います. 第 2 部は第 1 部に比べると記述が粗い部分が多くなりますが, Arthur の原論文への案内として読まれると良いのではないかと思います.

現在 Arthur の論文は

http://www.claymath.org/cw/arthur/index.php

に集められていますのでここから入手することができます. ちなみに Langlands の論文も

http://publications.ias.edu/rpl/

に集められています.

安定跡公式については “A stable trace formula I, Ⅱ, Ⅲ” [Art02], [Art01], [Art03] が基本的な文献です. 特に “A stable trace formula I” で安定跡公式が定式化されています. 安定跡公式の定式化については, この原論文の方が [Art05] よりも読みやすいのではないかと思います. 続く “A stable trace formula Ⅱ, Ⅲ” で証明が行われています. 安定跡公式の証明は Arthur–Clozel の本 [AC89] での議論を発展させたものですので “A stable trace formula I,Ⅱ, Ⅲ” の前に [AC89] を読んだ方が分かりやすいかもしれません.

跡公式の主要部分である楕円部分の安定化については [Kot84] と [Kot86] が基本文献ですが, 本報告集にも今野拓也氏の優れた解説があります. 安定跡公式を使って古典群の保型表現に関する結果を得ようとするときには捩じれた跡公式の安定化が必要になります. 捩じれた跡公式の楕円部分の安定化に関しては [KS99] が基本的な文献です.

また, ユニタリ群についての古典的な結果としては $U(3)$ の場合を扱った Rogawski による [Rog90] があります. この本には間違いと誤植があり, [Rog92] で訂正されています.

References

[Art05] J. Arthur, An introduction to the trace formula. Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1–263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Art03] J. Arthur, A stable trace formula. III. Proof of the main theorems. Ann. of Math. (2) 158 (2003), no. 3, 769–873.

[Art02] J. Arthur, A stable trace formula. I. General expansions. J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 2, 175–277.

[Art01] J. Arthur, A stable trace formula. II. Global descent. Invent. Math. 143 (2001), no. 1, 157–220.

[Art90] J. Arthur , Unipotent automorphic representations: global motivation. Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I, 1–75, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[AC89] J. Arthur, and L. Clozel, Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula. Annals of Mathematics Studies, 120. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xiv+230 pp.

[AT68] E. Artin, and J. Tate, Class field theory. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1968 xxvi+259 pp

[Kot84] R. E. Kottwitz , Stable trace formula: cuspidal tempered terms. Duke Math. J. 51 (1984), no. 3, 611–650.

[Kot86] R. E. Kottwitz , Stable trace formula: elliptic singular terms. Math. Ann. 275 (1986), no. 3, 365–399.

[KS99] R. E. Kottwitz, and D. Shelstad, Foundations of twisted endoscopy. Astérisque 255 (1999).

[LL79] J.-P. Labesse, and R. P. Langlands, L-indistinguishability for SL(2). Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 726–785.

[LS87] R. P. Langlands, and D. Shelstad, On the definition of transfer factors. Math. Ann. 278 (1987), no. 1-4, 219–271.

[Rog90] J. D. Rogawski, Automorphic representations of unitary groups in three variables. Annals of Mathematics Studies, 123. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990. xii+259 pp.

[Rog92] J. D. Rogawski, The multiplicity formula for A-packets. The zeta functions of Picard modular surfaces, 395–419, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992.

[Sai75] H. Saito, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields. Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 8. Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., Tokyo, 1975. iv+183 pp.

degree 2 の p 進 Siegel-Eisenstein 級数

京都大学数学教室 D1　竹森　翔*

1　導入

桂田氏と長岡氏は，degree 2, level 1 の Siegel-Eisenstein 級数のある p 進極限が degree 2, level p の genus theta 級数や twist された Eisenstein 級数の線形結合であらわされることを示した ([Kat-Na]).（ここで twist された Eisenstein 級数とは 2 節で定義される Eisenstein 級数に $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ を作用させたものである．）水野氏は，[Kat-Na] に現れる Eisenstein 級数の p 進極限を level p の Siegel-Eisenstein 級数を使って表した．その証明には level p の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式が使われる．level が 1 でないときの Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式は最近までは知られていなかったが，水野氏が [Mi1] で明示公式を得ている．その証明には Jacobi-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式と Maass lift が使われる．また，軍司氏は，level p の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の Euler 因子 (Siegel series) を直接計算した ([Gu]).

degree 2 のとき，指標が任意の原始指標のときに Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数を計算し，桂田氏と長岡氏の結果 (Siegel-Eisenstein 級数の p 進極限が Siegel 保型形式になるという結果) を level や指標が一般の場合に拡張したのでそれを紹介する (定理 5.2). (ただし，weight は 3 より大きいときのときしか考えていない．）また，degree 2 の Siegel-Eisenstein 級数からなる p 進解析的な保型形式の族が存在するということも示した (定理 5.1).

2　Siegel 保型形式

g を正の整数とし，$\mathfrak{H}_g = \{z \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を degree g の Siegel 上半空間とする．ここで，$x \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{R})$ に対し，$x > 0, x \geq 0$ はそれぞれ，x が正定値，半正定値であるということを意味する．$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ を

$$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}) = \left\{\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a,b,c,d \in M_g(\mathbb{Z}),\ {}^t\alpha w \alpha = w\right\},$$

* takemori@math.kyoto-u.ac.jp

(ただし $w=\begin{pmatrix} 0_g & -1_g \\ 1_g & 0_g \end{pmatrix}$) と置き，$N$ を正の整数とするとき，$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_0^{(g)}(N)$ を

$$\Gamma_0^{(g)}(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c\equiv 0 \mod N\right\}$$

と置く．ψ を mod N の Dirichlet 指標とするとき degree g, weight k, 指標 ψ の Siegel 保型形式全体のなす空間を $M_k(\Gamma_0^{(g)}(N),\psi)$ と置く．すなわち，$\mathfrak{H}_g$ 上の正則関数 f で次を満たすもの全体のなす空間とする．

$$\text{すべての} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \Gamma_0(N) \text{ に対し，}\quad f\left((az+b)(cz+d)^{-1}\right)=\psi(\det(d))\det(cz+d)^k f(z).$$

ただし $g=1$ の場合は，さらに cusp 条件も加える．
$M_k(\Gamma_0^{(g)}(N),\psi)$ の任意の元 f は次の様な Fourier 級数展開をもつ．

$$f(z)=\sum_{0\le h\in \mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})} a(h,f)\mathbf{e}(hz).$$

ここで，正方行列 X に対し $\exp(2\pi i\mathrm{Tr}(X))$ を $\mathbf{e}(X)$ で表している．また，$\mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})$ は次のように半整数行列の全体がなす集合である．

$$\mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})=\left\{T=(t_{ij})\in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{Q}) \;\middle|\; 2t_{ij}\in\mathbb{Z}, t_{ii}\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Γ_∞ を

$$\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c=0\right\},$$

と置く．

$k\in\mathbb{Z}$ とし，$\psi(-1)=(-1)^k$ とする，$z=x+iy,\ x,y\in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{R})$ とするとき，degree g の Siegel-Eisenstein 級数 $E_{k,\psi}^{(g)}(z)$ を次で定める．

$$E_{k,\psi}^{(g)}(z)=\sum_{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} \psi^{-1}(\det(d))\det(cz+d)^{-k}.$$

右辺は $k>g+1$ のとき，絶対収束し，$M_k(\Gamma_0^{(g)}(N),\psi)$ の元を定める．

3 degree 2 の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式

Siegel-Eisenstein 級数 $E_{k,\psi}^{(g)}(z)$ の Fourier 係数 $a(h,E_{k,\psi}^{(g)}(z))$ は，$N=1$ で g が一般の場合には，桂田氏によって ([Kat])，N が奇数かつ square-free で，degree が $g=2$ の場合には，水野氏によって ([Mi1]) によって明示的に計算されている．また，degree 2 のときは，軍司氏によって，$a(h,E_{k,\psi}^{(2)})$ の奇素数 level での Euler 因子 (Siegel series) が明示的に計算されている ([Gu])．

この節では，degree が $g=2$ のときに，一般の level で $E^{(2)}_{k,\psi}$ の Fourier 係数の明示公式について述べる．計算方法は，[Gu] を参考にした．

$h \in \mathrm{Sym}_2^{(*)}(\mathbb{Z})$ かつ rank $h<2$ のとき，$uh{}^t\!u = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m \geq 0$ となるような $u \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ が存在する．このとき，

$$a(h, E^{(2)}_{k,\psi}) = a(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E^{(2)}_{k,\psi}) = a(m, E^{(1)}_{k,\psi})$$

が成立する．１つ目の等号は，保型性から，２つ目の等号は，Siegel operator Φ について，$\Phi E^{(2)}_{k,\psi} = E^{(1)}_{k,\psi}$ であることからわかる．１変数の Eisenstein 級数の Fourier 係数は明示的に知られているので，rank $h=2$ のときの Fourier 係数 $a(h, E^{(2)}_{k,\psi})$ について述べる．

定理 3.1. ψ を mod N の原始指標とし，$0<h\in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ を正定値半整数対称行列とする．$k>3$ のとき，$a(h, E^{(2)}_{k,\psi})$ について次が成立する．

(1) h が次の条件を満たすとき $a(h, E^{(2)}_{k,\psi})=0$ である．

i. $\mathrm{ord}_2(N)=2$ または，$\mathrm{ord}_2(N)>3$ のとき，

$$h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}).$$

ii. $\mathrm{ord}_2(N)=3$ のとき，$uh{}^t\!u$ が次のいずれかの行列と等しくなるような $u \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ が存在する．

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad 2^m \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad 2^m \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

ここで，$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^\times$ であり $m \in \{0,1\}$ である．

(2) h が (1) の条件を満たさないとき，$a(h, E^{(2)}_{k,\psi})$ は次のようになる．

$$2\frac{L^{(N)}(2-k, \chi_h\psi)}{L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2)} \prod_{\substack{q:\mathrm{prime} \\ q\nmid N}} F_q(h; \psi(q)q^{k-3}) \prod_{\substack{q:\mathrm{prime} \\ q\mid N}} c_q(h,\psi; q^{k-3}).$$

記号の説明をする．

Dirichlet 指標 χ と自然数 N に対し $L^{(N)}(s,\chi) = \prod_{q\nmid N}(1-\chi(q)q^{-s})^{-1}$ である．$0<h\in\mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ に対し, $D(h) = -\det(2h)$ と置くとき $D_0(h)$ を２次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D(h)})$ の判別式とし，$f(h)$ を

$$D(h) = D_0(h)f(h)^2$$

となるような正の整数とする．上の χ_h は２次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D(h)})$ に付随する導手 $|D_0(h)|$ の２次指標である．α_1, α を

$$\alpha_1 = \mathrm{ord}_q\bigl(\varepsilon(h)\bigr), \qquad \alpha = \mathrm{ord}_q\bigl(f(h)\bigr),$$

と定める．$F_q(h;T)$ は次のように定数項 1 で次数が 2α の $\mathbb{Z}$ 係数多項式である．

$$F_q(h;T)=\sum_{i=0}^{\alpha_1}(q^2T)^i\Big\{\sum_{j=0}^{\alpha-i}(q^3T^2)^j-\chi_h(p)(qT)\sum_{j=0}^{\alpha-i-1}(q^3T^2)^j\Big\}. \tag{3.1}$$

また，$c_q(h,\psi;T)$ は次で定められる有理式である．

$$c_q(h,\psi;T)=\begin{cases}1 & \psi_q^2\neq 1,\\ 1+q^{-1}(1-q)\dfrac{1-\chi_h\overline{\psi}(q)q^{-2}T^{-1}}{(1-\overline{\psi}^2(q)q^{-4}T^{-2})(1-\chi_h\psi(q)qT)}(q^3\psi^2(q)T^2)^{\beta_q-n_q+1} & \psi_q^2=1,\end{cases}$$

ここで ψ_q は導手が q の冪の Dirichlet 指標で，$\psi=\prod_{q|N}\psi_q$ となるようなものであり，n_q と $\beta_q=\beta_q(h)$ は次のように定義される．

$$n_q=\mathrm{ord}_q\big(\mathfrak{f}(\psi)\big),$$
$$2\beta_q=2\beta_q(h)=\mathrm{ord}_q\left(\frac{\mathfrak{f}(\psi)\mathfrak{f}(\psi^2)^2}{\mathfrak{f}(\psi\chi_h)}\right)+\mathrm{ord}_q(\det 2h).$$

ここで $\mathfrak{f}(\chi)$ は Dirichlet 指標 χ の導手を表す.

4　p-stabilization

Eisenstein 級数を使って p 進 Eisenstein 級数が保型形式になることを示すには，p における Euler 因子が 1 であるような Eisenstein 級数を構成する必要がある．この節では，level p の Hecke 作用素 $U(p)$ を使って，$E_{k,\psi}^{(2)}$ の Fourier 係数の p での Euler 因子を除いたものを構成する．

$f\in M_k(\Gamma_0^{(g)}(N),\psi)$ を Siegel 保型形式とし，

$$f(z)=\sum_{0\leq h\in\mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})}a(h,f)\mathbf{e}(hz),$$

を f の Fourier 展開とする．level p の Hecke 作用素 $U(p)$ を次で定義する．

$$\big(f\mid U(p)\big)(z)=\sum_{0\leq h\in\mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})}a(ph,f)\mathbf{e}(hz).$$

定義より次が成立する．

$$f\in\begin{cases}M_k(\Gamma_0^{(g)}(pN),\psi) & p\nmid N,\\ M_k(\Gamma_0^{(g)}(N),\psi) & p\mid N.\end{cases}$$

また，$V(q),W(p)$ を次で定義する．

$$V(q)=\begin{cases}\dfrac{1-\overline{\psi}(q)^2q^{3-2k}U(q)}{1-\overline{\psi}^2(q)q^{3-2k}} & q\neq 2,\\[2ex] \dfrac{U(q)^2-\overline{\psi}(q)^2q^{3-2k}U(q)^3}{1-\overline{\psi}^2(q)q^{3-2k}} & q=2,\end{cases}$$
$$W(p)=\frac{\big(U(p)-\psi(p)p^{k-1}\big)\big(U(p)-\psi^2(p)p^{2k-3}\big)}{\big(1-\psi(p)p^{k-1}\big)\big(1-\psi^2(p)p^{2k-3}\big)}.$$

定理 3.1 と $V(q), W(p)$ の定義より次の 2 つの命題が証明できる．

命題 4.1. ψ を mod N の原始指標とし，$h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ を半整数，半正定値対称行列とする．また，$k > 3$ を仮定する．

$$E'_{k,\psi} = E^{(2)}_{k,\psi} \mid \prod_{\substack{q \mid N \\ \psi_q^2 \neq 1}} V(q),$$

と置く．$E'_{k,\psi}$ の Fourier 係数 $a(h, E'_{k,\psi})$ について次が成立する．

(1) rank $h < 2$ のとき,

$$a(h, E'_{k,\psi}) = a(h, E^{(2)}_{k,\psi}).$$

(2) rank $h = 2$ のとき,

$$a(h, E'_{k,\psi}) = 2\frac{L^{(N)}(2-k, \chi_h\psi)}{L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2)} \prod_{\substack{q:\mathrm{prime} \\ q \nmid N}} F_q(h; \psi(q)q^{k-3}).$$

命題 4.2. N を正の整数とし，ψ を mod N の Dirichlet 指標とする．$q \mid N$ かつ $q \neq p$ であるような素数 q に対して，ψ_q は原始指標であるとし，$\mathrm{ord}_p N > 1$ ならば ψ_p は原始指標であると仮定する．$G^{(2)}_{k,\psi}$ を

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2)E'_{k,\psi} & \psi_p \text{が原始指標のとき}, \\ \dfrac{1}{2}L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2)E'_{k,\xi} \bigm| W(p) & \psi_p \text{が mod } p \text{ の自明な指標のとき}, \end{cases}$$

と置く．ここで $\xi = \prod_{\substack{q \mid N \\ q \neq p}} \psi_q$ である．$h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ とし，$k > 3$ であるとする．このとき，$G^{(2)}_{k,\psi}$ の Fourier 係数 $a(h, G^{(2)}_{k,\psi})$ について次が成立する．

(1) rank $h = 0$ のとき,

$$a(h, G^{(2)}_{k,\psi}) = \frac{1}{2}L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2).$$

(2) rank $h = 1$ のとき,

$$a(h, G^{(2)}_{k,\psi}) = L^{(N)}(3-2k,\psi^2) \prod_{\substack{q:\mathrm{prime} \\ q \nmid N}} F_q^{(1)}(\varepsilon(h); \psi(q)q^{k-2}).$$

ここで $F_q^{(1)}(m;T)$ は $1 + qT + \cdots + (qT)^{\mathrm{ord}_q(m)}$ であり，$\varepsilon(h)$ は次で定義される．

$$\varepsilon(h) = \max\left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \bigm| m^{-1}h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z}) \right\}.$$

(3) rank $h = 2$ のとき,

$$a(h, G^{(2)}_{k,\psi}) = L^{(N)}(2-k, \chi_h\psi) \prod_{\substack{q:\mathrm{prime} \\ q \nmid N}} F_q(h; \psi(q)q^{k-3}).$$

注意 4.3. ψ が mod p の自明な指標のとき [Mi-Na] では Jacobi 形式の Hecke 作用素と Maass lift を使って $G^{(2)}_{k,\psi}$ が構成されている．

5 p 進 Siegel-Eisenstein 級数と degree 2 の Siegel-Eisenstein 級数からなる p 進解析的な族

命題 4.2 と p 進 Dirichlet$L$ 関数の性質より，Siege-Eisenstein 級数からなる p 進解析的な族が存在することや，Siegel-Eisenstein 級数の p 進極限が Siegel 保型形式であることが証明できる．

N を正の整数とし，χ を mod N の Dirichlet 指標とする．$N = N_0p^r$ $(r \geq 0,\ (N_0, p) = 1)$ とおく．χ は $\varprojlim_n (\mathbb{Z}/N_0p^n\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/\mathbf{p}N_0\mathbb{Z})^\times \times (1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p)$ の指標とみなせる．ここで $\mathbf{p}$ は

$$\mathbf{p} = \begin{cases} p & p \neq 2, \\ 4 & p = 2, \end{cases} \tag{5.1}$$

である．χ を $\chi = \chi_1\chi_2$ (χ_1, χ_2 はそれぞれ $(\mathbb{Z}/\mathbf{p}N_0\mathbb{Z})^\times$, $(1+\mathbf{p}\mathbb{Z}_p)$ の指標) と分解する．$1+\mathbf{p}\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元 u を一つ固定とするとき，多項式 $P(\chi; T)$ を次で定める．

$$P(\chi; T) = \begin{cases} 1 & \chi_1 \neq 1, \\ 1 - \chi_2(u)u(1+T)^{-1} & \chi_1 = 1. \end{cases}$$

これらの記号の準備の下，次が成立する．

定理 5.1. N を p で割れる正の整数とし, ψ を mod N の原始指標とする．$q \mid N$ かつ $q \neq p$ であるような素数 q に対して, ψ_q は原始指標であるとし, $\mathrm{ord}_p N > 1$ ならば ψ_p は原始指標であると仮定する．半整数半正定値対称行列 $h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ に対し, 次の条件を満たす $\mathbf{a}(h, \psi; T) \in \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p[\psi][\![T]\!])$ が存在する．
すべての位数が有限の指標 $\varepsilon : 1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}^\times$ と $k \in \mathbb{Z}_{>3}$ に対し,

$$\mathbf{a}(h, \psi; \varepsilon(u)u^k - 1) = a(h, G^{(2)}_{k,\varepsilon\psi\omega^{-k}}).$$

ここで ω は Teichmüller 指標である．$P(\chi; T)$ を上のものとする．$Q(\psi, T)$ を次で定める．

$$Q(\psi; T) = P(\psi; T)P(\psi^2\omega^{-2}; u^{-2}(1+T)^2 - 1)P'(\psi; u^{-1}(1+T) - 1),$$

ここで $P'(\psi; T)$ は

$$P'(\psi; T) = \begin{cases} 1 & \psi_1^2 \neq \omega^2, \\ 1 - \psi_2(u)u(1+T)^{-1} & \psi_1^2 = \omega^2 \text{かつ } p \neq 2, \\ (1 - \psi_2(u)u(1+T)^{-1})(1 + \psi_2(u)u(1+T)^{-1}) & \psi_1^2 = \omega^2 \text{かつ } p = 2. \end{cases}$$

である．このとき $Q(\psi; T)\mathbf{a}(h, \psi; T) \in \mathbb{Z}_p[\psi][\![T]\!]$ が成立する．

Siegel-Eisenstein 級数の p 進極限については次が成立する．

定理 5.2. N を p で割れない正の整数とし，ψ を mod N の原始指標とする．$\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_\psi$ を

$$\mathfrak{X} = \mathbb{Z}/(\varphi(\mathbf{p})) \times \mathbb{Z}_p,$$
$$\mathfrak{X}_\psi = \left\{(a,s) \in \mathfrak{X} \;\middle|\; (-1)^a = \psi(-1)\right\},$$

とおく．ここで $\mathbf{p}$ は (5.1) のものであり, φ は Euler の関数である．$\mathbb{Z} \ni m \to (m \bmod \varphi(\mathbf{p}), m) \in \mathfrak{X}$ によって $\mathbb{Z} \subset \mathfrak{X}$ とみなす．$(a,k) \in \mathfrak{X}_\psi$ とし，$k \in \mathbb{Z}_{>3}$ を仮定する．$\mathbb{R}$ の位相で $\lim_{m\to\infty} l_m = +\infty$ であり p 進位相で $\lim_{m\to\infty} l_m = (a,k) \in \mathfrak{X}_\psi$ となる任意の列 $\{l_m\}_m \subset \mathfrak{X}_\psi$ について $m \to \infty$ のとき $a(h, G^{(2)}_{l_m,\psi})$ は h に一様に $a(h, G^{(2)}_{k,\psi\omega^{a-k}})$ に p 進的に収束する．ただし，$a=k$ のとき，$\psi\omega^0$ は ψ から誘導される mod Np の Dirichlet 指標を表す．つまり，$G^{(2)}_{l_m,\psi}$ は $m \to \infty$ のとき，level $N\mathbf{p}$, weight k, 指標 $\psi\omega^{a-k}$, degree 2 の Siegel 保型形式に p 進的に収束する．

注意 5.3. p を奇素数とし，$N=1$，$a=k$ または $a=k+(p-1)/2$ とする．定理の最後の主張は，$k \geq 2$ に対し証明されている．([Kat-Na], [Mi-Na])

参考文献

[Gu] K. Gunji, On the Siegel Eisenstein series of degree two for low weights, (preprint).

[Kat] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, American Journal of Mathematics, Vol.121 (1999), pp.415-452.

[Kat-Na] H.Katsurada and S.Nagaoka, On some p-adic properties of Siegel-Eisenstein series, J.Number Theory, Vol.104 (2004), pp.100-117.

[Mi1] Y. Mizuno, An explicit arithmetic formula for the Fourier coefficients of Siegel-Einstein series of degree two and square-free odd levels, Mathematische Zeitschrift, Vol.263 (2009), No.4, pp.837-860.

[Mi2] Y. Mizuno, On p-adic Siegel-Eisenstein series of weight k, Acta Arith, Vol.131 (2008), pp.193-199.

[Mi-Na] Y. Mizuno and S. Nagaoka, Some congruences for Saito-Kurokawa lifts, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, 2009.

ガロワ表現の円分 p 進ゼータ関数の合同式について

原 隆　(東京大学大学院数理科学研究科)

2010 年 12 月 6 日

本稿は第 18 回整数論サマースクール『アーサー・セルバーグ跡公式入門』の「院生とポスドクの時間」に於ける著者の講演内容を纏めたものです．素晴らしいサマースクールを企画してくださったばかりでなく発表の機会まで設けてくださった世話人の若槻聡さん，平賀郁さんに心から感謝致します．

1　序

2006 年に **深谷太香子** *Takako* Fukaya と **加藤和也** *Kazuya* Kato は非可換玉河数予想を仮定した上で非可換拡大に付随する p 進ゼータ関数を構成した [FukKat]．しかし，一般に非可換拡大に対する p 進ゼータ関数の構成は難しく，総実代数体の場合に **ユルゲン・リッター** *Jürgen* Ritter, **アルフレッド・ヴァイス** *Alfred* Weiss 及び**マヘシュ・カクデ** *Mahesh* Kakde に依って構成されたもの [RW2, Kakde] 以外には知られていないのが現状である．そこで，非可換 p 進ゼータ関数の存在を仮定した上でどのようなゼータ値 (或いは可換な拡大に付随する p 進ゼータ関数) の間の合同式が導き出されるかを調べることとした．そのような合同式はゼータ値 (或いはゼータ関数) 達の〈貼り合わせの条件〉として見做せる筈であり，これを示すことで "自然に" ゼータ関数達が〈貼り合って〉非可換 p 進ゼータ関数が得られると (思想的には) 考えられるからである．

本稿では最初にこの様な考察の最初の例であるクンマーの合同式について概観し，その後深谷-加藤の p 進ゼータ関数の存在を仮定した上で同様のクンマー型合同式が導かれることを説明する．最後に次元の異なる表現の間の〈合同関係〉についての若干の考察を行った．

2　クンマーの合同式と p 進 L 関数

古典的な **クンマーの合同式** Kummer*'s congruence* [Kummer] から考察を始めよう:

定理 1 (クンマーの合同式)**.** p を奇素数とし， $_{\{p\}}(s) = (1 \quad p^{\quad s})\ (s)$ をリーマン・ゼータ関数から p での局所因子を取り除いたものとする．$p \quad 1$ で割り切れない正の偶数 r, r' に対して或る自然数[*1] a が存在して合同式

(1) $$r \quad r' \mod (p \quad 1)p^{a \quad 1}$$

---

e-mail: `thara@ms.u-tokyo.ac.jp`　なお，著者は日本学術振興会より援助を受けております (特別研究員 DC2 21・7079)

[*1] 本稿では自然数は 1 **以上の整数** として定義する．

が成り立つとき，ゼータ値の間の合同式

$$ {}_{\{p\}}(1 \quad r) \qquad {}_{\{p\}}(1 \quad r') \quad \bmod p^a $$

が成立する． ◊

この結果を次のように捉え直してみよう； $:\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\ {}_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_p$ を p 進円分指標とする．このとき合同式 (1) から

$$ \mathrm{Im}(\ {}^{r} \ {}^{r'}) \subseteq (\mathbb{Z}_p \ )^{(p \quad 1)p^{a \quad 1}} = (1 + p\mathbb{Z}_p)^{(p \quad 1)p^{a \quad 1}} = 1 + p^a\mathbb{Z}_p, $$

即ち指標として

(2) $$ {}^{r} \qquad {}^{r'} \bmod p^a $$

が成立する．つまりクンマーの合同式は

指標同士が p 進的に近ければ，対応するゼータ値も p 進的に近くなる

ということを表していることに他ならず，背後に p 進的にゼータ値を補間する関数の存在を示唆していたのであった (久保田富雄とハインリッヒ-ヴォルフガング・レオポルトがクンマーの結果を用いて実際に p 進ゼータ関数を構成したこと [KL] は周知の通りである．なお，ゼータ値 ${}_{\{p\}}(1 \quad r)$， ${}_{\{p\}}(1 \quad r')$ は久保田-レオポルトの p 進 L 関数 ${}_{\mathrm{KL}}$ の ^{r}， ${}^{r'}$ での値に他ならないことに注意)．

3 深谷-加藤の p 進ゼータ関数とクンマー型合同原理

深谷-加藤の p 進ゼータ関数の存在を仮定すると，クンマーの合同式と同様に

表現同士が p 進的に近ければ，対応するゼータ関数も p 進的に近くなる

という合同原理が導かれる．これを説明しよう．以下，簡単のため $\mathbb{Q}$ 上のモチーフのみを考察することとする．

p を奇素数，K を代数体とする．また有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロワ群を $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ で表すこととする．M_1, M_2 を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の K-係数モチーフで階数 r が等しいものとする．K の p 上の素イデアル $\mathfrak{p}$ を固定し，M_1, M_2 の $\mathfrak{p}$-進実現の $G_{\mathbb{Q}}$-安定な $\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}$-格子 $T_{1,\mathfrak{p}}, T_{2,\mathfrak{p}}$ から得られる $\mathfrak{p}$ 進整ガロワ表現

$$ {}_i \colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(T_{i,\mathfrak{p}}) = GL_r(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}) \quad i = 1, 2 $$

が共に p 進リー群商 G を経由すると仮定する (例えば G として，表現の和

$$ {}_1 \qquad {}_2 \colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}(T_{1,\mathfrak{p}} \quad T_{2,\mathfrak{p}}) $$

の核で $G_{\mathbb{Q}}$ を割ったもの等が取れる)．G に対応するガロワ拡大を $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ で表す．ここで，$\mathbb{Q}_\infty$ に対して

$\mathbb{Q}_\infty$ は総実代数体;

$\mathbb{Q}_\infty$ は $\mathbb{Q}$ の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を含む;

$\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ の p に於いて不分岐な最大アーベル部分拡大 $\mathbb{Q}_\infty^{\mathrm{ab},p}$ が $\mathbb{Q}$ 上有限次拡大;

G は p 捩れ元を含まない

を仮定する．$\mathbb{Q}_\infty^{\mathrm{ab},p}$ の p 上の任意の素点での完備化の整数環を $\mathcal{O}$ と書くことにする．

モチーフの接空間を $t_{M_i} = M_{i,\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^0 M_{i,\mathrm{dR}}$ $(i=1,2)$ で定める．モチーフ M_1, M_2 は以下の条件を満たすと仮定する;

> (ドリーニュの臨界条件)
> 周期写像が同型
> $$\mathbb{R} \quad {}_{\mathbb{Q}} M_{i,\mathrm{Betti}}^{+} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \quad {}_{\mathbb{Q}} t_{M_i} \quad i=1,2,$$
> を誘導する ($M_{i,\mathrm{Betti}}^{+}$ は複素共役の作用に関する固定部分空間);
> モチーフ M_1, M_2 は共に p で通常良還元を持つ;
> $i=1,2$ に対し，$M_{i,\mathrm{Betti}}^{+}$ は $T_{i,\mathfrak{p}}$ に関して良い基底 $\{\ {}_j^{+}\}$ を持つ; 即ち $T_{i,\mathfrak{p}}^{+}$ の $\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$-基底 $\{\tilde{\ }_j^{+}\}$ が存在して，比較同型に関して整合的に振る舞う;
> $$M_{i,\mathrm{Betti}} \quad K_\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} M_{i,\mathfrak{p}} = T_{i,\mathfrak{p}} \quad K_\mathfrak{p}\ ;\quad {}_j^{+} \quad 1 \leftrightarrow \tilde{\ }_j^{+} \quad 1,$$
> $i=1,2$ に対し，t_{M_i} は $T_{i,\mathfrak{p}}$ に関して良い基底 $\{\ {}_j\}$ を持つ ($M_{i,\mathrm{Betti}}^{+}$ と同様の条件，詳細は [FukKat, 4.2.24 (3)] 参照).

$\Lambda_{\mathcal{O}}(G) = \mathcal{O}[[G]]$ を G の $\mathcal{O}$ 上の岩澤代数 (完備群環) とし，

$S = \{f \in \Lambda_{\mathcal{O}}(G) \mid \Lambda_{\mathcal{O}}(G)/\Lambda_{\mathcal{O}}(G)f$ が左 $\Lambda_{\mathcal{O}}(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}))$-加群として有限生成 $\}$,
$$S \ = \bigcup_{n \quad 0} p^n S$$
とおく (標準オーレ集合 [CFKSV])．以上の設定の下で，深谷-加藤は $K_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)_{S}\ )$ の元　で G のアルティン表現に関するアルティン L 関数の特殊値を補間するようなもの [FukKat, Theorem 4.2.26] を非可換玉河数予想の仮定の下で構成した (深谷-加藤の記号では ${}_{,\delta}(\mathbb{Q}(\ \ 1), \mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ と書かれているもの)．さらに，非可換玉河数予想が満たすとされている底変換に関する整合性 [FukKat, Conjecture 2.3.2, Conjecture 3.4.3] から，
$$\Lambda_{\mathcal{O}}(G) \to M_r(\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}) \quad {}_{\mathbb{Z}_p} \Lambda_{\mathcal{O}}(\ \ )\ ;\ g \mapsto \ {}_i(g) \quad g$$
(但し　$= \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q})$，$g$ は g の　での像) により誘導される写像
$$K_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)_{S}\ ) \to K_1(\mathrm{Frac}(\Lambda_{\mathcal{O}'}(\ \ ))) = \mathrm{Frac}(\Lambda_{\mathcal{O}'}(\ \ )) \qquad i=1,2$$
により　はモチーフ $M_i(\ \ 1)$ に付随する円分 p 進 L 関数 ${}_{M_i}$ [CPR] にうつることが導かれる ($\mathcal{O}'$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環で $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$ を含むもの).

定理 2 (クンマー型合同原理)．以上の設定の下で，或る自然数 a に対し
$$ {}_1 \qquad {}_2 \bmod \mathfrak{p}^a$$
が成り立つならば，$(\ {}_{M_1}) = (\ {}_{M_2})$ (=　とおく) が成り立ち，さらに合同式
$$\frac{{}_{M_1}}{\mathfrak{p}} \qquad \frac{{}_{M_2}}{\mathfrak{p}} \bmod \mathfrak{p}^a$$
が成り立つ． ♢

証明のスケッチ．　$\in K_1(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)_S)$ のとき (　$=0$ の場合に相当する)，合同式条件より
$$ {}_1 \bmod \mathfrak{p}^a = \ {}_2 \bmod \mathfrak{p}^a \colon K_1(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)_S/\mathfrak{p}^a) \to (\Lambda_{\mathcal{O}'}(\ \ )_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^a)$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} {}_{M_1} \bmod \mathfrak{p}^a &= {}_1 \bmod \mathfrak{p}^a(\quad \bmod \mathfrak{p}^a) \\ &= {}_2 \bmod \mathfrak{p}^a(\quad \bmod \mathfrak{p}^a) = {}_{M_2} \bmod \mathfrak{p}^a \end{aligned}$$

が従う．

一般の場合は，直和分解

$$K_1(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)_{S} \quad) = K_1(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)_S) \quad K_0(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)/\mathfrak{p})$$

が存在して，$K_0(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)/\mathfrak{p})$-成分 から -不変量が復元出来ること (バーンズ-ヴェンヤコブの一般化 -不変量の理論 [BV, Proposition 3.4]) から，先程と同様の関手的な議論に依って -不変量が一致することが確認できる[*2]． □

同じ階数の表現に関する合同原理の例としては，例えばヴィニヤク・ヴァトサルによる

保型形式の合同から付随する p 進 L 関数の間の合同関係が従う

という結果 [Vatsal] 等が挙げられよう．このように 定理 2 は非可換 p 進ゼータ関数の存在から従うと期待される独特の現象と言うよりは，寧ろ古典的に扱われている合同原理を非可換 p 進ゼータ関数を用いて洗練された形で整理したものと言う印象が強い．

4 展望—《非可換》合同式に向けて

最後に p 進ゼータ関数の〈貼り合わせ〉の条件として期待される《非可換》合同式とでも称すべき合同式に関して考察しよう．リッター-ヴァイスは次の合同式を非可換 p 進ゼータ関数 ${}_{F_\infty/F}$ の構成に用いた;

命題 3 (リッター-ヴァイス, [RW1])**.** F_∞/F を総実代数体 F の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 F_{cyc} の総実な有限次 p 拡大で，F の有限個の素点でのみ分岐しているものとする．また，p 次部分拡大 F' で F_∞/F' がアーベル拡大となるようなものが存在しているとする．さらに F_∞^{ab} を拡大 F_∞/F の最大アーベル部分拡大とする．このとき $\mathrm{Gal}(F_\infty/F')$ の指標 で $\mathrm{Gal}(F'/F) = \langle \ \rangle$ の作用 $(x) \mapsto (\tilde{\ } \, {}^{1}x\tilde{\ })$ に関して不変なもの ($\tilde{\ }$ は の $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ への持ち上げ) に対して

$$({}_{F_\infty/F'}) \qquad (\mathrm{Ver}({}_{F_\infty^{\mathrm{ab}}/F})) \quad \bmod p \tag{3}$$

が成り立つ．但し ${}_{F_\infty/F'} \in \mathrm{Frac}(\Lambda(\mathrm{Gal}(F_\infty/F')))$ ，${}_{F_\infty^{\mathrm{ab}}/F} \in \mathrm{Frac}(\Lambda(\mathrm{Gal}(F_\infty^{\mathrm{ab}}/F)))$ はそれぞれアーベル拡大 F_∞/F', F_∞^{ab}/F に関する p 進ゼータ関数で

$$\mathrm{Ver}\colon \mathrm{Frac}(\Lambda(\mathrm{Gal}(F_\infty^{\mathrm{ab}}/F))) \quad \to \mathrm{Frac}(\Lambda(\mathrm{Gal}(F_\infty/F')))$$

は群の移送写像より誘導される射を表す． ◊

さて，p 進ゼータ関数のノルム関係式によりノルム写像は非可換 p 進ゼータ関数 ${}_{F_\infty/F}$ を ${}_{F_\infty/F'}$ にうつす．p 進ゼータ関数のノルムをとる操作は表現論的には誘導表現をとる操作に相当するので，合同式 (3) をクンマー型合同原理〈風〉に解釈しようとするならば

[*2] μ-不変量の一致はより弱い合同式 ${}_1 \quad {}_2 \bmod \mathfrak{p}$ から従う．

p 次表現 $\mathrm{Ind}_F^{F'}(\ \ )$ と 1 次表現　　Ver が **（何らかの意味で）p 進的に《近い》**

ということを示唆しているように思われる．このように次元の異なる表現に対しても p 進的に《近い》という解釈が可能であり，その結果として p 進ゼータ関数の合同関係を解釈することが可能であるならば非常に興味深いことであり，非可換拡大にまつわる p 進ゼータ関数達の合同関係についてより理解が深まりそうな予感がするというものである．しかし，実際には次元の異なる表現に対する合同関係の結果はリッター-ヴァイスの例のように

誘導表現と移送写像

のタイプのものしか得られておらず，その裏に隠れている (かもしれない) 合同原理は未だに殆ど明らかにされていないのが現状である．

参考文献

[BV] David Burns and Otmar Venjakob, *On descent theory and main conjectures in non-commutative Iwasawa theory*, to appear in J. Inst. Math. Jessieu.

[CFKSV] John Coates, Takako Fukaya, Kazuya Kato, Ramdorai Sujatha and Otmar Venjakob, *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., **101** (2005) 163–208.

[CPR] John Coates and Berdenette Perrin-Riou, *On p-adic L-functions attached to Motives over $\mathbb{Q}$*, in: *Algebraic Number Theory—in honor of K. Iwasawa*, Adv. Stud. Pure Math. **17** (1989) 23–54.

[FukKat] Takako Fukaya and Kazuya Kato, *A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory*, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. XII, 1–85, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006).

[Kakde] Mahesh Kakde, *The main conjecture of Iwasawa theory for totally real fields*, preprint, `arXiv:1008.0142v1[math.NT]` (2010).

[KL] Tomio Kubota and Heinrich-Wolfgang Leopoldt, *Eine p-adische Theorie der Zetawerte* (*Teil I*: *Einfuhrung der p-adischen Dirichletschen L-FUnktionen*), J. Reine Angew. Math., **213** (1964) 328–339.

[Kummer] Ernst Eduard Kummer, *Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungscoefficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen*, J. Reine Angew. Math., **41** (1851) 368–372.

[RW1] Jürgen Ritter and Alfred Weiss,

[RW2] Jürgen Ritter and Alfred Weiss, *On the 'main conjecture' of equivariant Iwasawa theory*, preprint, `arXiv:1004.2578v2[math.2010]` (2010).

[Vatsal] Viniak Vatsal, *Canonical Periods and congruence formulae*, Duke Math. J., **98** (1999) 397–419.

あるアーベル体のイデアル類群に付随する岩澤加群の偶指標部分の高次 Fitting イデアルについて

大下　達也*

京都大学大学院理学研究科　数学・数理解析専攻　数学系　博士後期課程 1 回生

筆者に講演の機会を与えて下さり，本稿を書く機会を与えて下さった，第 18 回整数論サマースクールのオーガナイザーの皆様に，感謝申し上げます．

概要

栗原将人氏は，論文 [Ku] において，イデアル類群に付随する岩澤加群の**マイナスパート**の**高次** *Fitting* **イデアル**を決定することで，総実代数体上の岩澤主予想（マイナスパート）の精密化を行うことに成功した．本稿で紹介する筆者の研究は，$\mathbb{Q}(\mu_p)$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に沿ったイデアル類群に付随する岩澤加群の**プラスパート**の高次 Fitting イデアルにおいて，栗原氏の結果の**プラスパート版**の構築を試みたものである（[Oh] 参照）．プラスパートに関しては，高次 Fitting イデアルを完全に決定することまではできていないが，**円単数の** *Euler* **系**を用いて，高次 Fitting イデアルの大きさの評価を与えるような岩澤代数のイデアルを構成して，岩澤主予想（プラスパート）の精密化と見なせる結果を得ることができた．本稿では，この結果の紹介を行いたい．

1　主定理

1.1　岩澤代数とその加群

主定理を述べるために，本稿で扱う岩澤代数及び加群のセッティングを行いたい．

p を奇素数とし，以下固定する．$\mathcal{F}_m := \mathbb{Q}(\mu_p^{m+1})$ とおく．このとき，

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q}) = \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times (1+p\mathbb{Z}_p)$$

であるから，$\Delta := \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_0/\mathbb{Q})$，$\Gamma_m := \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_0)$（$m \geq 0$）とおくと，

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q}) \simeq \Delta \times \Gamma_0, \quad (\Delta \simeq \mu_{p-1},\ \Gamma_0 \simeq 1+p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p)$$

と直積分解する．

本稿で扱う岩澤代数は，完備群環

$$:= \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q})]] := \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathbb{Q})] = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta]$$

である．群 Δ は位数が $p-1$（特に p と互いに素）の Abel 群であるから，環の直積分解

$$= \mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta] = \prod_{\chi \in \widehat{\Delta}} \ _\chi \quad (\widehat{\Delta} := \mathrm{Hom}(\Delta, \mu_{p-1}))$$

* ohshita@math.kyoto-u.ac.jp

が得られる．ここで，各 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対して，　$_\chi$ は　$= \mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta]$ の冪等元

$$\epsilon_\chi := \frac{1}{p-1} \sum_{\sigma \in \Delta} \chi(\sigma)^{-1} \sigma$$

を用いて，　$_\chi := \epsilon_\chi$　で定義される　代数である．　$_\chi$ は，$\mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]]$ と同型な環であり，指標 χ による群 Δ の作用を持つ．

次に，本稿で扱う加群を定義したい．A_m を $\mathcal{F}_m$ のイデアル類群 $\mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_m}$ の p-Sylow 部分群とし，ノルム写像による射影系 $\{A_m\}_{m>0}$ の射影極限を X とおく．このとき，X は自然に岩澤代数　上の加群とみなせる．各指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対して，$X_\chi := X \otimes_\Lambda$　$_\chi$ とおく．X_χ は有限生成ねじれ　$_\chi$ 加群であることが知られている．

本稿の主定理は，非自明な (1 でない) 偶指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ についての，　$_\chi$ 加群 X_χ の構造に関する結果である．

1.2　主定理

栗原氏は，論文 [Ku] において，（総実代数体上のセッティングで）**奇指標** $\chi \in \widehat{\Delta}$ に関する X_χ の高次 Fitting イデアルをを次の意味で完全に決定した：

> 「*Stickelberger* **元**」と呼ばれるゼータ関数に由来する Galois 群の群環の元を用いて，「**高次** *Stickelberger* **イデアル**」と呼ばれる　$_\chi$ のイデアル $\Theta_{i,\chi}$（$i \geq 0$）を構成し，各 $i \geq 0$ に対して，
>
> $$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi, i}(X_\chi) = \Theta_{i,\chi}$$
>
> であることを証明した．

これは，岩澤主予想の強力な精密化である．（高次 Fitting イデアルの定義に関しては，§ 付録 A 参照.）

概要 (§1) で述べたとおり，本稿の主定理は，この結果の「**プラスパート**」版に関するものである．指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ が偶指標であるときは，奇指標のときには出てこないような技術的な困難が現れるため，X_χ の高次 Fitting イデアルを完全に決定することまでは，未だ達成できていないが，以下で述べるように，高次 Fitting イデアルの（非自明な）評価を与えるあるイデアルを，円単数を用いて構成することができた．それが本稿の主結果である．

$\chi \in \widehat{\Delta}$ を 1 でない任意の偶指標とする．X_χ の最大擬零部分　$_\chi$ 加群を $X_{\mathrm{fin},\chi}$ と置き，$X'_\chi := X_\chi / X_{\mathrm{fin},\chi}$ と置く．本来の主たる興味は，X_χ の構造にあるのだが，技術的な問題により，X と同じ擬同型類に属する，より扱い易い加群 X'_χ の研究を行う．（「擬同型類を記述することが目標である」という立場から研究を行うのであれば，このように X_χ を X'_χ に取り換えても問題はない．）

本稿 §2.2 では，各非負整数 i に対して，高次 Stickelberger イデアルのプラスパート版の対応物になるような　$_\chi$ のイデアル $\mathfrak{C}_{i,\chi}$ を，Stickelberger 元の代わりに**円単数**を用いて構成する．次の定理（本稿の主定理）が主張するように，これらのイデアル $\mathfrak{C}_{i,\chi}$ は，$\{\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi)\}_{i\geq 0}$ の上界を与えるものである．

定理 1.1. χ を 1 でない Δ の指標とする．　$_\chi$ 加群 $X_{\mathrm{fin},\chi}$ の零化元（annihilator）全体を $\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})$ とおく．このとき，次が成立する．

(i) $\mathfrak{C}_{0,\chi}$　$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,0}(X'_\chi)$.
(ii) 任意の $i \geq 0$ に対して，$\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})\,\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi)$　$\mathfrak{C}_{i,\chi}$.

主定理に関して，いくつか注意を述べておく．

注意 1.2. $\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})$ は指数有限な　$_\chi$ のイデアルであるので，この「誤差」は X_χ の「擬同型類を記述することが目標である」という立場でみれば無視できるものである．マイナスパートでは，$X_{\mathrm{fin},\chi} = 0$ であり，このような「誤差」も現れない．

注意 1.3. 定理の $i = 0$ に関する主張は岩澤主予想と同値であるので，定理は岩澤主予想の精密化になっている．

注意 1.4. $\chi = 1$ のときは，$X_1 = X_1' = \{0\}$ であることが知られている．

注意 1.5. 「χ が偶指標のとき，必ず $X_\chi = 0$ となるのではないか？」（Vandever 予想）という予想や，「χ が偶指標のとき，必ず $X_\chi = X_{\mathrm{fin},\chi}$ となるのではないか？」（Greenberg 予想）という予想があり，これらの予想が正しければ，本稿の主定理は自明である．

2 イデアル $\mathfrak{C}_i$ の構成

2.1 円単数

前節で言及したように，高次 Stickelberger イデアルのプラスパート版の対応物高次円分イデアルは，円単数を用いて構成される．ここでは，高次円分イデアルの定義をするための円単数に関する準備を行う．本分節のゴールは，円単数の *Kolyvagin derivative* と呼ばれる元 $\kappa^n_{m,N}(\xi) \in F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ を定義することである．

整数 e を，$\mathbb{Z}_{\mathrm{l}}{}^{\times}$ の位相的生成元になるようにとって固定する．正の整数 N に対して，

$$\mathcal{S}_N := \big\{\ell \mid \ell \text{は } e \text{ を割り切らない素数で，} \ell \equiv 1 \pmod{p^N} \text{ を満たすもの}\big\},$$
$$\mathcal{N}_N := \Big\{\prod_{i=1}^{r} \ell_i \mid r > 0,\ \ell_i \in \mathcal{S}_N\ (i = 1, \ldots, r),\ \text{and } \ell_i \neq \ell_j \text{ if } i \neq j\Big\} \cup \{1\},$$

と置く．

定義 2.1. $n \in \mathcal{N}_N$ と $\zeta \in \mu_{p^{m+1}n} \backslash \{1\}$ に対して，

$$\mathrm{cyc}(\zeta) := \frac{\zeta^{-e/2} - \zeta^{e/2}}{\zeta^{-1/2} - \zeta^{1/2}} \in F_m(n)$$

とおく．ここで，$\zeta^{1/2}$ は，2 乗して ζ になる唯一の $\mu_{p^{m+1}n}$ の元（群 $\mu_{p^{m+1}n}$ の位数が奇数であることに注意）であり，$F_m(n)$ は $\mathcal{F}_m = \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}n})$ の最大実部分体である． 特に，$F_m := F_m(1)$ と置く．

任意の非負整数 m と $n = \prod_{i=1}^{r} \ell_i \in \mathcal{N}_N$ に対して，$H_{F_m,n} := \mathrm{Gal}\big(F_m(n)/F_m\big)$ とおく．このとき，次の様な自然な同型がある：

$$H_{F_m,n} := \mathrm{Gal}\big(F_m(n)/F_m\big) \simeq H_{\ell_1} \times \cdots \times H_{\ell_r}.$$

定義 2.2. $n \in \mathcal{N}_N$ とし，n は $n = \prod_{i=1}^{r} \ell_i$ と素因数分解されるとする．このとき，各 ℓ_i に対して，

$$D_{\ell_i} := \sum_{k=1}^{\ell_i - 2} k\sigma_{\ell_i}^k \in \mathbb{Z}[H_{\ell_i}] \quad \mathbb{Z}[H_n]$$

とおき，

$$D_n := \prod_{i=1}^{r} D_{\ell_i} \in \mathbb{Z}[H_n].$$

とおく．

補題 2.3. $n \in \mathcal{N}_N$ とする．このとき，自然な準同型

$$F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N} \longrightarrow \big[F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}\big]^{H_n}$$

は同型である．ここで，$\big[F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}\big]^{H_n}$ は，$F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ の H_n-不変な元のなす集合である．

補題 2.4. $n \in \mathcal{N}_N$ とし，$\ell \in \mathcal{S}_N$ を n の素因子とする．$\xi \in \mu_n$ を 1 の原始 $p^{m+1}n$ 乗根とするとき，$\mathrm{cyc}(\xi)^{D_n}$ の $F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ における像は H_n-不変である．

定義 2.5. $n \in \mathcal{N}_N$ とし，$\xi \in \mu_{p^{m+1}n}$ を 1 の原始 $p^{m+1}n$ 乗根とする．このとき，補題 2.3 及び補題 2.4 により，$F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N}$ の元で，$F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ における像が，$\mathrm{cyc}(\xi)^{D_n}$ の像と一致するものがただひとつ存在する．この $F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ の元を $\kappa_{m,N}^n(\xi)$ とおく．

2.2　イデアル $\mathfrak{C}_i$ の定義

まず，m と N を固定して議論する．$R_{m,N} := (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})[\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]$ とおく．

定義 2.6. $n \in \mathcal{N}_N$ とする．$\{\kappa_{m,N}(\xi) \mid \xi \in \mu_n\}$ で生成される $F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N}$ の部分 $R_{m,N}$ 加群を $W_{m,N}^n$ とおく．

プラスパートの場合は，「Stickelberger 元」に対応するものは，円単数であって，群環 $R_{F_m,N}$ の中の元ではない．今回は，**円単数を準同型で群環 $R_{F_m,N}$ に送った像を *Stickelberger* 元に見立てて**，高次 Stickelberger イデアルに対応するイデアルを構成する．

定義 2.7. $\mathcal{N}_N$ の元 n の素因子の個数を $\epsilon(n) := r$ とおく．すなわち，n が $n = \prod_{i=1}^r \ell_i$ と素因数分解されるとき，$\epsilon(n) := r$ とおく．次の集合 A で生成される $R_{m,N}$ のイデアルを $\mathfrak{C}_{i,F_m,N}$ とおく：

$$A := \bigcup_{f,n} f(W_{F_m,N}^n),$$

ここで，n は $\epsilon(n) \leq i$ を満たす $\mathcal{N}_N$ の元全体を走り，f は $R_{F_m,N}$-準同型 $f\colon W_{m,N}^n \longrightarrow R_{m,N}$ 全体を走る．

整数 m_1, m_2, N_1, N_2 が $N_1 \geq m_1+1,\ N_2 \geq m_2+1,\ m_2 \geq m_1$，$N_2 \geq N_1$ を満たしているとする．このとき，自然な準同型 $R_{m_2,N_2} \longrightarrow R_{m_1,N_1}$ により，準同型 $\mathfrak{C}_{i,F_{m_2},N_2} \longrightarrow \mathfrak{C}_{i,F_{m_1},N_1}$ が定まる．これらの準同型により，$\{\mathfrak{C}_{i,F_m,N}\}_{(m,N)}$ は射影系をなす．

定義 2.8 (i 次円分イデアル)**.** 射影系 $\{\mathfrak{C}_{i,F_m,N}\}_{(m,N)}$ の射影極限 $\mathfrak{C}_i$ は，自然に岩澤代数 $= \varprojlim R_{m,N}$ のイデアルとみなせる．本稿では $\mathfrak{C}_i$ を i 次円分イデアルと呼ぶ．

以上で，主定理の主張に現れる「円分イデアル」$\mathfrak{C}_i$ が定義された．

付録 A　高次 Fitting イデアル

まず，高次 Fitting イデアルの定義を述べよう．

定義 付録 A.1 (高次 Fitting イデアル)**.** R を可換環，M を有限表示 R 加群とし，R 加群の完全列

$$R^m \xrightarrow{f} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が与えられているとする．R 加群の準同型 f に対応する R 係数の n 行 m 列の行列を A とおく．このとき任意の 0 以上の整数 i に対して，可換環 R のイデアル $\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を次で定義する．

- $0 \leq i < n$ かつ $m \geq n-i$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を，A の $(n-i)$ 次小行列式全体で生成される R のイデアルとする．
- $0 \leq i < n$ かつ $m < n-i$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) := 0$ とする．
- $i \geq n$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) := R$ とする．

$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ は完全列の取り方によらない．R のイデアル $\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を M の i 次 Fitting イデアルという．

M を上のような完全列で関係式が与えられた有限表示 R 加群とすると，次のような環 R のイデアルの列が得られる:

$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M) \quad \mathrm{Fitt}_{R,1}(M) \quad \cdots \quad \mathrm{Fitt}_{R,n}(M) = \mathrm{Fitt}_{R,n+1}(M) = \cdots = R.$$

注意 付録 A.2. $R = \ {}_{\chi} \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$ とし，M を有限生成ねじれ R 加群とする．このとき，M の特性イデアル $\mathrm{char}_R(M)$ は，$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M)$ を含むような，R の最小の単項イデアルである．岩澤主予想 [MW]（プラスパート）の主張は以下の通りであった:

> $\chi \in \widehat{\Delta}$ を，偶指標とする．このとき，
>
> $$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X_\chi) = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E_{\infty,\chi}/C_{\infty,\chi})$$
>
> である．ここで，E_∞ はノルムに関する射影系 $\{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_m}^\times \otimes \mathbb{Z}_p\}_{m\geq 0}$ の射影極限であり，C_∞ はノルムに関する射影系 $\{C_m \otimes \mathbb{Z}_p\}_{m\geq 0}$ （C_m は円単数全体のなす $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_m}^\times$ の部分群）の射影極限である．

例 付録 A.3. $R = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とする．$f \in R$ を 0 でも可逆元でもない R の元とする．$M_1 = R/f^2R$ とし，$M_2 = (R/f)^2$ とする．このとき

$$\mathrm{char}_R(M_1) = \mathrm{Fitt}_{R,0}(M_1) = f^2R,$$
$$\mathrm{char}_R(M_2) = \mathrm{Fitt}_{R,0}(M_2) = f^2R$$

となって，特性イデアルだけでは M_1 と M_2 を区別することができないが，1 次の Fitting イデアルをみると，

$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M_1) = R,$$
$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M_2) = fR.$$

となり，両者を明確に区別することができる．このように，特性イデアルだけでなく，高次 Fitting イデアルまで考察することで，加群の構造に関するより深い情報を捉えることが出来る．

例 付録 A.4. 再び $R = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とし，より一般的に論じよう．M を有限生成ねじれ R 加群とする．M が R 加群 $\bigoplus_{i=1}^n R/f_iR$ と擬同型であるとする．ただし，$0 \leq i \leq r-1$ なる各 i に対して f_i は f_{i+1} を割り切るものとする．このとき，各 i に対して，I_i は R のある指数有限なイデアルが存在して，M の i 次 Fitting イデアルは，

$$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) = \begin{cases} (\prod_{k=1}^{n-i} f_k) I_i & (\text{if } i < n) \\ I_i & (\text{if } i \geq n) \end{cases}$$

と表わされる．特に，$\{\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)\}_{i\geq 0}$ によって M の**擬同型類**が決定される．

参考文献

[Ku] Kurihara, M., *Re ned Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type*, preprint (2008).

[MW] Mazur, B., and Wiles, A., *Class elds of abelian extension of* **Q**, Invent. math. **76** (1984), 179-330.

[No] Northcott, D. G., *Finite free resolusions*, Cambridge Univ. press (1976).

[Oh] Ohshita, T., *The Euler system of cyclotomic units and higher Fitting ideals*, preprint (2010), arXiv:0912.4854, Number Theory (math.NT).