楕円項の安定化*

今野拓也†

2011 年 1 月 31 日

概要

この原稿では [今野 11b], [今野 11a] の構成を正則でない楕円共役類に拡張する。次にそれを用いて跡公式の楕円項を内視群上の安定超函数たちで展開する安定化の過程を解説する。

目次

* 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」における講演ノート。

† 九州大学大学院数理学研究院。〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地
電子メール：takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ：http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/

1 設定と復習

この原稿では [今野 11b, 3 節] の状況にもどって F を代数体とし、そのアデール環を $\mathbb{A}$ と書く。G は F 上定義された連結簡約線型代数群とし、$G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現 $(R, \mathcal{L}(G))$ を思い出す。ここでも簡単のために G の導来群は単連結であると仮定しよう。すると G の Arthur-Selberg 跡公式の楕円項は

$$T^G_{\mathrm{ell}}(f) = \sum_{\gamma^{G(F)} \in G(F)_{\mathrm{ell}}} \tau(I_\gamma) O_\gamma(f^0)$$

で与えられていた。ここで $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して f^0 はその $\mathfrak{A}_G \subset Z_G(F_\infty)$ 上の平均を表す [同 5.2 節]。テスト関数が $f = \bigotimes_v f_v, (f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ のとき、f^0 は f のアルキメデス成分 $f_\infty := \bigotimes_{v|\infty} f_v$ をその $\mathfrak{A}_G$ 上の平均

$$f^0_\infty(g) := \int_{\mathfrak{A}_G} f_\infty(ag)\, da$$

で置き換えたものであることに注意しよう。I_γ は γ の G での連結中心化群 $Z_G(\gamma)^0$ であり、$\tau(I_\gamma)$ はその玉河数であった。なお楕円元の定義から γ は半単純で I_γ の中心は A_G を法として非等方的である。

内視論は非可換群の等質空間 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の局所大域原理を、共役類ごとの局所大域原理に帰着するものであると述べた。そうすることで開稠密部分集合をなす正則半単純共役類に対しては、[今野 11b] で見たとおり局所大域原理が極大トーラスの Galois コホモロジー群のそれで記述できるのだった。Langlands によるこれらのアイディアは、自己同型群が極大トーラスである CM 点での相互律を用いて一意な標準模型を構成する志村多様体の理論に触発されたものであろう。一方で跡公式全体を安定化するには内視論の構成を、中心化群がアーベル群ではない非正則半単純元にも拡張しなくてはならない。以下ではその概要を解説するが、ここに紹介する Kottwitz の構成もやはり Deligne, Milne らによる志村多様体の共役の記述 [DMOS82] に現れるアイディアに強く依存している。

そういうわけで $T^G_{\mathrm{ell}}(f)$ 全体を安定化したいのだが、楕円項には中心 $Z_G(F)$ の項も含まれる。実は [LL79] にも見られるように、中心項の安定化には内視群の跡公式の特異項 (SL_2 の例ではユニポテント項) の寄与が現れ、楕円項だけで閉じた記述は得られない。そこで以下では Kottwitz [Kot86] に倣って

$$T^{G,*}_{\mathrm{ell}}(f) := \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G(F)_{\mathrm{ell}} \smallsetminus Z_G(F)} \tau(I_\gamma) O_\gamma(f^0) \tag{1.1}$$

の安定化を考えることにする。

2 前安定化

我々はまだトーラスの玉河数についての小野の公式の一般の簡約代数群への拡張 [今野 11b, (5.6)] を示していないので、次元に関する次の帰納法の仮定をおくことにする。

$$\boxed{\dim I < \dim G \text{ なる簡約群 } I \text{ に対して} \quad \tau(I) = \tau_1(I) := \frac{|\pi_0(Z_{\hat{I}}^\Gamma)|}{|\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{I}})|}.} \tag{玉河}$$

なお本来書かれるはずであった次稿ではこの仮定の下で G も同様の主張を満たすことを安定跡公式の応用として証明する予定であった。

2.1 最初の変形

安定共役な $\gamma, \gamma' \in G(F)_{\mathrm{ell}}$ に対して $\gamma' = \gamma^g, (g \in G(\bar{F}))$ と書けば、$I_{\gamma'}$ は I_γ の F 構造を $I_{\gamma,\mathrm{ad}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクル $\{\mathrm{Ad}(g\sigma(g)^{-1})\}_{\sigma\in\Gamma}$ でひねった内部形式である。(トーラスでないので F 同型とは限らない。) しかし仮定 (玉河) から $\tau(I_\gamma) = \tau(I_{\gamma'})$ なので、正則項の場合 [今野 11b, 5.3 節] と同様に安定共役類ごとに和をまとめて

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{ell}}^{G,*}(f) &= \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G(F)_{\mathrm{ell}}} \sum_{\gamma'^{G(F)} \subset \gamma^G(F)} \tau(I_{\gamma'}) O_{\gamma'}(f) \\ &= \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G(F)_{\mathrm{ell}}} \tau(I_\gamma) \sum_{\gamma'^{G(F)} \subset \gamma^G(F)} O_{\gamma'}(f) \end{aligned}$$

である。G の準分裂データ $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ を思い出す。$G(F)_{\mathrm{ell}} \ni \gamma$ に対してその共役類の像 $\psi_G(\gamma^G)$ は [今野 11b, 定理 3.6] から F 値点を持つ: $\exists\gamma_* \in \psi_G(\gamma^G)(F)$. このとき I_{γ_*} は I_γ の内部形式であるからそれらの中心は同型である。よって $Z_{I_{\gamma_*}}/A_{G^*}$ も非等方的だから $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{ell}}$ である。これにより $G(F)_{\mathrm{ell}}$ 内の安定共役類の集合から $G^*(F)_{\mathrm{ell}}$ 内の安定共役類の集合への単射ができて次を得る。

$$T_{\mathrm{ell}}^{G,*}(f) = \sum_{\gamma_*^{G^*}(F) \subset G^*(F)_{\mathrm{ell}} \setminus Z_G(F)} \tau(I) \sum_{\gamma^{G(F)} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*^{G^*})(F)} O_\gamma(f^0)$$

[今野 11b, 補題 4.2] を使うと

$$= \sum_{\gamma_*^{G^*}(F) \subset G^*(F)_{\mathrm{ell}} \setminus Z_G(F)} \tau(I) \sum_{\gamma^{G(F)} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(F)} O_\gamma(f^0).$$

次に右辺に現れる軌道積分は $\gamma^{G(\mathbb{A})}$ のみで決まるから、右辺の内側の和を $G(\mathbb{A})$ 共役類ごとにまとめる。[今野 11b, 系 5.4] より $G(\mathbb{A})$ 共役類内の $G(F)$ 軌道の個数は

$$\begin{aligned}|(\gamma^{G(\mathbb{A})}\cap G(F))/\mathrm{Ad}(G(F))| &= \left|\ker\Big(\mathfrak{D}(G_\gamma)\to\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v,I_\gamma)\Big)\right| \\ &= |\ker(\text{Ш}^1(F,I_\gamma)\to \text{Ш}^1(F,G))| \\ &= |\operatorname{cok}(\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\to \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}}))|\end{aligned}$$

に等しい。[同, 補題 4.15] の (ii) の証明に用いた Ext 群の完全系列を $0\to X_*(D_{I_{\mathrm{sc}}})\to X_*(D_I)\to X_*(D_G)\to 0$ に適用して、局所大域可換図式

$$\begin{array}{ccccc} & & X(I_{\mathrm{sc}})_F \longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma}) \longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma}) & & \\ \longrightarrow \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{I}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{I}}) \end{array} \tag{2.1}$$

が得られる。ここで $\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})\to \mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}})$ による $\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})$ の逆像を $\mathfrak{K}(I)$ と書くことにすれば、完全列

$$1\longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})\longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma})\longrightarrow \mathfrak{K}(I)\longrightarrow \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\longrightarrow \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}})$$

がある。ここで γ が楕円的なことから $X(I_{\mathrm{sc}})_F=0$ であることに注意せよ。その位数を取って等式

$$|\operatorname{cok}(\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})\to \text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}}))| = \frac{|\pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})||\mathfrak{K}(I)||\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{I}})|}{|\pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma})||\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})|} = \frac{\tau_1(G)}{\tau(I)}|\mathfrak{K}(I)|$$

が従う。これを代入して

$$T_{\mathrm{ell}}^{G,*}(f)=\sum_{\gamma_*^{G^*(F)}\subset G^*(F)_{\mathrm{ell}}\smallsetminus Z_G(F)} \tau_1(G)|\mathfrak{K}(I)| \sum_{\substack{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \\ \gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing}} O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0). \tag{2.2}$$

を得る。

2.2 Kottwitz 障害

上の表記中の条件 $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing$ を Galois コホモロジーの言葉で書くには、[今野 11b, 4.4 節] の Kottwitz 障害を半単純元に拡張しなくてはならない[*1]。その議論は同節とほぼ並行なので概説するにとどめる。考える状況は次の通り。半単純元 $\gamma_* \in G^*(F)$ と $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ である $g \in G^*(\bar{\mathbb{A}})$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)\psi_G(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_* \tag{2.3}$$

を満たすものを考える。ここで $g \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ としてよい。$I := I_{\gamma_*}$ と書く。

2.2.1 $G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})$ 軌道の場合

まず $G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})$ 軌道 $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$ がいつ $G(F)$ の元を含むかを考える。元 $h \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ と単射準同型 $\eta : I_{\bar{F}} \hookrightarrow G_{\bar{F}}$ の対で

- ある $\delta_\eta \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ に対して $\eta = \psi_G^{-1} \circ \mathrm{Ad}(\delta_\eta)|_{I_{\bar{F}}}$;
- $\eta(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}$

を満たすものの集合を $\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ と書く。(2.3) から $(\psi_G^{-1}(g), \psi_G^{-1}) \in \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ だからこれは空ではない。$\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ は自然な Γ 作用と整合する $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 作用

$$\delta.(h, \eta) := (\delta h, \mathrm{Ad}(\delta) \circ \eta), \quad \delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$$

を備えている。それによる商集合を $X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}) := G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}) \backslash \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ と書く。

簡単のために $I^{\mathrm{sc}} := I \cap G_{\mathrm{sc}}$ と略記する。$X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ には $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ が右から

$$(h, \eta).i = (\eta(i)^{-1}h, \eta), \quad (h, \eta) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}),\, i \in I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$$

と作用している。二元 $(h, \eta), (h', \eta') \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ が与えられたとき、$G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 作用で動かして $\eta' = \eta$ だとしてよい。すると $\eta(\gamma_*)^h = \gamma_{\mathbb{A}} = \eta(\gamma_*)^{h'}$ であるから、ある $i \in I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ があって $(h', \eta) = i.(h, \eta)$ となる。よって上の $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ 作用は推移的である。次に $i \in I(\bar{\mathbb{A}})$, $(h, \eta) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ が $(h, \eta).i = (h, \eta)$ を満たすとすると、ある $\delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ に対して

$$\eta(i)^{-1}h = \delta h, \quad \mathrm{Ad}(\delta) \circ \eta = \eta.$$

[*1] 正則半単純な場合は Langlands 障害と呼ばれるべきで、ふつう Kottwitz 障害といえば半単純元まで拡張したものを指す。

前者を後者に代入して $\eta\circ\mathrm{Ad}(i)^{-1}=\eta$ だから、$i\in Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F}))$ である。よって $X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ は $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F})$ 捻子である。

補題 2.1. $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ であるためには、$(X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})/I^{\mathrm{sc}}(\bar{F}))^{\Gamma}\neq\varnothing$ が必要十分である。

証明. ある $h\in G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})$ に対して $\gamma:=\mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}\in G(F)$ であるとする。(2.3) から γ, $\psi_G^{-1}(\gamma_*)$ は $G(\bar{\mathbb{A}})$ 共役だから、[今野 11b, 補題 4.2] により $\gamma=\mathrm{Ad}(\delta)\circ\psi_G^{-1}(\gamma_*)$ となる $\delta\in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ がある。このとき $\eta:=\mathrm{Ad}(\delta)\circ\psi_G^{-1}|_{I_{\bar{F}}}:I_{\bar{F}}\hookrightarrow G_{\bar{F}}$ とおけば、[同, (3.1)] の記号で

$$\eta^{-1}\circ\sigma(\eta)=\psi_G\circ\mathrm{Ad}(\delta^{-1}\sigma(\delta))\circ\sigma(\psi_G)^{-1}=\mathrm{Ad}(\psi_G(\delta^{-1}\sigma(\delta))u_\sigma),\quad\sigma\in\Gamma$$

と書ける。また

$$\eta^{-1}\circ\sigma(\eta)(\gamma_*)=\eta^{-1}\circ\sigma(\eta(\gamma_*))=\eta^{-1}(\gamma)=\gamma_*$$

だから $i_\sigma:=\psi_G(\delta^{-1}\sigma(\delta))u_\sigma\in I^{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ である。以上から

$$\begin{aligned}\sigma(h,\eta)=&(h,\sigma(\eta))=(h,\eta\circ\mathrm{Ad}(i_\sigma))=(h,\mathrm{Ad}(\eta(i_\sigma))\circ\eta)\\=&(\eta(i_\sigma^{-1})h,\eta)=(h,\eta).i_\sigma\end{aligned}$$

となって、(h,η) は $(X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})/I^{\mathrm{sc}}(\bar{F}))^{\Gamma}$ の元である。つまり条件は必要である。

逆に $(h,\eta)\in X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})^{\Gamma}$ を取れば、任意の $\sigma\in\Gamma$ に対して $\delta_\sigma\in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}),i_\sigma\in I^{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ があって

$$\sigma(h,\eta)=\delta_\sigma^{-1}.(h,\eta).i_\sigma=(\delta_\sigma^{-1}\eta(i_\sigma^{-1})h,\mathrm{Ad}(\delta_\sigma^{-1})\circ\eta)$$

が成り立つ。この第一成分から $\{\eta(i_\sigma)\delta_\sigma=h\sigma(h)^{-1}\}_\sigma$ は $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクルで、そのクラスは $\text{Ш}^1(F,G_{\mathrm{sc}})$ に属する。従って [今野 11b, 命題 4.8] から、ある $\delta_1\in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ があって $\eta(i_\sigma)\delta_\sigma=\delta_1^{-1}\sigma(\delta_1),\sigma\in\Gamma$ と書ける。このとき $h_1:=\delta_1h\in G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})$ で $\eta_1:=\mathrm{Ad}(\delta_1)\circ\eta:I\hookrightarrow G$ は F 上定義されているから、$\mathrm{Ad}(h_1)\gamma_{\mathbb{A}}=\eta_1(\gamma_*)$ は $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}\cap G(F)$ の元である。 □

ここで I^{sc} に対する [今野 11b, 命題 4.7] (i) の完全列

$$\mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}}/Z_{I^{\mathrm{sc}}})\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F}))\longrightarrow\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D$$

を思い出す。$I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F})$ 捻子 $X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ の同型類に [同, 補題 4.10] で対応する $\mathrm{inv}\, X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}}) \in \mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F}))$ の $\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D$ での像を $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ で表す。

命題 2.2. (2.3) の状況で $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing$ であるためには $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ が消えることが必要十分である。

証明. 実際、$(X(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)/I^{\mathrm{sc}}(\bar{F}))^\Gamma \neq \varnothing$ であるためには、$\mathrm{inv}\, X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ が $\mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}/Z_{I^{\mathrm{sc}}})$ の像に含まれることが必要十分だから、命題は補題 2.1 から直ちに従う。 □

2.2.2 $G(\mathbb{A})$ 軌道への拡張

2.1 節で定義した部分群 $\mathfrak{K}(I) \subset \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)$ への $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*) \in \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D$ の制限を $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ とする。この分節の目標は次の定理である。

定理 2.3. (2.3) の状況で $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing$ であるためには $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*) \in \mathfrak{K}(I)^D$ が消えることが必要十分である。

証明. ここからの証明は [今野 11b, 4.4.2 節] の素直な拡張である。まず (2.1) の 2 行目の左列の射の双対を

$$A : \bigoplus_v \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \longrightarrow \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D,$$

自然な射 $\pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma_v}) \to \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})$ の双対を B_v として $B := \bigoplus_v B_v$ とおく。定義と (2.1) から $\mathfrak{K}(I)^D = \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D/A(\ker B)$ がわかるから、$\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ の消滅は

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*) \in A(\ker B) \tag{2.4}$$

に等価である。

次に $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ の $\gamma_{\mathbb{A}}$ についての振る舞いは次のように記述される。一般に $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクル $\{a_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ に対して、その $(I^{\mathrm{sc}})_{\mathrm{ad}}(\bar{\mathbb{A}}) = I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{\mathbb{A}})$ での像で $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ の Galois 作用を $\sigma \mapsto \mathrm{Ad}(a_\sigma)\circ\sigma$ とひねったものを $I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})^a$ と書く。素点 v において、コサイクル $\{\mathrm{Ad}(a_\sigma)\}_\sigma$ の $\Gamma_v \xrightarrow{\bar{v}} \Gamma$ による引き戻しで $I_v^{\mathrm{sc}} := I^{\mathrm{sc}} \otimes_F F_v$ の Γ_v 作用をひねった内部形式を I^{sc,a_v} と書けば、制限射の直和は同型

$$\mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})^a) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, I^{\mathrm{sc},a_v})$$

を与える ([今野 11b, (4.2)] と同様にして確かめられる)。双対群の中心は内部捻りの影響を受けないので、Tate・中山射は $\alpha_{I^{\mathrm{sc},a_v}}:\mathrm{H}^1(F_v,I^{\mathrm{sc},a_v})\to\pi_0(Z_{\hat{I}^{\mathrm{sc}}}^{\Gamma_v})^D$ となる [同, 命題 4.4]。以上を合成して “Tate・中山写像”

$$\alpha^a:\mathrm{H}^1(F,I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})^a)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_v\pi_0(Z_{\hat{I}^{\mathrm{sc}}}^{\Gamma_v})^D\xrightarrow{\Sigma\,\bar{v}}\pi_0(Z_{\hat{I}^{\mathrm{sc}}}^{\Gamma})^D$$

ができる。

さて $(h,\eta)\in X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ は $\sigma\in\Gamma$ に対して

$$\sigma(h,\eta)=(\delta_\sigma^{-1}\eta(a_\sigma^{-1})h,\mathrm{Ad}(\delta_\sigma^{-1})\circ\eta),\quad \delta_\sigma\in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}),\,a_\sigma\in I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$$

を満たしていた。定義から $\mathrm{inv}\,X(\gamma_*,\gamma_{\mathbb{A}})$ は $\{a_\sigma\}_\sigma\in Z^1(\Gamma,I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/Z_{I^{\mathrm{sc}}}(\bar{F}))$ のコホモロジー類である。一方 $\mathrm{Ad}(h^{-1})\circ\eta:I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})\xrightarrow{\sim}G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ は同型で

$$\sigma\circ\mathrm{Ad}(h^{-1})\circ\eta=\mathrm{Ad}(h^{-1})\circ\eta\circ\mathrm{Ad}(a_\sigma)\circ\sigma,\quad\sigma\in\Gamma$$

だから、$G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}=I^{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})^a$ で上の構成により準同型

$$\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}:=\alpha^a:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})\longrightarrow\pi_0(Z_{\hat{I}^{\mathrm{sc}}}^{\Gamma})^D$$

を得る。以上の下で $\gamma'_{\mathbb{A}}\in\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})$ を取る。$Y(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}}):=\{g\in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})\,|\,\mathrm{Ad}(g)\gamma_{\mathbb{A}}=\gamma'_{\mathbb{A}}\}$ は明らかに右移動作用に関して $G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ 捻子になる。その $\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})$ でのクラスを $\mathrm{inv}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}})$ と書けば、

$$\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}},\gamma_*)=\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\mathrm{inv}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}}))\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\tag{2.5}$$

が成り立つ。

さて $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ であるためには、$\gamma'_{\mathbb{A}}\in\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ で ${\gamma'_{\mathbb{A}}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ なるものがあることが必要十分。後者の条件は命題 2.2 から $\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}},\gamma_*)=1$ に同値である。一方

$$D:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})$$

として $G(\bar{\mathbb{A}})=G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ に注意すれば、$\gamma'_{\mathbb{A}}\in\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ なるためには $\mathrm{inv}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}})\in\ker D$ が必要十分。以上を (2.5) に代入して、$\mathrm{inv}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma'_{\mathbb{A}})$ は常に

$$C:\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}))$$

の核に属することに注意すれば、$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\cap G(F)\neq\varnothing$ は

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker C\cap\ker D)\tag{2.6}$$

に同値なことがわかる。以上 (2.4), (2.6) から次を示せばよい。

主張 2.3.1. $A(\ker B) = \alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker C \cap \ker D)$ である。

証明. まず $\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ とその構成で I^{sc} を I で置き換えたもののなす可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & \bigoplus\limits_v \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus\limits_v \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"] & \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D \\
\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[r] & \bigoplus\limits_v \mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v}) \arrow[r] & \bigoplus\limits_v \pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma_v})^D &
\end{tikzcd}$$

から $\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker C \cap \ker D) \subset \alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker D) \subset A(\ker B)$ は明らか。

逆向きの包含関係を示す。[今野 11b, 定理 3.7] から

$$\ker C = \bigoplus_{v|\infty} \ker\Big(\mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc}})\Big) \oplus \bigoplus_{v\nmid\infty} \mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}),$$

従って

$$\begin{aligned}
\alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}(\ker C \cap \ker D) \supset{}& \alpha_{\gamma_{\mathbb{A}}}\Big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker\big(\mathrm{H}^1(F_v, G_{\mathrm{sc},\gamma_v}) \to \mathrm{H}^1(F_v, G_{\gamma_v})\big)\Big) \\
={}& A\Big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker\big(\pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \xrightarrow{B_v} \pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma_v})^D\big)\Big)
\end{aligned}$$

がわかる。よって $A(\ker B) \subset A\big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v\big)$ を示せば十分である。

短完全列 $1 \to I^{\mathrm{sc}} \to I \to D_G \to 1$ の Galois コホモロジー完全列と (2.1) の双対完全列を並べて得られる可換図式

$$\begin{tikzcd}
D_G(F) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, I) \arrow[d] \\
D_G(F_\infty) \arrow[r, "\delta_\infty"] \arrow[d] & \bigoplus\limits_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, I^{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus \alpha_{I_v^{\mathrm{sc}}}"] & \bigoplus\limits_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v, I) \arrow[d, "\bigoplus \alpha_{I_v}"] \\
\bigoplus\limits_{v|\infty} \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \hat{D}_G)^D \arrow[r] & \bigoplus\limits_{v|\infty} \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "\bigoplus B_v"] & \bigoplus\limits_{v|\infty} \pi_0(Z_{\hat{I}}^{\Gamma_v})^D
\end{tikzcd}$$

を考える。ここで [今野 11b, 注意 2.4] から

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_v, \hat{D}_G)^D \simeq \widehat{\mathrm{H}}^0(F_v, D_G) = \begin{cases} D_G(F_v)/\,\mathrm{N}_{\bar{F}_v/F_v}(D_G(\bar{F}_v)) & F_v \simeq \mathbb{R} \text{ のとき} \\ 0 & F_v \simeq \mathbb{C} \text{ のとき} \end{cases}$$

である。[PR94, 命題 7.8] から $D_G(F) \subset D_G(F_\infty)$ は稠密、$D_G(F_v) \to \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \hat{D}_G)^D$ は全射で $\bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \hat{D}_G)^D$ は有限群だから、先の図式の左の列の合成は全射である。よって

$$\delta(D_G(F)) = \ker\Big(\mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F, I)\Big)$$

の中央の列の射の合成による像は $\bigoplus_{v|\infty} \ker B_v$ に一致する。

ところで $\bigoplus_v \pi_0((Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D$ の部分群

$$\Big(\bigoplus_v \alpha_{I_v^{\mathrm{sc}}}\Big)\Big(\mathrm{im}\Big(\ker[\mathrm{H}^1(F, I^{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F, I)] \to \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, I^{\mathrm{sc}})\Big)\Big)$$

は内側の核を取っていることと B の定義から $\ker B$ に含まれ、[今野 11b, 命題 4.7] の最後の主張から $\ker A$ にも含まれる。よって上と併せて、射影 $\ker B \twoheadrightarrow \bigoplus_{v|\infty} \ker B_v$ の $\ker A \cap \ker B$ への制限が全射であることが従う。すると勝手な $x = (x_\infty, x_{\mathrm{fin}}) \in \ker B$, $(x_\infty \in \bigoplus_{v|\infty} \ker B_v, x_{\mathrm{fin}} \in \bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v)$ に対して、$(x_\infty, y_{\mathrm{fin}}) \in \ker A \cap \ker B$, $(y_{\mathrm{fin}} \in \bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v)$ が取れる。このとき

$$A(x) = A((x_\infty, y_{\mathrm{fin}}) + (0, x_{\mathrm{fin}} - y_{\mathrm{fin}})) = A(x_{\mathrm{fin}} - y_{\mathrm{fin}}) \in A\Big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v\Big)$$

となって、$A(\ker B) \subset A\big(\bigoplus_{v\nmid\infty} \ker B_v\big)$ が示された。 □

2.3 前安定化

定理 2.3 を使って (2.2) を展開しよう。そこに現れる正則でない半単純元での軌道積分を定義するには *Kottwitz* の符号が必要である [Kot83]。

まず標数 0 の局所体 F 上の連結簡約線型代数群 G に対して、

$$e(G) := \begin{cases} (-1)^{(\dim X_{G^*} - \dim X_G)/2} & F \text{ がアルキメデス的なとき} \\ (-1)^{\mathrm{rk}_F G^*_{\mathrm{der}} - \mathrm{rk}_F G_{\mathrm{der}}} & F \text{ が非アルキメデス的なとき} \end{cases}$$

とおく。ここで F がアルキメデス的なときには、実 Lie 群 $G(F)$ の対称空間を X_G と書いており、$\mathrm{rk}_F G_{\mathrm{der}}$ は G_{der} の F ランク、つまり単純相対ルートの個数を表す。これを用いて半単純元 $\gamma \in G(F)$ に対して $e(\gamma) = e^G(\gamma) := e(G_\gamma)$ とおく。

次に G が代数体 F 上の連結簡約線型代数群の状況にもどって、アデール群の半単純元 $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$e(\gamma_{\mathbb{A}}) = e^G(\gamma_{\mathbb{A}}) := \prod_v e(\gamma_v)$$

とおく。有限個を除く非アルキメデス素点 v で G_{γ_v} は不分岐 ([今野 11b, 補題 4.6] 参照) ゆえ、[Kot83, 295 頁系] から $e(\gamma_v)=1$ で、従って右辺の Euler 積は実際には有限積である。さらに半単純な $\gamma\in G(F)$ に対しては積公式

$$\Big(e^G(\gamma)=\prod_v e^{G_v}(\gamma)\Big)=1 \tag{2.7}$$

が成り立つ [同, 297 頁命題]。

さて (2.2) の軌道積分には $G(F)$ の元と共役な $\gamma_{\mathbb{A}}$ しか寄与しないから、そこに $e(\gamma_{\mathbb{A}})=1$ を挟んでも差し支えない。定理 2.3 と有限アーベル群 $\mathfrak{K}(I)$ 上の指標の直交関係を使えば (2.2) は

$$\begin{aligned} T^{G,*}_{\mathrm{ell}}(f) = \sum_{\gamma_*^{G^*(F)}\subset G^*(F)_{\mathrm{ell}}\smallsetminus Z_G(F)} \tau_1(G) \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})} \\ \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(I)}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)e(\gamma_{\mathbb{A}})O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0) \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる。

3 内視論の拡張

次の操作は上の (γ_*,κ) についての和の順序を入れ替えて、さらにそれを楕円的内視データとその半単純元の対 $(\mathcal{E},\gamma_H)$ についての和で書くことである。

3.1 ノルム

一時的に F を標数が 0 の局所または大域体とする。G を F 上定義された連結簡約線型代数群で $G_{\mathrm{der}}=G_{\mathrm{sc}}$ を満たすものとし、$\mathcal{E}=(H,{}^LH,s,\xi)$ をその内視データとする。

半単純元 $\gamma_H\in H(F)$ に対して、それを含む極大トーラス $T_H\subset H$ とその許容埋め込み $\eta_{B,B_H}:T_H\xrightarrow{\sim}T\subset G^*$ を取る。このとき $\gamma_*:=\eta_{B,B_H}(\gamma_H)$ の安定共役類は γ_H の安定共役類のみで定まり、T_H や η_{B,B_H} の取り方によらない。T_H の H でのルート系 $R(H,T_H)$ は η_{B,B_H} により $R(G^*,T)$ の部分集合と見なせる。このとき γ_H が (G,H) 正則あるいは γ_H,γ が等しく特異 (*equisingular*) とは、任意の $\alpha\in R(G^*,T)\smallsetminus R(H,T_H)$ に対して $\alpha(\gamma_H)\neq 1$ であることとする。このとき $I_H:=I_{\gamma_H}$ と $I:=I_{\gamma_*}$ のルート系は一致するから、許容埋め込み η_{B,B_H} は同型 $\eta^*_{I_H}:{}^LI\xrightarrow{\sim}{}^LI_H$ を与え、内部捻り $\eta_{I_H}:I_{H,\bar F}\xrightarrow{\sim}I_{\bar F}\subset G^*_{\bar F}$ に延びる。H 内の (G,H) 正則半単純な元のなす開稠密部分集合

を $H_{G,H} \subset H$ と書く。ただし例外として $H = G^*$ のときだけは $G^* \smallsetminus Z_G$ の半単純元のなす開稠密部分集合を $H_{G,H}$ と書く。

正則半単純共役類の場合と同様に ψ_G は $G(F)$ の半単純安定共役類の集合から $G^*(F)$ のそれへの単射を与える。(G,H) 正則な γ_H に対して上の記号で $\gamma_*^G(F)$ がある半単純安定共役類 $\gamma^G(F) \subset G(F)$ の ψ_G による像になっているとき、γ_H は γ の像あるいはノルムであるという。そのような γ がないとき、γ_H は $G(F)$ の像でないという。

3.2 $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ による展開

ふたたび F が代数体の場合にもどる。ここでは [今野 11b, 6.2 節] の対応を半単純な場合に拡張する。

$K_{\mathrm{ell}}(G(F))$ を $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{ell}}$ と $\kappa \in \mathfrak{K}(I = G^*_{\gamma_*})$ の対の安定共役類の集合とする。ここで (γ_*, κ) と (γ'_*, κ') が安定共役とは、

- ある $g \in G(\bar{F})$ に対して $\gamma'_* = \gamma_*^g$ かつ $\mathrm{Ad}(g)^{-1}|_I : I_{\gamma,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} I_{\gamma',\bar{F}}$ が内部捻り ($G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ から常に成り立つが) で、
- それが引き起こす同型 $\hat{I}_\gamma \simeq \hat{I}_{\gamma'}$ による κ の像が κ' である

ことである。次に $E_{\mathrm{ell}}(G)$ を楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^LH, s, \xi)$ と (G,H) 正則な $\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ の対の同型類の集合とする。ただし $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ と $(\mathcal{E}', \gamma_{H'})$ が同型とは、同型 $g : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ があってそれに付随する $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H'$ が γ_H の安定共役類を $\gamma_{H'}$ のそれに移すこととする。ここで $\alpha \circ H_{\mathrm{ad}}(F)$ は g から一意に決まるので 2 つ目の条件は α の取り方によらない。

命題 3.1. 全単射 $E_{\mathrm{ell}}(G) \xrightarrow{\sim} K_{\mathrm{ell}}(G(F))$ がある。

証明. 証明の議論は [今野 11b, 6.2 節] とほぼ並行なので対応の概要のみを述べる。

まず $(\gamma_*, \kappa) \in K_{\mathrm{ell}}(G(F))$ が与えられているとする。$I = I_{\gamma_*}$ の極大トーラス T で楕円的、つまり T/A_I が非等方的なものと、その L 群の許容埋め込み $\xi_T : {}^LT \hookrightarrow {}^LG$ を取る。$T \twoheadrightarrow D_I \twoheadrightarrow D_G$ から $Z_{\hat{G}} \subset Z_{\hat{I}} \subset \hat{T}$ がある。T の楕円性から $(\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ は離散的ゆえ、その部分群 $(Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ も同様である。よって $\kappa \in (Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ の ξ_T による像 $sZ_{\hat{G}}$ および $\hat{H} := Z_{\hat{G}}(s)^0$ は定義可能である。このとき $\mathcal{H} = \hat{H} \rtimes \xi_T(W_F)$ は定義可能であることも [同, 6.2.3 節] のように確かめられる。[同, 補題 6.3] より同型 $\xi : {}^LH \xrightarrow{\sim} \mathcal{H} \hookrightarrow {}^LG$ がある。このとき $(H, {}^LH, s, \xi)$ は G の楕円的内視データになる。最

後に $\xi_T^H := \xi^{-1} \circ \xi_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L H$ の双対 $\xi_T^{H,*} : T_{0,\bar{F}}^H \xrightarrow{\sim} T_{\bar{F}}$ による γ_* の逆像の H での共役類は F 上定義されている。よって [同, 定理 3.6] からその有理点 $\gamma_H \in H(F)$ が取れる。

逆に $(\mathcal{E}, \gamma_H) \in E_{\mathrm{ell}}(G)$ を取ってくる。$I_H := I_{\gamma_H}$ の楕円的極大トーラス T_H とその許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$, $\xi_{T_H} : {}^L T_H \hookrightarrow {}^L H$ を取る。$\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H)$ は $G(F)$ の楕円的な元である。許容埋め込み $\xi_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ による s の逆像 s_T は $(\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ の元を定める。一方、η_{B,B_H} が I_H と I の間の内部捻りに延びることから $\eta_{B,B_H}^*(Z_{\hat{I}}) = Z_{\hat{I}_H}$ であり、また二つの許容埋め込み $\xi_T, \xi \circ \xi_{T_H} \circ \eta_{B,B_H}^* : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ の $\hat{T}$ への制限は一致している。よって内視データの定義から

$$s \in \xi(Z_{\hat{H}}) \subset \xi \circ \xi_{T_H}(Z_{\hat{I}_H}) = \xi \circ \xi_{T_H} \circ \eta_{B,B_H}^*(Z_{\hat{I}}) \subset \xi_T(Z_{\hat{I}})$$

が成り立つ。つまり $s_T \in Z_{\hat{I}}$ でその $Z_{\hat{I}}/Z_{\hat{G}}$ での像 κ は Γ 不変である。[今野 11b, 6.2.1 節] と同様にして $\kappa \in \mathfrak{K}(I)$ であることも示せる。 □

(2.8) に戻ろう。[今野 11b, 補題 4.5] から $\gamma_{\mathbb{A}}$ についての和は有限なので、κ についての和と順序を入れ替えられる。さらに上の命題を使えば、[同, 6.3 節] の記号と議論により

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{ell}}^{G,*}(f) =& \tau_1(G) \sum_{\gamma_*^{G^*(F)} \subset G^*(F)_{\mathrm{ell}} \smallsetminus Z_G(F)} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I)} \\ & \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A})} \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)) e(\gamma_{\mathbb{A}}) O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0) \\ =& \sum_{\mathcal{E} \in \mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)} \iota(G,H)\tau_1(H) \sum_{\gamma_H^H \in H_{G,H}(F)_{\mathrm{ell}}} \\ & \sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi_G^{-1}(\eta_{I_H}(\gamma_H))^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A})} \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)) e(\gamma_{\mathbb{A}}) O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0). \end{aligned} \tag{3.1}$$

と書ける。

3.3 軌道積分の移行

次のステップは [今野 11b] で予告したように (3.1) の右辺の 2 行目を $H(\mathbb{A})$ 上の安定軌道積分で展開することである。そのために必要な局所体上の軌道積分の移行は [今野 11a] で解説した。しかしそこで得られたのは正則半単純元での軌道積分の移行であり、(3.1) に現れるすべての項を扱うにはそれを非正則な半単純元にも広げる必要がある。ここではその結果を [LS90] から引用する。

以下この節では F は標数 0 の局所体とする。G, H その他は 3.1 節の通りとする。[今野 11a, 定理 2.9] の直後に移行因子 $\Delta(\delta_H, \delta)$, $(\delta \in G_{\mathrm{rs}}(F), \delta_H \in H_{G\text{-rs}}(F))$ が定義さ

れていた。まずはこれを $H_{G,H}(F)\times G(F)$ に延ばそう。(G,H) 正則な $\gamma_H\in H(F)$ が半単純元 $\gamma\in G(F)$ の像でない場合には

$$\Delta(\gamma_H,\gamma):=0$$

と定義すればよい。次に γ_H が γ の像のときには、γ_H を含む極大トーラス $T_H\subset H$ を取り、極限

$$\Delta(\gamma_H,\gamma):=\lim_{\substack{\delta_H\to\gamma_H,\delta\to\gamma\\ \delta_H\in T_H(F)\cap H_{G\text{-rs}}(F)}}\Delta(\delta_H,\delta) \tag{3.2}$$

を考える。ここで $\delta\in G(F)$ は δ_H を像に持つ元とする。これは T_H の取り方によらず定義可能になることが [LS90] の主定理を使って示せる。

さて半単純な $\gamma\in G(F)$ での安定軌道積分を

$$SO_\gamma\Big(f,\frac{dg}{di}\Big):=\sum_{\gamma'^{G(F)}\subset\gamma^G(F)}e(\gamma')O_{\gamma'}\Big(f,\frac{dg}{di'}\Big),\quad f\in\mathcal{H}(G(F))$$

と定義する。正則な場合と違って Kottwitz の符号 $e(\gamma')=e(I_{\gamma'})$ についての重み付き和になる。$I_{\gamma'}(F),(\gamma'\in\gamma^G(F))$ 上の不変測度 di' については次のような正規化を採用する。$I_{\gamma'}$ は I_γ の内部形式なので内部捻り $\psi_{\gamma'}:I_{\gamma',\bar F}\xrightarrow{\sim}I_{\gamma,\bar F}$ が I_γ の内部自己同型を除いてただ一つある。I_γ 上の F 上定義された最高次微分形式 ω を取れば、$\psi_{\gamma'}^*\omega$ も $I_{\gamma'}$ 上の F 有理微分形式である。F 上の不変測度 dx を取れば、これらの体積形式に付随して $I_\gamma(F)$, $I_{\gamma'}(F)$ それぞれの上の不変測度 $|\omega|_F, |\psi_{\gamma'}^*\omega|_F$ が決まる。不変測度は定数倍を除いて一意だから $di=c|\omega|_F,(c\in\mathbb{R}_+^\times)$ と書けるが、このとき $di':=c|\psi_{\gamma'}^*\omega|_F$ と選ぶことにする。次の補題は F がアルキメデス的なときは [She83, 補題 2.9.3], 非アルキメデス的なときは [Kot88, 命題 1] で証明されている。

補題 3.2. $SO_\gamma(dg/di)$ は [今野 11a, 1.3 節] の意味の安定超関数である。

以上の下で次が成り立つ。

命題 3.3 ([LS90] 補題 2.4.A)**.** 上の状況で $f \in \mathcal{H}(G(F))$ と $f^H \in \mathcal{H}(H(F))$ が [今野 11a, 定理 3.1] の意味の軌道積分の合致を満たすとする。このとき任意の (G, H) 正則な $\gamma_H \in H(F)$ に対して

$$SO_{\gamma_H}\Big(f^H, \frac{dh}{di_H}\Big) = \sum_{\gamma^{G(F)} \in G(F)} e(\gamma)\Delta(\gamma_H, \gamma) O_\gamma\Big(f, \frac{dg}{di}\Big)$$

が成り立つ。ただし γ_H が γ の像のとき、$I_{\gamma_H}(F)$ 上の不変測度 di_H は内部捻り $I_{\gamma_H, \bar{F}} \xrightarrow{\sim} I_{\gamma, \bar{F}}$ に関して $I_\gamma(F)$ 上の測度 di と整合するものを選んでいる。

これの証明は表現論からの準備が必要なため省略する。興味のある読者は原論文を参照いただきたい。

4 安定化

いよいよ安定化のプロセスも最終段階である。再び F が代数体の状況に戻る。まず $\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*))$ と移行因子の関係を調べよう。

4.1 積公式

補助的な $\bar{\gamma}_H \in H_{G\text{-rs}}(F), \bar{\gamma} \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ で $\bar{\gamma}_H$ が $\bar{\gamma}$ の像であるものを一組固定しておく。そして F の素点についての定数の族 $\{\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})\}_v$ で

- 有限個を除く v で $\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = 1$ で、
- $\prod_v \Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = 1$

を満たすものを選んでおく。

まず最初に $\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ が G 正則な場合を考える。例によって $T_H := H_{\gamma_H}$ の許容埋め込み $\eta_{B, B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を取り、$\gamma_* := \eta_{B, B_H}(\gamma_H) \in G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ とおく。すべての局所成分が正則な $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ に対して、移行因子

$$\Delta(\gamma_H, \gamma_v) = \Delta(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})$$

が定まる [今野 11a, 2.6 節]。この状況で γ_H が $\gamma_{\mathbb{A}}$ のアデール像 (*adelic image*) であるとは、$\gamma_{\mathbb{A}} \in \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}$ なることとする。もし γ_H が $\gamma_{\mathbb{A}}$ のアデール像でなければある素点 v で $\Delta(\gamma_H, \gamma_v) = 0$ である。なお上の移行因子は補助データによらないから、$R(G^*, T)$

に対する a データ $\{(a_{\alpha,v})_v\}$ を $\bar{F}^\times$ 内に取り、χ データ $\{(\chi_{\alpha,v})_v\}$ がイデール類指標 $\chi_\alpha : \mathbb{A}_{F_\alpha}^\times/F_\alpha^\times \to \mathbb{C}^1$ の局所成分からなるとしてよい。

命題 4.1 ([LS87] 定理 6.4.A)**.** $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)$ が $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ のアデール像であるとする。
(i) 有限個を除く素点 v で $\Delta(\gamma_H, \gamma_v) = 1$ である。
(ii) [今野 11a, 2 節] の記号で

$$\prod_v \Delta_I(\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_{\mathrm{III},2}(\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H, \gamma_v) = 1.$$

証明. 証明中は [今野 11a, 2 節] の記号を断りなく使う。

(i) 非アルキメデス素点 v で種々の補助データが不分岐であるものを考える。[今野 11b, (2.4)] から $\lambda(T_{\mathrm{sc}}) \in \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}})$ の $\mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}})$ での像は消えているから $\Delta_I(\gamma_H, \gamma_v) = 1$. χ データも不分岐、a データは単数群に含まれるから $\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H, \gamma_v) = 1$. さらに $\gamma_* \in T(\mathcal{O}_v)$ だから $\Delta_{\mathrm{III},2}(\gamma_H, \gamma_v) = 1$. $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H, \gamma_v) = 1$ が成り立つことも自明である。

(ii) Δ_I の積公式は Tate・中山双対性 [今野 11b, 命題 2.5] から、Δ_{II} と $\Delta_{\mathrm{III},2}$ は $\gamma_* \in T(F)$, $a_\alpha \in \bar{F}^\times$ と $\chi_\alpha|_{F_\alpha^\times} = \mathbb{1}$ から、Δ_{IV} についてはイデールノルムの積公式から明らかである。 □

系 4.2 (移行因子の積公式)**.** 命題 4.1 の状況で $\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) = \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*))$.

証明. やはり [今野 11a, 2 節] の記号を用いる。命題と $\Delta_v(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})$ の取り方から、

$$\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) = \prod_v \Delta_1(\gamma_H, \gamma_v; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = \prod_v \left\langle \boldsymbol{s}_{\mathbb{T}}, \mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H, \gamma_v}{\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}}\Big) \right\rangle$$

である。ここで右辺の局所コホモロジー類はコバウンダリー $\partial u_{\sigma,\tau} \in Z^2(F, T_{\mathrm{sc}})$ を相殺するために上記のような形をしていたのだった。しかしその

$$\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, \mathbb{T}) \to \mathrm{H}^1(F, \mathbb{T}(\bar{\mathbb{A}})) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, \mathbb{T})$$

による像は [今野 11b, 補題 4.14] の記号で $(\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{-1}, \mathrm{inv}(\bar{\gamma}_*, \bar{\gamma}))$ の

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}}) \times \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, \bar{T}_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, \mathbb{T})$$

による像にほかならない。([今野 11b, 補題 4.14] と [今野 11a, 2.2 節] の v_σ の定義を見較べよ。) よって Tate・中山双対性の局所大域可換性 ([今野 11b, 命題 2.5 (ii)]) から

$$\prod_v \left\langle \boldsymbol{s}_{\mathbb{T}}, \mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H, \gamma_v}{\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}}\Big) \right\rangle = \frac{\langle \boldsymbol{s}_{\bar{T}_{\mathrm{sc}}}, \mathrm{inv}(\bar{\gamma}_*, \bar{\gamma})\rangle}{\langle \boldsymbol{s}_{T_{\mathrm{sc}}}, \mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})\rangle} = \kappa(\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}))^{-1}$$

[同, 補題 4.14] から

$$= \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*))$$

となって系が得られる。 □

さて、我々の目的には正則でない $\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ に対しても同様の結論が必要である。すなわち次の予想を仮定しなくてはならない。

予想 4.3 (Kottwitz)**.** $\gamma_H \in H(F)_{\mathrm{ell}}$ が (G, H) 正則で、ある $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ のアデール像であるとする。
(i) 有限個を除く素点 v で (3.2) の移行因子 $\Delta(\gamma_H, \gamma_v)$ は 1 に等しい。
(ii) $\prod_v \Delta_v(\gamma_H, \gamma_v) = \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*))$.

残念ながら一般にこの予想を証明するアイディアは今のところ知られていない。しかし古典群の場合には、Waldspurger による移行因子を Weil 定数や二次指標など共役類の不変量で書き下した明示公式があり、それによってこの予想を確かめることはできると思われる。

4.2 安定跡公式

予想 4.3 の下で (3.1) の内側の和は

$$\sum_{\substack{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \text{ は } \gamma_H \text{ を} \\ \text{アデール像に持つ}}} \kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)) e(\gamma_{\mathbb{A}}) O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f^0)$$

$$= \prod_v \Big(\sum_{\gamma_v^{G(F_v)} \subset G(F_v)} e(\gamma_v) \Delta(\gamma_H, \gamma_v) O_{\gamma_v}\Big(f_v, \frac{dg_v}{di_v}\Big)\Big)$$

と書ける。(正確にはアルキメデス素点だけはテスト関数 f_∞ を $\mathfrak{A}_G$ 上で平均した f_∞^0 を使っているので、$G(F_\infty) = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} G(\mathbb{R})$ を $\mathbb{Q}$ 代数群の $\mathbb{R}$ 値点の群と見て変形する必要がある。) 右辺の各素点の項は [今野 11a, 定理 3.1, 3.4] とその命題 3.3 による半単純元へ

の拡張を用いて、$H(F_v)$ 上の安定軌道積分で表すことができる。こうして次の定理が証明された。

定理 4.4 (跡公式の楕円項の安定化)**.** 予想 4.3 を仮定する。テスト関数 $f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を取る。楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ と各素点で f_v に対して [今野 11a, 定理 3.1] の条件を満たす f_v^H があり、f_v が Hecke 環の単位元 $1_{\boldsymbol{K}_v}$ であるほとんどすべての素点では $f_v^H = 1_{\boldsymbol{K}_v^H}$ に取れる。$f^H = \bigotimes_v f_v^H$ とおけば、跡公式の楕円項のうち中心項以外の部分 (1.1) は

$$T_{\mathrm{ell}}^{G,*}(f) = \sum_{\mathcal{E}\in\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)} \iota(G,H) ST_{\mathrm{ell},G}^H(f^H)$$

と展開される。ここで

$$ST_{\mathrm{ell},G}^H(f^H) := \sum_{\gamma_H^H \subset H_{G,H}(F)_{\mathrm{ell}}} \tau_1(H) SO_{\gamma_H}(f^H),$$
$$SO_{\gamma_H}(f^H) = \prod_v SO_{\gamma_H}(f_v^H)$$

と書いている。

注意 4.5. (i) 最初に除いた中心項 $\sum_{\zeta\in Z_G(F)} \tau(G) f(\zeta)$ は各項がすでに安定超関数であることが示せる。
(ii) たとえ H の安定跡公式が計算できても、(G,H) 正則項のみからなる部分 $ST_{\mathrm{ell},G}^H(f^H)$ は実質的に計算できない。従って定理のような部分的安定化を単独で応用するには、$ST_{\mathrm{ell},G}^H(f^H) = 0$ となるようなテスト関数 f を取るしかない。

参考文献

[DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih. *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Vol. 900 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Kot83] Robert E. Kottwitz. Sign changes in harmonic analysis on reductive groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 278, No. 1, pp. 289–297, 1983.

[Kot86] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: elliptic singular terms. *Math. Ann.*, Vol. 275, No. 3, pp. 365–399, 1986.

[Kot88] Robert E. Kottwitz. Tamagawa numbers. *Ann. of Math.*, Vol. 127, pp. 629–646, 1988.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 4, pp. 726–785, 1979.

[LS87] R. P. Langlands and D. Shelstad. On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, Vol. 278, No. 1-4, pp. 219–271, 1987.

[LS90] R. Langlands and D. Shelstad. Descent for transfer factors. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Vol. 87 of *Progr. Math.*, pp. 485–563. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, Vol. 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[She83] Diana Shelstad. Orbital integrals, endoscopic groups and L-indistinguishability for real groups. In *Conference on automorphic theory (Dijon, 1981)*, Vol. 15 of *Publ. Math. Univ. Paris VII*, pp. 135–219. Univ. Paris VII, Paris, 1983.

[今野 11a] 今野拓也. 軌道積分の移行と基本補題. 若槻聡, 平賀郁（編）, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集. 2011. この報告集.

[今野 11b] 今野拓也. 内視論入門. 若槻聡, 平賀郁（編）, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集. 2011. この報告集.