内視論入門 *

今野拓也†

2010 年 10 月 7 日

導入

世上では endoscopy は内視鏡 (endoscope) の機能開発を図る医学分野で、数学者でなくてもその意義は一目瞭然であろう。これを受けて私の原稿でも endoscopy を内視論と訳している。しかし我々にとっての endoscopy は Langlands によって創始され、我々の消化器官ではなく、保型表現論に現れる L パケット (または A パケット) の内部を見る理論である。

よく知られているように GL_2 やその内部形式上の保型表現はその標準 L 関数の性質をもって記述され、特に (分岐因子を除く!) 標準 L 関数たちで一意に決まる。すなわち保型形式の数論的な寄与はすべて L 関数から決まっている。この性質はある種の志村曲線や Hilbert モジュラー多様体のゼータ関数を記述する際に大きな役割を果たしている [BBG+79], [BL84]。

例えば総実代数体 F 上の完全不定符号四元数体 $\mathscr{B}$ の乗法群を $\mathbb{Q}$ 上の代数群と見たものを G と書く。$\mathbb{Q}$ のアデール環を $\mathbb{A} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ として、部分群

$$K_\infty := \left\{ \left(\begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ -\beta_v & \alpha_v \end{pmatrix} \right)_v \in \prod_v \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R}) \right\}$$

および $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の開かつコンパクトな部分群 K を (適当に小さく) 取れば複素多様体

$$S_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash (G(\mathbb{R})/K_\infty \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})/K) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})/K$$

---

* 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」の報告集原稿。

† 九州大学大学院数理学研究院。〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地
電子メール：takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ：http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/

$(K := K_\infty \times K_{\mathrm{fin}})$ が考えられる。その Betti コホモロジーは松島・村上の公式により

$$\mathrm{H}^i(S_K(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} (\mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty) \otimes \pi_{\mathrm{fin}}^K)^{\oplus m(\pi)}$$

で与えられる。ここで $\Pi(G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合で、$m(\pi)$ はそのカスプ形式の空間での重複度、$\pi_\infty, \pi_{\mathrm{fin}}$ はそれぞれ π の $G(\mathbb{R})$ および $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 成分である。$\mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty)$ は π_∞ の Harish-Chandra 加群の相対 Lie 環コホモロジー、π_{fin}^K は π_{fin} の K 固定ベクトルの空間を表す。S_K は $\mathbb{Q}$ 上の標準模型を持ち、その (分岐因子を除く) Hasse-Weil ゼータ関数は π のある保型 L 関数 $L(s, \pi, r)$ を用いて

$$Z^\Sigma(s, S_K) = \prod_{\pi \in \Pi(G(\mathbb{A}))} L^\Sigma\Big(s - \frac{d}{2}, \pi, r\Big)^{n(\pi,K)m(\pi)} \tag{†}$$

で与えられることが [BBG+79] の主結果の一つである。ただし Σ は適当な分岐素点の集合、$d = [F : \mathbb{Q}]$ である。また $n(\pi, K)$ は $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty)$ の Euler-Poincaré 標数と $\dim \pi_{\mathrm{fin}}^K$ の積である。これは Lefschetz 跡公式によって S_K の有限体上の有理点の構造に帰着され、その有限体上の点の数の記述を Selberg 跡公式の幾何サイドにインプットすることで証明された。

ところがこの性質は一般線型群以外ではほとんど成り立たない。例えば代数体の二次拡大 E/F と、E のイデール類指標 η で F イデール上で自明なもの $\eta : \mathbb{A}_E^\times / E^\times \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^1$ を取る。非自明指標 $\psi : \mathbb{A}_F/F \to \mathbb{C}^1$ を止めれば、F の各素点 v で局所テータ対応によりたかだか二つの $\mathrm{SL}_2(F_v)$ の既約ユニタリ表現 $\pi(\eta_v, \psi_v^a)$, $(a \in F_v^\times / \mathrm{N}_{E_v/F_v}(E_v^\times))$ が作れる。さらに $a \in \mathbb{A}_F^\times / \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ に対して、制限テンソル積

$$\pi(\eta, \psi^a) := \bigotimes_v \pi(\eta_v, \psi_v^{a_v})$$

は定義可能な $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)$ の既約ユニタリ表現である。さらに $\eta^2 \neq \mathbb{1}$ としたとき Labesse-Langlands によって次が知られている。

- $\pi(\eta, \psi^a)$, $(a \in \mathbb{A}_F^\times / \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times))$ が SL_2 のカスプ形式の空間に現れるためには、$a \in F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ が必要十分で、そのとき $\pi(\eta, \psi^a)$ のカスプ形式の空間での重複度は 1 である。
- $\pi(\eta, \psi^a)$, $(a \in F^\times / \mathrm{N}_{E/F}(E^\times))$ はあらゆる保型 L 関数を共有するカスプ表現である。

すなわち保型形式は L 関数で決まらず、しかも L 関数を共有する既約表現にかたや

カスプ形式、かたや保型表現でないものがあるというわけである。これを L 不可分性 (L-*indistinguishability*) の問題という。

こうした現象は早くから観測されており、その表現論から見た根拠も Labesse-Langlands は 1970 年代初頭に理解していた。しかし (†) の類似を考えたとき、この現象は L 関数の肩に乗る指数が L 関数で決まらないことを意味している。当時 PEL 型志村多様体のゼータ関数を保型 L 関数で記述するというプログラムを追求していた Langlands はこの理由を (志村多様体の有限体有理点の数をインプットする) 跡公式の幾何サイドに求めなくてはならなかった。彼は 1970 年代をかけてこの問題を追求し、最終的にこれらの現象が共役類ごとの局所大域原理に起因するという解決策を論文 [Lan77], [Lan79c], [LL79], [Lan79b], [Lan79a] などに発表している。共役類の局所大域原理は跡公式の安定化というプロセスを通じて、内視群と呼ばれるより小さな群からの保型形式のリフトとして保型表現に影響する。

一方で齋藤 (裕) による捻り付き跡公式 (twisted trace formula) を用いたベースチェンジリフトの構成は、共役類を記述する Galois コホモロジー群より L 群の半単純自己同型を中心に内視論を構成すべきであるという新視点を与えた。特にそれまで障害と考えられていた内視論が、むしろ保型表現のリフトを構成できる有用な枠組みであると考えられるようになった。この新しい枠組みでの内視論は主に Kottwitz によって構成され、その成果は [Kot84], [Kot86], [KS99] などに発表されている。またその際に必要となる捻り付き Arthur-Selberg 跡公式は Clozel-Labesse-Langlands によって開発され [CLL]、その結果は [Art86] 以降の Arthur の論文に見ることができる。この方向では保型表現の記述がよくわかっている一般線形群の外部自己同型に関する内視群に古典群が現れることを用いて、古典群の保型表現を記述しようというプログラムが重要である [Art90], [Art05]。

残念ながらこの講演では外部自己同型に関するいわゆる捻り付き内視論 (twisted endoscopy) については触れないが、Langlands が最初に行った形で内視論の構成を紹介する。これは Langlands の構成が最も内視論のアイディアがわかりやすいことと、共役類の問題から出発することで L パケットや局所 Langlands 対応など依然として仮説的な概念を用いずにすむからである。その一方で保型表現に対する内視論の帰結については全く触れられないため、構成の動機、特に L 群を用いることの意義が分かりづらいことは否めない。この点については平賀さんの解説を参照してもらうことにして、この講演ではその際に障害とならないよう Kottwitz ([Kot84], [Kot86]) による L 群を用いた定式化を積極的に採用するにとどめる。

以下にこの原稿の大まかな構成を述べよう。まず 1 節では内視論全体を通して基礎的な道具となる群コホモロジーについて復習する。少し冗長すぎる記述もあるが、保型表現な

ど解析的な分野を中心に勉強している大学院生の読者が理解しやすいよう心がけたつもりである。ついで 2 で局所大域原理の雛形ともなるトーラスの Langlands 対応を解説する。内視論は志村理論の影響を強く受けており、その構成においては極大トーラスやアーベル商などの関連するトーラスに多くの構成を帰着する。その際にはこの節の内容が繰り返し用いられる。

続く 3 節で連結簡約群についての基本的な定義や記号を準備したあと、4 節で代数体上の連結簡約群の共役類の局所大域原理を記述する。これは半単純単連結群に対してはシンプルな捻子の考察によって容易に達成できるが、一般の簡約群に対しては Kottwitz によるアーベル商への帰着を用いる。得られた局所大域原理は群の中では共役類ごとの局所的なものであるから、それを群全体の上の関数空間に実現される保型表現の情報に変換する跡公式が必要になる。5 節ではこうした局所大域公式としての側面を強調しつつ、Arthur-Selberg 跡公式をかなり簡単に紹介する。局所大域原理のインプットを説明するという我々の目的には跡公式の楕円正則項だけを考えるのが最適である。この原稿の最後の節ではまず内視論の主役である内視データの定義を復習する。Kottwitz によるこの定義は L 群の半単純元を中核に据えているため、現実に考える共役類との関連が見えにくい。そこで極大トーラスとその L 群それぞれの許容埋め込みという概念を用いることにより、共役類の構造への内視データの寄与を明らかにする。それにより局所大域原理を盛り込んだ跡公式が、自然に内視データによる展開を持つことを見てこの稿は完了である。

ここまでの構成は Galois コホモロジーを用いた共役類の記述のみによる純代数的なものである。跡公式の安定化のためには内視データによる展開の各項を、対応する内視群上の超関数で展開するという調和解析的問題を解かなくてはならない。それが次稿で解説する軌道積分の移行の問題である。

最後になったが今回サマースクールで内視論をテーマにした講演をする機会を与えてくださった、主催者の若槻聡、平賀郁両氏に感謝したい。サマースクールでは今回執筆した内視論への導入、軌道積分の移行の問題、楕円項の安定化に加えて、応用として玉河数についての Weil の予想の解決についても紹介した。本来はそれについても概説を書くつもりであったが、私の不徳と時間、力量の不足により原稿に取りかかることすらかなわなかった。参加者、関係者の皆さんにはこの場を借りてお詫びしたい。

目次

1　群コホモロジー

この節では内視論の記述で一貫して用いられる群コホモロジーの定義を復習し、その基本性質をまとめておく。詳細については [Wei94] など任意のホモロジー代数のテキストを参照されたい。この節では添字のないテンソル積は $\mathbb{Z}$ 上のそれを表す。

1.1　定義

G を群とする。G の $\mathbb{Z}$ 係数の群環 $\mathbb{Z}[G]$ 上の左加群を G 加群と呼び、それらの間の $\mathbb{Z}[G]$ 準同型を単に G 準同型という。G 加群のなすアーベル圏を $G\text{-}\mathcal{Mod}$, $A, B \in G\text{-}\mathcal{Mod}$ の間の射からなるアーベル群を $\mathrm{Hom}_G(A, B)$ で表す。またアーベル群の圏を $\mathcal{Ab}$ と書く。G 加群 M を取る。共変関手 $G\text{-}\mathcal{Mod} \ni N \mapsto \mathrm{Hom}_G(M, N) \in \mathcal{Ab}$ は左完全だが完全ではない。すなわち $G\text{-}\mathcal{Mod}$ の短完全列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ に対して

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M, N'')$$

は完全列だが、最後の準同型は全射とは限らない。その右導来関手が $N \mapsto \mathrm{Ext}_G^\bullet(M, N)$ であった。

もう少し詳しく復習しよう。G 加群 P (I) が射影的 (単射的) とは、任意の全射 (単射) G 準同型 $A \to B$ において勝手な G 準同型 $P \to B$ $(A \to I)$ が G 準同型 $P \to A$ に持ち上がる ($B \to I$ に延びる) ことだった。

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists"'] \arrow[d] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

また G 加群 A の射影 (単射) 分解 $P_\bullet$ $(I^\bullet)$ とは、完全系列 $\cdots \to P^1 \to P^0 \to A \to 0$ $(0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \cdots)$ で各 P_n (I^n) が射影 (単射) G 加群であるもののことだった。任意の $A \in G\text{-}\mathcal{Mod}$ は射影および単射分解を持つことが知られている [Wei94, 補題 2.2.5, 演習 2.3.5]。このとき N の単射分解 $I^\bullet$ および M の射影分解 $P_\bullet$ に対して

$$\mathrm{Ext}_G^i(M, N) := \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_G(M, I^\bullet)) \simeq \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_G(P_\bullet, N)), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

となるのだった。あるいは M の任意の分解、つまり完全列 $0 \to M \to K^0 \to K^1 \to \cdots$

を取って、$\mathrm{Ext}^i_G(M,N)$ を i 次コチェイン写像 $K^\bullet \to I^\bullet[i]$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K^0 & \longrightarrow & K^1 & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
I^{i-1} & \longrightarrow & I^i & \longrightarrow & I^{i+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

のホモトピー同値類の群 $\mathrm{Hom}_{K(G\text{-}\mathcal{Mod})}(K^\bullet, I^\bullet[i])$ と定義しても同じ結果が得られる。特に M が自明な G 加群 $\mathbb{Z}$ の場合が N 係数の i 次 G コホモロジー群

$$\mathrm{H}^i(G,N) := \mathrm{Ext}^i_G(\mathbb{Z},N), \quad i = 0,1,2,\ldots$$

である。

定義から $\mathrm{Ext}^i_G(M,\cdot)$ は不変コホモロジー δ 関手である。すなわち以下の性質を持つ。

(i) G-$\mathcal{Mod}$ の短完全列 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ に対して、長完全列

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(M,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(M,N'') \\
\xrightarrow{\delta} & \mathrm{Ext}^1_G(M,N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_G(M,N'') \\
\xrightarrow{\delta} & \mathrm{Ext}^2_G(M,N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_G(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_G(M,N'') \longrightarrow \ldots
\end{aligned}$$

を与えるような準同型 $\delta : \mathrm{Ext}^i_G(M,N'') \to \mathrm{Ext}^{i+1}_G(M,N')$ がある。

(ii) 各行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N_1' & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_1'' & \longrightarrow & 0 \\
& & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\
0 & \longrightarrow & N_2' & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_2'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

に対して、次の図式は可換になる。

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ext}^i_G(M,N_1') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^i_G(M,N_1) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^i_G(M,N_1'') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i+1}_G(M,N_1') \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
\mathrm{Ext}^i_G(M,N_2') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^i_G(M,N_2) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^i_G(M,N_2'') & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i+1}_G(M,N_2')
\end{array}$$

1.2 非斉次コチェイン

さらに具体的に $\mathrm{H}^i(G,A)$ を計算しておく。L_r を G^{r+1} ($r+1$ 個の直積) で生成される自由アーベル群とし、

$$\begin{aligned} d_r : L_r \ni & \sum_{(g_0,\dots,g_r)\in G^{r+1}} n_{g_0,\dots,g_r}(g_0,\dots,g_r) \\ & \longmapsto \sum_{(g_0,\dots,g_r)\in G^{r+1}} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j n_{g_0,\dots,g_r}(g_0,\dots \hat{g}_j,\dots,g_r) \in L_{r-1} \end{aligned}$$

と定めれば、完全列 $\cdots L_r \xrightarrow{d_r} L_{r-1} \xrightarrow{d_{r-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} L_0 \to \mathbb{Z} \to 0$ は $\mathbb{Z}$ の自由 $\mathbb{Z}[G]$ 加群による分解、従って射影分解になっている。特に $\mathrm{H}^i(G,A)$ はコチェイン複体

$$0 \longrightarrow C^0(G,A) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{r-1}} C^r(G,A) \xrightarrow{d_r} C^{r+1}(G,A) \xrightarrow{d_{r+1}} \cdots$$

$$C^r(G,A) := \mathrm{Hom}_G(L_r, A) = \{a : G^{r+1} \to A \mid a(gg_0,\dots,gg_r) = g.a(g_0,\dots,g_r)\}$$

$$d_r a(g_0,\dots,g_{r+1}) = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j a(g_0,\dots \hat{g}_j,\dots,g_{r+1})$$

の i 次コホモロジー群である。

定義から $a \in C^r(G,A)$ は $c(g_1,\dots,g_r) := a(1,g_1,g_1g_2,\dots,g_1\cdots g_r)$ で決まる。よって $C^r(G,A)$ は写像 $c : G^r \to A$ の群と同一視され、そこでの微分は

$$\begin{aligned} d_r c(g_1,\dots,g_{r+1}) = g_1.c(g_2,\dots,g_{r+1}) + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j c(g_1,\dots, \overset{j}{\overset{\vee}{g_j g_{j+1}}},\dots,g_{r+1}) \\ +(-1)^{r+1} c(g_1,\dots,g_r) \end{aligned}$$

で与えられる。この複体 $C^\bullet(G,A)$ を標準複体という。

特に我々の目的に必要となるのは $r = 1, 2$ の場合である。

(i) $\mathrm{H}^1(G,A)$ は G 上の A 値 1 コサイクルの群

$$Z^1(G,A) := \ker d_1 = \{c : G \to A \mid c(xy) = c(x) + x.c(y)\}$$

を 1 コバウンダリの群

$$B^1(G,A) := \operatorname{im} d_0 = \{\partial a(g) := a - g.a \mid a \in A\}$$

で割ったものである。

(ii) A 値 2 コサイクルの群 $Z^2(G,A)$ は関数 $c: G^2 \to A$ で

$$c(x,y)+c(xy,z)=c(x,yz)+x.c(y,z) \tag{1.1}$$

を満たすものからなる。他方 2 コバウンダリの群 $B^2(G,A)$ は 1 コチェイン $a: G \to A$ のコバウンダリ

$$\partial a: G^2 \ni (x,y) \longmapsto a(x)+x.a(y)-a(xy) \in A \tag{1.2}$$

たちからなる。2 コサイクル条件 (1.1) から $c(g,1)=g.c(1,1)$, $c(1,g)=c(1,1)$, $(g \in G)$ が従う。他方 2 コバウンダリは $\partial a(1,1)=a(1)$ で与えられる。そこで必要なら適当な 2 コバウンダリを差し引いて、実践に際しては 2 コサイクルは $c(1,1)=0$ を、2 コバウンダリは $a(1)=0$ を満たすコチェインのコバウンダリだけを考えればよい。

1.3 副有限群の場合

ここからは G が副有限群、つまり有限群からなる射影系の射影極限であるとする。これは G がコンパクトな完全不連結群であることに同値である。これから G の閉部分群は再び副有限群で、G を正規閉部分群で割った商群も副有限群になることが分かる。特に副有限群とその間の連続準同型の圏では像や核が考えられる。副有限群の開部分群は有限指数を持つため閉部分群でもあることに注意せよ。

G 加群 M が離散的あるいは滑らかとは各 $m \in M$ の固定化群 $\mathrm{Stab}(m,G) := \{g \in G \mid g.m=m\} \subset G$ が開部分群であることとする[*1]。滑らかな G 加群のなすアーベル圏を $\mathcal{Mod}_G$ と書く。滑らかな G 加群が有限生成であるためにはアーベル群として有限生成であることが必要十分であることに注意しよう。

一般に G 加群 M に対して、すべての開部分群 $K \subset G$ についての合併 $\bigcup_{K \subset G} M^K$ (M^K は K で固定される元のなすアーベル群) は滑らかな G 加群になる。これを M の滑らかな部分 (*smooth part*) と呼んで M^∞ で表すことにすれば、$M \in \mathcal{Mod}_G$, $N \in G\text{-}\mathcal{Mod}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_G(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_G(M,N^\infty)$$

である。特に単射 G 加群 I に対して I^∞ は $\mathcal{Mod}_G$ の単射加群になるから、任意の滑らか

[*1] 「滑らか」という用語は p 進群の表現論からの転用で一般的ではない。しかし保型表現論では「離散」は別の意味に頻繁に用いるので、以下ではもっぱら「滑らか」の方を用いる。

な G 加群 N は $\mathcal{Mod}_G$ での単射分解 $I^\bullet$ を持つ。これを用いて

$$\mathrm{Ext}^i_G(M,N) := \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_G(M,I^\bullet)), \quad \mathrm{H}^i(G,N) := \mathrm{Ext}^i_G(\mathbb{Z},N) \quad i=0,1,2,\dots$$

と定める。特に 1.2 節の群コホモロジーの定義ではコチェインを連続 (局所定数) であるものに限ることになる。この場合も得られた連続コチェインの複体を標準複体と呼ぶことにする。なお G が離散群でなければ $\mathcal{Mod}_G$ は十分な射影対象を持たない。

1.4 群についての関手性

副有限群の間の (連続) 準同型 $f : H \to G$ が与えられているとする。$M \in \mathcal{Mod}_G$ を $H \times M \ni (h,m) \mapsto f(h).m \in M$ により H 加群と見たものを $f^*M \in \mathcal{Mod}_H$ と書く。こうして得られる関手 $f^* : \mathcal{Mod}_G \to \mathcal{Mod}_H$ は完全関手で単射加群を単射加群に送る。特に $N \in \mathcal{Mod}_G$ の単射分解 $I^\bullet$ に対して $\mathrm{Hom}_G(M,I^\bullet) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_H(f^*M, f^*I^\bullet)$ から導来関手の射

$$f^* = \mathrm{Ext}^i_G(f^*) : \mathrm{Ext}^i_G(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_H(f^*M, f^*N)$$

が得られる。

(i) $H \subset G$ を閉部分群、$\iota : H \hookrightarrow G$ を自然な埋め込みとするとき、

$$\mathrm{res}^G_H := \iota^* : \mathrm{Ext}^q_G(M,N) \to \mathrm{Ext}^q_H(M,N)$$

を制限射と呼ぶ。

(ii) $H \triangleleft G$ が正規閉部分群で $p : G \to G/H$ を自然な射影とする。$M, N \in \mathcal{Mod}_G$ に対して $\mathrm{Hom}_H(M,N)$ は $(g.f)(m) := g.(f(g^{-1}.m)), (g \in G, f \in \mathrm{Hom}_H(M,N))$ により G 加群になる。これは一般にその滑らかな部分 $\mathrm{Hom}_H(M,N)^\infty$ に一致しないが、M が有限生成 G 加群なら両者は等しい。特に $N^H = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z},N)$ は滑らかな G 加群でさらに $N^H = p^*N^H \in \mathcal{Mod}_{G/H}$ と見なすこともできる。このとき $M \in \mathcal{Mod}_{G/H}, N \in \mathcal{Mod}_G$ に対して

$$\mathrm{infl}^G_H : \mathrm{Ext}^i_{G/H}(M,N^H) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Ext}^i_G(M,N^H) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_G(M,N)$$

をインフレ射という。

注意 1.1. 上の (ii) で特に $M \in \mathcal{Mod}_G$ が有限生成なら、正規開部分群 $U \subset G$ で $M^U = M$ となるものがある。このとき $\mathrm{Ext}^i_G(M,N)$ はインフレ射についての帰納系

$\{\mathrm{Ext}^i_{G/K}(M, N^K)\}_{K \subset U}$ の帰納極限に同型である。

$$\mathrm{Ext}^i_G(M, N) \cong \varinjlim_K \mathrm{Ext}^i_{G/K}(M, N^K)$$

1.5 スペクトル系列

まず一般の場合のスペクトル系列を引用しよう。

事実 1.2 ([Mil06] I 章 定理 0.3)**.** $H \triangleleft G$ が正規閉部分群で $M, N \in \mathcal{M}od_G$, $L \in \mathcal{M}od_{G/H}$ が $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(L, M) = 0$ を満たすとき、スペクトル系列

$$\mathrm{Ext}^i_{G/H}(L, \mathrm{Ext}^j_H(M, N)^\infty) \implies \mathrm{Ext}^{i+j}_G(L \otimes M, N)$$

がある。

スペクトル系列 $E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ は射 $d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1}$ を備えている。これから $E_3^{p,q} := \ker d_2^{p,q} / \operatorname{im} d_2^{p-2,q+1}$ および $d_3^{p,q} : E_3^{p,q} \to E_3^{p+3,q-2}$ が定まり、さらに帰納的に $E_{n+1}^{p,q} := \ker d_n^{p,q} / \operatorname{im} d_n^{p-n,q+n-1}$ および $d_{n+1}^{p,q} : E_{n+1}^{p,q} \to E_{n+1}^{p+n+1,q-n}$ が定まる。今、事実 1.2 のスペクトル系列は第一象限に入っているから

$$E_\infty^{p,q} := E_n^{p,q}, \quad \forall n \geq \max(p+1, q+2)$$

は n によらず定まる。スペクトル系列が E^r に収束するという意味は、E^r が $E_\infty^{0,r}, E_\infty^{1,r-1}, \ldots, E_\infty^{r,0}$ を階層に持つ減少フィルターを持つことであった。

■ $L = \mathbb{Z}$, $H = \{1\}$ で M が自由アーベル群のとき　事実 1.2 のスペクトル系列は $E_2^{p,q} := \mathrm{H}^p(G, \mathrm{Ext}^q(M, N)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_G(M, N)$ となる。仮定から $\mathrm{Ext}^p(M, N) = 0$ だから、$q \geq 1$ に対して $E_2^{p,q} = 0$ の部分商 $E_\infty^{p,q} = E_n^{p,q}, (n \geq \max(p-1, q-2, 2))$ は全て消えている。一方

$$E_\infty^{p,0} = E_{n+1}^{p,0} \simeq E_n^{p,0} / \operatorname{im} d_n^{p-n,n-1} = E_n^{p,0} \simeq \cdots \simeq E_2^{p,0} = \mathrm{H}^p(G, \mathrm{Hom}(M, N))$$

だから結局

$$\mathrm{Ext}^p_G(M, N) \simeq \mathrm{H}^p(G, \mathrm{Hom}(M, N)) \tag{1.3}$$

が成り立つ。

■ $L = M = \mathbb{Z}$ のとき　事実 1.2 のスペクトル系列は *Hochschild-Serre* のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(G/H, \mathrm{H}^q(H, M)) \implies \mathrm{H}^{p+q}(G, M)$$

にほかならない。まず E^1 のフィルタ

$$0 \longrightarrow (E_\infty^{1,0} = E_2^{1,0}) \longrightarrow E^1 \longrightarrow (E_3^{0,1} = \ker d_2^{0,1})$$

から

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G/H, M^H) &\xrightarrow{\mathrm{infl}_H^G} \mathrm{H}^1(G, M) \xrightarrow{\mathrm{res}_H^G} \mathrm{H}^1(H, M)^{G/H} \\ &\xrightarrow{d_2^{0,1}} \mathrm{H}^2(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{infl}_H^G} \mathrm{H}^2(G, M)\end{aligned} \tag{1.4}$$

は完全列である。さらに $\mathrm{H}^q(H, M) = 0, (1 \leq \forall q \leq r-1)$ が成り立つなら、$1 \leq p \leq r-1$ に対して $E_2^{p,r-p} = \mathrm{H}^p(G/H, \mathrm{H}^{r-p}(H, M)) = 0$ の部分商 $E_\infty^{p,r-p}$ は消えている。これからさらに

$$\begin{gathered}E_\infty^{r,0} = E_{r+1}^{r,0} = E_r^{r,0}/\operatorname{im} d_r^{0,r-1} = E_r^{r,0} = \cdots = E_2^{r,0} = \mathrm{H}^r(G/H, M^H), \\ E_{q+1}^{0,r} = \ker(E_q^{0,r} \to E_q^{q,r-q+1}) = E_q^{0,r} = \cdots = E_2^{0,r} \\ = \mathrm{H}^r(H, M)^{G/H}, \quad (1 \leq q \leq r), \\ E_\infty^{0,r} = E_{r+2}^{0,r} = \ker d_{r+1}^{0,r}, \\ d_{r+1}^{0,r} : (E_{r+1}^{0,r} = \mathrm{H}^r(H, M)^{G/H}) \longrightarrow (E_{r+1}^{r+1,0} = \mathrm{H}^{r+1}(G/H, M^H))\end{gathered}$$

であるから、E^r のフィルタは次の完全列に単純化する。

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{H}^r(G/H, M^H) &\xrightarrow{\mathrm{infl}_H^G} \mathrm{H}^r(G, M) \xrightarrow{\mathrm{res}_H^G} \mathrm{H}^r(H, M)^{G/H} \\ &\xrightarrow{d_{r+1}^{0,r}} \mathrm{H}^{r+1}(G/H, M^H) \xrightarrow{\mathrm{infl}_H^G} \mathrm{H}^{r+1}(G, M)\end{aligned} \tag{1.5}$$

1.6　カップ積

一般に $L, M, N \in \mathcal{Mod}_G$ として $M \to I^\bullet, N \to J^\bullet$ を単射分解とする。

$$\mathrm{Hom}_G(I^\bullet, J^\bullet[p]) \times \mathrm{Hom}_G(L, I^q) \ni (\phi^\bullet, \psi) \longmapsto \phi^q \circ \psi \in \mathrm{Hom}_G(L, J^{p+q})$$

から $\mathbb{Z}$ 双線型写像 (合成積)

$$\mathrm{Ext}_G^p(M, N) \otimes \mathrm{Ext}_G^q(L, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^{p+q}(L, N)$$

が定まる。

$M, N, P \in \mathcal{Mod}_G$ で N が自由アーベル群であるものと G 準同型 $\beta : M \otimes N \to P$ が与えられているとする。$M \ni m \mapsto \beta(m, \cdot) \in \mathrm{Hom}(N, P)$ は G 準同型だから (1.3) と併せて $\beta : \mathrm{H}^p(G, M) \to \mathrm{H}^p(G, \mathrm{Hom}(N, P)) = \mathrm{Ext}^p_G(N, P)$ が得られる。これと合成積から $\mathbb{Z}$ 双線型写像

$$\smile_\beta : \mathrm{H}^p(G, M) \otimes \mathrm{H}^q(G, N) \xrightarrow{\beta\otimes\mathrm{id}} \mathrm{Ext}^p_G(N, P) \otimes \mathrm{Ext}^q_G(\mathbb{Z}, N) \longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(G, P) \tag{1.6}$$

が得られる。これを β に付随するカップ積と呼ぶ。

1.7　非可換係数コホモロジー

非斉次コチェインによる G コホモロジー群の定義 (1.2 節) を用いて、G コホモロジーを係数群が非可換群の場合に拡張できる。G が別の群 K に滑らかに作用しているとする。すなわち各 $k \in K$ の G での固定化群は開部分群である。これまでと同様に

$$\mathrm{H}^0(G, K) := K^G$$

と定める。次に G 上の K 値 1 コサイクルとは局所定数写像 $a : G \to K$ で

$$a(gh) = a(g)(g.a(h)), \quad g, h \in G$$

を満たすものとし、それらの集合を $Z^1(G, K)$ と書く。特に $1 : G \ni g \mapsto 1 \in K$ は 1 コサイクルである。1 コサイクル $a, b \in Z^1(G, K)$ がコホモローグとは、ある $k \in K$ に対して

$$b(g) = k^{-1}a(g)(g.k), \quad g \in G$$

が成り立つこととする。これが同値関係であることは容易に確かめられる。このとき $\mathrm{H}^1(G, K)$ を $Z^1(G, K)$ をコホモローグという同値関係で割った商集合と定義する。これは $1 \in Z^1(G, K)$ の $\mathrm{H}^1(G, K)$ での像を原点として $\mathrm{H}^1(G, K)$ を原点付き集合 (*pointed set*) と見なされる。なお原点付き集合の射 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ とは写像 $f : X \to Y$ で $f(x_0) = y_0$ を満たすものを指す。このとき逆像 $\ker f := f^{-1}(y_0) \subset X$ を f の核という。特に原点付き集合の完全列が考えられる。

定義された 1 次コホモロジーまではコホモロジー関手の性質の類似が成り立つ。滑らかな G 作用付き群の完全列 $1 \to K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \to 1$, すなわち

- $i : K \to L$ は正規準同型[*2]で全射準同型 $p : L \to M$ の核は $i(K)$ に等しく、

[*2] 像が正規部分群である準同型のこと。

- i, p は G 同変である

ものが与えられているとする。

(i) $\mathrm{H}^0(G, M) = M^G$ の元 m に対して $\ell \in p^{-1}(m) \subset L$ を取る。$\partial\ell(g) := \ell^{-1}(g.\ell)$, $(g \in G)$ と書けば、$p(\partial\ell(g)) = m^{-1}(g.m) = 1$ だから $i(k(g)) = \partial\ell(g)$ となる $k(g) \in K$ がただ一つある。こうして定まる $k : G \to K$ は 1 コサイクルで、そのコホモロジー類 $\delta(m) \in \mathrm{H}^1(G, K)$ は ℓ の取り方によらず、原点付き集合の射 $\delta : M^G \to \mathrm{H}^1(G, K)$ を定める。

(ii) さらに $i(K)$ が L の中心 $Z(L)$ に含まれているとする。$Z^1(G, M) \ni m$ に対して $p(\ell(g)) = m(g)$ となる $\ell : G \to L$ を取り、$\partial\ell(g, h) := \ell(g)(g.\ell(h))\ell(gh)^{-1}$, $(g, h \in G)$ とおく。上と同様に $p(\partial\ell(g, h)) = 1$ なので $\partial\ell(g, h) = i(k(g, h))$ となる $k : G \times G \to K$ がただ一つある。$i(K) \subset Z(L)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\partial\ell(x, yz)(x.\partial(y, z)) =& \ell(x)(x.\partial(y, z))(x.\ell(yz))\ell(xyz)^{-1} \\ =& \ell(x)(x.\ell(y))(xy.\ell(z))(x.\ell(yz))^{-1}(x.\ell(yz))\ell(xyz)^{-1} \\ \partial\ell(x, y)\partial\ell(xy, z) =& \ell(x)(x.\ell(y))(xy.\ell(z))\ell(xyz)^{-1}\end{aligned}$$

は一致するから $k \in Z^2(G, K)$ であり、その $\mathrm{H}^2(G, K)$ でのクラス $\delta(m)$ は m のコホモロジー類のみで定まる。こうして原点付き集合の射 $\delta : \mathrm{H}^1(G, M) \to \mathrm{H}^2(G, K)$ が得られる。

命題 1.3 ([Ser79] VII 章の補遺の命題)**.** 滑らかな G 作用付き群の完全列 $1 \to K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \to 1$ に対して次の原点付き集合の完全列がある。

$$1 \to K^G \xrightarrow{i} L^G \xrightarrow{p} M^G \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G, K) \xrightarrow{i} \mathrm{H}^1(G, L) \xrightarrow{p} \mathrm{H}^1(G, M).$$

さらに $i(K) \subset Z(L)$ なら次も完全列である。

$$1 \to K^G \xrightarrow{i} L^G \xrightarrow{p} M^G \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(G, K) \xrightarrow{i} \mathrm{H}^1(G, L) \xrightarrow{p} \mathrm{H}^1(G, M) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(G, K).$$

証明. 簡単なので読者自ら試みられたい。 □

1.8　Shapiro の補題

$H \subset G$ を閉部分群とし、K を滑らかな H 作用付き群とする。局所定数関数 $f : G \to K$ で $f(hx) = h.f(x), (h \in H, x \in G)$ を満たすものの集合を $\mathrm{Ind}_H^G K$ と書く。これは値の演算により群になり、G 作用 $g.f(x) = f(xg), (g \in G, f \in \mathrm{Ind}_H^G K)$ を備えている。これを K の G への誘導群 (*induced group*) と呼ぶ[*3]。

補題 1.4. $H \subset G$ を閉部分群とする。$M \in \mathcal{M}od_G$ と $K \in \mathcal{M}od_H$ に対して自然な同型

$$\mathrm{Ext}^i_G(M, \mathrm{Ind}_H^G K) \cong \mathrm{Ext}^i_H(M, K)$$

がある。同様に K が滑らかな H 作用付き群のときも次の自然な同型がある。

$$\mathrm{H}^i(G, \mathrm{Ind}_H^G K) \cong \mathrm{H}^i(H, K)$$

証明. まず K がアーベル群のとき、任意の $M \in \mathcal{M}od_G$ に対して *Frobenius* 相互律 $\mathrm{Hom}_G(M, \mathrm{Ind}_H^G K) \cong \mathrm{Hom}_H(M, K)$ が成り立つ [BZ76, 2.28]。加えて $\mathrm{Ind}_H^G : \mathcal{M}od_H \to \mathcal{M}od_G$ は完全関手であるから K の単射分解 $I^\bullet$ に対して、$\mathrm{Ind}_H^G I^\bullet$ は $\mathrm{Ind}_H^G K$ の単射分解である。すなわち自然な同型

$$\mathrm{Ext}^i_G(M, \mathrm{Ind}_H^G K) \cong \mathrm{Ext}^i_H(M, K)$$

がある。

次に K が非可換な場合を考える。$(\mathrm{Ind}_H^G K)^G$ は K^H に値を持つ定数関数の集合だから $i = 0$ の場合は明らかである。1 次コホモロジーの場合を示すために単位元を含む $H \backslash G$ の完全代表系 Ξ を固定する。$Z^1(G, \mathrm{Ind}_H^G K)$ の元を $G \ni x \mapsto c_x(g) \in \mathrm{Ind}_H^G K$ と書こう。コサイクル条件から $c_{\xi x}(h) = c_\xi(h) c_x(h\xi)$, すなわち

$$c_x(h\xi) = c_\xi(h)^{-1} c_{\xi x}(h) = h.(c_\xi(1)^{-1} c_{\xi x}(1)), \quad x \in G, h \in H, \xi \in \Xi$$

ゆえ c は $G \ni g \mapsto c_g(1) \in K$ で決まる。次に $b(h\xi) := c_\xi(h) \in \mathrm{Ind}_H^G K, (h \in H, \xi \in \Xi)$ として $c'_x := b c_x (x.b)^{-1}$ とおけば、$c'_\xi(1) = c_1(1) c_\xi(1) c_\xi(1)^{-1} = 1$ より

$$c'_{h\xi}(1) = c'_h(1) c'_\xi(h) = c'_h(1) h.c'_\xi(1) = c'_h(1), \quad h \in H, \xi \in \Xi.$$

[*3] K がアーベル群のときは余誘導加群 (*coinduced module*) とも呼ばれる。

二つのコサイクル $c_i \in Z^1(G, \mathrm{Ind}_H^G K)$, $(i = 1, 2)$ がコホモローグなら対応する $c'_i \in Z^1(H, K)$ もコホモローグゆえ、単射 $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Ind}_H^G K) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(H, K)$ が得られた。逆に任意の $(h \mapsto c'_h) \in Z^1(H, K)$ に対して

$$c_{h\xi}(1) = c'_h, \quad c_g(h\xi) := h.(c_{\xi g}(1)), \quad h \in H, \xi \in \Xi, g \in G$$

とおくことにより $c \in Z^1(G, \mathrm{Ind}_H^G K)$ が得られ、上の射が全射であることも分かる。 □

2 トーラスの Langlands 対応

非可換な簡約群上の保型形式に生じる内視論の問題を考える前に、可換群上の保型形式、つまりトーラスの保型指標の記述を復習しておこう。

2.1 Galois コホモロジーの双対性

副有限群 Γ と滑らかな Γ 加群 C, それに開部分群 $\Delta \subset \Gamma$ に対する同型の族 $\{\mathrm{inv}_\Delta : \mathrm{H}^2(\Delta, C) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\}_\Delta$ からなる三つ組が類構造 (*class formation*) とは、次の二条件件が成り立つこととする。

- 任意の開部分群 $\Delta \subset \Gamma$ に対して $\mathrm{H}^1(\Delta, C) = 0$.
- 開部分群 $\Theta \subset \Delta \subset \Gamma$ に対して $\mathrm{inv}_\Theta \circ \mathrm{res}_\Theta^\Delta = [\Delta : \Theta] \cdot \mathrm{inv}_\Delta$.

合成積から $\mathbb{Z}$ 双線型写像

$$\mathrm{Ext}^i_\Gamma(M, C) \otimes \mathrm{H}^{2-i}(\Gamma, M) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\Gamma, C) \xrightarrow{\mathrm{inv}_\Gamma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

が定まる。位相アーベル群 G の有限位数の連続指標[*4]の群 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (離散 Pontrjagin 双対群) を G^* と書く。例えば離散捻れ群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ と副有限群 $\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は互いの離散 Pontrjagin 双対である。

[*4] 正標数の局所体の整数環の単元群のように指数有限でも開部分群でない部分群があるため連続性の条件は必要である。

定理 2.1 (Tate, [Mil06] 定理 1.8)**.** $(\Gamma, C, \{\mathrm{inv}_\Delta\})$ を類構造とし、$M \in \mathcal{M}od_\Gamma$ が有限生成であるとする。
(i) (2.1) は $i \geq 2$ に対して、(抽象群の) 同型 $\alpha_\Gamma^i(M) : \mathrm{Ext}_\Gamma^i(M, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{2-i}(\Gamma, M)^*$ を与える。特に $\mathrm{Ext}_\Gamma^i(M, C) = 0, (i \geq 3)$ である。
(ii) $i = 1$ の場合、(2.1) が与える準同型 $\alpha_\Gamma^1(M)$ は M が捻れ元を持たなければ全単射である。さらに任意の開部分群 $\Delta \subset \Gamma$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\alpha_\Delta^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) : \mathrm{Ext}_\Delta^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\Delta, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ が全単射ならば、$\alpha_\Gamma^1(M)$ は全単射である。

この定理は証明しない。興味のある読者は [Mil06, I.1 節], あるいは [Hid00, 4.4.1 節] を参照されたい。

■局所 Tate・中山双対性　F を標数が 0 の非アルキメデス局所体とし、そのモジュラスを $|\ |_F : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ と書く。F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定して絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を $\Gamma = \Gamma_F$ と書く。定義から Γ は有限次 Galois 拡大 E/F の Galois 群 $\Gamma_{E/F}$ の射影極限として副有限位相を備えている。常の通り F 代数群 G と有限次 Galois 拡大 E/F に対し、$\mathrm{H}^i(\Gamma, G(\bar{F}))$, $\mathrm{H}^i(\Gamma_{E/F}, G(E))$ をそれぞれ $\mathrm{H}^i(F, G)$, $\mathrm{H}^i(E/F, G(E))$ と書く。特に乗法群 $\mathbb{G}_m(R) := R^\times$ の Galois コホモロジー群 $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$ が F の *Brauer* 群である。Galois 理論の基本定理から Γ の開部分群はある有限次 Galois 拡大 E/F の絶対 Galois 群 $\Gamma_E = \mathrm{Gal}(\bar{F}/E)$ である。$(\Gamma, \mathbb{G}_m(\bar{F}) = \bar{F}^\times)$ と局所類体論の不変量射 [Ser67, 1.1 節] $\mathrm{inv}_E : \mathrm{H}^2(E, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は類構造をなす (Hilbert 90 定理と [Ser67, 定理 3])。

T を F 上定義されたトーラス、すなわち $T \otimes_F \bar{F}$ が乗法群の直積 $\mathbb{G}_m^r$ に同型であるような F 代数群とする。有限次拡大 E/F で $T \otimes_F E \simeq \mathbb{G}_{m,E}^r$ となるものが存在する。このような E を T の分解体 (*splitting field*) という。$X^*(T) := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ および $X_*(T) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ を T の指標群および余指標群という。$X^*(\mathbb{G}_m) = \mathrm{End}(\mathbb{G}_m) = \{x \mapsto x^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ であるから $X^*(T) \simeq \mathbb{Z}^r$ であり、完全 $\mathbb{Z}$ 双対性

$$\langle\, ,\, \rangle : X^*(T) \otimes X_*(T) \ni \chi \otimes \mu^\vee \longmapsto \chi \circ \mu^\vee \in \mathrm{End}(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$$

がある。$\mathcal{M}od_\Gamma$ での自然な同型 $T(\bar{F}) \cong X_*(T) \otimes \bar{F}^\times \cong \mathrm{Hom}(X^*(T), \bar{F}^\times)$ に注意する。

以下 $X(T)_F := X^*(T)^\Gamma$ を T の F 有理指標の群とする。実ベクトル空間 $\mathfrak{a}_T := \mathrm{Hom}(X(T)_F, \mathbb{R})$ を導入し、準同型 $H_T : T(F) \to \mathfrak{a}_T$ を

$$\langle \chi, H_T(t) \rangle = \log |\chi(t)|_F, \quad \chi \in X(T)_F$$

と定める。その核 $T(F)^1 := \ker H_T$ は $T(F)$ の極大コンパクト部分群で、像は $X_*(T)^\Gamma$ に同型である。

例 2.2. E/F を $\bar{F}$ に含まれる有限次拡大とし、E の $\bar{F}$ への F 埋め込みの集合を $\Phi := \mathrm{Hom}_F(E, \bar{F})$ と略記する。

(i) $T := \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m$ を $\mathbb{G}_{m,E}$ の F への Weil 係数制限、すなわち任意の F 代数 R に $T(R) = (R \otimes_F E)^\times$ を対応させる F 代数群とする。$E \otimes_F E \simeq E^\Phi$ に注意すれば、$T \otimes_F E \simeq \mathbb{G}_{m,E}^\Phi$ および Γ 加群の同型 $X^*(T) \simeq \mathbb{Z}^\Phi = \mathrm{Ind}_{\Gamma_E}^{\Gamma} \mathbb{Z}$ がわかる。特に E は T の分解体である。

(ii) 上の状況で $\mathrm{N}_{E/F} : T \otimes_F E \simeq \mathbb{G}_{m,E}^\Phi \ni (a_\iota)_\iota \longmapsto \prod_{\iota\in\Phi} a_\iota \in \mathbb{G}_{m,E}$ は F トーラスの準同型 $\mathrm{N}_{E/F} : T \to \mathbb{G}_m$ に落ちる。その核 $S := \ker \mathrm{N}_{E/F} \subset T$ は F トーラスで、$X^*(S) = X^*(T)/\mathbb{Z}\,\mathrm{N}_{E/F}$ である。

ここで T の Langlands 双対トーラス $\hat{T} := X^*(T) \otimes \mathbb{C}/X^*(T)$ を導入する。Γ は $X^*(T)$ への作用を通して $\hat{T}$ および $\hat{\mathfrak{t}} := X^*(T) \otimes \mathbb{C}$ に作用する。有限次 Galois 拡大 E/F に対して $\hat{\mathfrak{t}}^{\Gamma_E}$ は再び $\mathbb{C}$ ベクトル空間なので可除群である。よって $\mathrm{H}^i(\Gamma_{E/F}, \hat{\mathfrak{t}}^{\Gamma_E}) = 0, (i \geq 1)$ となって $\mathrm{H}^i(\Gamma, \hat{\mathfrak{t}}) \simeq \varinjlim_E \mathrm{H}^i(\Gamma_{E/F}, \hat{\mathfrak{t}}^{\Gamma_E}) = 0, (i \geq 1)$ がわかる。これと定義から従う Γ コホモロジーの長完全列

$$\cdots \mathrm{H}^{i-1}(\Gamma, \hat{\mathfrak{t}}) \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\Gamma, \hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\Gamma, X^*(T)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\Gamma, \hat{\mathfrak{t}}) \cdots$$

より

$$\mathrm{H}^i(\Gamma, X^*(T)) \simeq \begin{cases} \hat{T}^\Gamma / \mathrm{im}(\hat{\mathfrak{t}}^\Gamma) \simeq \pi_0(\hat{T}^\Gamma) & i = 1 \text{ のとき} \\ \mathrm{H}^{i-1}(\Gamma, \hat{T}) & i \geq 2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.2}$$

である。ここで $\pi_0(X)$ は位相群 X の連結成分の群を表す。局所コンパクトアーベル群 X の Pontrjagin 双対を X^D と書く。$M = X^*(T) \in \mathcal{M}od_\Gamma$ はアーベル群として有限生成自由である。これに定理 2.1 を適用して次が得られる。

命題 2.3 (局所 Tate・中山双対性). (i) F トーラスの圏からアーベル群の圏への関手の同型 $\alpha_T : \mathrm{H}^1(F, T) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ がある。
(ii) $T(F)$ を指数有限開部分群を単位元の基本近傍系とする位相について完備化したコンパクト群 $\widehat{T(F)}$ は離散群 $\mathrm{H}^2(F, X^*(T))$ の Pontrjagin 双対。

証明. 定理 2.1 (ii) から有限群の同型 $\alpha_\Gamma^1(X^*(T)) : \mathrm{Ext}_\Gamma^1(X^*(T), \bar{F}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T))^*$ がある。ここで (1.3), (2.2) から

$$\mathrm{Ext}_\Gamma^1(X^*(T), \bar{F}^\times) \simeq \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathrm{Hom}(X^*(T), \bar{F}^\times)) \simeq \mathrm{H}^1(F, T),$$
$$\mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T))^* \simeq \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^* \simeq \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$$

ゆえ、(i) の関手的同型が得られる。(有限群なので離散 Pontrjagin 双対は Pontrjagin 双対に一致する。) (ii) は定理 2.1 (i) から直ちに従う。 □

注意 2.4. F がアルキメデス局所体のときも命題 2.3 の類似が成り立つ。$F=\mathbb{R}$ のとき $\Gamma\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は有限群なので、$M=X^*(T)$ に対する (2.1) は Tate コホモロジー群 [Ser79, VIII 章] のカップ積

$$\widehat{\mathrm{H}}^i(\mathbb{C}/\mathbb{R},\mathrm{Hom}(X^*(T),\mathbb{C}^\times))\otimes\widehat{\mathrm{H}}^{2-i}(\mathbb{C}/\mathbb{R},X^*(T))\xrightarrow{\smile}\mathrm{H}^2(\mathbb{C}/\mathbb{R},\mathbb{C}^\times)\xrightarrow[\sim]{\mathrm{inv}_{\mathbb{R}}}\frac{1}{2}\mathbb{Z}\Big/\mathbb{Z}$$

になる。左辺の 2 項は共に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の直積であり、これが関手的同型 $\alpha_T:\mathrm{H}^1(\mathbb{R},T)\xrightarrow{\sim}\pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ および双対性 $\widehat{\mathrm{H}}^0(F_v,T)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^1(\Gamma_v,\hat{T})$ を与える。$F=\mathbb{C}$ のときは自明である。

■大域理論　次に F が代数体の場合を考えよう。やはり F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定し、絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を $\Gamma=\Gamma_F$ で表す。F の素点 v での完備化を F_v と書く。その代数閉包 $\bar{F}_v$ および、代数閉包の一意性から存在が保証される単射 F 準同型 $\bar{v}:\bar{F}\hookrightarrow\bar{F}_v$ を固定し、$\bar{F}_v/F_v$ の Galois 群を $\Gamma_v:=\Gamma_{F_v}$ と略記する。連続準同型 $\Gamma_v\ni\sigma\mapsto\bar{v}^{-1}\circ\sigma\circ\bar{v}\in\Gamma$ をやはり $\bar{v}$ で表すことにすれば、$M,N\in\mathcal{Mod}_\Gamma$ に対して 1.4 節の構成により準同型

$$\bar{v}:\mathrm{Ext}^i_\Gamma(M,N)\longrightarrow\mathrm{Ext}^i_{\Gamma_v}(M,N)$$

が定まる。なお記号を転用して $\bar{v}^*M$ を M と書いている。有限次拡大のときの分解群への制限の拡張としてこの写像を v での制限射などと言うことがある。F のアデール環を $\mathbb{A}=\mathbb{A}_F$ と書き、$\bar{F}$ 内の有限次 Galois 拡大 E/F に対する $\mathbb{A}_E$ の帰納極限を $\bar{\mathbb{A}}:=\varinjlim_E\mathbb{A}_E$ と書く。局所大域完全列 $1\to\bar{F}^\times\to\bar{\mathbb{A}}^\times\to\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times\to 1$ の Galois コホモロジー長完全列

$$F^\times\longrightarrow\mathbb{A}^\times\longrightarrow(\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)^\Gamma\longrightarrow\mathrm{H}^1(F,\mathbb{G}_m)$$

と Hilbert 90 定理 $\mathrm{H}^1(F,\mathbb{G}_m)=0$ から $(\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)^\Gamma=\mathbb{A}^\times/F^\times$ がわかる。このとき $(\Gamma,\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)$ と類体論の不変量射 $\mathrm{inv}_E:\mathrm{H}^2(E,\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, ($E/F$ は有限次拡大) は類構造をなし、局所、大域不変量射は次の可換図式 (短完全列の同型) を与える [Tat67, §11]。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F,\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F,\bar{\mathbb{A}}^\times) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F,\bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) & \longrightarrow & 0\\
 & & \Big\| & & {\scriptstyle(2.5)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{inv}_F} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(F,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\bigoplus\bar{v}} & \bigoplus_v\mathrm{H}^2(F_v,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\sum\mathrm{inv}_{F_v}} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}\tag{2.3}$$

T を F 上定義されたトーラスとし、E/F を $\bar{F}$ に含まれる有限次 Galois 拡大とする。$\bar{F} \xrightarrow{\bar{v}} \bar{F}_v$ の E への制限は E の素点 w を定め、$\Gamma_{E_w/F_v} \ni \sigma \mapsto w^{-1} \circ \sigma \circ w \in \Gamma_{E/F}$ により Γ_{E_w/F_v} は $\Gamma_{E/F}$ における w の固定化群と同一視される。$E_v := E \otimes_F F_v$ などと書くことにすれば、正規底定理から $F[\Gamma_{E/F}]$ 加群の同型

$$E_v \simeq F[\Gamma_{E/F}] \otimes_F F_v \simeq F_v[\Gamma_{E_w/F_v}] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_{E_w/F_v}]} \mathbb{Z}[\Gamma_{E/F}] \simeq \mathrm{Ind}_{\Gamma_{E_w/F_v}}^{\Gamma_{E/F}} E_w$$

がある。よって $T(E_v) \simeq \mathrm{Ind}_{\Gamma_{E_w/F_v}}^{\Gamma_{E/F}} T(E_w)$ だから Shapiro の補題 1.4 を使って

$$\mathrm{H}^i(E/F, T(E_v)) \simeq \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w))$$

を得る。次に有限個を除く非アルキメデス素点 v では $T_v := T \otimes_F F_v$ は不分岐、すなわち F_v 上不分岐な分解体を持つ。このとき T は F_v の整数環 $\mathcal{O}_v$ 上の滑らかで平坦なトーラススキームに延びる。その $\mathcal{O}_w$ 値点の群をやはり $T(\mathcal{O}_w)$ と書けば、[CF86, VI.1.2 命題 1] の証明と同様の議論により

$$\mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(\mathcal{O}_w)) = 0 \tag{2.4}$$

が証明できる。(詳しくは [KS99, 補遺 C] の補題 C.1.A の証明を参照のこと。) 以上を併せて同型

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^i(E/F, T(\mathbb{A}_E)) &\simeq \varinjlim_S \Big(\bigoplus_{v \in S} \mathrm{H}^i(E/F, T(E_v)) \times \prod_{v \notin S} \mathrm{H}^i(E/F, \bigoplus_{w|v} T(\mathcal{O}_w)) \Big) \\
&\simeq \varinjlim_S \Big(\bigoplus_{v \in S} \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w)) \times \prod_{v \notin S} \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(\mathcal{O}_w)) \Big) \\
&\simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^i(E_w/F_v, T(E_w))
\end{aligned}$$

が得られる。インフレ射についての帰納極限を取って

$$\mathrm{H}^i(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^i(F_v, T_v) \tag{2.5}$$

を得る。ただし係数拡大 $T \otimes_F F_v$ を T_v と書いている。

簡単のために $\mathrm{H}^i(\mathbb{A}/F, T) := \mathrm{H}^i(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))$ と略記する。各素点 v で $\hat{T}^\Gamma \subset \hat{T}^{\Gamma_v}$ なので準同型 $\bar{v} : \pi_0(\hat{T}^\Gamma) \to \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})$ およびその Pontrjagin 双対射 $\bar{v}^* : \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ が定まることに注意する。

命題 2.5 (大域 Tate・中山双対性)**.** (i) F トーラスの圏からアーベル群の圏への関手の同型 $\alpha_T : \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ がある。
(ii) 次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) & \xrightarrow{\alpha_T} & \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D \\ \| & & & & \uparrow \prod_v \bar{v}^* \\ \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) & \xrightarrow{(2.5)} & \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_v) & \xrightarrow{\bigoplus_v \alpha_{T_v}} & \bigoplus_v \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D \end{array}$$

(iii) $(T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^\Gamma$ を指数有限開部分群を単位元の基本近傍系とする位相で完備化したもの $(T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^{\Gamma,\wedge}$ と離散群 $\mathrm{H}^2(F, X^*(T))$ は Pontrjagin 双対である。

証明. 定理 2.1 を $M = X^*(T)$ に適用すると、$\mathrm{Hom}(X^*(T), \bar{\mathbb{A}}^\times/\bar{F}^\times) \cong T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})$ から有限群の同型

$$\alpha_T : \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T))^* \overset{\alpha^1_\Gamma(X^*(T))}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$$

を得る。つまり (i) が示された。(iii) も同様である。(ii) は次の可換図式から従う。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) \otimes \mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T)) & \xrightarrow{\smile} & \mathrm{H}^2(\mathbb{A}/F, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\mathrm{inv}_F} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \otimes \mathrm{H}^1(\Gamma, X^*(T)) & \xrightarrow{\smile} & \mathrm{H}^2(F, \bar{\mathbb{A}}^\times) & & \uparrow \sum_v \\ \downarrow (2.5)\otimes\prod \bar{v} & & \downarrow \text{同型} & & \\ \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, T_v) \otimes \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, X^*(T_v)) & \xrightarrow{\bigoplus \smile_v} & \bigoplus_v \mathrm{H}^2(F_v, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\bigoplus \mathrm{inv}_{F_v}} & \bigoplus_v \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

ただし左の上下のスクエアの可換性は合成積の関手性から従う。右のスクエアは (2.3) である。 □

2.2 Weil 群とトーラスの Langlands 対応

まず Weil 群の定義を思い出そう [Tat79]。F を標数 0 の局所体または代数体として

$$C_F := \begin{cases} F^\times & F \text{ が局所体のとき} \\ \mathbb{A}^\times/F^\times & F \text{ が代数体のとき} \end{cases}$$

と書く。$\bar{F}/F$ の Weil 群 W_F とは正確には

- 位相群 W_F.
- 像が稠密な連続準同型 $\varphi_F : W_F \to \Gamma$. すなわち有限次拡大 E/F に対して $W_E := \varphi_F^{-1}(\Gamma_E) \subset W_F$ は開部分群で φ_F が引き起こす写像 $W_F/W_E \to \Gamma/\Gamma_E$ は全単射である。
- 有限次拡大 E/F に対する同型 $r_E : C_E \to W_E^{\mathrm{ab}}$ の族。ただし W_E^{ab} は交換子群の閉包 $\overline{[W_E, W_E]}$ で W_E を割った位相群を表す。

からなる三つ組で次の条件を満たすものである。

(i) 合成 $C_E \overset{r_E}{\to} W_E^{\mathrm{ab}} \to \Gamma_E^{\mathrm{ab}}$ は類体論の相互律射に一致する。

(ii) $w \in W_F, \sigma := \varphi(w) \in \Gamma$ に対して次の図式は可換。

$$\begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E"] \arrow[d, "\sigma"'] & W_E^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(w)"] \\ C_E \arrow[r, "r_E"] & W_E^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

(iii) F の有限次拡大 $K \supset E$ に対して移行準同型 (*transfer*) $W_E^{\mathrm{ab}} \to W_K^{\mathrm{ab}}$ [Ser79, VII.8 節] を $t_{K/E}$ と書けば、次の図式は可換。(実は定義には最初の図式だけでよいが 2 つ目の図式もよく用いるので引用している。)

$$\begin{tikzcd} C_E \arrow[r, "r_E"] \arrow[d, hook] & W_E^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "t_{K/E}"] \\ C_K \arrow[r, "r_K"] & W_K^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_K \arrow[r, "r_K"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{K/E}"'] & W_K^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\ C_E \arrow[r, "r_E"] & W_E^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

(iv) $W_{E/F} := W_F \big/ \overline{[W_E, W_E]}$ と書くとき、$W_F = \varprojlim_E W_{E/F}$.

F が非アルキメデス局所体のとき、その剰余体を k_F と書いてその代数閉包 $\bar{k}_F$ を固定する。その絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ は幾何的 Frobenius 自己同型 $\mathrm{Fr}(x) = x^{1/q}$ $(q = |k_F|)$ を位相的生成元に持つ $\widehat{\mathbb{Z}}$ に同型な副有限群であった。自然な準同型 $\Gamma \to \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ の核 $I_F \subset \Gamma$ が F の惰性群 (*inertia group*) である。このとき Weil 群 W_F は行が完全列であ

る次の可換図式を満たす。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_F \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I_F \arrow[r] & W_F \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathrm{Fr}^{\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

F が代数体のときには、各素点 v で固定した $\bar{v}: \bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_v$ が与える準同型 $\bar{v}: \Gamma_v \to \Gamma$ と有限次拡大 E/F に対して次の図式が可換となるような連続準同型 $\bar{v}: W_{F_v} \to W_F$ が $W_F^0 := \ker \varphi_F$ の共役を除いてただ一つ存在する。ただし w は $\bar{v}$ が定める E の素点で、後者の図式の右の列は $\bar{w} = \bar{v}|_{W_{E_w}}: W_{E_w} \to W_E$ が引き起こす準同型である。

$$\begin{tikzcd} W_{F_v} \arrow[r, "\varphi_{F_v}"] \arrow[d, "\bar{v}"'] & \Gamma_v \arrow[d, "\bar{v}"] \\ W_F \arrow[r, "\varphi_F"] & \Gamma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_w^\times \arrow[r, "r_{E_w}"] \arrow[d] & W_{E_w}^{\mathrm{ab}} \arrow[d] \\ \mathbb{A}_E^\times/E^\times \arrow[r, "r_E"] & W_E^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

Weil 群は副有限でない位相群である。W_F が連続に作用する位相アーベル群 A に対して、1.2 節の標準複体を (抽象群の複体ということで) $C^\bullet_{\mathrm{abs}}(W_F, A)$ と書き、そのうち連続なコチェインのなす複体を $C^\bullet_{\mathrm{ct}}(W_F, A)$ と書くことにする。これらの複体の i 次コホモロジー群をそれぞれ $\mathrm{H}^i_{\mathrm{abs}}(W_F, A), \mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(W_F, A)$ で表す。

■トーラスの Langlands 対応　Weil 群は可換類体論を 1 パッケージにした群であり、特に Langlands によるトーラス上の保型形式の記述に用いられる。ここではその記述を Labesse の議論にそって概説する [Lab84], [Mil06]。ホモロジー群を使った Langlands 自身の構成 [Lan97] については [KS99, p.126] に概説がある。

まず群コホモロジーの余制限射を復習する [Ser79, VII.7 節]。群 G と指数有限部分群 $H \subset G$ が与えられているとする。$M \in G\text{-}\mathcal{M}od$ に対して

$$\mathrm{cor}_H^G : \mathrm{H}^0(H, M) = M^H \ni m \longmapsto \mathrm{N}_{G/H}(m) := \sum_{\sigma \in G/H} \sigma(m) \in M^G = \mathrm{H}^0(G, M)$$

が定まる。これをコホモロジー関手の射に延ばすため、G 加群の完全列 $0 \to \mathfrak{I}_G \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$, ($\mathfrak{I}_G \subset \mathbb{Z}[G]$ は添加イデアル) から従う完全列

$$0 \longrightarrow (M = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M)) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], M) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Hom}(\mathfrak{I}_G, M)$$

を考える。$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], M)$ は G 加群、H 加群として余誘導的 (自明な部分群からの余誘導加群) であるから、その 1 次以上の G, H コホモロジー群は全て消えている。よって可

換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_H(\mathfrak{I}_G, M) & \hookleftarrow & (\mathrm{im}\,\pi)^H & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^1(H,M) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow {\scriptstyle \mathrm{N}_{G/H}} & & & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{cor}_H^G} & & \\ \mathrm{Hom}_G(\mathfrak{I}_G, M) & \hookleftarrow & (\mathrm{im}\,\pi)^G & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^1(G,M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

により $\mathrm{cor}_H^G : \mathrm{H}^1(H,M) \to \mathrm{H}^1(G,M)$ が定まる。以下この議論を繰り返して高次のコホモロジーに拡張すればよい。

Weil 群の状況に戻って F トーラス T を取り、T を分解する有限次 Galois 拡大 K/F を固定する。定義から完全列

$$0 \longrightarrow (C_K \overset{r_K}{\xrightarrow{\sim}} W_K^{\mathrm{ab}}) \longrightarrow W_{K/F} \longrightarrow \Gamma_{K/F} \longrightarrow 0$$

がある。上の構成を $G = W_{K/F} \triangleright H = W_K^{\mathrm{ab}}$ に適用して、ノルム写像 $\mathrm{N}_{K/F} : \hat{T} \ni t \mapsto \sum_{\sigma\in\Gamma_{K/F}} \sigma(t) \in \hat{T}^{\Gamma}$ は余制限射

$$\mathrm{cor} : \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_K^{\mathrm{ab}}, \hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_{K/F}, \hat{T})$$

を与える。

命題 2.6. 上の状況で余制限射は同型 $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T})_{\Gamma_{K/F}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T})$ を与える。

証明の概略. 有限群 $\Gamma_{K/F}$ 上の加群 $M(T) := \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_K^{\mathrm{ab}}, \hat{T}) \overset{r_K^*}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Hom}(C_K, \hat{T})$ の Tate コホモロジー群 $\widehat{\mathrm{H}}^q(\Gamma_{K/F}, M(T))$, $(q \in \mathbb{Z})$ が考えられる [Ser79, VIII 章]。その定義から完全列

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(\Gamma_{K/F}, M(T)) \longrightarrow M(T)_{\Gamma_{K/F}} \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/F}} M(T)^{\Gamma_{K/F}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, M(T)) \longrightarrow 0$$

がある。一方で定義から従う完全列 $0 \to W_K^{\mathrm{ab}} \to W_{K/F} \to \Gamma_{K/F} \to 0$ に付随するインフレ・制限完全列 (1.5)

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma_{K/F}, \hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_{K/F}, \hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_K^{\mathrm{ab}}, \hat{T})^{\Gamma_{K/F}} \longrightarrow \mathrm{H}^2(\Gamma_{K/F}, \hat{T})$$

もある。ここで

- カップ積 $\widehat{\mathrm{H}}^i(\Gamma_{K/F}, \mathrm{Hom}(C_K, \hat{T})) \otimes \widehat{\mathrm{H}}^2(\Gamma_{K/F}, C_K) \to \widehat{\mathrm{H}}^{i+2}(\Gamma_{K/F}, \hat{T})$ [Ser79, VIII.3 節] と類体論の基本類 $u_{K/F} \in \widehat{\mathrm{H}}^2(\Gamma_{K/F}, C_K) = \mathrm{H}^2(K/F, C_K)$ [Tat67, 11.2 節] が定める写像

$$\smile u_{K/F} : \widehat{\mathrm{H}}^i(\Gamma_{K/F}, M(T)) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{H}}^{i+2}(\Gamma_{K/F}, \hat{T}) \tag{2.7}$$

は同型 [Lab84, 命題 4.1]。

- 余制限射 cor : $M(T) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_{K/F}, \hat{T})$ は $M(T)_{\Gamma_{K/F}}$ を経由する [Lab84, 補題 3.1]。

に注意すれば、次の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(\Gamma_{K/F}, M(T)) \arrow[r] \arrow[d, "\smile u_{K/F}"'] & M(T)_{\Gamma_{K/F}} \arrow[r, "\mathrm{N}_{K/F}"] \arrow[d, "\mathrm{cor}"'] & M(T)^{\Gamma_{K/F}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, M(T)) \arrow[d, "-(\smile u_{K/F})"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\Gamma_{K/F}, \hat{T}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{abs}}(W_{K/F}, \hat{T}) \arrow[r] & M(T)^{\Gamma_{K/F}} \arrow[r] & \mathrm{H}^2(\Gamma_{K/F}, \hat{T})
\end{tikzcd}$$

ここで左の二つのスクエアは可換であることがそれぞれ [Lab84, 命題 3.3, 補題 3.2] で示されている。右のスクエアが可換なことは [Mil06, 補題 8.4] から従う。よって五項補題から中央の余制限射は同型である。それを連続コホモロジー群に制限すると命題の同型が得られる。 □

上の証明の最初の完全列と最後の可換図式を組み合わせて次が得られる。

系 2.7 ([Lab84] 命題 5.5)**.** 命題 2.6 の状況でインフレ射 $\mathrm{H}^2(\Gamma_{K/F}, \hat{T}) \to \mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T})$ は零写像である。

さて、T の L 群を半直積 ${}^L T := \hat{T} \rtimes_{\rho_T} W_F$ と定める。ここで W_F の作用 ρ_T は $W_F \twoheadrightarrow W_{K/F} \twoheadrightarrow \Gamma_{K/F}$ と $\Gamma_{K/F}$ の $\hat{T}$ への作用の合成である。連続準同型 $\varphi : W_F \to {}^L T$ で第二射影 $\mathrm{pr}_2 : {}^L T \to W_F$ との合成が W_F の恒等写像になるようなものを T の L パラメーターまたは *Langlands* パラメーターと呼ぶ。二つの L パラメーターが同値とはそれらが $\hat{T}$ 共役なこととする。T の L パラメーターの同値類の集合を $\Phi(T)$ と書く。容易に分かるように L パラメーター $\varphi : W_F \ni w \mapsto a(w) \rtimes w \in {}^L T$ に対して $a(w)$ は $\hat{T}$ 値連続 1 コサイクルであり、L パラメーターの同値は対応する 1 コサイクルがコホモローグであることにほかならない。つまり

$$\Phi(T) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_F, \hat{T}) \xleftarrow[\sim]{\mathrm{infl}} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T})$$

である。位相アーベル群 A に対して $\mathrm{Irr}\, A := \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(A, \mathbb{C}^\times) = \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(A, \mathbb{C}^\times)$ と書く。

定理 2.8 (トーラスの局所 Langlands 対応)**.** F が標数 0 の局所体のとき自然な同型 $\Phi(T) \ni \varphi \overset{\sim}{\mapsto} \chi_T(\varphi) \in \mathrm{Irr}\, T(F)$ (F トーラスの圏から位相群の圏への関手の同型) がある。

証明の概略. 双対トーラスの定義から $X^*(\hat{T}) = X_*(T)$ であるから、命題 2.6 の左辺において

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T}) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(K^\times, \mathrm{Hom}(X^*(\hat{T}), \mathbb{C}^\times)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(K^\times \otimes X_*(T), \mathbb{C}^\times) \cong \mathrm{Irr}\, T(K)\end{aligned} \tag{2.8}$$

である。次に

$$\mathrm{Irr}\, T(K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(K), \mathbb{C}^1 \times \mathbb{R}) \cong T(K)^D \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(K), \mathbb{R})$$

に注意する。右辺の第一項については

$$T(F)^D = (T(K)^{\Gamma_{K/F}})^D = T(K)^D / \mathfrak{I}_{\Gamma_{K/F}} T(K)^D = (T(K)^D)_{\Gamma_{K/F}}$$

が成り立つ。アルキメデス的な場合も含めて $T(K)$ はただ一つの極大コンパクト部分群 $T(K)^1$ を持ち、

$$T(K)/T(K)^1 \simeq \begin{cases} X_*(T) & F \text{ が非アルキメデス的なとき} \\ X_*(T) \otimes \mathbb{R} & F \text{ がアルキメデス的なとき} \end{cases}$$

であるから、例 2.2 の直前の記述により

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(K), \mathbb{R})_{\Gamma_{K/F}} &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(K)/T(K)^1, \mathbb{R})_{\Gamma_{K/F}} \simeq \mathrm{Hom}(X_*(T), \mathbb{R})_{\Gamma_{K/F}} \\ &\simeq \mathrm{Hom}(X_*(T)^{\Gamma_{K/F}}, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(F)/T(F)^1, \mathbb{R}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(F), \mathbb{R})\end{aligned}$$

を得る。つまり $(\mathrm{Irr}\, T(K))_{\Gamma_{K/F}} = \mathrm{Irr}\, T(F)$ である。これと (2.8) を命題 2.6 に代入すれば、同型

$$\Phi(T) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T}) \cong \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T})_{\Gamma_{K/F}} \cong \mathrm{Irr}\, T(F)$$

が得られる。

$L \supset K$ が共に T を分解する F の有限次 Galois 拡大のとき、自然な射のなす可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & W_L^{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & W_{L/F} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \Gamma_{L/F} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W_K^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & W_{K/F} \arrow[r] & \Gamma_{K/F} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

がある。このとき図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_K^{\mathrm{ab}}, \hat{T}) \arrow[r, "\mathrm{cor}"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T}) \arrow[d, "\pi^*"] \\ \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_L^{\mathrm{ab}}, \hat{T}) \arrow[r, "\mathrm{cor}"] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T}) \end{tikzcd}$$

は可換なので上で得られた同型は分解体 K の取り方によらない。 □

注意 2.9 (不分岐な場合)**.** F が非アルキメデス的だとし、その素元 $\varpi \in \mathcal{O}$ を固定する。T が不分岐 F トーラス、つまりその分解体 K で F の有限次不分岐拡大であるものが取れるとする。このとき $T(F)$ の極大コンパクト部分群 $T(\mathcal{O})$ が定まっていた (20 頁参照)。T の余指標群の Galois 不変部分を $X_*(T)_F := X_*(T)^{\Gamma_{K/F}}$ と書けば、Cartan 分解 $T(F) = \coprod_{\mu^\vee \in X_*(T)_F} \mu^\vee(\varpi)T(\mathcal{O})$ が成り立つ。擬指標 $\chi \in \operatorname{Irr} T(F)$ が不分岐とはそれが $T(F)/T(\mathcal{O}) \simeq X_*(T)_F$ を経由することとする。

T の L パラメーター φ が不分岐とは、惰性群 $I_F \subset W_F$ の像 $\varphi(I_F) \subset {}^LT$ の $\hat{T}$ への射影が自明なことである。これは (2.6) に関するインフレ・制限完全列を使えば φ の同値類が $\mathrm{H}^1(\mathrm{Fr}^{\mathbb{Z}}, \hat{T}) \xrightarrow{\mathrm{infl}} \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_F, \hat{T}) = \Phi(T)$ の像 $\Phi_{\mathrm{ur}}(T)$ に含まれることに同値である。幾何的 Frobenius 自己同型 $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ の W_F での逆像の元 w_σ を取れば、$\varphi \in \Phi_{\mathrm{ur}}(T)$ は $\varphi(w_\sigma) = a(w_\sigma) \rtimes w_\sigma$ の $\hat{T}$ 共役類、つまり $a(w_\sigma)$ の Γ 不変商 $\hat{T}_\Gamma$ での像で決まる。

このとき定理 2.8 の同型による $\Phi_{\mathrm{ur}}(T)$ の像は $\mathrm{Irr}(T(F)/T(\mathcal{O}))$ である。具体的には $\chi \in \mathrm{Irr}(T(F)/T(\mathcal{O}))$ に対応する L パラメーター $\varphi_\chi(w_\sigma) = a_\chi(w_\sigma) \rtimes w_\sigma$ は、$\hat{T}_\Gamma = \mathrm{Hom}(X_*(T)_F, \mathbb{C}^\times)$ の元

$$X_*(T)_F \ni \mu^\vee \longmapsto \mu^\vee(\varpi) \in T(F) \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times$$

に対応する。

次に F が代数体の場合を考えよう。各素点 v で準同型 $\bar{v} : \mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(W_F, A) \to \mathrm{H}^i_{\mathrm{ct}}(W_{F_v}, A)$ がある。

定理 2.10 (トーラスの Langlands 対応)**.** 自然な全射準同型 $\Phi(T) \ni \varphi \mapsto \chi_T(\varphi) \in \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})/T(F))$ で、次の図式が可換になるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc} \Phi(T) & \xrightarrow{\chi_T} & \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})/T(F)) \\ {\scriptstyle \prod \bar{v}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \text{制限テンソル積分解}} \\ \prod_v \Phi(T_v) & \xrightarrow{\prod \chi_{T_v}} & \prod_v \operatorname{Irr} T(F_v) \end{array}$$

その核は有限群 $Ш^1(W_F, \hat{T}) := \ker[\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_F, \hat{T}) \to \prod_v \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{F_v}, \hat{T}_v)]$ である。

証明. 局所体の場合と同様に $\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(X_*(T) \otimes C_K, \mathbb{C}^\times) \cong \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A}_K)/T(K))$

が成り立つ。よって Weil 群の可換図式 [Tat79, 1.6 節]

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & C_K \arrow[r] & W_{K/F} \arrow[r] & \Gamma_{K/F} \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_w^\times \arrow[r] \arrow[u] & W_{K_w/F_v} \arrow[r] \arrow[u] & \Gamma_{K_w/F_v} \arrow[r] \arrow[u] & 1
\end{tikzcd}$$

と命題 2.6 から可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, \hat{T}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\prod \bar{v}"'] & \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(C_K, \hat{T})_{\Gamma_{K/F}} \cong \mathrm{Irr}((T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}) \arrow[d, "\prod \bar{v}"] \\
\prod_v \mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(W_{K_w/F_v}, \hat{T}_v) \arrow[r, "\simeq"] & \prod_v \Big(\mathrm{H}^1_{\mathrm{ct}}(K_w^\times, \hat{T}_v)_{\Gamma_{K_w/F_v}} \cong \mathrm{Irr}\, T(F_v)\Big)
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

を得る。定理の関手的準同型 χ_T はこの第 1 行目と制限射 $\mathrm{Irr}((T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}) \to \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})/T(F))$ の合成と定めれば、(2.9) から定理の図式は可換である。

一方、$X_*(T) \otimes \mathbb{A}_K^\times/K^\times \cong T(\mathbb{A}_K)/T(K)$ などに注意して $1 \to T(K) \to T(\mathbb{A}_K) \to T(\mathbb{A}_K)/T(K) \to 1$ の $\Gamma_{K/F}$ コホモロジー完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
T(F) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & T(\mathbb{A}) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & (T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathrm{H}^1(K/F, X_*(T) \otimes K^\times) \arrow[d, equal] \\
\dfrac{T(F)}{\mathrm{N}_{K/F}\, T(K)} \arrow[r] & \dfrac{T(\mathbb{A})}{\mathrm{N}_{K/F}\, T(\mathbb{A}_K)} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes C_K) \arrow[r] & \widehat{\mathrm{H}}^1(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes K^\times)
\end{tikzcd}$$

から、$T(\mathbb{A})/T(F) \hookrightarrow (T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}$ の余核は $\widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes C_K)$ の $\widehat{\mathrm{H}}^1(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes K^\times)$ での像に同型である。ところが 24 頁の (2.7) と類似の同型

$$\smile u_{K/F} : \widehat{\mathrm{H}}^{-2}(\Gamma_{K/F}, X_*(T)) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes C_K)$$

から $\widehat{\mathrm{H}}^0(\Gamma_{K/F}, X_*(T) \otimes C_K)$ は有限群 $\mathrm{H}_1(K/F, X_*(T))$ に同型だから、$T(\mathbb{A})/T(F)$ は $(T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}$ の指数有限部分群である。特に χ_T は全射でその核は有限なことがわかる。最後に定理の図式の右列は単射だから、χ_T の核が局所自明なクラスの群 $\text{Ш}^1(W_F, \hat{T})$ であることも従う。 □

最後にもう一度局所大域完全列 $0 \to T(\bar{F}) \to T(\bar{\mathbb{A}}) \to T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}) \to 0$ の Galois コホモロジー完全列を見直そう。Hilbert 90 定理 $\mathrm{H}^1(K, T) = 0$ から

$$0 \longrightarrow T(K) \longrightarrow T(\mathbb{A}_K) \longrightarrow (T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^{\Gamma_K} \longrightarrow 0 \tag{2.10}$$

は完全である。よって縦列がインフレ・制限完全列からなる可換図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(K/F, T(K)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(K/F, T(\mathbb{A}_K)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(K/F, T(\mathbb{A}_K)/T(K)) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(F, T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(K, T_K) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(K, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}_K/K, T)
\end{tikzcd}
$$

を得る。Hilbert 90 定理と (2.4) から最下行は全て消えているから 2 行目と 3 行目の完全列は同型である。これと命題 2.5 から、定理 2.10 の χ_T の核は

$$
\begin{aligned}
\frac{(T(\mathbb{A}_K)/T(K))^{\Gamma_{K/F}}}{T(\mathbb{A})/T(F)} &\simeq \ker[\mathrm{H}^1(K/F, T(K)) \to \mathrm{H}^1(K/F, T(\mathbb{A}_K))] \\
&\simeq \text{Ш}^1(F, T) \simeq \text{Ш}^1(F, \hat{T})^D
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

の Pontrjagin 双対である。すなわちトーラスに対しては保型形式 (スペクトル) サイドの局所・大域 Langlands 対応の間の差が幾何サイドの局所大域完全列で記述される。

3　簡約代数群の状況

前節のトーラス上の保型形式の記述を非可換な簡約群に拡張しようとすると必然的に内視論が現れてくる。その過程を見てみよう。

3.1　保型表現

F を代数体とする。その無限素点での完備化の直和を $F_\infty := \prod_{v|\infty} F_v$, 有限アデール環を $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ で表す: $\mathbb{A} = F_\infty \oplus \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$. イデール群 $\mathbb{A}^\times$ 上のイデールノルム (モジュラス) を $|\ |_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+^\times$ と書く。対角埋め込み $\mathbb{G}_m(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m(\mathbb{R}) = F_\infty^\times$ による $\mathbb{R}_+^\times$ の像をやはり $\mathbb{R}_+^\times$ と書く。

G を代数体 F 上定義された連結簡約線型代数群とする。アデール群 $G(\mathbb{A})$ は局所コンパクト位相群で F 値点の群 $G(F) \subset G(\mathbb{A})$ は離散部分群である。G の中心 Z_G 内の極大 F 分裂トーラスを A_G で表す。定義から F 同型 $\mathbb{G}_m^r \xrightarrow{\sim} A_G$ があり、$(F_\infty^\times)^r \xrightarrow{\sim} A_G(F_\infty)$ による $(\mathbb{R}_+^\times)^r$ の像を $\mathfrak{A}_G$ と書けば、これは $Z_G(F_\infty)$ 内の極大 $\mathbb{R}$ ベクトル部分群である。一方、G の F 有理指標群を $X(G)_F := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)^\Gamma$ として実ベクトル空間

$\mathfrak{a}_G := \mathrm{Hom}(X(G)_F, \mathbb{R})$ を導入し、準同型 $H_G : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_G$ を

$$\langle \chi, H_G(g) \rangle = \log |\chi(g)|_{\mathbb{A}}, \quad \chi \in X(G)_F$$

で定める。すると $H_G|_{\mathfrak{A}_G} : \mathfrak{A}_G \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_G$ は同型であり、従って $G(\mathbb{A})^1 := \ker H_G$ として直積分解 $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})^1 \times \mathfrak{A}_G$ が成り立つ。イデールノルムの積公式から $G(F) \subset G(\mathbb{A})^1$ であることに注意しよう。

$G(\mathbb{A})$, $\mathfrak{A}_G$ 上の不変測度 dg, da を止めれば、右剰余類の空間 $G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}) \simeq G(F) \backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の不変測度 dg/da が定まる。Siegel 基本領域の記述と岩澤分解の積分公式から $G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A})$ は測度有限である。可測函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ で

- $\phi(\gamma a g) = \phi(g)$, $(\gamma \in G(F), a \in \mathfrak{A}_G)$;
- $G(F)\mathfrak{A}_G \backslash G(\mathbb{A}) \ni g \mapsto |\phi(g)|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は二乗可積分

を満たすものたちのなす Hilbert 空間を $\mathcal{L}(G)$ と書く。これは右移動作用

$$R(g)\phi(x) = \phi(xg), \quad g \in G(\mathbb{A}), \phi \in \mathcal{L}(G)$$

に関して $G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現と見なされる。この原稿では $\mathcal{L}(G)$ の既約部分商表現を $G(\mathbb{A})$ の保型表現 (*automorphic representation*) と呼び、特にそのうち $\mathcal{L}(G)$ の部分表現であるものを離散 (*discrete*) 保型表現ということにする。

注意 3.1. G がトーラス T の場合には $T(\mathbb{A})^1/T(F)$ はコンパクトである。従って Hilbert 直和分解

$$\mathcal{L}(T) \simeq \widehat{\bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})^1/T(F))}} \mathbb{C}\chi$$

成り立つ。一方 $\mathfrak{a}^*_{T,\mathbb{C}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_T, \mathbb{C})$ と書けば

$$\mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})^1/T(F)) \times \mathfrak{a}^*_{T,\mathbb{C}} \ni (\chi, \lambda) \overset{\sim}{\longmapsto} \chi_\lambda := e^{\langle \lambda, H_T(\cdot) \rangle}\chi \in \mathrm{Irr}(T(\mathbb{A})/T(F))$$

は同型である。

3.2 L 群

L 群の定義をトーラスから一般の連結簡約群に拡張しよう。F を標数 0 の局所体または代数体として、G を F 上の連結簡約線型代数群とする。係数拡大 $G_{\bar{F}} = G \otimes_F \bar{F}$ の *Borel* 部分群 (極大な連結可解部分群) B とその極大トーラス $T \subset B$ の対 (B, T) を *Borel*

対 (*Borel pair*) という。任意の二つの Borel 対は互いに $G(\bar{F})$ 共役である。また B の正規化群は B,T の B での正規化群は T 自身であるから [Spr98]、(B,T) の G での正規化群は T である。

G の Lie 環を $\mathfrak{g}$, 随伴表現を $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ と書く[*5]。その制限 $(\mathrm{Ad}|_T, \mathfrak{g}_{\bar{F}})$ に現れる $X^*(T)$ の非自明な元を T の G でのルートといい、その集合を $R(G,T)$ と書く。ルート $\alpha \in R(G,T)$ の $\mathrm{Ad}|_T$ での重複度は 1 であり、従ってその表現空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathbb{G}_a$ に同型である。B の Lie 環 $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_{\bar{F}}$ は $\mathrm{Ad}|_T$ の部分表現だが、そこに現れる $R(G,T)$ の元を B 正ルートと呼んでその集合を $R(B,T)$ で表す。さらに $\Delta(B,T)$ で B 単純ルート、すなわち複数の B 正ルートの和に書けない B 正ルートの集合を表す。$R(G,T)$ は被約ルート系 (*reduced root system*) をなし、$\Delta(B,T)$ はその基底である。(B,T) に各 $\alpha \in \Delta(B,T)$ に対する $\mathfrak{g}_\alpha(\bar{F})$ の元 X_α の族を加えた三つ組

$$\mathrm{spl} = (B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B,T)})$$

を $G_{\bar{F}}$ の分裂 (*splitting*) という。

任意の 2 つの分裂は互いに $G(\bar{F})$ 共役で、T での $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B,T)}$ の安定化群は $\Delta(B,T)$ の全ての元の核の交わり Z_G だから、$G_{\bar{F}}$ の分裂の集合には $G_{\mathrm{ad}}(\bar{F}) := (G/Z_G)(\bar{F})$ が単純推移的に作用している。$G_{\bar{F}}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ を G_{ad} で割った群 $\mathrm{Out}(G)$ を G の外部自己同型群という。分裂 spl を固定すれば、任意の $\bar{\theta} \in \mathrm{Out}(G)$ にその $\mathrm{Aut}(G)$ での逆像の元で spl を保つものを対応させることで完全列

$$1 \longrightarrow G_{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Out}(G) \longrightarrow 1$$

の分裂 $\mathrm{spl}: \mathrm{Out}(G) \to \mathrm{Aut}(G)$ が得られる。

■準分裂データ　G の F 分裂、つまり分裂 $\mathrm{spl} = (B, T, \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B,T)})$ で B,T が F 上定義されていて $\{X_\alpha\}$ が絶対 Galois 群 Γ の作用で安定なものがあるとき、G は F 準分裂 (*F-quasisplit*) であるという。一般に $G_{\bar{F}}$ の任意の分裂 spl を取れば、各 $\sigma \in \Gamma$ に対して $\sigma(\mathrm{spl}) = \mathrm{Ad}(u_\sigma^{-1})\mathrm{spl}$ となる $u_{\sigma,\mathrm{ad}} := u_\sigma Z_G(\bar{F}) \in G_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ がただ一つある。すると $\{u_{\sigma,\mathrm{ad}}\}_{\sigma\in\Gamma} \in Z^1(F, G_{\mathrm{ad}}) := Z^1(\Gamma, G_{\mathrm{ad}}(\bar{F}))$ ($G_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクルの集合 (1.7 節)) であり、G の Galois 作用を $\sigma \mapsto \mathrm{Ad}(u_\sigma) \circ \sigma$ と捻って得られる簡約代数群 G^* は F 準分裂である。すなわち G の Galois 作用を内部自己同型で捻った内部形式 (*inner form*) G^* で F 準分裂なものが同型を除いて一意に存在する。以下、このような G^* とその F 分裂

*5 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は可換 F 代数 R に $\mathrm{Aut}_R(\mathfrak{g}(R))$ を対応させる代数群を表す。

$\mathrm{spl}_{G^*} = (B_0, T_0, \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)})$, それに同型 $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ で

$$\psi_G \circ \sigma(\psi_G)^{-1} := \psi_G \circ \sigma \circ \psi_G^{-1} \circ \sigma^{-1} = \mathrm{Ad}(u_\sigma) \in G^*_{\mathrm{ad}}(\bar{F}) \tag{3.1}$$

となるもの (内部捻り、*inner twist*) の三つ組 $(G^*, \mathrm{spl}_{G^*}, \psi_G)$ を固定しておく。 G がトーラスなら ψ_G は単に恒等射である。

例 3.2. $\mathscr{A}$ を n^2 次元の中心的単純 F 代数として、可換 F 代数 R に $G(R) := (\mathscr{A} \otimes_F R)^\times$ を対応させる F 代数群 G を考える。$\mathscr{A}$ の Brauer 群 $\mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$ でのクラスは $1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1$ の Galois コホモロジー完全列 (命題 1.3)

$$(\mathrm{H}^1(F, \mathrm{GL}_n) = 1) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, \mathrm{PGL}_n) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(F, \mathbb{G}_m)$$

による δ の像に含まれている。その逆像を代表する 1 コサイクル $\{u_{\sigma,\mathrm{ad}}\}_{\sigma\in\Gamma} \in Z^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ を取れば、同型 $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n$ で $\psi_G \circ \sigma(\psi_G)^{-1} = \mathrm{Ad}(u_\sigma)$ となるものがある。

■L 群データ　各 $\alpha \in R(G,T)$ に対して、$\ker\alpha \subset T$ の G での中心化群の導来群を G_α と書く。$T_\alpha := T \cap G_\alpha$ はその極大トーラスである。このとき $\alpha^\vee \in X_*(T_\alpha) \subset X_*(T)$ で $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ となるものがただ一つある。これを α のコルートという。部分集合 $S \subset R(G,T)$ に対して $S^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in S\}$ と書く。四つ組

$$RD(\mathrm{spl}) = (X^*(T), \Delta(B,T), X_*(T), \Delta^\vee(B,T))$$

を分裂 spl の基底付きルートデータ (*based rood datum*) という。(基底付き) ルートデータやその射の定義については [Spr79, 1 節] を参照されたい。二つの分裂 spl, spl′ に対して $\mathrm{spl}' = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{spl}$ となる唯一の $g_{\mathrm{ad}} \in G_{\mathrm{ad}}(\bar{F})$ は同型 $\mathrm{Ad}(g) : RD(\mathrm{spl}) \xrightarrow{\sim} RD(\mathrm{spl}')$ を与える。G の基底付きルートデータを $RD(\mathrm{spl})$ たちのこの同型に関する射影極限

$$RD(G) = (X^*, \Delta, X_*, \Delta^\vee) := \varprojlim_{\mathrm{spl}} RD(\mathrm{spl})$$

と定義する。これは G への Γ 作用から定まる Γ 作用を備えている。この作用は $RD(\mathrm{spl}_{G^*})$ への Γ 作用の ψ_G による引き戻しに一致する。

　トーラス T の L 群は $X^*(T) = X_*(\hat{T})$ となる複素トーラス $\hat{T}$ から構成されていた。今、$RD(G)$ の前後のデータを入れ替えた

$$RD^\vee(G) := (X_*, \Delta^\vee, X^*, \Delta)$$

は再び基底付きルートデータである。よって Chevalley の定理 [Spr98, 9.6, 10.1] から $\mathbb{C}$ 上の連結簡約線型代数群 $\hat{G}$ で $RD(\hat{G}) = RD^{\vee}(G)$ となるものが同型を除いてただ一つある。これを G の *Langlands* 双対群という。その分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha^{\vee}}\})$ を固定すれば、Γ 作用 $\rho_G : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\hat{G})$ で $\mathrm{spl}_{\hat{G}}$ を保ち、合成 $\Gamma \overset{\rho_G}{\hookrightarrow} \mathrm{Aut}(\hat{G}) \twoheadrightarrow \mathrm{Out}(\hat{G})$ が

$$\mathrm{Aut}(RD(G)) \cong \mathrm{Aut}(RD^{\vee}(G) = RD(\hat{G})) \cong \mathrm{Out}(\hat{G})$$

によって $RD(G)$ への Γ 作用に対応するものがただ一つある。このとき G の L 群を

$${}^{L}G = \hat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$$

と定義する。ただし ρ_G と $\varphi_F : W_F \to \Gamma$ の合成を再び ρ_G と書いている。定義から明らかに G の L 群は G^* の L 群に一致する。

例 3.3. (i) GL_n の上三角元からなる Borel 部分群を B, 対角元からなる極大トーラスを T と書けば、$X^*(T)$ は $e_i(\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n)) = t_i$ で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群で、対する $X_*(T)$ の双対基底 $\{e_i^{\vee}\}_{1 \le i \le n}$ は $e_i^{\vee}(t) = \mathrm{diag}(1, \dots, \overset{\overset{i}{\vee}}{t}, \dots, 1)$ で与えられる。

$$R(\mathrm{GL}_n, T) = \{e_i - e_j \,|\, 1 \le i \ne j \le n\} \supset R(B, T) = \{e_i - e_j \,|\, 1 \le i < j \le n\}$$

で $\Delta(B, T) = \{\alpha_i := e_i - e_{i+1}\}_{1 \le i < n}$ であり、$e_i - e_j$ のコルートは $e_i^{\vee} - e_j^{\vee}$ である。よって

$$RD(\mathrm{GL}_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}e_i, \{e_i - e_{i+1}\}, \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}e_i^{\vee}, \{e_i^{\vee} - e_{i+1}^{\vee}\}\Big)$$

の双対 $RD^{\vee}(\mathrm{GL}_n)$ は e_i と $e_i^{\vee}$ を入れ替えることで $RD(\mathrm{GL}_n)$ に同型である。$RD(\mathrm{GL}_n)$ への Γ 作用は自明であるから、${}^{L}\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times W_F$ である。

(ii) E/F を有限次拡大として可換 F 代数 R に $\mathbb{M}_n(R \otimes_F E)^{\times}$ を対応させる代数群 $\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$ を考える。例 2.2 と同様の議論、記号を使って $\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n \otimes_F E \simeq \mathrm{GL}_{n,E}^{\Phi}$ がわかる。特に ${}^{L}\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n = \mathrm{Ind}_{\Gamma_E}^{\Gamma} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rtimes W_F$ である。ただし Γ_E は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に自明に作用し、W_F は Γ を経由して $\mathrm{Ind}_{\Gamma_E}^{\Gamma} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に作用する。

(iii) E/F を二次拡大としてその Galois 群 $\Gamma_{E/F}$ の生成元を σ と書く。$\mathscr{A} := \mathbb{M}_n(E)$ 上の第二種対合 ι を

$$x^{\iota} := \mathrm{Ad}(I_n)^t\sigma(x), \quad I_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{n-1} & & & \end{pmatrix}$$

と定義して、$\mathrm{U}_n(R) := \{g \in \mathscr{A} \otimes_F R \,|\, gg^{\iota_R} = 1\}$ で定まる F 代数群 U_n を考える。ただし $\iota_R := \iota \otimes \mathrm{id}_R$ と書いている。$x^{\iota'} := \mathrm{Ad}(I_n)^t x$ とおけば、$E \otimes_F E \simeq E^{\Gamma_{E/F}}$ から

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_n \otimes_F E &\simeq \{(g, \bar{g}) \in \mathrm{GL}_{n,E} \,|\, (g, \bar{g})(\bar{g}^{\iota'}, g^{\iota'}) = 1\} \\ &\simeq \{(g, g^{-\iota'}) \,|\, g \in \mathrm{GL}_{n,E}\} \simeq \mathrm{GL}_{n,E}\end{aligned}$$

を得る。ただし $g^{-\iota'} := (g^{\iota'})^{-1}$ と書いている。自己同型 $-\iota'$ は (i) の標準 Borel 対 (B, T) を保ち、$RD(\mathrm{GL}_n)$ に $e_i^{-\iota'} = -e_{n+1-i}$ と作用する。よって ${}^L\mathrm{U}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rtimes_{\rho_{\mathrm{U}_n}} W_F$ において W_F は $\Gamma_{E/F}$ を経由して $\rho_{\mathrm{U}_n}(\sigma)g = g^{-\iota'}$ と作用する。

3.3 導来群、単連結被覆、z 拡大

ここでは G を一般の標数 0 の体 F 上で定義された連結簡約線型代数群とする。G の導来群、つまり G の元の交換子たちで生成される閉部分群を G_{der} と書く。G の連結簡約性から $D_G := G/G_{\mathrm{der}}$ はトーラスであり、自然な準同型 $Z_G \to D_G$ は G_{der} の中心 $Z_{G_{\mathrm{der}}}$ を核とする同種射である。分裂 $\mathrm{spl} = (B, T, \{X_\alpha\})$ に対して $(B_{\mathrm{der}} := B \cap G_{\mathrm{der}}, T_{\mathrm{der}} := T \cap G_{\mathrm{der}}, \{X_\alpha\})$ は G_{der} の分裂であり、$T/T_{\mathrm{der}} = D_G$ である。よって

$$X^*(D_G) = \{\chi \in X^*(T) \,|\, \langle \chi, \alpha^\vee \rangle = 0,\, \alpha^\vee \in \Delta^\vee\} \subset X^*(T)$$

と見なされ、

$$\begin{aligned}RD(G_{\mathrm{der}}) &= (X^*_{\mathrm{der}}, \Delta, X_{*,\mathrm{der}}, \Delta^\vee), \\ X^*_{\mathrm{der}} = X^*(T)/X^*(D_G), &\quad X_{*,\mathrm{der}} := X_* \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta^\vee\end{aligned}$$

が成り立つ。$\hat{G}$ の中心を $Z_{\hat{G}}$ とすると、上の同一視から $X^*(D_G) = X_*(Z_{\hat{G}})$ だから $\hat{D}_G = Z^0_{\hat{G}}$ である。

さて単純コルートたちで張られる格子を $X_{*,\mathrm{sc}} := \mathbb{Z}[\Delta^\vee] \subset X_{*,\mathrm{der}}$, その $X^*_{\mathrm{der}} \otimes \mathbb{Q}$ における双対格子を

$$X^*_{\mathrm{sc}} := \{\lambda \in X^*_{\mathrm{der}} \otimes \mathbb{Q} \,|\, \langle \lambda, X_{*,\mathrm{sc}} \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

と定めれば、$(X^*_{\mathrm{sc}}, \Delta, X_{*,\mathrm{sc}}, \Delta^\vee)$ は基底付きルートデータである。再び Chevalley の定理からこれを基底付きルートデータに持つ $\bar{F}$ 連結簡約代数群 $G_{\mathrm{sc},\bar{F}}$ が同型を除いてただ一つある。単準同型 $X^*_{\mathrm{der}} \hookrightarrow X^*_{\mathrm{sc}}$ は [Spr79, 1.7] の意味の同種射 $RD(G_{\mathrm{der}}) \to RD(G_{\mathrm{sc},\bar{F}})$ を与え、従って [Spr79, 定理 2.9 (ii)] から中心的同種 $G_{\mathrm{sc},\bar{F}} \twoheadrightarrow G_{\mathrm{der},\bar{F}}$ (核が有限な全射準同型) がある。定義からこれは準分裂な F 形式の中心的同種 $G^*_{\mathrm{sc}} \twoheadrightarrow G^*_{\mathrm{der}}$ から

来ている。最後に $(G_{\mathrm{sc}})_{\mathrm{ad}} = (G_{\mathrm{der}})_{\mathrm{ad}} = G_{\mathrm{ad}}$ だから、G に対する $\{\mathrm{Ad}(u_\sigma) = \psi_G \circ \sigma(\psi_G)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma} \in Z^1(F, G_{\mathrm{ad}})$ で G_{sc}^* の Galois 作用を捻って、F 同種 $G_{\mathrm{sc}} \twoheadrightarrow G_{\mathrm{der}}$ が得られる。これを G_{der} の単連結被覆 (*simply connected cover*) と呼ぶ。$G = G_{\mathrm{der}}Z_G$ から全射 $G_{\mathrm{sc}} \times Z_G \ni (g_{\mathrm{sc}}, z) \longmapsto \bar{g}_{\mathrm{sc}}z \in G$ があって、その核は $\{(z_{\mathrm{sc}}, \bar{z}_{\mathrm{sc}}^{-1})\,|, z_{\mathrm{sc}} \in Z_{G_{\mathrm{sc}}}\}$ である。このことを

$$G \simeq G_{\mathrm{sc}} *_{Z_{G_{\mathrm{sc}}}} Z_G \tag{3.2}$$

と書き表す。

一般に半単純線型代数群 G は $G = G_{\mathrm{sc}}$, つまり余指標格子がコルートで張られるとき単連結と呼ばれる。半単純単連結群に対する Steinberg の定理を二つ引用しておこう。

定理 3.4 ([Ste68] 定理 8.1)**.** (i) G を半単純単連結線型代数群、θ をその半単純自己同型 (つまり θ は G の Lie 環上の半単純線型変換を引き起こす) とするとき、その固定部分 G^θ は連結簡約群である。
(ii) 特に連結簡約線型代数群 G が $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ を満たすとき、半単純元 $\gamma \in G(F)$ の中心化群 G^γ は連結簡約群である。

次に半単純元 $\gamma \in G(\bar{F})$ の共役類 $C_{\bar{F}} \subset G_{\bar{F}}$ が F 有理的、つまり $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ 不変であればそれは G の共役類 C から来ているが、C は F 値点を持たないことがある[*6]。実際、任意の F 有理共役類が F 値点を持つためには G が F 準分裂であることが必要である [Ste65, 定理 9.1]。

定理 3.5 ([Ste65] 定理 9.8)**.** G が半単純単連結線型代数群で F 準分裂なら、G の任意の F 有理共役類は F 有理点を持つ。

この定理は後に Kottwitz によって次の形に拡張された。

定理 3.6 ([Kot82] 定理 4.1)**.** F 準分裂な連結簡約群 G が $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ を満たすなら、G の任意の F 有理共役類は F 有理点を持つ。

単連結群の Galois コホモロジーに関しては次の二つが基本的である。

[*6] 例えば D を局所体 F 上の中心的四元数体として、$G(R) = (D \otimes_F R)^\times$ で与えられる F 代数群 G を考える。$G_{\bar{F}} \simeq \mathrm{GL}_2$ の半単純共役類はその特性多項式で決まる。このとき F 上可約な特性多項式を持つ半単純共役類は F 有理点を持たない。

定理 3.7 (Kneser の消滅定理 [Kne65a], [Kne65b]). F が標数 0 の非アルキメデス局所体で G が F 上定義された半単純単連結線型代数群のとき $\mathrm{H}^1(F,G)$ は自明である。

定義から G_{sc} の Langlands 双対群 $\widehat{G_{\mathrm{sc}}}$ ($\hat{G}$ の単連結被覆 $\hat{G}_{\mathrm{sc}}$ ではない!) の基底付きルートデータは $RD(\hat{G}_{\mathrm{sc}})=(\mathbb{Z}[\Delta^\vee],\Delta^\vee,X^*_{\mathrm{sc}},\Delta)$ だから、

$$\widehat{G_{\mathrm{sc}}}=\hat{G}/Z_{\hat{G}}$$

である。T_{der} の $G_{\mathrm{sc}}\twoheadrightarrow G_{\mathrm{der}}$ による逆像を T_{sc} と書けば、$\hat{T}_{\mathrm{sc}}=\hat{T}/Z_{\hat{G}}$ で $X^*(\hat{T}_{\mathrm{sc}})=\mathbb{Z}[\Delta^\vee(B,T)]$ だから $X^*(Z_{\hat{G}})=X_*/\mathbb{Z}[\Delta^\vee]$ が従う。これと $X^*(Z^0_{\hat{G}})=X_*(D_G)=X_*/X_{*,\mathrm{der}}$ を併せて

$$\mathrm{cok}[X^*(Z_{\hat{G}})\to X^*(Z^0_{\hat{G}})]=\mathrm{cok}[X_*/\mathbb{Z}[\Delta^\vee]\to X_*/X_{*,\mathrm{der}}]\simeq X_{*,\mathrm{der}}/\mathbb{Z}[\Delta^\vee]$$

を得る。特に次が従う。

補題 3.8. $G_{\mathrm{der}}=G_{\mathrm{sc}}$ であるためには、$Z_{\hat{G}}$ が連結であることが必要十分。

連結簡約群の中心拡大 $1\to Z_1\to G_1\to G\to 1$ が z 拡大とは

- $G_{1,\mathrm{der}}=G_{1,\mathrm{sc}}$;
- Z_1 は $\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m$ の形のトーラスの直積

であることとする。

補題 3.9. (i) 任意の連結簡約群 G は z 拡大を持つ。
(ii) 二つの z 拡大 $G_i\twoheadrightarrow G,(i=1,2)$ に対して、双方を経由する z 拡大 $G_3\twoheadrightarrow G$ がある。

証明の概略. $(B,T)\subset G$ を Borel 対とし、T の分解体 E で F の有限次 Galois 拡大であるものを取る。$M:=X_*(T)/X_*(T_{\mathrm{sc}})$ を含む $\Gamma_{E/F}$ 加群の完全列 $0\to P_1\to P_0\xrightarrow{\pi}M\to 0$ で P_0 は有限生成自由アーベル群、P_1 が自由 $\mathbb{Z}[\Gamma_{E/F}]$ 加群であるものがある。

$$Q:=\{(\xi,\mu^\vee)\in P_0\times X_*(T)\,|\,\pi(\xi)\equiv\mu^\vee\mod X_*(T_{\mathrm{sc}})\}$$

とおけば次の可換図式が成り立つ。

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & X_*(T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & X_*(T_{\mathrm{sc}}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r] \arrow[d] & X_*(T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Z_1, T_1 をそれぞれ $X_*(Z_1) = P_1, X_*(T_1) = Q$ となるトーラスとすれば、定義から互いに双対な完全列

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}[\Delta^\vee(B,T)] \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \mathbb{Z}[\Delta^\vee(B,T)] \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & X_*(Z_1) \arrow[r] & X_*(T_1) \arrow[r] & X_*(T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$
0 \longrightarrow X^*(T) \longrightarrow X^*(T_1) \longrightarrow X^*(Z_1) \longrightarrow 0
$$

を得る。このとき $RD(B_1, T_1) = (X^*(T_1), \Delta(B,T), X_*(T_1), \Delta^\vee(B,T))$ は基底付きルートデータとなり、それに付随する簡約群が求める G_1 である。しかしその F 形式が (B,T) によらないことを保証しなくてはならないから、$T_1 \twoheadrightarrow T \twoheadrightarrow T_{\mathrm{ad}}$ の核を Z_{G_1} とおけば次の可換図式が成り立つことに注意する。

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_{G_1} \arrow[r] \arrow[d] & Z_G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z_1 \arrow[r] & T_1 \arrow[r] & T \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

このとき $G_1 = G_{\mathrm{sc}} *_{Z_{G_{\mathrm{sc}}}} Z_{G_1}$ は z 拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ を与えている。 $\square$

G の z 拡大 G_1 に対しては、Shapiro の補題 1.4 と Hilbert 90 定理から $\mathrm{H}^1(F, Z_1) = 0$ ゆえ $G(F) \simeq G_1(F)/Z_1(F)$ が成り立ち、$G(F)$ の表現論を導来群が単連結な $G_1(F)$ のそれに帰着できる。一方、証明中の完全列から完全列

$$
1 \longrightarrow \hat{Z}_1 \longrightarrow \hat{G}_1 \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow 1 \tag{3.3}
$$

がある。

4　共役類ごとの局所大域原理—安定共役

この時点で非可換簡約群 G に対しては 2.2 節のような保型形式の記述を望み得ないことは明らかである。第一に商空間 $T(F)\backslash T(\mathbb{A})$ の記述 (2.11) に用いられた局所大域完全列 $1 \to T(\bar{F}) \to T(\bar{\mathbb{A}}) \to T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}) \to 1$ の類似は存在しない。Langlands の内視論のアイディアの出発点は代わりに (正則半単純) 共役類ごとに局所大域原理を記述することである。この節でも F は標数 0 の局所または大域体を表すものとし、前節の記号を引き続き用いる。

4.1　安定共役

$G(\bar{F}) \ni \gamma$ の中心化群を $G^\gamma := Z_G(\gamma)$, その単位元の連結成分を $G_\gamma := Z_G(\gamma)^0$ と書くことにする。$\gamma \mapsto \dim G_\gamma$ が最小値 (G の階数になる) を取る γ を正則 (*regular*) 元という。正則元の全体は G の開部分多様体 G_{reg} をなす。任意の $\gamma \in G(\bar{F})$ は Jordan 分解を持つ [Spr98, 2.4.8] からその半単純性が考えられる。G_{reg} の半単純元がなす部分多様体を G_{rs} と書く。これも G の開部分多様体である。

まず一般に半単純元 $\gamma \in G(F)$ を考える。その共役類を $C(\gamma)$ と書けば同型

$$G^\gamma\backslash G \ni G^\gamma g \xmapsto{\simeq} \gamma^g := g^{-1}\gamma g \in C(\gamma)$$

がある。ここで $C(\gamma, F) \simeq (G^\gamma(\bar{F})\backslash G(\bar{F}))^\Gamma$ と γ の $G(F)$ 共役類 $\gamma^{G(F)} \simeq G^\gamma(F)\backslash G(F)$ は異なる。安定共役類はこの両者の間にある同値類である。すなわち半単純な $\gamma, \gamma' \in G(F)$ が安定共役 (*stably conjugate*) とは、ある $G_\gamma(\bar{F})g \in (G_\gamma(\bar{F})\backslash G(\bar{F}))^\Gamma$ に対して $\gamma' = \gamma^g$ であることとする。このとき $G_\gamma(\bar{F})g = G_\gamma(\bar{F})\sigma(g)$, ($\sigma \in \Gamma$) から $\{\partial g_\sigma := g\sigma(g)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ は $G_\gamma(\bar{F})$ 値 1 コサイクルであり、その $\mathrm{H}^1(F, G_\gamma)$ でのクラスは g の取り方によらず定まる。γ の安定共役類を $\gamma^G(F)$ と書けば、全単射

$$\begin{aligned}\gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F)) \ni (\gamma^g)^{G(F)} &\xmapsto{\simeq} [\partial g \text{ のクラス}] \in \mathfrak{D}(G_\gamma), \\ \mathfrak{D}(G_\gamma) = \mathfrak{D}^G(G_\gamma) &:= \ker[\mathrm{H}^1(F, G_\gamma) \to \mathrm{H}^1(F, G)]\end{aligned} \tag{4.1}$$

が得られる。実際、$(\gamma^g)^{G(F)} = (\gamma^{g'})^{G(F)} \subset \gamma^G(F)$ であるためには $g' \in G_\gamma(\bar{F})gG(F)$, すなわち $\partial g'$ と ∂g が $G_\gamma(\bar{F})$) でコホモローグなことが必要十分である。

以下では特に γ が正則半単純な場合を考える: $\gamma \in G(F)_{\mathrm{rs}}$. 従って $T := G_\gamma$ は G の極大トーラスであり、$\gamma^g \in \gamma^G(F)$ なら $\mathrm{Ad}(g)^{-1} : T \xrightarrow{\sim} G_{\gamma^g} = T^g$ は $g \in T(\bar{F})g$ の取り方

によらない F 同型である。この場合であっても $\mathfrak{D}(T)$ は点付き集合の射の核であるから (1.7 節)、$\mathrm{H}^1(F,T)$ の部分群になるとは限らないことに注意する。

例 4.1. (i) $G=\mathrm{GL}_n$ のとき、半単純な $\gamma\in G(F)$ の $\mathbb{M}_n(F)$ での中心化環は中心的単純 F 代数の直和だから、$G_\gamma\simeq\prod_{i=1}^r\mathscr{B}_i^\times$ と書ける。ここで $\mathscr{B}_i$ は中心的単純 F 代数で、可換 F 代数 R に群 $(\mathscr{B}_i\otimes_F R)^\times$ を対応させる F 代数群を $\mathscr{B}_i^\times$ と書いている。Hilbert 90 定理の帰結 $\mathrm{H}^1(F,\mathscr{B}_i^\times)=\{1\}$ [Ser79, X.1 節 演習 2] から $\mathfrak{D}(G_\gamma)=\{1\}$ である。すなわち GL_n においては安定共役は $G(F)$ 共役に一致する。

(ii) $n=p+q$ となる自然数 n,p,q に対して、指数 (p,q) のシャッフルの集合

$$\mathrm{Shuff}(p,q):=\{s\in\mathfrak{S}_n\,|\,s\text{ は }\{1,\dots,p\},\{p+1,\dots,n\}\text{ 上単調増加 }\}$$

を思い出す。$\mathrm{U}_{p,q}$ を可換 $\mathbb{R}$ 代数 R に

$$\mathrm{U}_{p,q}(R):=\{g\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}R)\,|\,gI_{p,q}{}^t\sigma_R(g)=I_{p,q}\},\quad I_{p,q}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}_p&\\&-\mathbf{1}_q\end{pmatrix}$$

を対応させる $\mathbb{R}$ 代数群とする。ここで $\Gamma_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ の生成元を σ として $\sigma_R:=\sigma\otimes\mathrm{id}_R$ と書いている。その対角元からなる極大トーラスを $T=\{\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_n)\,|\,t_i\in\mathrm{U}_1\}$ とすれば、$\mathrm{H}^1(\mathbb{R},\mathrm{U}_1)=\mathbb{R}^\times/\,\mathrm{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^\times)\simeq\boldsymbol{\mu}_2(\mathbb{R})=\{\pm1\}$ だから、$\mathrm{H}^1(\mathbb{R},T)\simeq\boldsymbol{\mu}_2(\mathbb{R})^n$ である。このとき

$$\mathfrak{D}(T)=\{(\epsilon_{s(1)},\dots,\epsilon_{s(n)})I_{p,q}\,|\,s\in\mathrm{Shuff}(p,q)\}\simeq\mathrm{Shuff}(p,q),$$
$$\epsilon_i:=\begin{cases}1&1\le i\le p\text{ のとき}\\-1&p<i\le n\text{ のとき}\end{cases}$$

である。

$G_{\mathrm{sc}},T_{\mathrm{sc}}$ を 3.3 節の通りとして、

$$\mathfrak{E}(T)=\mathfrak{E}^G(T):=\mathrm{im}[\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})\to\mathrm{H}^1(F,T)]$$

とおく。次の二つの補題により共役類の局所大域原理はアーベル群係数 Galois コホモロジー群のそれに帰着される。

補題 4.2. F を代数体とする。半単純な $\gamma,\gamma'\in G(\bar F)$ が $G(\bar{\mathbb{A}})$ 共役ならば、それらは $G(\bar F)$ 共役である。

証明. 極大トーラス $T, T' \subset G_{\bar{F}}$ で $\gamma \in T(\bar{F}), \gamma' \in T'(\bar{F})$ なるものを取る。T, T' は $G(\bar{F})$ 共役だから [Spr98, 6.3.5]、必要なら γ' をその $G(\bar{F})$ 共役類の元で置き換えて γ, $\gamma' \in T(\bar{F})$ としてよい。素点 v を取れば、仮定から $\gamma' = \gamma^{g_v}$ となる $g_v \in G(\bar{F}_v)$ がある。このとき $T_\gamma(\bar{F}_v), T_\gamma^{g_v}(\bar{F}_v)$ はともに γ' を含む、言い換えればともに $I_{\gamma',\bar{F}_v}$ の極大トーラスだから、$T_{\gamma,\bar{F}_v} = (T^{g_v}_{\gamma,\bar{F}_v})^{h_v}$ となる $h_v \in I_{\gamma'}(\bar{F}_v)$ がある。つまり $g_v h_v \in N_{G(\bar{F}_v)}(T_{\gamma,\bar{F}_v})$ だから、その T_γ の Weyl 群 $\Omega(G, T_\gamma)$ での像の $N_{G(\bar{F})}(T_\gamma)$ での代表元 $\nu \in G(\bar{F})$ が取れる。このとき $\gamma \in T_\gamma(\bar{F})$ から

$$\gamma^\nu = \gamma^{g_v h_v} = \gamma'^{h_v} = \gamma'$$

となって証明終わり。 □

補題 4.3. (i) $\mathfrak{D}(T_{\mathrm{sc}}) \to \mathfrak{D}(T)$ は全射。
(ii) $\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{E}(T)$. 特に F が非アルキメデス局所体なら $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{E}(T)$.

証明. (i) は自然な Γ 同変全単射 $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})\backslash G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}) \xrightarrow{\sim} T_{\mathrm{der}}(\bar{F})\backslash G_{\mathrm{der}}(\bar{F}) \xrightarrow{\sim} T(\bar{F})\backslash G(\bar{F})$ (後半の全単射は $G = T \cdot G_{\mathrm{der}}$ から従う) から明らか。(i) から

$$\mathfrak{D}(T) = \mathrm{im}[\mathfrak{D}(T_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F, T)]$$

だから (ii) の最初の主張も直ちに従う。最後に F が非アルキメデス局所体なら、上で Kneser の消滅定理 3.7 から $\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}})$ は消えているから $\mathfrak{D}(T)$ と $\mathfrak{E}(T)$ は一致する。特にこのとき $\mathfrak{D}(T)$ は $\mathrm{H}^1(F, T)$ の部分群になる。 □

4.2 簡約群の Galois コホモロジー

この時点でトーラスの Galois コホモロジー群についての命題 2.3, 2.5 を簡約群に拡張しておく [Kot86]。

■局所理論　F を標数 0 の局所体、G を連結簡約 F 代数群とする。各 $\delta \in \mathrm{H}^1(F, G)$ に対して有限次 Galois 拡大 E/F で、$\mathrm{res}^{\Gamma_F}_{\Gamma_E}(\delta) = 0$ かつその上で G が分解するものを取る。この E/F に補題 3.9 の証明の構成を適用すると z 拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ で Z_1 が E 分裂トーラスの Weil 係数制限であるものを作れる。このとき Galois コホモロジー

完全列 (命題 1.3) のなす可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F,G_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F,G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(F,Z_1) \arrow[d, hook] \\
1 \arrow[r] & \mathrm{H}^1(E,G_{1,E}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(E,G_E) \arrow[r] & \mathrm{H}^2(E,Z_{1,E})
\end{tikzcd}$$

において (1.4) から右端の射は単射である。従って $\delta \in \mathrm{im}[\mathrm{H}^1(F,G_1) \to \mathrm{H}^1(F,G)]$ がわかる。一方、完全列 $1 \to G_{1,\mathrm{sc}} \to G_1 \to D_{G_1} \to 1$ の Galois コホモロジー列を書くと、補題 3.8 から $\hat{D}_{G_1} = Z_{\hat{G}_1}$ ゆえ、命題 2.3 を併せて

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F,G_1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{H}^1(F,D_{G_1}) \arrow[r, "\alpha_{D_{G_1}}"] & \pi_0(Z_{\hat{G}_1}^{\Gamma})^D \arrow[d, "(3.3)"] \\
& \mathrm{H}^1(F,G) & & \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D
\end{tikzcd}$$

を得る。δ の $\mathrm{H}^1(F,G_1)$ での逆像の $\pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ での像を $\alpha_G(\delta)$ とおく。これは z 拡大の取り方によらず、$\alpha_G : \mathrm{H}^1(F,G) \to \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ を与えることが Kottwitz により示されている。すなわち次が成り立つ。

命題 4.4 ([Kot86] 定理 1.2)**.** (i) F 上の連結簡約群とその間の正規準同型からなる圏からアーベル群の圏への関手の射 $\alpha_G : \mathrm{H}^1(F,G) \to \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ で、極大トーラス $T \subset G$ に対する命題 2.3 の同型との可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1(F,G) & \xrightarrow{\alpha_G} & \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{H}^1(F,T) & \longrightarrow & \pi_0(\hat{T}^{\Gamma})^D
\end{array}$$

を満たすものがただ一つある。ただし右列は $T \twoheadrightarrow D_G$ から引き起こされる準同型である。
(ii) F が非アルキメデス的なとき、α_G は自然な同型である。$F = \mathbb{R}$ のときには完全列

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R},G_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R},G) \xrightarrow{\alpha_G} \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D \longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{G}})^D$$

が成り立つ。ここで最後の準同型は $\mathrm{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : Z_{\hat{G}} \to Z_{\hat{G}}^{\Gamma}$ から引き起こされるものである。

これの証明はしない。興味のある読者は原論文に当たるかまたは [Lab99, I 章] を参照されたい。

■不分岐な場合　F が標数 0 の非アルキメデス局所体の場合を考える。G が F 上不分岐とは、F の整数環 $\mathcal{O}$ 上の滑らかで簡約な群スキーム $\mathscr{G}$ に延びることとする。これは G が F 準分裂である不分岐有限次拡大 E/F 上で分裂する極大トーラスを持つことに同値である [Tit79, 1.10, 3.8]。このとき G の Tits ビルは超スペシャル点を持ち、$\boldsymbol{K} := \mathscr{G}(\mathcal{O})$ はある超スペシャル点の固定化群、すなわち超スペシャル (*hyperspecial*) 極大コンパクト部分群である。このとき Lang の定理[*7]を用いて次が証明できる。

命題 4.5 ([PR94] 定理 6.8)**.** G および有限次 Galois 拡大 E/F が共に不分岐なら $\mathrm{H}^1(E/F, \mathscr{G}(\mathcal{O}_E)) = \{1\}$. ここで $\mathcal{O}_E$ は E の整数環である。

証明の議論は $\mathrm{H}^1(E/F, \mathcal{O}_E^\times)$ の消滅の証明の類似なのでここでは割愛する。気になる方は引用した文献をご覧になるとよい。

この機会に不分岐な場合の安定共役についての準備をしておこう。半単純な $\gamma \in \boldsymbol{K}$ と $\gamma \in T(F)$ となる任意の極大トーラス $T \subset G$ のルート α に対して $\alpha(\gamma)$ は $\mathcal{O}$ の $\bar{F}$ での整閉包 $\bar{\mathcal{O}}$ に属する。T の任意のルート α に対して $\alpha(\gamma) - 1 \in \bar{\mathcal{O}}^\times$ または $\alpha(\gamma) = 1$ となる半単純な $\gamma \in \boldsymbol{K}$ の集合を $\boldsymbol{K}_{\mathrm{ss}}$ と書く。

補題 4.6. G が F 上不分岐でその導来群が単連結であるとする。$\boldsymbol{K}_{\mathrm{ss}} \ni \gamma$ に対して、G_γ は不分岐で $G_\gamma(F) \cap \boldsymbol{K}$ は $G_\gamma(F)$ の超スペシャル極大コンパクト部分群である。さらに $\gamma^G(F) \cap \boldsymbol{K} = \gamma^{\boldsymbol{K}} := \mathrm{Ad}(\boldsymbol{K})\gamma$ が成り立つ。

証明. 勝手な $\gamma \in \boldsymbol{K}_{\mathrm{ss}}$ を取り、$T \subset G$ を $\gamma \in T(F)$ となる極大トーラスとする。

証明には T が F 分裂 (特に G も F 分裂) である場合にいくつか準備が必要である。必要なら T を取り替えて $\boldsymbol{K}$ が固定する超スペシャル点が T のアパートに入っているとしてよい。すると T は $\mathscr{G}$ の極大トーラス $\mathscr{T}$ に延びて $\gamma \in \boldsymbol{K} \cap T(F) = \mathscr{T}(\mathcal{O})$ が成り立つ。各 $\alpha \in R(G,T)$ のルートベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})$ (と $R(G,T)$ 上の順序) と $X_*(\mathscr{T})$ の基底 $\{\mu_i\}$ を固定すれば、G の座標関数 $\{x_\alpha\} \amalg \{x_i\}$ が定まり、アファイン群スキーム $\mathscr{G}$ は多項式環 $\mathcal{O}[x_\alpha, x_i]_{\alpha,i}$ のある剰余環 $\mathcal{O}[\mathscr{G}]$ のスペクトルである。中心化群 $\mathscr{G}_\gamma$ はその $\mathrm{Ad}(\gamma)$ 不変商 $\mathscr{O}_{G,\gamma}$ のスペクトルだが、$\mathrm{Ad}(\gamma)x_\alpha = \alpha(\gamma)x_\alpha$ と $\alpha(\gamma) - 1$ についての仮定から $\mathscr{O}_{G,\gamma}$ は $\mathcal{O}[\{x_\alpha\}_{\alpha(\gamma)=1}, \{x_i\}_i]$ の $\mathcal{O}[\mathscr{G}]$ での像にほかならない。仮定から $\mathscr{G}$ は $\mathcal{O}$ 上平坦ゆえ、これは $\mathscr{G}_\gamma$ も $\mathcal{O}$ 上平坦であることを意味する。$\mathscr{G}_\gamma$ の生成幾何ファイバーおよ

[*7] 有限体 $\mathbb{F}$ 上の線型代数群 G の Galois コホモロジー集合 $\mathrm{H}^1(\mathbb{F}, G)$ は消えている。

びスペシャル幾何ファイバーが同じ次元を持つ連結簡約群スキームであることは仮定から明らかだから、$\mathscr{G}_\gamma$ は滑らかで簡約な群スキームである。よって G_γ は不分岐でなくてはならず、$G_\gamma(F) \cap \boldsymbol{K} = \mathscr{G}_\gamma(\mathcal{O})$ はその超スペシャル極大コンパクト部分群である。準備の最後に次の主張を示しておこう。

主張 4.6.1. 上の状況で $\gamma^{G(F)} \cap \boldsymbol{K} = \gamma^{\boldsymbol{K}}$ である。

証明. 議論を理解するには $G = \mathrm{SL}_2$ の場合を見れば十分なのでそのときのみ解説する。$B = TU$ をその上三角 Borel 部分群とし、$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ に共役な $\gamma' = \gamma^g \in \boldsymbol{K}, (g \in G(F))$ を取る。岩澤分解 $G(F) = T(F)U(F)\boldsymbol{K}$ から $g = tuk, (t \in T(F), u \in U(F), k \in \boldsymbol{K})$ と書け、$\gamma^u\gamma^{-1} = \mathrm{Ad}(k)\gamma'\gamma^{-1} \in \boldsymbol{K}$ である。ここで $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と書けば

$$\gamma^u\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\alpha(\gamma)-1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で $\alpha(\gamma) - 1 \in \mathcal{O}^\times$ だから、$u \in \boldsymbol{K}$, つまり $\gamma' \in \gamma^{\boldsymbol{K}}$ である。 □

さて、一般の場合に補題を証明しよう。任意の $\gamma' \in \gamma^G(F)$ に対して有限次 Galois 拡大 E/F で

- T は E 上分裂し、
- γ' と γ は $G(E)$ 共役

であるものを取る。E 分裂極大トーラス $T_0 \subset G$ で $\boldsymbol{K}$ を定める超スペシャル点が T_0 のアパートに入っているものと、$\gamma_0 \in \mathscr{T}_0(\mathcal{O}_E) = T_0(E) \cap \mathscr{G}(\mathcal{O}_E)$ で γ, γ' に $G(E)$ 共役なものが取れる。先の分裂する場合の議論から $\mathscr{G}_{\mathcal{O}_E,\gamma_0}$ は滑らかな連結簡約群スキームで、主張 4.6.1 から γ, γ' は $\gamma_0^{\mathscr{G}(\mathcal{O}_E)}$ に属する。これからまず $(\mathscr{G}_\gamma)_{\mathcal{O}_E} \simeq \mathscr{G}_{\mathcal{O}_E,\gamma_0}$ も滑らかな連結簡約群スキームである。よって $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ での fpqc 降下を適用して $\mathscr{G}_\gamma$ も $\mathcal{O}$ 上の滑らかな連結簡約群スキームであり [Gro67, 2.6-7 節]、これから分裂する場合と同様にして補題の前半の主張が従う。

今や G_γ は不分岐だから上の E/F を不分岐拡大に取れる。後半を示すために $\gamma' = \gamma^k$, $k \in \mathscr{G}(\mathcal{O}_E)$ と書く。4.1 節と同様にして ∂k は $G_\gamma(E) \cap \mathscr{G}(\mathcal{O}_E) = \mathscr{G}_\gamma(\mathcal{O}_E)$ に値を取る $\Gamma_{E/F}$ 上の 1 コサイクルである。命題 4.5 からある $\ell \in \mathscr{G}_\gamma(\mathcal{O}_E)$ があって $\partial k = \partial\ell^{-1}$, すなわち $\ell k \in \mathscr{G}(\mathcal{O}_E)^{\Gamma_{E/F}} = \boldsymbol{K}$ で、$\gamma^{\ell k} = \gamma'$ であるから後半も示された。 □

■大域理論　次に F を代数体とする。E/F を $\bar{F}$ に含まれる有限次 Galois 拡大とすると、(非可換係数の) Shapiro の補題 1.4 から 19 頁の記号で

$$\mathrm{H}^1(E/F, G(E_v)) \simeq \mathrm{H}^1(E_w/F_v, G(E_w))$$

が成り立つ。さらに有限個を除く非アルキメデス素点 v では $G_v = G \otimes_F F_v$ は不分岐で、整数環 $\mathcal{O}_v \subset F_v$ 上の滑らかな連結簡約群スキーム $\mathscr{G}_v$ に延びる。この延長をうまく取れば、G のアデール群は位相的帰納極限

$$G(\mathbb{A}) = \varinjlim_{S} \Big(\prod_{v \in S} G(F_v) \times \prod_{v \notin S} \mathscr{G}_v(\mathcal{O}_v) \Big)$$

に一致する。ここで S はアルキメデス素点全部と G が不分岐でない全ての非アルキメデス素点を含む F の素点の有限集合を走る。よって命題 4.5 からトーラスの場合 (2.5) と同様の議論により次を得る。

$$\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})) \simeq \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_v). \tag{4.2}$$

さて、z 拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ に付随して行が完全列である可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z_1(\bar{\mathbb{A}}) \arrow[r] & G_1(\bar{\mathbb{A}}) \arrow[r] & G(\bar{\mathbb{A}}) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z_1(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & Z_{G_1}(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & Z_G(\bar{F}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1
\end{tikzcd}$$

を考えれば、完全列 $1 \to Z_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_1(\bar{F}) \to G_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_{G_1}(\bar{F}) \to G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F}) \to 1$ が得られ、従って Galois コホモロジー完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_{G_1}(\bar{F})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{A}/F, Z_1)$$

が成り立つ。局所的な場合と同様に任意の $\delta \in \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F}))$ に対して、それが $\mathrm{H}^1(F, G_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_{G_1}(\bar{F}))$ の像に含まれるような z 拡大が取れる。それをに対する図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G_1(\bar{\mathbb{A}})/Z_{G_1}(\bar{F})) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, D_{G_1}) \arrow[r, "\alpha_{D_{G_1}}"] & \pi_0(Z_{\hat{G}_1}^{\Gamma})^D \arrow[d, "(3.3)"] \\
\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) & & \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D
\end{tikzcd}$$

による $\delta \in \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F}))$ の逆像の $\pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ での像を $\alpha_G(\delta)$ と書く。

命題 4.7 ([Kot86] 定理 2.2, 系 2.5)**.** (i) F 上の連結簡約群の圏からアーベル群の圏への関手の射 $\alpha_G : \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \to \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ で命題 2.3 の同型を拡張するものがただ一つある。さらに次は完全列である。

$$\mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{ad}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \xrightarrow{\alpha_G} \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$$

(ii) 次の局所大域可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d, "(4.2)"'] & \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})/Z_G(\bar{F})) \arrow[r, "\alpha_G"] & \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D \\
\bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_v) \arrow[rr, "\bigoplus \alpha_{G_v}"] & & \bigoplus_v \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma_v})^D \arrow[u, "\sum \bar{v}"']
\end{tikzcd}$$

ただし $\bar{v} : \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^D$ は $Z_{\hat{G}}^{\Gamma} \hookrightarrow Z_{\hat{G}}^{\Gamma_v}$ が引き起こす準同型である。さらにこの図式の一行目の射の合成の核は $\mathrm{H}^1(F, G) \to \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}))$ の像である。

最後に Hasse 原理について簡単に復習しておこう。上の状況で

$$\text{Ш}^1(F, G) = \ker[\mathrm{H}^1(F, G) \to \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}}))] = \ker\Big(\mathrm{H}^1(F, G) \to \bigoplus_v \mathrm{H}^1(F_v, G_v)\Big)$$

とおく (Shafarevich-Tate 群の一種)。同様に $A \in \mathcal{M}od_{\Gamma}$ に対しても

$$\text{Ш}^i(F, A) = \ker\Big(\mathrm{H}^i(\Gamma, A) \to \prod_v \mathrm{H}^i(\Gamma_v, A)\Big)$$

と定める。

命題 4.8 (Kneser, Chernousov)**.** G が半単純単連結線型代数群なら $\text{Ш}^1(F, G) = \{1\}$ である。

証明. G が E_8 型単純因子を持たないときは [Kne66], E_8 型単純群のときは [Che89] を参照されたい。 □

さて T を F トーラスとすると、Galois コホモロジー完全列と Tate・中山双対性 (命題

2.3 (ii), 2.5 (iii))

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{A}) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{“双対”}"'] & (T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^{\Gamma} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{“双対”}"'] & \mathrm{H}^1(F,T) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})) \\
\prod_v \mathrm{H}^2(F_v, X^*(T)) & \mathrm{H}^2(F, X^*(T)) \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

および (2.2) から

$$Ш^1(F,T) \cong \mathrm{cok}[T(\mathbb{A}) \to (T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F}))^{\Gamma}] \cong Ш^2(F, X^*(T))^D \cong Ш^1(F, \hat{T})^D$$

である。これは連結簡約群 G で導来群が単連結なものに対しても命題 4.8 を使って

$$Ш^1(F,G) \cong Ш^1(F, D_G) \cong Ш^1(F, Z_{\hat{G}})^D$$

と拡張される。さらに一般の連結簡約線型代数群 G に対しては、その z 拡大 $1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to 1$ を取れば

$$Ш^1(F,G) = Ш^1(F,G_1), \quad Ш^1(F, Z_{\hat{G}}) = Ш^1(F, Z_{\hat{G}_1})$$

が成り立つ。以上の構成により次が得られた。

命題 4.9 ([Kot84] 4 節、[Lab99] 1.6-7 節)**.** F 上の連結簡約線型代数群とその間の正規準同型の圏から点付き集合の圏への関手の同型 $Ш^1(F,G) \cong Ш^1(F, Z_{\hat{G}})^D$ がある。さらに $I \subset G$ がある極大トーラス $T \subset G$ を含む連結簡約部分群のとき、可換図式

$$\begin{tikzcd}
Ш^1(F,I) \arrow[r] \arrow[d] & Ш^1(F,G) \arrow[d] \\
Ш^1(F, Z_{\hat{I}})^D \arrow[r] & Ш^1(F, Z_{\hat{G}})^D
\end{tikzcd}$$

が成り立つ。ここで 2 行目の射は制限射 $X_*(Z_{\hat{G}_1}) = X^*(G_1) \to X^*(I_1) = X_*(Z_{\hat{I}_1})$ から引き起こされる。

4.3 捻子の復習

群 G が集合 X に右から単純推移的に作用しているとき、X は主 G 等質空間 (*principal G-homogeneous space, G-torsor*) であるということにする。さらに第二の群 Γ が主 G 等質空間 X に作用している状況を考える。すなわち作用

$$\Gamma \times G \ni (\sigma, g) \longmapsto \sigma(g) \in G, \quad \Gamma \times X \ni (\sigma, x) \longmapsto \sigma(x) \in X$$

が与えられ、
$$\sigma(x.g) = \sigma(x).\sigma(g), \quad \sigma \in \Gamma, g \in G, x \in X$$
が成り立つとする。このような Γ 作用付きの主 G 等質空間を Γ 上の G 捻子 (G-*torsor*) と呼ぶ。G 捻子 X, Y の間の射とは、G 同変な写像 $\varphi : X \to Y$ で Γ 作用と可換なものである。Γ 上の G 捻子の圏を $\mathcal{T}ors_G$ と書く。

さて $X \in \mathcal{T}ors_G$ の点 $x \in X$ を止めれば、主 G 等質空間の定義から $\sigma \in \Gamma$ に対して $\sigma(x) = x.g_\sigma$ となる $g_\sigma \in G$ が唯一つある。容易に確かめられるように $\{g_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ は G に値を持つ Γ 上の 1 コサイクルであり、そのコホモロジー類 $\operatorname{inv} X \in \mathrm{H}^1(\Gamma, G)$ は $x \in X$ によらず定まる。次の補題はこれらの定義から明らかである。

補題 4.10. (a) $X \mapsto \operatorname{inv} X$ は Γ 上の G 捻子の同型類の集合から $H^1(\Gamma, G)$ への全単射を定めている。
(b) 更に G がアーベル群のとき、X が Γ 不動点を持つ: $X^\Gamma \neq \varnothing$ ためには $\operatorname{inv} X = 0$ が必要十分である。

4.4 正則半単純共役類の局所大域原理

さて 3.2 節の状況に戻って代数体 F 上の連結簡約群 G とその準分裂データ (G^*, ψ_G) を取る。以下、簡単のために G の導来群は単連結であるとする。正則半単純な $\gamma \in G(F)_{\mathrm{rs}}$ に対してその局所、大域安定共役類 $\gamma^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(\mathbb{A}), \gamma^G(F)$ の差を記述するだけでは十分ではない。準分裂でない G に対しては F 有理点は持たないが $\mathbb{A}$ 値点を持つ半単純共役類があるからである。そこで定理 3.5 とその直前の注意を考慮して $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{rs}}$ の共役類から出発し、その $\psi_G^{-1} : G^*_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ による像の局所大域原理を記述したい。

問題を正確に述べよう。上の状況で $\gamma_{\mathbb{A}} = (\gamma_v)_v \in G(\mathbb{A})$ が γ_* をアデール像 (*adelic image*) に持つとは、各素点 v で $\psi_G(\gamma_v)$ と γ_* が $G^*(\bar{F}_v)$ 共役であることとする。これは後で見るように
$$\mathrm{Ad}(g)\psi_G(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_*, \quad g \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}) \tag{4.3}$$
に同値になる。

問題 4.11. $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ が $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{rs}}$ をアデール像に持つとする。$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing$ となるための必要十分条件を求めよ。

4.4.1 G_{sc} での共役類

これを解決するため、まずは $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ を $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$ で置き換えた類似の問題を考える。これは $T := G^*_{\gamma_*}$ として次に解説する Γ 上の $T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 捻子で記述される。$\tilde{X} = \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ を $h \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ と $\eta : T_{\bar{F}} \hookrightarrow G_{\bar{F}}$ の対で

- $\eta = \psi_G^{-1} \circ \mathrm{Ad}(\delta)|_{T_{\bar{F}}}, (\delta \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F}))$;
- $\eta(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}$

を満たすものの集合とする。これは (4.3) から $(\psi_G^{-1}(g), \psi_G^{-1})$ を含むから空でなく、Γ 作用

$$\sigma(h,\eta) = (\sigma(h), \sigma(\eta) := \sigma \circ \eta \circ \sigma^{-1}), \quad \sigma \in \Gamma$$

を備えている。

補題 4.12. $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$ が F 有理点を持つためには、$\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{\Gamma} \neq \varnothing$ が必要十分である。

証明. まず $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$ が F 有理点 $\mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}} =: \gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F), (h \in G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A}))$ を持つとする。(4.3) から

$$\gamma = \mathrm{Ad}(h\psi_G^{-1}(g)^{-1})\psi_G^{-1}(\gamma_*)$$

なので補題 4.2 により、ある $\delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ に対して $\gamma = \mathrm{Ad}(\delta)\psi_G^{-1}(\gamma_*)$ である。そこで $\eta := \mathrm{Ad}(\delta) \circ \psi_G^{-1}|_{T_{\bar{F}}} : T_{\bar{F}} \hookrightarrow G_{\bar{F}}$ とおく。(3.1) の記号で

$$\eta^{-1} \circ \sigma(\eta) = \psi_G \circ \mathrm{Ad}(\delta^{-1}\sigma(\delta)) \circ \psi_G^{-1} = \mathrm{Ad}(\psi_G(\delta^{-1}\sigma(\delta))u_\sigma), \quad \sigma \in \Gamma$$

だが、$\eta^{-1} \circ \sigma(\eta)(\gamma_*) = \eta^{-1} \circ \sigma \circ \eta(\gamma_*) = \eta^{-1}(\gamma) = \gamma_*$ なので $\psi_G(\delta^{-1}\sigma(\delta))u_\sigma \in T(\bar{F})$, $(\sigma \in \Gamma)$ が従う。つまり $\eta : T \hookrightarrow G$ は F 準同型で $(h,\eta) \in \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{\Gamma}$ だから、条件は必要である。

逆に $(h,\eta) \in \tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{\Gamma}$ があれば、$\eta(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}}$ は $G(\bar{F}) \cap G(\mathbb{A}) = G(F)$ に属するから条件は十分である。 □

次に $\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ には $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ が左から

$$\delta.(h,\eta) := (\delta h, \mathrm{Ad}(\delta) \circ \eta), \quad \delta \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$$

と作用する。この作用で $\tilde{X}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ を割ったものを $X = X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ とおく。

$$X := G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})\backslash\tilde{X} \xrightarrow{\sim} \left\{ G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})(h,\eta_0) \,\middle|\, \begin{array}{l} \bullet\ \ h \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}) \\ \bullet\ \ \mathrm{Ad}(h)\gamma_{\mathbb{A}} = \psi_G^{-1}(\gamma_*) \end{array} \right\}.$$

ここで $\eta_0 := \psi_G^{-1}|_{T_{\bar F}} : T_{\bar F} \xrightarrow{\sim} G_{\bar F}$ と書いている。

系 4.13. $\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\rm sc}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ が空でないためには、$X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma \neq \varnothing$ が必要十分。

証明. 補題 4.12 から、$X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ が空でなければ $\tilde X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ も同様なことを見れば十分。$G_{\rm sc}(\bar F)(h,\eta) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ とすれば、$\sigma \in \Gamma$ に対してある $\delta_\sigma \in G_{\rm sc}(\bar F)$ があって

$$\sigma(h,\eta) = (\delta_\sigma^{-1} h, \mathrm{Ad}(\delta_\sigma^{-1}) \circ \eta)$$

が成り立つ。特に第一成分に注目して $\delta_\sigma = h\sigma(h)^{-1}$ であるから、$\{\delta_\sigma\}_\sigma$ は $G_{\rm sc}(\bar F)$ 値 1 コサイクルでそのクラスは $\text{Ш}^1(F, G_{\rm sc})$ に属する。よって命題 4.8 からある $\delta_1 \in G_{\rm sc}(\bar F)$ があって $\delta_\sigma = \delta_1^{-1}\sigma(\delta_1), (\sigma \in \Gamma)$ である。このとき $\delta_1.(h,\eta) \in \tilde X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^\Gamma$ である。 □

さて、$\tilde X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ には $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ が右から

$$(h,\eta).t := (\eta(t)^{-1}h, \eta), \quad t \in T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$$

と作用し、これから $X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ への $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ 作用が定まる。任意の $G_{\rm sc}(\bar F)(h,\eta_0)$, $G_{\rm sc}(\bar F)(h',\eta_0) \in X$ に対して $\eta_0(\gamma_*) = \mathrm{Ad}(h')\gamma_{\mathbb{A}} = \mathrm{Ad}(h'h^{-1})\eta_0(\gamma_*)$ から $h'h^{-1} \in \eta_0(T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}}))$ だから、この $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})$ 作用は推移的である。さらに $(\eta(t)^{-1}h, \eta) \in G_{\rm sc}(\bar F)(h,\eta)$ であるためには $\eta(t) \in \eta(T_{\rm sc})(\bar F)$ が必要十分だから、X は $T_{\rm sc}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\rm sc}(\bar F)$ 捻子である。$X = X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ の $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\rm sc})$ でのクラス $\mathrm{inv}\, X$ (補題 4.10) の Tate・中山同型

$$\alpha_{T_{\rm sc}} : \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\rm sc}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\widehat{T_{\rm sc}}^\Gamma)^D = \pi_0((\hat T/Z_{\hat G})^\Gamma)^D$$

による像を $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ と書く。系 4.13 と補題 4.10 (b) から次は明らかである。

命題 4.14. $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ が $\gamma_* \in G^*(F)_{\rm rs}$ をアデール像に持つとき、$\gamma_{\mathbb{A}}^{G_{\rm sc}(\mathbb{A})} \cap G(F)$ が空でないためには $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = 1$ が必要十分である。

後で用いやすいように $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ のもう一つの表示を与えておこう。(3.1), (4.3) の記号で

$$v_\sigma := g u_\sigma \sigma(g)^{-1} \in G^*_{\rm sc}(\bar F)$$

とおく。$\mathrm{Ad}(v_\sigma)\gamma_* = \mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G \circ \sigma(\mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G)^{-1}\gamma_* = \gamma_*$ ゆえ $v = \{v_\sigma\}$ は $T_{\rm sc}(\bar F)$ 値 1 コチェイン (1.2 節) で $\partial v = \partial u \in Z^2(\Gamma, Z_{G^*_{\rm sc}}(\bar F))$ を満たす。従ってその $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\rm sc})$ での像は定義可能である。その $\alpha_{T_{\rm sc}}$ による像を $\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}}) \in \pi_0((\hat T/Z_{\hat G})^\Gamma)^D$ と書く。

補題 4.15. 上の状況で $\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = \mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})^{-1}$.

証明. $G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})(h, \eta_0) \in X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ を取る。$\mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G(\gamma_{\mathbb{A}}) = \gamma_* = \mathrm{Ad}(\psi_G(h)) \circ \psi_G(\gamma_{\mathbb{A}})$ から $t := \psi_G(h)g^{-1} \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ に注意する。$\sigma \in \Gamma$ に対して

$$\sigma(h, \eta_0) = \delta_\sigma^{-1}.(h, \eta_0).t_\sigma, \quad \delta_\sigma \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), t_\sigma \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$$

と書いたとき、$\{t_\sigma^{-1}\}_{\sigma \in \Gamma}$ の $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}})$ でのクラスが $\mathrm{inv}\, X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ であった[*8]。この等式の第一成分に注目して、

$$\begin{aligned}
t_\sigma =&\eta_0^{-1}(h\sigma(h)^{-1}\delta_\sigma^{-1}) = \psi_G(h)\psi_G(\sigma(h))^{-1}\psi_G(\delta_\sigma)^{-1} \\
=&\psi_G(h)\big(\psi_G \circ \sigma(\psi_G)^{-1} \circ \sigma(\psi_G(h))\big)\psi_G(\delta_\sigma)^{-1} \\
=&\psi_G(h)u_\sigma\sigma(\psi_G(h))^{-1}u_\sigma^{-1}\psi_G(\delta_\sigma)^{-1} \\
=&tgu_\sigma\sigma(g)^{-1}\sigma(t)^{-1}u_\sigma^{-1}\psi_G(\delta_\sigma)^{-1} \\
=&tv_\sigma\sigma(t)^{-1}(\psi_G(\delta_\sigma)u_\sigma)^{-1}
\end{aligned}$$

を得る。ここで第二成分の等式は

$$\psi_G^{-1} \circ \mathrm{Ad}(u_\sigma)|_T = \sigma(\psi_G)^{-1}|_T = \sigma(\eta_0) = \psi_G^{-1} \circ \mathrm{Ad}(\psi_G(\delta_\sigma))^{-1}|_T$$

と書けるから $\psi_G(\delta_\sigma)u_\sigma \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}) \cap G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}) = T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ である。よって t_σ の $\mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}})$ でのクラスは $\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ に等しい。 □

4.4.2 G_{sc} から G への移行

まず T の双対トーラス $\hat{T} = \mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbb{C}^\times)$ について次が成り立つ。

[*8] $T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})/T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ は $X(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ に右から作用するので t_σ の逆元になる。

補題 4.16. (i) $(X_*(T)=X^*(\hat{T}),\mathbb{Z})$ の Galois Ext 群は次で与えられる。

$$\mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z})=\begin{cases}X(T)_F & n=0\text{ のとき}\\ \pi_0(\hat{T}^\Gamma) & n=1\text{ のとき}\\ \mathrm{H}^{n-1}(\Gamma,\hat{T}) & n\geq 2\text{ のとき}\end{cases}$$

(ii) 特に長完全列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow & X(G)_F \longrightarrow X(T)_F \longrightarrow X(T_{\mathrm{sc}})_F\\ \longrightarrow & \pi_0(Z^\Gamma_{\hat{G}}) \longrightarrow \pi_0(\hat{T}^\Gamma) \longrightarrow \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)\\ \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma,\hat{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma,\hat{T}/Z_{\hat{G}}) \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

がある。

証明. (i) まず定義から $\mathrm{Ext}^0_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(X_*(T),\mathbb{Z})^\Gamma=X(T)_F$ である。また完全列 $1\to\mathbb{Z}\overset{2\pi i}{\to}\mathbb{C}\overset{\exp}{\to}\mathbb{C}^\times\to 1$ の長完全列

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}^\times) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C})\\ \hat{\mathfrak{t}}^\Gamma \arrow[r, "\exp"] & \hat{T}^\Gamma & & \end{tikzcd}$$

において、1.5 節 (1.3) から $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C})\simeq\mathrm{H}^1(\Gamma,\hat{\mathfrak{t}})\cong\varinjlim_E\mathrm{H}^1(\Gamma_{E/F},\hat{\mathfrak{t}})=0$ だから $\mathrm{Ext}^1_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z})\simeq\pi_0(\hat{T}^\Gamma)$ である。同様に $n\geq 1$ のとき $1\to\mathbb{Z}\overset{2\pi i}{\to}\mathbb{C}\overset{\exp}{\to}\mathbb{C}^\times\to 1$ の長完全列と (1.3) から

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}^\times) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^{n+1}_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{C}) \arrow[d, equal]\\ \mathrm{H}^n(\Gamma,\hat{\mathfrak{t}})=0 & \mathrm{H}^n(\Gamma,\hat{T}) & & \mathrm{H}^n(\Gamma,\hat{\mathfrak{t}})=0\end{tikzcd}$$

ゆえ $\mathrm{Ext}^n_\Gamma(X_*(T),\mathbb{Z})\simeq\mathrm{H}^{n-1}(\Gamma,\hat{T})$, $(n\geq 2)$ が成り立つ。

(ii) は $0\to X_*(T_{\mathrm{sc}})\to X_*(T)\to X_*(D_G)\to 0$ に付随する長完全列にほかならない。Ext 群の第一変数についての導来関手性については [Wei94, 定理 10.7.4] などを見よ。 □

上の補題の連結射 $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)\to\mathrm{H}^1(\Gamma,Z_{\hat{G}})$ による $\text{Ш}^1(F,Z_{\hat{G}})$ の逆像を $\mathfrak{K}(T)=\mathfrak{K}^G(T)$ と書く。以前の通り $\gamma_*\in G^*(F)_{\mathrm{rs}}$ とそれをアデール像に持つ $\gamma_{\mathbb{A}}\in G(\mathbb{A})$ を取り、$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)\in\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D$ の $\mathfrak{K}(T)$ への制限を $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*)$ と書く (*Kottwitz* 障害)。この節の目的はこれまでの議論を関手性によって拡張し、命題 4.14 から次の定理を引き出すことである。

定理 4.17. $\gamma_* \in G^*(F)_{\mathrm{rs}}$ をアデール像に持つ $\gamma_{\mathbb{A}} \in G(\mathbb{A})$ の $G(\mathbb{A})$ 共役類が $G(F)$ の元を含むためには $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ が消えることが必要十分である。

証明. まず $\mathfrak{K}(T)$ の Pontrjagin 双対を計算しよう。補題 4.16 (ii) と制限射の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma, Z_{\hat{G}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}}) \end{array}$$

から

$$\mathfrak{K}(T) = \ker\Big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma}) \to \prod_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v}) \to \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})\Big)$$

である。Pontrjagin 双対を取れば、

$$A : \bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \ni (\kappa_v)_v \longmapsto \prod_v \kappa_v \circ \bar{v} \in \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D$$

として

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(T)^D =& \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D \Big/ A\Big(\bigoplus_v \mathrm{im}\big(\mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})^D \to \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D\big)\Big) \\ =& \pi_0(\hat{T}_{\mathrm{sc}}^{\Gamma})^D \Big/ A\Big(\bigoplus_v \ker\big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D\big)\Big) \end{aligned}$$

を得る。よって $B_v : \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \to \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D$, $B := \bigoplus_v B_v$ として $\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*)$ が消えるためには次が必要十分である。

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) \in A(\ker B) \tag{4.4}$$

主張 4.17.1. $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing$ であるためには、$\gamma'_{\mathbb{A}} = \gamma_{\mathbb{A}}^{h_1} \in G(\mathbb{A}), h_1 \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})$ で

(i) $\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = 1$;
(ii) ∂h_1 の $\mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})$ でのクラスは自明。

を満たすものがあることが必要十分。

証明. 実際 $\gamma = \gamma_{\mathbb{A}}^h \in G(F), h \in G(\mathbb{A})$ ならば、$h = h_1 t, (h_1 \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}}), t \in G_\gamma(\bar{\mathbb{A}}))$ として $\gamma'_{\mathbb{A}} := \gamma_{\mathbb{A}}^{h_1} = \mathrm{Ad}(t)\gamma = \gamma$ は主張の条件を満たす:

$$\mathrm{obs}_1(\gamma'_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = \mathrm{obs}_1(\gamma, \gamma_*) = 0,$$
$$(\partial h_1)_\sigma = ht^{-1}\sigma(th^{-1}) = (\partial \mathrm{Ad}(h)t^{-1})_\sigma, \quad \sigma \in \Gamma.$$

逆に主張の条件が成り立つとする。(ii) からある $t \in G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}$ があって $\partial h_1 = \partial t^{-1}$ だから $h := th_1 \in G(\mathbb{A})$ で、(i) から

$$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} = \gamma_{\mathbb{A}}^{hG(\mathbb{A})} = {\gamma'_{\mathbb{A}}}^{G(\mathbb{A})} \supset {\gamma'_{\mathbb{A}}}^{G_{\mathrm{sc}}(\mathbb{A})}$$

は $G(F)$ の元を含む。 □

主張の条件 (i) は補題 4.15 から

$$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) = \frac{\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma'_{\mathbb{A}})}{\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})} \tag{(i)$'$}$$

に同値である。一方 $\mathrm{Ad}(g\psi_G(h_1)) \circ \psi_G(\gamma'_{\mathbb{A}}) = \gamma_*$ であるから、$\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma'_{\mathbb{A}})$ を与える 1 コチェイン v' は

$$\begin{aligned} v'_\sigma &= g\psi_G(h_1)u_\sigma\sigma(\psi_G(h_1))^{-1}\sigma(g)^{-1} = g\psi_G(h_1)u_\sigma\sigma(\psi_G(h_1))^{-1}u_\sigma^{-1}u_\sigma\sigma(g)^{-1} \\ &= g\psi_G((\partial h_1)_\sigma)u_\sigma\sigma(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g)\psi_G((\partial h_1)_\sigma) \cdot v_\sigma \end{aligned}$$

となる。つまり (i)$'$ の $\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma'_{\mathbb{A}})/\,\mathrm{inv}(\gamma_*, \gamma_{\mathbb{A}})$ は ∂h_1 のコホモロジー類の

$$\varphi : \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G} \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}}) \xrightarrow{\alpha_{T_{\mathrm{sc}}}} \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D$$

による像に他ならない。定義から ∂h_1 のコホモロジー類は下の C の核に含まれるが、主張の (ii) はそれが $\ker D$ に属することを意味する。

$$\begin{aligned} C &: \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})), \\ D &: \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \end{aligned}$$

結局、$\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ が F 有理点を持つためには、$\mathrm{obs}_1(\gamma_{\mathbb{A}}, \gamma_*) \in \varphi(\ker C \cap \ker D)$ が必要十分である。これと (4.4) から、定理は次の主張に帰着される。

主張 4.17.2. $A(\ker B) = \varphi(\ker C \cap \ker D)$.

証明. まず命題 2.5 から次の可換図式がある。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^1(F, G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G"] \arrow[d, "D"'] & \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus \alpha_{T_{\mathrm{sc}},v}"] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F, T_{\mathrm{sc}}) \arrow[d, "\alpha_{T_{\mathrm{sc}}}"] \\ \mathrm{H}^1(F, G(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}}) \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G"'] & \bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"] & \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)^D \\ \mathrm{H}^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r, "\bigoplus \alpha_{T_v}"] & \bigoplus_v \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D & \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

ここで φ は 1 行目で右端に行って一つ下がる射だから

$$\begin{aligned}\varphi(\ker C\cap\ker D)\subset\varphi(\ker D)\subset\varphi\Big(\ker\Big(B\circ\bigoplus\alpha_{T_{\mathrm{sc},v}}\circ\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G\Big)\Big)\\ \subset A(\ker B)\end{aligned}$$

は直ちにわかる。

逆向きの包含関係を示そう。仮定から $\gamma_{\mathbb{A}}$ ほとんど全ての非アルキメデス成分 γ_v の中心化群 G_{γ_v} および $G_{\gamma_v,\mathrm{sc}}:=G_{\gamma_v}\cap G_{\mathrm{sc},v}$ は F_v 上の不分岐トーラスである。よって (2.5) と同様に

$$\mathrm{H}^1(F,G_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})_{\gamma_{\mathbb{A}}})\simeq\bigoplus_v\mathrm{H}^1(F_v,G_{\gamma_v,\mathrm{sc}})$$

が成り立つ。この同型により両者を同一視すれば、Kneser の消滅定理 3.7 から

$$\ker C=\bigoplus_{v|\infty}\ker\big(\mathrm{H}^1(F_v,G_{\gamma_v,\mathrm{sc}})\to\mathrm{H}^1(F_v,G_{\mathrm{sc}})\big)\oplus\bigoplus_{v\nmid\infty}\mathrm{H}^1(F_v,G_{\gamma_v,\mathrm{sc}})$$

である。ここで再び (4.5) から $\varphi=A\circ\bigoplus\alpha_{T_{\mathrm{sc}},v}\circ\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G$ だから有限成分に関しては

$$\begin{aligned}\varphi(\ker C\cap\ker D)&\supset\varphi\Big(\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker\big(\mathrm{H}^1(F_v,G_{\gamma_v,\mathrm{sc}})\to\mathrm{H}^1(F_v,G_{\gamma_v})\big)\Big)\\ &=\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker\big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D\to\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D\big)=\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker B_v\end{aligned}$$

を得る。このとき実は次が成り立つので $\varphi(\ker C\cap\ker D)\supset A(\ker B)$ が従う。

主張 4.17.3. $A(\ker B)=A(\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker B_v)$.

証明. $\ker B_{\mathrm{fin}}:=\bigoplus_{v\nmid\infty}\ker B_v$, $\ker B_\infty:=\bigoplus_{v|\infty}\ker B_v$ と書けば示すべき主張は $\ker A\cap\ker B+\ker B_{\mathrm{fin}}=\ker B$, すなわち

$$\ker A\cap\ker B\hookrightarrow\ker B_\infty\oplus\ker B_{\mathrm{fin}}\twoheadrightarrow\ker B_\infty$$

が全射であることである。

まず各行が完全系列からなる可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[ddd] & \mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus \alpha_{T_{\mathrm{sc}},v}"'] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[d, "\alpha_{T_{\mathrm{sc}}}"] \\
 & \bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma})^D \arrow[d] \\
 & \bigoplus_v \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D \arrow[r] & \pi_0(\hat{T}^{\Gamma})^D \\
\mathrm{H}^1(F,T) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(F,T(\bar{\mathbb{A}})) \arrow[r] \arrow[u, "\bigoplus \alpha_{T_v}"] & \mathrm{H}^1(\mathbb{A}/F,T) \arrow[u, "\alpha_T"']
\end{tikzcd}$$

を考える。右上のスクエアの可換性から $\ker A$ は $\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})$ の $\bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D$ での像である。よって左のスクエアの可換性から $\ker A \cap \ker B$ は $\text{Ш}^1(F,T)$ の $\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}})$ での逆像の $\bigoplus_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D$ での像である。よって $\ker[\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F,T)]$ の

$$\mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}(\bar{\mathbb{A}})) \xrightarrow{\bigoplus \alpha_{T_{\mathrm{sc}},v}} \bigoplus_{v|\infty} \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D$$

による像が $\ker B_\infty$ であることを示せば十分である。

そこで 1, 2 行目が $1 \to T_{\mathrm{sc}} \to T \to D_G \to 1$ の Galois コホモロジー完全列、3 行目が補題 4.16 の完全列の Pontrjagin 双対からなる可換図式

$$\begin{tikzcd}
D_G(F) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathrm{H}^1(F,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathrm{H}^1(F,T) \arrow[d] \\
D_G(F_\infty) \arrow[r] \arrow[d, "(\dagger)"'] & \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v,T_{\mathrm{sc}}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(F_v,T) \arrow[d] \\
\bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}})^D \arrow[r, "\bigoplus \delta_v"] & \bigoplus_{v|\infty} \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})^D \arrow[r, "B_\infty"] & \bigoplus_{v|\infty} \pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v})^D
\end{tikzcd}$$

を考える。問題の像は $\mathrm{im}(\gamma \circ \beta \circ \delta)$ で $\ker B_\infty = \mathrm{im} \bigoplus_{v|\infty} \delta_v$ だから、第一列の射 $D_G(F) \to \bigoplus_{v|\infty} \mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}})^D$ のが全射であることを示せばよい。

これは直接計算で証明できる。まず (2.2) により $\mathrm{H}^1(\Gamma_v,Z_{\hat{G}}) \simeq \widehat{\mathrm{H}}^2(F_v,X^*(D_G))$ で、Tate コホモロジー群のカップ積

$$\smile : \widehat{\mathrm{H}}^2(F_v,X^*(D_G)) \otimes \widehat{\mathrm{H}}^0(F_v,D_G) \longrightarrow \widehat{\mathrm{H}}^2(F_v,\mathbb{G}_m) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

は有限群の完全双対性だから $\mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})^D$ は $\widehat{\mathrm{H}}^0(F_v, D_G) = D_G(F_v)/N_{\Gamma_v} D_G(\bar{F}_v)$ に標準同型である。ただし $N_{\Gamma_v} t = \prod_{\sigma\in\Gamma_v} \sigma(t)$ と書いている。よって上の図式中の射 (†) は自然な射影 $D_G(F_v) \twoheadrightarrow D_G(F_v)/N_{\Gamma_v} D_G(\bar{F}_v)$, $(v|\infty)$ の直和である。$\prod_{v|\infty} N_{\Gamma_v} D_G(\bar{F}_v) \subset D_G(F_\infty)$ は開部分群で $D_G(F) \subset D_G(F_\infty)$ は稠密だから、件の全射性が従う。 □

5 局所と大域を結ぶ跡公式

前節で得られた共役類ごとに局所大域原理を跡公式に組み込むことで大域的な保型表現の記述を行う。実際の込み入った公式を眺める前に、なぜ跡公式が局所情報を大域的効果に変換してくれるべきかをおもちゃの模型で見てみよう。

5.1 雛形—有限群の誘導指標

有限群 G の部分群 $\mathit{\Gamma}$ とその ($\mathbb{C}$ 係数) 有限次元表現 (ρ, V) に対して、(余) 誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathit{\Gamma}}^G(\rho, V) = \mathrm{Hom}_{\mathit{\Gamma}}(\mathbb{Z}[G], V)$ の指標公式を思い出そう。G 等質空間 $X := \mathit{\Gamma}\backslash G$ 上の G 同変ベクトル束

$$\mathcal{V}_\rho := V \times G \Big/ \langle (v, hg) - (\rho(h^{-1})v, g) \,|\, h \in \mathit{\Gamma} \rangle \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow X$$

を考えると、$\phi \in \mathrm{Ind}_{\mathit{\Gamma}}^G(V)$ は切断 $X \ni \mathit{\Gamma} g \mapsto (g, \phi(g)) \in \mathcal{V}_\rho$ と同一視される。

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{V}_\rho) := \mathrm{Ext}^i_{\mathit{\Gamma}}(\mathbb{Z}[G], V) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathit{\Gamma}}(\mathbb{Z}[G], V) & i = 0 \text{ のとき} \\ 0 & i > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおけば次が成り立つ。証明は学部学生向けのよい演習問題である。

事実 5.1. X 内の $g \in G$ の固定点の集合を $\mathrm{Fix}(g, X) := \{\mathit{\Gamma} x \in X \,|\, \mathit{\Gamma} x g^{-1} = \mathit{\Gamma} x\}$ と書くとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\mathrm{Ind}_{\mathit{\Gamma}}^G(\rho, g) &= \sum_{\substack{\mathit{\Gamma} x \in \mathit{\Gamma}\backslash G \\ \mathrm{Ad}(x) g \in \mathit{\Gamma}}} \mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Ad}(x) g) \\ &= \mathrm{tr}(g, \mathrm{H}^*(X, \mathcal{V}_\rho)) = \sum_{\mathit{\Gamma} x \in \mathrm{Fix}(g, X)} \mathrm{tr}(g, \mathcal{V}_{\rho, \mathit{\Gamma} x}). \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{V}_{\rho,\mathit{\Gamma} x}$ は $\mathit{\Gamma} x$ 上の $\mathcal{V}_\rho$ のファイバーである。

上は同一の等式を二通りに書いたものだが、前者は Frobenius 相互律を表し、後者は Lefschetz 跡公式のおもちゃ (toy model) になっている。Lefschetz 跡公式はベクトル束のコホモロジー空間全体への g 作用のトレースを、各固定点のファイバー上の局所トレースで表すことを特徴としている。

ここからは (ρ, V) が単位表現の場合をさらに詳しく考えてみよう。$\Gamma \ni \gamma$ の共役類を γ^Γ と書けば、右辺は

$$\mathrm{Fix}(g, X) = \{\Gamma x \in X \mid \mathrm{Ad}(x)g \in \Gamma\} = \coprod_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} \{\Gamma x \in X \mid \mathrm{Ad}(x)g \in \gamma^\Gamma\}$$

の濃度である。一方、左辺は X 上の関数空間 $\mathcal{L}(X) = \mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ 上の G の右移動表現 R の指標だから、$f : G \to \mathbb{C}$ に対するおもちゃの跡公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(R(f)|\mathcal{L}(X)) &:= \sum_{g \in G} f(g)\,\mathrm{tr}(R(g)|\mathcal{L}(X)) \\
&= \sum_{g \in G} f(g) \sum_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} |\{\Gamma x \in X \mid \mathrm{Ad}(x)g \in \gamma^\Gamma\}| \\
&= \sum_{g \in G} f(g) \sum_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} |\{\Gamma_\gamma x \in X \mid \mathrm{Ad}(x)g = \gamma\}| \\
&= \sum_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} \sum_{g \in G} |\{\Gamma_\gamma x \in X \mid \gamma^x = g\}| \cdot f(g) \\
&= \sum_{\gamma^\Gamma \subset \Gamma} |\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma| \sum_{g \in \gamma^G} f(g)
\end{aligned}$$

が得られる。すなわち Arthur-Selberg 跡公式の幾何サイドは Lefschetz 跡公式の局所項からなるサイドの類似になっている。

5.2 跡公式弾丸ツアー

3 節の状況に戻って $G(\mathbb{A})$ の右移動表現 $(R, \mathcal{L}(G))$ を思い出す。アルキメデス素点 v では $G(F_v)$ の極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_v$ を固定し、$G(F_v)$ 上の (複素数値) コンパクト台付き両側 $\boldsymbol{K}_v$ 有限関数の空間を $\mathcal{H}(G(F_v))$ と書く。非アルキメデス素点 v では $G(F_v)$ 上のコンパクト台付き局所定数関数の空間を $\mathcal{H}(G(F_v))$ と書く。G_v が不分岐な有限素点 v では超スペシャル極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_v = G(\mathcal{O}_v) \subset G(F_v)$ があった。

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})) = \bigcup_S \Big(\bigotimes_{v \in S} \mathcal{H}(G(F_v)) \otimes \bigotimes_{v \notin S} 1_{\boldsymbol{K}_v} \Big)$$

を $G(\mathbb{A})$ 上の *Hecke* 環と呼び、これが跡公式のテスト関数の空間である。以下常に G の任意の簡約部分群 H のアデール群 $H(\mathbb{A})$ 上の不変測度として玉河測度を採用することにする。

前半の講演で解説されたとおり、$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対する作用素

$$R(f) : \mathcal{L}(G) \ni \phi(x) \longmapsto \int_{G(\mathbb{A})} f(g)\phi(xg)\,dg \in \mathcal{L}(G)$$

は積分核

$$K(x,y) = \sum_{\gamma \in G(F)} f^0(x^{-1}\gamma y), \quad f^0(g) := \int_{\mathfrak{A}_G} f(zg)\,dz$$

を持つ積分作用素である。G の導来群が F 上非等方的、すなわち $G(F)$ が半単純元だけからなるとき、$G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})$ はコンパクトである [BHC62]。このとき Selberg 跡公式は上の核関数の対角部分集合上の積分

$$T^G(f) = \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} K(x,x)\,dx$$

を幾何サイドとスペクトルサイドという二通りに展開することで得られる。特に $T^G(f)$ は跡族作用素 $R(f)$ の (拡張された意味の) トレースになっている。

一般の G に対しては上の積分は収束しない。この場合、Arthur の跡公式は $R(f)$ のある意味での「正規化されたトレース」を幾何サイドとスペクトルサイドに展開することで得られる。幾何サイドの正規化は上の積分を収束させるために積分領域のカスプの周りを切り落とすことである。スペクトルサイドのそれは $R(f)$ の連続スペクトルへの制限が跡族でない問題を截頭作用素により解決している。これら両サイドの正規化が等価な操作であることが基本等式 [Lab86] で保証され、粗い跡公式が得られる。截頭作用素などの正規化に現れる道具は G の極小 Levi 部分群や $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群など多くの補助データに依存していて、包含関係もない簡約代数群の間でこうした補助データを整合するように選ぶことは不可能である。そこでこの依存性を排除するために跡公式の細かい展開を作り [CLL], [Art86], [Art82a], [Art82b]、さらにそれを ($G(\mathbb{A})$ の随伴作用で) 不変な化身に置き換えた不変跡公式を構成する [Art88a], [Art88b]。こうして得られる不変な正規化されたトレースを $T^G(f)$ と書くことにする。

5.2.1 幾何サイド

G の極小放物型部分群の Levi 成分 M_0 を固定して、それを含む Levi 部分群の集合を $\mathscr{L} = \mathscr{L}^G$ と書く。$A_0 = A_{M_0}$ は G 内の極大な F 分裂トーラスである。その相対 Weyl

群を $W=W^G:=\mathrm{Norm}(A_0,G(F))/M_0(F)$ で表す。テスト関数 $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して十分大きな F の素点の有限集合 S を取れば、不変跡公式の幾何展開は

$$T^G(f)=\sum_{M\in\mathscr{L}}\frac{|W^M|}{|W|}\sum_{\gamma\in M(F)_{M,S}}a^M(S,\gamma)I_M(\gamma,f^0) \tag{5.1}$$

で与えられる [Art88b, 定理 3.3]。ここで $M(F)_{M,S}$ は $M(F)$ の元の (M,S) 同値類の集合である。ただし $\gamma,\gamma'\in M(F)$ が (M,S) 同値とは、両者の Jordan 分解における半単純部分が $M(F)$ 共役、ユニポテント部分が $M(F_S)=\prod_{v\in S}M(F_v)$ で共役なことだった。主要項 $I_M(\gamma,f^0)$ は f^0 の重み付き軌道積分 $J_M(\gamma,f^0)$ の不変な化身として得られる不変超関数 (*invariant distribution*) である。係数 $a^M(S,\gamma)$ は粗い跡公式のユニポテント項を重み付き軌道積分で展開する際の係数から定まり、一般には計算できない。

半単純な $\gamma\in G(F)$ が楕円的とは Z_{G_γ}/A_G が非等方的なことであった。$G(F)$ 内の楕円半単純元の集合を $G(F)_{\mathrm{ell}}$ と書く。$G(F)$ 共役で不変な部分集合 $\Xi\subset G(F)$ 内の半単純 $G(F)$ 共役類の集合を $\Gamma(\Xi)=\Gamma^G(\Xi)$ と書くとき、直和分解

$$\Gamma(G(F))=\coprod_{[M]\in\mathcal{L}/W}\Gamma^M(M(F)_{\mathrm{ell}})/W(M)$$

がある。ここで $W(M):=\mathrm{Norm}(M,G(F))/M(F)$ と書いている。容易に計算できるように $M\in\mathcal{L}$ の W 軌道の濃度は

$$|[M]|=\frac{|W|}{|W^M||W(M)|}$$

で与えられる。よって (5.1) の $M=G$ の項のうち、半単純な γ に対する部分は

$$\begin{aligned}
T^G_{\mathrm{ell}}(f)&=\sum_{\gamma^{G(F)}\in\Gamma(G(F))}a^G(S,\gamma)I_G(\gamma,f^0)\\
&=\sum_{[M]\in\mathcal{L}/W}\frac{1}{|W(M)|}\sum_{\gamma^{M(F)}\in\Gamma^M(M(F)_{\mathrm{ell}})}a^G(S,\gamma)I_G(\gamma,f^0)\\
&=\sum_{M\in\mathcal{L}}\frac{|W^M|}{|W|}\sum_{\gamma^{M(F)}\subset M(F)_{\mathrm{ell}}}a^G(S,\gamma)I_G(\gamma,f^0).
\end{aligned}$$

となる。ここで [Art86, 定理 8.2] から、十分大きな S に対しては

$$a^G(S,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{vol}(G_\gamma(F)\mathfrak{A}_G\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))}{[G^\gamma(F):G_\gamma(F)]} & \gamma\in G(F)_{\mathrm{ell}}\text{ のとき}\\ 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

が成り立つ。

$G(F)_{\mathrm{ell}} \ni \gamma$ の連結中心化群を以下、$I_\gamma := G_\gamma$ と書くことにする。玉河測度に関する $I_\gamma(F)\mathfrak{A}_G\backslash I_\gamma(\mathbb{A})$ の測度、つまり I_γ の玉河数を $\tau(I_\gamma)$ で表す。また $G(\mathbb{A}), G_\gamma(\mathbb{A})$ 上の玉河測度 dg, di についての γ での大域軌道積分を

$$O_\gamma(f^0) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f^0(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg}{di}$$

と定義する。4 節までの通り G の導来群が単連結であるとする。前段落からこのとき玉河測度に関する $T^G_{\mathrm{ell}}(f)$ は

$$T^G_{\mathrm{ell}}(f) = \sum_{\gamma^{G(F)} \in G(F)_{\mathrm{ell}}} \tau(I_\gamma) O_\gamma(f^0) \tag{5.2}$$

と書ける。これを跡公式の楕円項と呼び、私の講演ではもっぱらこの部分のみを扱う。

例 5.2. $G = \mathrm{GL}_n$ のとき、半単純な $\gamma \in G(F)$ の共役類はその特性多項式を $\Phi_\gamma(x) \in F[x]$ で決まる。特に $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ のとき、$F(\gamma) = F[x]/(\Phi_\gamma(x))$ として $T_\gamma \simeq \mathrm{Res}_{F(\gamma)/F}\mathbb{G}_m$ であるから、γ が楕円的であるためには $F(\gamma)$ が体、すなわち $\Phi_\gamma(x) \in F[x]$ が既約であることが必要十分である。

次に分解 $n = dm$ と d 次既約多項式 $\Phi_\alpha(x) \in F[x]$ を取り、埋め込み $i : F(\alpha) := F[x]/(\Phi_\alpha(x)) \hookrightarrow \mathbb{M}_d(F)$ を固定する。このとき $i \otimes \mathrm{id} : F(\alpha) \otimes_F \mathbb{M}_m(F) \hookrightarrow \mathbb{M}_n(F)$ による $\alpha \otimes 1$ の像を $\gamma \in G(F)$ とすれば、

$$\begin{aligned} G_\gamma(F) =& Z_{\mathbb{M}_n(F)}(\gamma)^\times \simeq \big(Z_{\mathbb{M}_d(F)}(i(\alpha)) \otimes_F \mathbb{M}_m(F)\big)^\times \\ \simeq& \big(F(\alpha) \otimes_F \mathbb{M}_m(F)\big)^\times \simeq \mathrm{GL}_m(F(\alpha)) \end{aligned}$$

より $Z_{G_\gamma} = \mathrm{Res}_{F(\alpha)/F}\mathbb{G}_m$ は $A_G = \mathbb{G}_m$ を法として非等方的なので γ は楕円的である。この場合でも G_γ は非自明なユニポテント元を持つことに注意しよう。すなわち (5.1) の $M = G$ の部分でさらに γ の Jordan 分解 $\gamma = \gamma_s\gamma_u$ の半単純成分 γ_s が $G(F)_{\mathrm{ell}}$ に入っていても、$\gamma_u \neq 1$ となることがあり、そのような γ の項を明示的に計算することはおそらく不可能である[*9]。

[*9] 非常に特別なテスト関数を固定した場合には計算できることもある。ただし保型表現のリフトの証明などに用いる場合にはテスト関数を広範に走らせる必要がある。

5.2.2 スペクトルサイド

スペクトル展開は幾何サイドよりずっと込み入っていて解説が困難である。まずもっとも基本的で重要な部分は離散項

$$T^G_{\mathrm{disc}}(f) = \sum_{M\in\mathscr{L}} T^G_{\mathrm{disc},M}(f)$$

$$\begin{aligned} &T^G_{\mathrm{disc},M}(f) \\ = \sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)} \sum_{w\in W(M)_{\mathrm{reg}}} &\frac{|W^M|}{|W||\det(w-1|_{\mathfrak{a}^G_M})|}\operatorname{tr}(M_{P,\pi}(w,0)\mathcal{I}^G_{P,\pi}(0,f)) \end{aligned} \tag{5.3}$$

である。ここで $\Pi(M(\mathbb{A})^1)$ は $M(\mathbb{A})/\mathfrak{A}_M$ の既約ユニタリ表現の同値類の集合を表し、$w\in W(M)$ で $\det(w-1|_{\mathfrak{a}^G_M})\neq 0$ となるものからなる部分集合を $W(M)_{\mathrm{reg}}$ と書いている。以前は $\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}(X(G)_F,\mathbb{R})$ と定義していたが、$\mathfrak{a}_G = X_*(A_G)\otimes\mathbb{R}$ と見ても同じことである。$A_G\subset A_M$ から自然に $\mathfrak{a}_G\subset\mathfrak{a}_M$ であり、商空間 $\mathfrak{a}_M/\mathfrak{a}_G$ を $\mathfrak{a}^G_M$ と書いている。$\mathcal{I}^G_{P,\pi}(0)$ は保型スペクトル $\mathcal{L}(M)$ の π 等型部分空間 $\mathcal{L}(M)_\pi$ からの放物型誘導表現 $\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{A})}_{P(\mathbb{A})}(\mathcal{L}(M)_\pi\boxtimes\mathbb{1}_{U(\mathbb{A})})$ を表し、$M_{P,\pi}(w,0):\mathcal{I}^G_{P,\pi}(0)\to\mathcal{I}^G_{P,w(\pi)}(0)$ はよく知られた絡作用素である。特に離散項の中の $M=G$ の項

$$T^G_{\mathrm{disc},G}(f) = \sum_{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A})^1)} m(\pi)\operatorname{tr}\pi(f)$$

は、離散保型表現の直和からなるいわゆる離散スペクトル $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ への $R(f)$ の制限のトレースを与えている。ここで $m(\pi)$ は π の $\mathcal{L}_{\mathrm{disc}}(G)$ での重複度である。一方の $T^G_{\mathrm{disc},M}(f)$, ($M\subsetneq G$) たちは跡公式の構成の過程で絡作用素の “多重対数微分” を取る際に孤立した点での微分として得られるもので、Arthur の言うところの連続スペクトルの寄与の生き残り (surviving remnents) である。

例 5.3. 例えば $G=\mathrm{GL}_2$ なら $B=TU$ をその上三角元からなる Borel 部分群として、

$$T^G_{\mathrm{disc},G}(f) = \sum_{\substack{\pi\in\Pi(G(\mathbb{A})^1)\\ \dim\pi=\infty}} m_0(\pi)\operatorname{tr}\pi(f) + \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{A}^1/F^\times)} \chi\circ\det(f),$$

$$\begin{aligned} T^G_{\mathrm{disc},T}(f) &= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{A}^1/F^\times)} \frac{1}{4}\operatorname{tr}M(\chi\otimes\chi)\mathcal{I}^G_B(\chi\otimes\chi,f) \\ &= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathbb{A}^1/F^\times)} \frac{1}{4}\operatorname{tr}\mathcal{I}^G_B(\chi\otimes\chi,f) \end{aligned}$$

である。

さてスペクトル展開の全体は

$$T^G(f)=\sum_{M\in\mathscr{L}}\frac{|W^M|}{|W|}\sum_{M_1\supset M}\sum_{\pi\in\Pi(M(\mathbb{A})^1)}\int_{i\mathfrak{a}_M^{M_1,*}}a_{\mathrm{disc}}^M(\pi)r_M^{M_1}(\pi_\lambda)I_{M_1}(\pi_\lambda,f)\,d\lambda \quad (5.4)$$

となる。ここで $a_{\mathrm{disc}}^M(\pi)$ は T_{disc}^M を既約指標で展開した際の係数から定まる定数であり、$r_M^{M_1}(\pi_\lambda)$ は絡作用素の正規化因子から "多重対数微分" で得られる関数である。$I_{M_1}(\pi_\lambda,f)$ は重み付き指標 $J_{M_1}(\pi_\lambda,f)$ の不変な化身である。特に $M\neq M_1$ に付随するいわゆる連続項たちは連続なパラメーターについての積分を含むため、比較の際には比較的容易に離散項と切り離すことができる。この理由から連続項についてもこれ以上の説明はしない。

5.3 局所情報のインプット

跡公式の幾何サイドに 4.4 節で得た共役類ごとの局所大域原理を編み込む過程を見てみよう。G の z 拡大 $1\to Z_1\to G_1\to G\to 1$ を取れば、F の各素点 v で $\mathrm{H}^1(F_v,Z_{1,v})=0$ であるから (2.4) と併せて完全列

$$1\longrightarrow Z_1(\mathbb{A})\longrightarrow G_1(\mathbb{A})\longrightarrow G(\mathbb{A})\longrightarrow 1$$

が得られる。特に $G(\mathbb{A})$ の保型表現は $G_1(\mathbb{A})$ の保型表現でその中心指標が $Z_1(\mathbb{A})$ 上自明であるものとして記述できる。よって必要なら G をその z 拡大で置き換えて G の導来群が単連結であるとしてよい。この節の目的には楕円項 (5.2) のさらに正則項だけからなる部分を扱うのが最適である。前記の仮定からそれは

$$T_{\mathrm{ell,rs}}^G(f)=\sum_{\gamma^{G(F)}\subset G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\tau(T_\gamma)O_\gamma(f^0)$$

と書かれる。ここで $G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}:=G(F)_{\mathrm{ell}}\cap G_{\mathrm{rs}}(F)$ と書いており、$T_\gamma:=I_\gamma\subset G$ は極大トーラスであることに注意する。まず和を安定共役類ごとにまとめると、安定共役な γ, $\gamma'\in G_{\mathrm{rs}}(F)$ に対しては $T_\gamma\simeq T_{\gamma'}$ だからそれらの玉河数は一致するので次を得る。

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{ell,rs}}^G(f)&=\sum_{\gamma^G(F)\subset G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\sum_{\gamma'^{G(F)}\subset\gamma^G(F)}\tau(T_{\gamma'})O_{\gamma'}(f^0)\\&=\sum_{\gamma^G(F)\subset G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\tau(T_\gamma)\sum_{\gamma'^{G(F)}\subset\gamma^G(F)}O_{\gamma'}(f^0).\end{aligned}$$

さて安定共役類 $\gamma^G(F)$ は正則半単純共役類 $\gamma^G\subset G$ の F 値点の集合である。準分裂データの $\psi_G:G_{\bar F}\xrightarrow{\sim}G_{\bar F}^*$ は内部捻りだから、それによる γ^G の像は再び F 有理半単純

共役類の幾何ファイバー $\psi_G(\gamma^G)_{\bar F}$ である。よって定理 3.6 から $\psi_G(\gamma^G)(F)$ は空でなく、従ってある $\gamma_* \in G^*_{\rm rs}(F)$ があって $\psi_G(\gamma^G)(F) = \gamma_*^{G^*}(F)$ である。加えて $T := G^*_{\gamma_*}$ は T_γ に同型だから、$T/A_{G^*} \simeq T_\gamma/A_G$ は非等方的で $\gamma_* \in G^*_{\rm rs}(F)_{\rm ell}$ である。こうして ψ_G は楕円正則安定共役類の集合の間の単射 (定理 3.5 の直前の注意から全射とは限らない。)

$$\psi_G : G_{\rm rs}(F)_{\rm ell}/{\rm Ad}(G(\bar F)) \longrightarrow G^*_{\rm rs}(F)_{\rm ell}/{\rm Ad}(G^*(\bar F))$$

を与える。よって楕円正則項を

$$T^G_{\rm ell,rs}(f) = \sum_{\gamma_*^{G^*}(F)\subset G^*_{\rm rs}(F)_{\rm ell}} \tau(T) \sum_{\gamma^{G(F)}\subset \psi_G^{-1}(\gamma_*^{G^*})(F)} O_\gamma(f^0) \tag{5.5}$$

と書くことができる。この内側の大域的な ($G(F)$ での) 共役類についての和を局所的な (アデール群での) 共役類についてのそれに置き換えたい。まず補題 4.2 から、半単純な γ, $\gamma' \in G(\bar F)$ が $G(\bar{\mathbb{A}})$ 共役ならばそれらは安定共役である: $\gamma^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(F) = \gamma^G(F)$. よって (5.5) の内側の和を $\gamma^{G(F)} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(F)$ についての和に置き換えられる。

系 5.4 (補題 4.2 の)**.** 半単純な $\gamma \in G(F)$ に対して、全単射 (4.1) は次の全単射に制限される。

$$(\gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F))/{\rm Ad}(G(F)) \xrightarrow{\sim} \ker\Big(\mathfrak{D}(G_\gamma) \to \bigoplus_v {\rm H}^1(F_v, G_\gamma)\Big).$$

証明. 実際、同補題から

$$(\gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F))/{\rm Ad}(G(F)) \subset \gamma^G(F)/{\rm Ad}(G(F)) \overset{(4.1)}{\xrightarrow{\sim}} \mathfrak{D}(G_\gamma)$$

が得られ、その像は明らかに系の右辺の集合に属する。そこで $\gamma^\delta \in \gamma^G(F)$, $(G_\gamma(\bar F)\delta \in (G_\gamma(\bar F)\backslash G(\bar F))^\Gamma)$ に対して $\partial\delta$ のクラスが系の右辺の集合に属するとしよう。仮定により各素点 v で $h_v \in G_\gamma(\bar F_v)$ であって

$$\partial\delta_{\bar v(\sigma)} = (\partial h_v^{-1})_\sigma, \quad \sigma \in \Gamma_v,$$

言い換えれば $g_v := h_v\delta \in G(F_v)$ で $\gamma^{g_v} = \gamma^\delta$ となるものがある。一方ほとんど全ての素点 v で $\gamma, \gamma^\delta \in \boldsymbol{K}_{v,\rm ss}$ だから、補題 4.6 からある $k_v \in \boldsymbol{K}_v$ があって $\gamma^\delta = \gamma^{k_v}$ である。そのような v では $g_v = k_v$ とできるから、$g = (g_v)_v \in G(\mathbb{A})$ で $\gamma^\delta = \gamma^g \in \gamma^{G(\mathbb{A})} \cap G(F)$ である。 □

さて系の右辺の集合は命題 4.9 を使って

$$\begin{aligned}\ker[\text{Ш}^1(F, T_\gamma) \to \text{Ш}^1(F, G)] &\simeq \operatorname{cok}[\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{G}}) \to \text{Ш}^1(F, \hat{T}_\gamma)]^D \\ &\simeq \operatorname{cok}[\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{G}}) \to \text{Ш}^1(F, \hat{T})]^D\end{aligned}$$

とも書ける。さらに補題 4.16 の完全列からなる可換図式

$$X(T)_F \longrightarrow X(T_{\mathrm{sc}})_F \longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma) \longrightarrow \pi_0(\hat{T}^\Gamma)$$

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma, Z_{\hat{G}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Gamma, \hat{T}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}}) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, \hat{T}) \end{array}$$

から完全列

$$X(T)_F \longrightarrow X(T_{\mathrm{sc}})_F \longrightarrow \pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma) \longrightarrow \pi_0(\hat{T}^\Gamma)$$

$$\longrightarrow \mathfrak{K}(T) \longrightarrow \text{Ш}^1(F, Z_{\hat{G}}) \longrightarrow \text{Ш}^1(F, \hat{T})$$

が従う。ここで γ_* が楕円的なことから $X(T_{\mathrm{sc}})_F = 0$ だから、この位数を取れば

$$\frac{|\pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma)||\mathfrak{K}(T)||\text{Ш}^1(F, \hat{T})|}{|\pi_0(\hat{T}^\Gamma)||\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{G}})|} = |\operatorname{cok}[\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{G}}) \to \text{Ш}^1(F, \hat{T})]|$$

を得る。以下、簡単のために相対玉河数

$$\tau_1(G) := \frac{|\pi_0(Z_{\hat{G}}^\Gamma)|}{|\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{G}})|} \tag{5.6}$$

を導入する。トーラス T に対しては小野の公式 $\tau(T) = \tau_1(T)$ が知られている。結局、$\gamma^{G(\mathbb{A})}$ 内の $G(F)$ 共役類の個数は

$$|\operatorname{cok}[\text{Ш}^1(F, Z_{\hat{G}}) \to \text{Ш}^1(F, \hat{T})]| = \frac{\tau_1(G)|\mathfrak{K}(T)|}{\tau(T)}$$

であるから、(5.5) の内側の和は $\gamma^{G(F)}$ から $\gamma^{G(\mathbb{A})}$ に置き換えて

$$\frac{\tau_1(G)|\mathfrak{K}(T)|}{\tau(T)} \sum_{\substack{\gamma \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \cap G(F) \\ \bmod \operatorname{Ad}(G(\mathbb{A}))}} O_\gamma(f^0) = \frac{\tau_1(G)|\mathfrak{K}(T)|}{\tau(T)} \sum_{\substack{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \subset \psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})} \\ \gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})} \cap G(F) \neq \varnothing}} O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)$$

定理 4.17 と有限群の指標の直交関係から

$$=\frac{\tau_1(G)}{\tau(T)}\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(T)}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)$$

と書ける。ここでテスト関数は $f=\bigotimes_v f_v$, $f_v\in\mathcal{H}(G(F_v))$ と制限テンソル積分解できるとしてよい。有限個を除く非アルキメデス的な v で G_v は不分岐で $\gamma_*\in\mathbf{K}_{v,\mathrm{ss}}$ で、さらに f_v は $\boldsymbol{K}_v$ の特性函数である。よって補題 4.6 から上の $\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}$ についての和は実質的に有限和で、従って和の順序の交換が許される。結局、(5.5) 全体は次で与えられることが分かった。

補題 5.5. 跡公式の楕円正則項 $T_{\mathrm{ell,rs}}(f)$ は次のように書ける。

$$T_{\mathrm{ell,rs}}(f)$$
$$=\tau_1(G)\sum_{\gamma_*^{G^*}(F)\subset G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}(T)}\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f).$$

6 内視データ

前節で見たように跡公式に編み込まれた共役類の局所大域原理は有限アーベル群 $\mathfrak{K}(T)$ に集約されている。この $\mathfrak{K}(T)$ をスペクトルサイドの保型表現のリフティングに翻訳するのが内視データである。まずその定義を思い出そう。

6.1 内視データとノルム

G の内視データ (*endoscopic datum*) とは

- F 準分裂な連結簡約群 H. その F 分裂 $\mathrm{spl}_H=(B_0^H,T_0^H,\{Y_\beta\})$, L 群データ ${}^LH=\hat{H}\rtimes_{\rho_H}W_F$, $\mathrm{spl}_{\hat{H}}=(\mathcal{B}_H,\mathcal{T}_H,\{\mathcal{Y}_{\beta^\vee}\})$ なども固定しておく。
- 位相群の分裂拡大 $1\to\hat{H}\to\mathcal{H}\xrightarrow{p}W_F\to 1$.
- $\hat{G}$ の半単純元 s.

- 連続準同型 $\xi : \mathcal{H} \to {}^L G$ で次の図式を可換にするもの。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "p"'] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$

からなる四つ組 $\mathcal{E} = (H, \mathcal{H}, s, \xi)$ で

(i) 仮定から $\mathcal{H} \twoheadrightarrow W_F$ の切断 $c : W_F \hookrightarrow \mathcal{H}$ があるが、これがある $\hat{H}/Z_{\hat{H}}$ 値 1 コサイクル $\{\bar{h}_w\}_{w \in W_F}$ に対して

$$\mathrm{Ad}(c(w))|_{\hat{H}} = \mathrm{Ad}(\bar{h}_w) \circ \rho_H(w), \quad w \in W_F$$

を満たす。

(ii) $\xi(\hat{H}) = \hat{G}_s$ (s の連結中心化群)。

(iii) 連続な 1 コサイクル $a : W_F \to Z_{\hat{G}}$ でそのクラスが $\text{Ш}^1(W_F, Z_{\hat{G}})$ (定理 2.10 参照) に属するものがあって

$$[s, \xi(h)] = s\xi(h)s^{-1}\xi(h)^{-1} = a(p(h)), \quad h \in \mathcal{H}.$$

を満たすものとする。内視データは L 群を用いて定義されるから G は準分裂内部形式 G^* と同じ内視データの同型類を持つ。

G の内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi), (H', \mathcal{H}', s', \xi')$ の間の同型とは、$g \in \hat{G}$ で

$$\mathrm{Ad}(g)\xi(\mathcal{H}) = \xi'(\mathcal{H}'), \tag{6.1}$$

$$\mathrm{Ad}(g)s = s' Z_{\hat{G}} \tag{6.2}$$

を満たすもののことである。G の内視データの同型類の集合を $\mathscr{E}(G)$ と書く。

注意 6.1. 内視データ $\mathcal{E} = (H, \mathcal{H}, s, \xi)$ から $\mathcal{E}' = (H', \mathcal{H}', s', \xi')$ への同型 $g \in \hat{G}$ に対して次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[rr, "\xi'^{-1} \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \xi"] \arrow[dr] & & \mathcal{H}' \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$

特に内視データの条件 (i) からこれは Γ 同変な同型

$$\bar{\alpha} : RD(H) \xrightarrow{\sim} RD(\hat{H})^\vee \xrightarrow{\sim} RD(\hat{H}')^\vee \xrightarrow{\sim} RD(H')$$

を与え、3.2 節の構成から F 代数群の同型 $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H'$ で $\alpha(\mathrm{spl}_H) = \mathrm{spl}_{H'}$ を満たすものが得られる。ここで $g\xi(\hat{H})$ の元は同じ $\bar{\alpha}$ を与え、H の F 分裂の集合には $H_{\mathrm{ad}}(F)$ が単純推移的に作用しているから、単射

$$\mathrm{Isom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')/\xi(\hat{H}) \in g \longmapsto \alpha \in \mathrm{Isom}_F(H, H')/H_{\mathrm{ad}}(F) \tag{6.3}$$

がある。

このいささか素っ気のない定義は Kottwitz-Shelstad によるもので、1980 年代の後半にはすでにあったようである。一見簡素過ぎる印象を与える定義だが、要求される有限性や連続性が全て内包されている点については [KS99, 18–20 頁] に説明がある。内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ のうち前節の (γ_*, κ) に関連するのは (H, s) であり、$\xi : \mathcal{H} \to {}^L G$ は $H(\mathbb{A})$ の保型表現の $G(\mathbb{A})$ への内視リフトを特定するスペクトルサイドのデータである。後者の意味については次の講演でその局所類似を通して示唆するので、以下では幾何サイドに関連する (H, s) の方を考察する。まず我々の仮定 $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ のもとでは $\mathcal{H}$ に悩まされる必要はないことを見ておこう。

補題 6.2. G の導来群が単連結ならばその内視群 H の導来群も単連結である。

証明. $\hat{G}, \hat{H}$ の Borel 対 $(\mathcal{B}, \mathcal{T}), (\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H)$ を固定していた。仮定は

$$X^*(\mathcal{T}) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta(\mathcal{B}, \mathcal{T}) = \mathbb{Z}[\Delta(\mathcal{B}, \mathcal{T})]$$

に同値である。$\hat{H}$ を ξ で $\hat{G}_s$ と同一視し、必要なら $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ をその同型類の中で取り替えて $\xi(\mathcal{B}_H) \subset \mathcal{B}, s \in \xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}$ であるとしてよい。仮定の式の s と直交する部分を取れば

$$X^*(\mathcal{T}_H) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{Q}} \Delta(\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H) = \mathbb{Z}[\Delta(\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H)]$$

となって補題が得られる。 □

補題 6.3. G の導来群が単連結のとき、その内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ において $\mathcal{H}$ は ${}^L H$ に同型である。

証明. $\mathcal{H}$ は $\hat{H}$ に随伴作用で作用する。上で固定した $\hat{H}$ の Γ 分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{H}}$ の $\mathcal{H}$ での固定化群を $\mathcal{Z}$ と書けば、$\mathcal{Z} \cap \hat{H} = Z_{\hat{H}}$ だから位相群の中心拡大

$$1 \longrightarrow Z_{\hat{H}} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow W_F \longrightarrow 1$$

が得られる。各 $\bar{h}_w \in \hat{H}/Z_{\hat{H}}$ の $\hat{H}$ での代表元 h_w を固定すれば、定義から $h_w^{-1}c(w) \in \mathcal{Z}$ であり、上の中心拡大の同型類は

$$\begin{aligned}z(w_1, w_2) =& h_{w_1}^{-1}c(w_1)h_{w_2}^{-1}c(w_2)c(w_1w_2)^{-1}h_{w_1w_2}\\ =&\rho_H(w_1)(h_{w_2})^{-1}h_{w_1}^{-1}h_{w_1w_2} \in Z_{\hat{H}}\end{aligned}$$

の $\mathrm{H}^2_{\mathrm{ct}}(W_F, Z_{\hat{H}})$ でのクラスで分類される。一方、$\mathrm{Ad}(h_w)^{-1} \circ \mathrm{Ad}(c(w)) = \rho_H(w)$ はある有限次 Galois 拡大 K/F の Galois 群を経由するから、$h_w = c(w), (w \in W_K)$ と取ることにより $z(w_1, w_2)$ がある $\Gamma_{K/F}$ 上のコサイクルのインフレーションになっているとしてよい。今、G の導来群は単連結だとしているから上の補題により H も同様である。ゆえに補題 3.8 から $Z_{\hat{H}}$ は連結でトーラス D_H の Langlands 双対トーラスになる。よって系 2.7 からある 1 コサイクル $\{z_w\} \in Z^1_{\mathrm{ct}}(W_F, Z_{\hat{H}})$ があって $z(w_1, w_2) = \partial z_{w_1,w_2}$ となる。すなわち $\{h_w z_w\}_{w\in W_F}$ は $\hat{H}$ 値 1 コサイクルで

$$\mathrm{Ad}(c(w))|_{\hat{H}} = \mathrm{Ad}(h_w z_w) \circ \rho_H(w), \quad w \in W_F$$

が成り立つ。このとき

$${}^L H \ni h \rtimes w \longmapsto h(h_w z_w)^{-1}c(w) \in \mathcal{H}$$

が望む同型を与える。 □

内視データ $(H, \mathcal{H}, s, \xi)$ が楕円的 (*elliptic*) とは $\xi(Z_{\hat{H}}^{\Gamma})^0$ が $Z_{\hat{G}}$ に含まれることとする。このとき $w \in W_F, z \in (Z_{\hat{H}}^{\Gamma})^0$ に対して内視データの条件 (i) から

$$\xi(\rho_H(w)z) = \xi(\mathrm{Ad}(c(w))z) = \mathrm{Ad}(\xi \circ c(w))\xi(z) = \rho_G(w)\xi(z)$$

ゆえ、自動的に $\xi(Z_{\hat{H}}^{\Gamma})^0 \subset (Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^0$ が従う。楕円性は内視データの同型類のみによる性質であるから、$\mathscr{E}(G)$ 内の楕円的な同型類の集合を $\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ と書く。

例 6.4. (i) G が一般線形群 GL_n の内部形式のとき、その楕円的内視データの同型類は $(G^*, {}^L G^*, \mathbf{1}_n, \mathrm{id}_{{}^L G^*})$ のみからなる。なおこの形の内視データを一般に自明な内視データという。

(ii) G が例 3.3 の U_n の内部形式のとき、$\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)$ は $p + q = n, p \geq q, \in \mathbb{N}$ に対する $\mathcal{E}_{p,q} = (H_{p,q}, {}^L H_{p,q}, s_{p,q}, \xi_{p,q})$:

$$H_{p,q} = \mathrm{U}_p \times \mathrm{U}_q, \quad s_{p,q} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}_p & \\ & -\mathbf{1}_q\end{pmatrix}$$

$$\xi_{p,q}((h,h')\rtimes w)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\chi(w)h & \\ & \chi'(w)h\end{pmatrix}\times w & w\in W_E \text{ のとき}\\ \begin{pmatrix} & h\chi(ww_\sigma^{-1})\\ h'\chi'(ww_\sigma^{-1}) & \end{pmatrix}\rtimes w & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

からなる。ここで $\omega_{E/F}:\mathbb{A}^\times/F^\times \mathrm{N}_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)\xrightarrow{\sim}\{\pm 1\}$ として、$\chi,\chi':\mathbb{A}_E^\times/E^\times\to\mathbb{C}^\times$ は $\chi|_{\mathbb{A}^\times}=\omega_{E/F}^q, \chi'|_{\mathbb{A}^\times}=\omega_{E/F}^p$ を満たすイデール類指標である。また $w_\sigma\in W_F\setminus W_E$ を固定している。これらのデータは内視データの同型類には影響しない。

■ノルム　内視論の幾何サイドでの効用はノルムと呼ばれる H,G の間の共役類の対応の上に立脚している。それは極大トーラスの許容埋め込みを使って構成される。

$G^*_{\bar F}$ の Borel 対 (B,T) に対して $\mathrm{Ad}(g)(B,T)=(B_{0,\bar F},T_{0,\bar F})$ となる $g\in G(\bar F)$ を取る。同型 $\eta_{B,T}:=\mathrm{Ad}(g):T\xrightarrow{\sim}T_{0,\bar F}$ は $(B,T),(B_0,T_0)$ のみに依存し、上のような g の取り方にはよらない。これを T の擬対角化 (*pseudo-diagonalization*) という。L 群の定義から同一視 ${}^LT_0=\mathcal{T}\rtimes_{\rho_G}W_F$ がある。内視データ $(H,{}^LH,s,\xi)$ に対する同様の考察と併せて、$\xi:\mathcal{T}_H\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}$ の双対同型 $\xi^*:T_{0,\bar F}\xrightarrow{\sim}T^H_{0,\bar F}$ を得る。さらに Borel 対 $(B,T)\subset G^*_{\bar F}$, $(B_H,T_H)\subset H_{\bar F}$ に対して同型

$$A_{B,B_H}:T_H\xrightarrow{\eta_{B_H,T_H}}T^H_{0,\bar F}\xrightarrow{\xi^{*-1}}T_{0,\bar F}\xrightarrow{\eta_{B,T}^{-1}}T$$

が得られる。$T_H(\bar F)$ の元 γ_H が G 正則 (*G-regular*) とは $A_{B,B_H}(\gamma_H)\in G_{\mathrm{rs}}(\bar F)$ を満たすこととする。H 内の G 正則元のなす開部分多様体を $H_{G\text{-rs}}$ と書く。一般には $H_{G\text{-rs}}\subsetneqq H_{\mathrm{rs}}$ であることに注意せよ。

補題 6.5 (極大トーラスの許容埋め込み)**.** G の導来群は単連結であるとする。F トーラス $T_H\subset H$ を含む $H_{\bar F}$ の Borel 対 $(B_H,T_{H,\bar F})$ に対して、F トーラス T を含む Borel 対 $(B,T_{\bar F})\subset G^*$ で同型 $A_{B,B_H}:T_{H,\bar F}\xrightarrow{\sim}T_{\bar F}$ が F 同型に落ちるものが安定共役を除いてただ一つある。

証明. これは定理 3.6 の帰結である。まず F トーラスを含む勝手な Borel 対 $(B',T'_{\bar F})\subset G^*$ を取れば、$\sigma\in\Gamma$ に対して

$$\sigma(A_{B',B_H}):T_{H,\bar F}\xrightarrow{\sigma^{-1}}T_{H,\bar F}\xrightarrow{\eta'}T'_{\bar F}\xrightarrow{\sigma}T'_{\bar F}$$

は $A_{\sigma(B'),\sigma(B_H)}$ に一致する。ここで $\omega(\sigma)\in\Omega(G^*,T'),\omega_H(\sigma)\in\Omega(H,T_H)$ を $\sigma(B')=$

$\omega(\sigma)(B'), \sigma(B_H) = \omega_H(\sigma)(B_H)$ なるものとすれば、$\eta_{\sigma(B'),T'} \circ \omega(\sigma) = \eta_{B',T'}$ などから

$$\begin{aligned} A_{\sigma(B'),\sigma(B_H)} &= \omega(\sigma) \circ \eta_{B',T'}^{-1} \circ \xi^{*-1} \circ \eta_{B_H,T_H} \circ \omega_H(\sigma)^{-1} \\ &= \omega(\sigma) A_{B',B_H}(\omega_H(\sigma))^{-1} \circ A_{B',B_H} \end{aligned}$$

である。つまり $\omega_\sigma := A_{B',B_H} \circ \sigma(A_{B',B_H})^{-1} = A_{B',B_H}(\omega_H(\sigma))\omega(\sigma)^{-1}$ は $\Omega(G^*, T')$ 値の 1 コサイクルである。

さて G 正則な $\gamma_H \in T_H(F)$ を取り、$\gamma := A_{B',B_H}(\gamma_H) \in T'(\bar{F})$ とおけば

$$\sigma(\gamma) = \sigma(A_{B',B_H}(\gamma_H)) = \sigma(A_{B',B_H}) \circ A_{B',B_H}^{-1}(\gamma) = \omega_\sigma^{-1}(\gamma)$$

だから γ の共役類は F 上定義されている。よって定理 3.6 からこの共役類は F 値点 $\gamma^g \in G(F), (g \in G(\bar{F}))$ を持つ。このとき $\gamma^g = \sigma(\gamma^g) = \omega_\sigma^{-1}(\gamma)^{\sigma(g)}$ で γ は G 正則だから $\omega_\sigma = \mathrm{Ad}(g\sigma(g)^{-1})|_{T'}, \sigma \in \Gamma$ を得る。そこで $(B, T) := (B', T')^g$ とおけば

$$\sigma(A_{B,B_H}) = \sigma(\mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ A_{B',B_H}) = \mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ A_{B',B_H} = A_{B,B_H}, \quad \sigma \in \Gamma$$

から A_{B,B_H} は F 上定義されている。

次に $A_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$, $A_{B',B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T'$ が共に F 有理的ならば、定義から $A_{B',B_H} \circ A_{B,B_H}^{-1} = \eta_{B',T'}^{-1} \circ \eta_{B,T}$ は $\mathrm{Ad}(g)^{-1}|_T, (g \in G(\bar{F}))$ と書け、しかも F 同型だから $T(\bar{F})g \in (T(\bar{F})\backslash G(\bar{F}))^\Gamma$ である。 □

上の補題の F 同型 A_{B,B_H} を T_H の G^* への許容埋め込み (*admissible embedding*) と呼んで $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ と書く。 特に T_H の H 自身への許容埋め込みも安定共役を除いて一意であるから、$\gamma_H \in T_H(F) \cap H(F)_{G\text{-rs}}$ に対して $\eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ の安定共役類は γ_H の安定共役類から一意に決まる。こうして得られる安定共役類の間の写像を

$$\mathcal{A}_{H/G^*} : H_{G\text{-rs}}(F)/\mathrm{Ad}(H(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

と書く。一方で 62 頁で見たように ψ_G は正則半単純な安定共役類の間の写像

$$\psi_G : G_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

を与える。安定共役類 $\gamma_H^H(F) \subset H_{G\text{-rs}}(F)$ が $\gamma^G(F) \subset G_{\mathrm{rs}}(F)$ の像 (*image*) またはノルムとは $\psi_G(\gamma^G) = \mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H^H)$ であることを言う。これはどちら向きにも写像にはなっていないことに注意していただきたい。

例 6.6. 例 6.4 の $G^* = \mathrm{U}_2$ とその内視データ $\mathcal{E}_{1,1}$ を考える。$\mathcal{A}_{H/G^*}$ は $(t_1, t_2) \in H(F)$, $t_1 \neq t_2 \in \mathrm{U}_1(F)$ に、t_1, t_2 を固有値に持つ $G^*(F)$ の元からなる安定共役類を対応させる

写像である。次に $\mathscr{D}$ を F 上の中心的四元斜体としてその主対合を $\imath : \mathscr{D} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ と書く。G を可換 F 代数 R に群

$$G(R) := \{g \in (\mathscr{D} \otimes_F R) \otimes_F E \,|\, g g^{\imath_R \otimes \sigma} = 1\}$$

を対応させる F 代数群とすると、内部捻り $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ がある。ただし例によって $\imath_R := \imath \otimes \mathrm{id}_R$ と書いている。このとき ψ_G による $G_{\mathrm{rs}}(F)$ の安定共役類の集合の像は、正則安定共役類 $\gamma^{G^*}(F)$ であって γ の固有値が二次拡大 K/F で $\mathscr{D} \otimes_F K \simeq \mathbb{M}_2(K)$ となるものを生成するようなものからなる。特に $\mathscr{D} \otimes_F E \not\simeq \mathbb{M}_2(E)$ なら任意の $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)$ は $G(F)$ の正則安定共役類のノルムにはなっていない。

補題 6.7. $(H, {}^L H, s, \xi)$ を G の楕円的内視データとする。G 正則な $\gamma_H \in H(F)$ が楕円的ならそれをノルムに持つ $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ も楕円的である。

証明. 中心化群 $T_H := H_{\gamma_H}$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を取る。T_{sc} が非等方的なことを示せばよい。G, H とも導来群は単連結だから $Z_{\hat{G}}, Z_{\hat{H}}$ はそれぞれ D_G, D_H の双対トーラスである。仮定から $T_{H,\mathrm{sc}}$ は非等方的だから

$$X(T_H)_F \otimes \mathbb{Q} = X(D_H)_F \otimes \mathbb{Q} = X_*(Z_{\hat{H}})^\Gamma \otimes \mathbb{Q} = X_*((Z_{\hat{H}}^\Gamma)^0) \otimes \mathbb{Q}$$

が成り立つ。よって η_{B,B_H} が F 同型であることから

$$X(T)_F \otimes \mathbb{Q} = X_*(\hat{T})^\Gamma \otimes \mathbb{Q} \simeq X_*(\hat{T}_H)^\Gamma \otimes \mathbb{Q} = X_*((Z_{\hat{H}}^\Gamma)^0) \otimes \mathbb{Q}$$

を得る。次元を考えると楕円的内視データの定義から

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}} X(T)_F \otimes \mathbb{Q} &= \dim_{\mathbb{Q}} X_*((Z_{\hat{H}}^\Gamma)^0) \otimes \mathbb{Q} \\ &\le \dim_{\mathbb{Q}} X_*((Z_{\hat{G}}^\Gamma)^0) \otimes \mathbb{Q} = \dim_{\mathbb{Q}} X(D_G)_F \otimes \mathbb{Q}\end{aligned}$$

である。自然な射影 $X(T)_F \otimes \mathbb{Q} \twoheadrightarrow X(D_G)_F \otimes \mathbb{Q}$ と併せてこれは $X(T)_F \otimes \mathbb{Q} = X(D_G)_F \otimes \mathbb{Q}$, すなわち T_{sc} が非等方的なことを意味する。 □

この補題から $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ が楕円的内視データである場合には $\mathcal{A}_{H/G^*}$ は楕円的安定共役類の集合の間の写像

$$\mathcal{A}_{H/G^*} : H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}/\mathrm{Ad}(H(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

を与える。ただし $H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}} := H_{G\text{-rs}}(F) \cap H(F)_{\mathrm{ell}}$ と書いている。

6.2 (γ_*, κ) と $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ の対応

補題 5.5 は (γ_*, κ) についての展開だが、これを内視データを用いた $(\mathcal{E}, \gamma_H)$ に関する展開に書き直そう。まず極大トーラスの L 群の許容埋め込みを用意する。

補題 6.8. F 極大トーラスを含む Borel 対 $(B, T_{\bar{F}}) \subset G^*$ に対して、単射準同型 $\xi_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ で

(i) 次の図式は可換: $\begin{tikzcd} {}^L T \arrow[rr, "\xi_T"] \arrow[dr] & & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$.

(ii) $\xi_T|_{\hat{T}}$ は $\eta_{B,T}^{*,-1} : \hat{T} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T} = \hat{T}_0)$ に一致する。

を満たすものが T の L パラメーター倍を除いてただ一つある。これを ${}^L T$ の ${}^L G$ への許容埋め込みと呼ぶ。

証明. 擬対角化 $\eta_{B,T}$ は G^* の内部自己同型の制限であったから、1 コサイクル $\omega_T(\sigma) := \eta_{B,T} \circ \sigma(\eta_{B,T})^{-1}, (\sigma \in \Gamma)$ は Weyl 群 $\Omega(G^*, T_0)$ に値を持つ。これを同一視 $\Omega(G^*, T_0) = \Omega(\hat{G}, \mathcal{T})$ で移したものを同じ記号で表せば

$$\omega_T(\sigma) = \eta_{B,T}^{*,-1} \circ \rho_T(\sigma) \circ \eta_{B,T}^* \circ \rho_G(\sigma)$$

である。これは T を分裂させる有限次 Galois 拡大 K/F の Galois 群 $\Gamma_{K/F}$ を経由していることに注意する。さて $\Omega(\hat{G}, \mathcal{T})$ の $\mathrm{Norm}(\mathcal{T}, \hat{G})$ での完全代表系 $\{\hat{n}(\omega)\}_{\omega \in \Omega(\hat{G}, \mathcal{T})}$ を取れば、$\hat{n}_T(\sigma) := \hat{n}(\omega_T(\sigma))$ は 1 コチェインでそのコバウンダリ $\partial \hat{n}_T \in Z^2_{\mathrm{ct}}(W_F, \mathcal{T})$ が考えられる。系 2.7 から $\mathrm{infl}_{\Gamma_{K/F}}^{W_F} \partial \hat{n}_T$ を分解する連続 1 コチェイン $r_T^{-1} : W_F \to \mathcal{T}$ がある。

$$\mathrm{infl}_{\Gamma_{K/F}}^{W_F} \partial n_T(w_1, w_2) = r_T(w_1)^{-1} \rho_G(w_1)(r_T(w_2))^{-1} r_T(w_1 w_2), \quad w_i \in W_F.$$

このとき 2.2 節の記号で

$$\xi_T : {}^L T \ni t \rtimes w \longmapsto \eta_{B,T}^{*,-1}(t) r_T(w) \hat{n}_T(\varphi_F(w)) \rtimes w \in {}^L G$$

は補題の条件を満たす。

次に ξ_T, ξ'_T が共に補題の条件を満たせば $\mathrm{Ad}(\xi_T(w))|_{\mathcal{T}} = \mathrm{Ad}(\xi'_T(W))|_{\mathcal{T}}$ だから、$\xi'_T \xi_T^{-1}(w) = \eta_{B,T}^{*,-1}(t(w)), (t(w) \in \hat{T})$ と書ける。このとき $\varphi(w) := t(w) \rtimes w$ が T の L パラメーターであることは明らかである。 $\square$

さてこの節の目標は次の二つの集合の間の全単射である。$K_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}}(F))$ を $\gamma_* \in G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ と $\kappa \in \mathfrak{K}(T = G^*_{\gamma_*})$ の対の安定共役類の集合とする。ただし (γ_*, κ) と (γ^g_*, κ') が安定共役とは $T(\bar{F})g \in (T(\bar{F})\backslash G(\bar{F}))^\Gamma$ で自然な同型 $\mathrm{Ad}(g)^{-1} : T \xrightarrow{\sim} T^g$ による κ の像が κ' であることとする。また $E_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}})$ を楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^LH, s, \xi)$ と $\gamma^H_H \subset H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ の対の同型類の集合とする。ただし $(\mathcal{E}, \gamma^H_H)$ と $(\mathcal{E}', \gamma^{H'}_{H'})$ が同型とは、同型 $g : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ があってそれに付随する $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H'$ が $\alpha(\gamma^H_H) = \gamma^{H'}_{H'}$ を満たすこととする。ここで $\alpha \circ H_{\mathrm{ad}}(F)$ は g から一意に決まるので 2 つ目の条件は α の取り方によらないことに注意する。

命題 6.9. 全単射 $E_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}}) \xrightarrow{\sim} K_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}}(F))$ がある。

これは次の 6.2.1, 6.2.2 節で証明される。

6.2.1 $(\mathcal{E}, \gamma^H_H)$ から $(\gamma^{G^*}_*, \kappa)$ へ

G の楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^LH, s, \xi)$ と $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ の安定共役類の組 $(\mathcal{E}, \gamma^H_H(F))$ が与えられているとする。中心化群 $T_H := H_{\gamma_H}$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を取り、$\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in G^*_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ とおく: $\mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma^H_H) = \gamma^{G^*}_*$.

次いで上の補題の許容埋め込み $\xi_T : {}^LT \hookrightarrow {}^LG$, $\xi_{T_H} : {}^LT_H \hookrightarrow {}^LH$ を取って $s_T := \xi_T^{-1}(s) \in \hat{T}$ とおく。

$$ {}^LT \xrightarrow{\eta^*_{B,B_H}} {}^LT_H \xhookrightarrow{\xi_{T_H}} {}^LH \xhookrightarrow{\xi} {}^LG $$

も ${}^LT$ の許容埋め込みだから、補題 6.8 から ξ_T のある $\hat{T}$ 値 1 コサイクル倍である。よって $\xi(\hat{H}) = \hat{G}_s$ であったことに注意して

$$\begin{aligned} \rho_T(w)s_T =& \xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi_T(w))s) = \xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi \circ \xi_{T_H}(w))s) \\ =& \xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(\xi(w))s) \end{aligned}$$

が従う。特に内視データの条件 (iii) の記号で

$$\partial s_T(w) = s_T \rho_T(w)(s_T)^{-1} = \xi_T^{-1}([s, \xi(w)]) = a(w)$$

を得る。この左辺はある有限次 Galois 拡大の Galois 群上の 1 コサイクルのインフレーションで右辺のクラスは $\mathrm{III}^1(W_F, Z_{\hat{G}})$ に属する。すなわち s_T の $\hat{T}/Z_{\hat{G}}$ での像 κ は

$$\mathfrak{K}(T) = \ker\Big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, Z_{\hat{G}}) \to \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})\Big)$$

に属する。ここで γ_* の楕円性から $X_*((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) = X_*(\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma = X(T_{\mathrm{sc}})_F = 0$ だから $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) = (\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma$ に注意せよ。

6.2.2 $(\gamma_*^{G^*}, \kappa)$ から $(\mathcal{E}, \gamma_H^H)$ へ

逆に $\gamma_* \in G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ と $\mathfrak{K}(T := G^*_{\gamma_*})$ の元 κ が与えられているとする。前節最後の注意から $\kappa = s_T Z_{\hat{G}} \in (\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma, s_T \in \hat{T}$ と書ける。許容埋め込み $\xi_T : {}^L T \hookrightarrow {}^L G$ を取り、

$$s := \xi_T(s_T) \in \hat{G}, \quad \hat{H} := \hat{G}_s, \quad \mathcal{H} := \hat{H}\xi_T(W_F) \subset {}^L G$$

と定める。$\hat{G} \supset \hat{T}$ それぞれの Lie 環を $\hat{\mathfrak{g}} \supset \hat{\mathfrak{t}}$, ルート $\alpha^\vee \in R(\hat{G}, \mathcal{T})$ のルート (表現) 空間を $\hat{\mathfrak{g}}_{\alpha^\vee} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ と書けば、定義から $\hat{H}$ の Lie 環は

$$\hat{\mathfrak{g}}_s = \hat{\mathfrak{t}} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha^\vee \in R(\hat{G}, \mathcal{T}) \\ \alpha^\vee(s) = 1}} \hat{\mathfrak{g}}_{\alpha^\vee}$$

に等しい。ここで $s_T Z_{\hat{G}}$ の Γ 不変性から

$$\mathrm{Ad}(\xi_T(w))\alpha^\vee(s) = \alpha^\vee \circ \xi_T(\rho_T(w)^{-1}(s_T)) = \alpha^\vee(s), \quad w \in W_F$$

であるから $\mathcal{H} = \hat{H} \rtimes \xi_T(W_F)$ は定義可能であることに注意する。

$\hat{H}$ の分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{H}} = (\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H, \{\mathcal{Y}_{\beta^\vee}\})$ を $\mathcal{B}_H = \mathcal{B} \cap \hat{H}, \mathcal{T}_H = \mathcal{T}$ となるように選ぶ。作用 $\rho_H : W_F \to \mathrm{Aut}(\hat{H})$ で $\mathrm{spl}_{\hat{H}}$ を保ち、$\mathrm{Ad}(\xi_T(w))|_{\hat{H}} \in \mathrm{Ad}(\hat{H}) \circ \rho_H(w), (w \in W_F)$ となるものがただ一つある。${}^L H := \hat{H} \rtimes_{\rho_H} W_F$ を L 群に持つ F 準分裂な連結簡約群を H と書く。補題 6.2 から $Z_{\hat{H}}$ はトーラス (連結) で ρ_H は T を分裂する有限次 Galois 拡大の Galois 群を経由するから、補題 6.3 により同型

$$\begin{tikzcd} \xi : {}^L H \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr] & \mathcal{H} \arrow[r, hook] & {}^L G \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$

がある。

補題 6.10. $\mathcal{E} := (H, {}^L H, s, \xi)$ は G の楕円的内視データである。

証明. 内視データの定義条件のうち (iii) のみを確かめればよい。まず上の可換図式から $\xi(w) = \xi_T(w)h_w, (h_w \in \hat{H})$ と書ける。$\mathfrak{K}(T)$ の定義から $a := \partial s_T$ のクラスは

$Ш^1(F, Z_{\hat{G}})$ に属するが、これを ξ_T で送れば $\mathrm{Ad}(\xi(w))s = \mathrm{Ad}(\xi_T(w))s = \xi_T(\rho_T(w)(s))$ に注意して

$$[s, \xi(w)] = s\mathrm{Ad}(\xi(w))s^{-1} = \xi_T(\partial s_T)(w) = a(w)$$

を得る。すなわち (iii) が成り立つ。次に T_{sc} が非等方的なことから

$$\begin{aligned}\xi(Z_{\hat{H}}^{\Gamma})^0 = (Z_{\hat{H}}^{\mathcal{H}})^0 = (Z_{\hat{H}}^{\xi_T(W_F)})^0 \subset (\xi_T(\hat{T})^{\xi_T(W_F)})^0 \\ = \xi_T(\hat{T}^{\Gamma})^0 \subset \xi_T(Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^0 = (Z_{\hat{G}}^{\Gamma})^0\end{aligned}$$

ゆえ $\mathcal{E}$ は楕円的である。 □

残る $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ を作るには、可換図式

$$\begin{tikzcd} \xi_T^H : {}^LT \arrow[r, hook, "\xi_T"] \arrow[dr] & \mathcal{H} \arrow[r, "\xi^{-1}"] & {}^LH \arrow[dl] \\ & W_F & \end{tikzcd}$$

に注意する。これから T_0^H の双対トーラス $\mathcal{T}_H = \xi_T^H(\hat{T}) = \mathcal{T}$ の Weyl 群 $\Omega(\hat{H}, \mathcal{T}_H)$ に値を持つ Γ 上の 1 コサイクル ω_T^H で

$$\xi_T^H \circ \rho_T(w) \circ {\xi_T^H}^{-1} = \mathrm{Ad}(\xi_T^H(w))|_{\mathcal{T}_H} = \omega_T^H(\varphi_F(w)) \circ \rho_{T_0^H}(w), \quad w \in W_F$$

となるものがある。すなわち ξ_T^H の双対同型 $\xi_T^{H,*} : T_{0,\bar{F}}^H \xrightarrow{\sim} T_{\bar{F}}$ は

$$\begin{aligned}\sigma((\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)) &= \sigma|_{T_0^H(\bar{F})} \circ (\xi_T^{H,*})^{-1} \circ \sigma^{-1}|_{T(\bar{F})}(\gamma_*) \\ &= \omega_T^H(\sigma)^{-1}((\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)), \quad \sigma \in \Gamma\end{aligned}$$

を満たす。特に $(\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*) \in H(\bar{F})$ の共役類は F 上定義されているから定理 3.6 により F 有理点 $\gamma_H = (\xi_T^{H,*})^{-1}(\gamma_*)^h \in H(F), (h \in H(\bar{F}))$ を持つ。最後に $T_H := H_{\gamma_H}$ として $\eta_{B,B_H} := \xi_T^{H,*} \circ \mathrm{Ad}(h) : T_{H,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{\bar{F}} \subset G_{\bar{F}}^*$ とおく。定義から $\sigma \in \Gamma$ に対して

$$\eta_{B,B_H}^{-1} \circ \sigma(\eta_{B,B_H}) = \mathrm{Ad}(h)^{-1} \circ \omega_T^H(\sigma) \circ \mathrm{Ad}(\sigma(h)) \in \Omega(H, T_H)$$

であり、$\gamma_H \in H_{\mathrm{rs}}(F) \cap T_H(F)$ に対して

$$\sigma(\eta_{B,B_H})(\gamma_H) = \sigma(\eta_{B,B_H}(\gamma_H)) = \sigma(\gamma_*) = \eta_{B,B_H}(\gamma_H)$$

を満たすから $\sigma(\eta_{B,B_H}) = \eta_{B,B_H}$ である。これから γ_H を γ_* に送る許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ が得られる。

6.3　前安定化の完成

以上の準備のもとでいよいよこの稿の最終結果を述べることができる。G の内視データ $\mathcal{E}=(H,{}^LH,s,\xi)$ に対して注意 6.1 から有限群への単射

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{E})/\xi(\hat{H})\hookrightarrow \mathrm{Out}_F(H):=\mathrm{Aut}_F(H)/H_{\mathrm{ad}}(F)$$

がある。その像を $\mathrm{Out}(\mathcal{E})$ と書き、*Langlands* の ι 数を

$$\iota(G,H):=\frac{\tau_1(G)}{\tau_1(H)|\mathrm{Out}(\mathcal{E})|}$$

と定義する。

定理 6.11. 補題 5.5 の $T_{\mathrm{ell,rs}}(f)$ は

$$T_{\mathrm{ell,rs}}(f)=\sum_{\mathcal{E}\in\mathscr{E}_{\mathrm{ell}}(G)}\iota(G,H)\tau_1(H)\sum_{\gamma_H^H\subset H_{G\text{-rs}}(F)_{\mathrm{ell}}}\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H))^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f).$$

と書ける。

証明. $(\mathcal{E},\gamma_H^H)$ の $E_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}})$ での同型類を $[(\mathcal{E},\gamma_H^H)]$ と書けば、命題 6.9 から

$$T_{\mathrm{ell,rs}}(f)=\tau_1(G)\sum_{[(\mathcal{E},\gamma_H^H)]\in E_{\mathrm{ell}}(G_{\mathrm{rs}})}\sum_{\gamma_{\mathbb{A}}^{G(\mathbb{A})}\subset\psi_G^{-1}(\gamma_*)^{G(\bar{\mathbb{A}})}\cap G(\mathbb{A})}\kappa(\mathrm{obs}(\gamma_{\mathbb{A}},\gamma_*))O_{\gamma_{\mathbb{A}}}(f)$$

である。よって定理は次の主張から従う。

主張 6.11.1. $\mathrm{Out}(\mathcal{E})\ni\alpha\circ H_{\mathrm{ad}}(F)\mapsto(\mathcal{E},\alpha(\gamma_H^H))\in[(\mathcal{E},\gamma_H^H)]$ は全単射である。

証明. 全射性は $(\mathcal{E},\gamma_H^H)$ の同型類の定義から明らかである。単射性、つまり $\alpha\circ H_{ad}(F)$, $\alpha'\circ H_{\mathrm{ad}}(F)\in\mathrm{Out}(\mathcal{E})$ が $\alpha(\gamma_H)^H=\alpha'(\gamma_H)^H$ を満たせば、$\alpha^{-1}\circ\alpha'\in H_{\mathrm{ad}}(F)$ であることを示そう。定義から $\alpha'(\gamma_H)=\alpha(\gamma_H)^h,(h\in H(\bar{F}))$ であるから、

$$\beta:=\alpha^{-1}\circ\mathrm{Ad}(h)\circ\alpha'\in\mathrm{Aut}(H_{\bar{F}})$$

として $\beta(T_H,\gamma_H)=(T_H,\gamma_H)$ である。ここで α,α' がそれぞれ $g,g'\in\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ の像であるとして $\beta\equiv\alpha^{-1}\circ\alpha' \pmod{H}_{\mathrm{ad}}$ に注意すれば、$\beta|_{T_H}\in\mathrm{Aut}(T_H)$ は

$$(\xi\circ\xi_{T_H})^{-1}(\mathrm{Ad}(g'^{-1}g)):=\xi_{T_H}^{-1}\circ\xi^{-1}\circ\mathrm{Ad}(g'^{-1}g)\circ\xi\circ\xi_{T_H}\in\mathrm{Aut}(\hat{T}_H)$$

の双対自己同型である。許容埋め込み $\eta_{B,B_H}:T_H\xrightarrow{\sim}T\subset G^*$ を取れば、双対トーラスの許容埋め込みの一意性から $\xi_T\circ\eta^{*,-1}_{B,B_H}|_{\hat{T}_H}=\xi\circ\xi_{T_H}|_{\hat{T}_H}$ ゆえ、$\eta_{B,B_H}(\beta|_{T_H})\in\mathrm{Aut}(T)$ は

$$\eta^{*,-1}_{B,B_H}\circ(\xi\circ\xi_{T_H})^{-1}(\mathrm{Ad}(g'^{-1}g))=\xi_T^{-1}(\mathrm{Ad}(g'^{-1}g))\in\xi_T^{-1}(\Omega(\hat{G},\mathcal{T}))$$

の双対だから特に $\Omega(G^*,T)$ に属する。一方でこれは $\gamma_*=\eta_{B,B_H}(\gamma_H)\in G^*_{\mathrm{rs}}(F)$ を動かさないから、$\eta_{B,B_H}(\beta|_{T_H})=\mathrm{id}_T$, $\beta|_{T_H}=\mathrm{id}_{T_H}$ でなくてはならない。すなわち $\beta\in\mathrm{Aut}(H)$ は T_H を含む Borel 対 $(B_H,T_{H,\bar{F}})$ のルートデータに自明に作用するから、3.2 節の注意から $\beta\in H_{\mathrm{ad}}$ である。よって $\alpha^{-1}\circ\alpha'=\mathrm{Ad}(\alpha^{-1}(h))^{-1}\circ\beta\in H_{\mathrm{ad}}(\bar{F})\cap\mathrm{Aut}_F(H)=H_{\mathrm{ad}}(F)$ を得る。 □

参考文献

[Art82a] James Arthur. On a family of distributions obtained from Eisenstein series. I. Application of the Paley-Wiener theorem. *Amer. J. Math.*, Vol. 104, No. 6, pp. 1243–1288, 1982.

[Art82b] James Arthur. On a family of distributions obtained from Eisenstein series. II. Explicit formulas. *Amer. J. Math.*, Vol. 104, No. 6, pp. 1289–1336, 1982.

[Art86] James Arthur. On a family of distributions obtained from orbits. *Canad. J. Math.*, Vol. 38, No. 1, pp. 179–214, 1986.

[Art88a] James Arthur. The invariant trace formula. I. Local theory. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 1, No. 2, pp. 323–383, 1988.

[Art88b] James Arthur. The invariant trace formula. II. Global theory. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 1, No. 3, pp. 501–554, 1988.

[Art90] James Arthur. Unipotent automorphic representations: global motivation. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, pp. 1–75. Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Art05] James Arthur. An introduction to the trace formula. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Vol. 4 of *Clay Math. Proc.*, pp. 1–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[BBG+79] Jean-François Boutot, Lawrence Breen, Paul Gérardin, Jean Giraud, Jean-Pierre Labesse, James Stuart Milne, and Christophe Soulé. *Variétés de Shimura et fonctions L*, Vol. 6 of *Publications Mathématiques de l'Université Paris VII [Mathematical Publications of the University of Paris VII]*. Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1979.

[BHC62] A. Borel and Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. *Ann. of Math.*, Vol. 75, pp. 485–535, 1962.

[BL84] J.-L. Brylinski and J.-P. Labesse. Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 17, No. 3, pp. 361–412, 1984.

[BZ76] I N Bernshtein and A V Zelevinskii. Representations of the group $\mathrm{GL}(n, K)$ where K is a local field. *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 31, No. 3, pp. 1–68, 1976.

[CF86] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.

[Che89] V. I. Chernousov. The Hasse principle for groups of type E_8. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 306, No. 5, pp. 1059–1063, 1989.

[CLL] Laurent Clozel, Jean-Pierre Labesse, and Robert P. Langlands. Morning seminar on the trace formula. Mimeographed notes, Inst. Adv. Study, Princeton, 1984.

[Gro67] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 32, p. 361, 1967.

[Hid00] Haruzo Hida. *Modular forms and Galois cohomology*, Vol. 69 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Kne65a] M. Kneser. Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern. I. *Math. Zeit*, Vol. 88, pp. 40–47, 1965.

[Kne65b] M. Kneser. Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern. II. *Math. Zeit*, Vol. 89, pp. 250–272, 1965.

[Kne66] Martin Kneser. Hasse principle for H^1 of simply connected groups. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Vol. 9 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 159–163. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Kot82] Robert E. Kottwitz. Rational conjugacy classes in reductive groups. *Duke Math. J.*, Vol. 49, No. 4, pp. 785–806, 1982.

[Kot84] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.*, Vol. 51, No. 3, pp. 611–650, 1984.

[Kot86] Robert E. Kottwitz. Stable trace formula: elliptic singular terms. *Math. Ann.*, Vol. 275, No. 3, pp. 365–399, 1986.

[KS99] Robert E. Kottwitz and Diana Shelstad. Foundations of twisted endoscopy. *Astérisque*, No. 255, pp. vi+190, 1999.

[Lab84] J.-P. Labesse. Cohomologie, l-groupe et fonctorialité. *Composit. Math.*, Vol. 55, pp. 163–184, 1984.

[Lab86] Jean-Pierre Labesse. La formule des traces d'Arthur-Selberg. *Astérisque*, No. 133-134, pp. 73–88, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.

[Lab99] Jean-Pierre Labesse. Cohomologie, stabilisation et changement de base. *Astérisque*, No. 257, pp. vi+161, 1999. Appendix A by Laurent Clozel and Labesse, and Appendix B by Lawrence Breen.

[Lan77] R. P. Langlands. Shimura varieties and the Selberg trace formula. *Canad. J. Math.*, Vol. 29, No. 6, pp. 1292–1299, 1977.

[Lan79a] R. P. Langlands. Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pp. 205–246. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Lan79b] R. P. Langlands. On the zeta functions of some simple Shimura varieties. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 6, pp. 1121–1216, 1979.

[Lan79c] R. P. Langlands. Stable conjugacy: definitions and lemmas. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, pp. 700–725, 1979.

[Lan97] R. P. Langlands. Representations of abelian algebraic groups. *Pacific J. Math.*, No. Special Issue, pp. 231–250, 1997. Olga Taussky-Todd: in memoriam.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 4, pp. 726–785, 1979.

[Mil06] J.S. Milne. *Arithmetic duality theorems*. Booksurge Publishing, 2nd. edition, 2006.

[PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, Vol. 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[Ser67] J. P. Serre. Local class field theory. In J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pp. 128–161. Thompson, Washington, D.C., 1967. Proceedings of the instructional conference held at the University of Sussex, Brighton, September 1–17, 1965. Reprint of the 1967 original.

[Ser79] Jean-Pierre Serre. *Local fields*, Vol. 67 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg.

[Spr79] T.A. Springer. Reductive groups. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 3–27. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Spr98] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[Ste65] Robert Steinberg. Regular elements of semisimple algebraic groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 25, pp. 49–80, 1965.

[Ste68] Robert Steinberg. *Endomorphisms of linear algebraic groups*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[Tat67] J. T. Tate. Global class field theory. In J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, editors, *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, pp. 162–203. Thompson, Washington, D.C., 1967. Proceedings of the instructional conference held at the University of Sussex, Brighton, September 1–17, 1965. Reprint of the 1967 original.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, Vol. 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cam-

bridge, 1994.