軌道積分の移行と基本補題*

今野拓也[†]

2011 年 1 月 31 日

概要

この原稿では前稿 [今野 11b] で跡公式の楕円正則項にインプットされた共役類ごとの局所大域原理を、表現論の情報に置き換えるための局所体上の問題を扱う。目標は [今野 11b, 定理 6.11] の等式の右辺の二行目を、内視群 $H(\mathbb{A})$ 上の安定軌道積分で表すことである。

目次

* 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集原稿。

† 九州大学大学院数理学研究院。〒819-0395 福岡市西区元岡 744 番地
電子メール：takuya@math.kyushu-u.ac.jp
ホームページ：http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/

1　復習と動機

この原稿で扱う問題は重要だが技術的なものであり、前稿 [今野 11b] の内容がその導入の役割を果たしているから、ここで新たに導入を付け加えることはしない。その代わりに前稿を受けた局所体上の状況を説明し、この原稿で展開される構成の動機を特別な場合に述べることにする。

1.1　局所的な状況

この原稿を通して F は標数 0 の局所体とし、その正規化されたモジュラスを $|\ |_F$ と書く。F の代数閉包 $\bar{F}$ を固定し、絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を $\Gamma = \Gamma_F$, $\bar{F}/F$ の Weil 群を W_F で表す [今野 11b, 2.2]。

G を F 上定義された連結簡約線型代数群として、その準分裂な内部形式 G^* および内部捻り $\psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ を取る。定義から G^* は F 分裂 $\mathrm{spl}_{G^*} = (B_0, T_0, \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)})$ を持ち、そのルートデータ $RD(\mathrm{spl}_{G^*})$ への Γ 作用は $RD(G) = RD(G^*)$ への作用に一致している。G の L 群 ${}^LG = \hat{G} \rtimes_{\rho_G} W_F$ は、定義から $RD(G)$ と双対なルートデータを持つ複素連結簡約群 $\hat{G}$ への W_F 作用 $W_F \to \Gamma \to \mathrm{Aut}(RD(G)) = \mathrm{Aut}(RD(\hat{G})) \overset{\mathrm{spl}_{\hat{G}}}{\to} \mathrm{Aut}(\hat{G})$ による半直積であった [今野 11b, 3.2]。ここで $\hat{G}$ の分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\}_{\alpha^\vee\in\Delta(\mathcal{B},\mathcal{T})})$ も固定されていることに注意する。

前稿と同様に G の中心を Z_G, 随伴群を $G_{\mathrm{ad}} := G/Z_G$, 導来群を G_{der}, その単連結被覆を G_{sc} と書く。G 内の正則半単純元のなす Zariski 開集合を G_{rs} で表す。定義から $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ の連結中心化群 $T = G_\gamma := Z_G(\gamma)^0$ は G の極大トーラスである。次に G^* の極大トーラス T を考える。$T_{\bar{F}}$ を含む Borel 部分群 $B \subset G^*_{\bar{F}}$ を取れば、$\mathrm{Ad}(g)(B,T) = (B_0, T_0)$ となる $g \in G^*(\bar{F})$ を用いて T の擬対角化 $\eta_{B,T} := \mathrm{Ad}(g)|_{T_{\bar{F}}} : T_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{0,\bar{F}}$ がで

きる。

1.2 内視データ

現在の局所的な状況で、四つ組 $\mathcal{E} = (H, \mathcal{H}, s, \xi)$ が G の内視データ (*endoscopic datum*) とは

- H は準分裂な F 上の連結簡約群。その F 分裂 $\mathrm{spl}_H = (B_0^H, T_0^H, \{Y_\beta\})$ と L 群 ${}^LH = \hat{H} \rtimes_{\rho_H} W_F$, それに $\hat{H}$ の Γ 不変な分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{H}} = (\mathcal{B}_H, \mathcal{T}_H, \{\mathcal{Y}_{\beta^\vee}\})$ も固定しておく。
- $\mathcal{H}$ は W_F の $\hat{H}$ による分裂拡大: $1 \to \hat{H} \to \mathcal{H} \xrightarrow{p} W_F \to 1$.
- $s \in \hat{G}$ は半単純元。
- ξ は連続準同型 $\xi : \mathcal{H} \to {}^LG$ で $\mathcal{H} \xrightarrow{\xi} {}^LG \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} W_F$ が $\mathcal{H} \xrightarrow{p} W_F$ であるもの。

であって次が成り立つこととする。

(i) $\xi(\hat{H}) = Z_{\hat{G}}(s)^0$.

(ii) $\mathcal{H} \overset{p}{\twoheadrightarrow} W_F$ の任意の切断 $c : W_F \hookrightarrow \mathcal{H}$ に対して、$\hat{H}/Z_{\hat{H}}$ 値 1 コサイクル $\{\bar{h}_w\}_{w \in W_F}$ があって
$$\mathrm{Ad}(c(w))|_{\hat{H}} = \mathrm{Ad}(\bar{h}_w) \circ \rho_H(w), \quad w \in W_F.$$

(iii) ある $z \in Z(\hat{G})$ に対して
$$[s, \xi(h)] = s\mathrm{Ad}(\xi(h))s^{-1} = z\rho_G(p(h))(z)^{-1}, \quad h \in \mathcal{H}.$$

代数体上の内視データの定義 [今野 11b, 6.1] と較べると $[s, \xi(h)]$ が局所自明なコサイクルからコバウンダリーになっている。内視データの同型の定義は代数体上の場合と同様である。G の内視データの同型類の集合を $\mathscr{E}(G)$ と書く。

さて、以下では簡単のために G の導来群は単連結であると仮定する: $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$. 前稿の補題 6.3 の証明は標数 0 の局所、あるいは大域体の Weil 群に関する系 2.7 のみによっている。すなわちこの仮定から、必要なら $\mathcal{E} = (H, \mathcal{H}, s, \xi)$ をその同型類の元で取り替えて、
$$\mathcal{H} = {}^LH \tag{1.1}$$
であるとしてよい。

内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^LH, s, \xi)$ を取る。必要なら同型な内視データで取り替えて $\xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}$, $\xi(\mathcal{B}_H) \subset \mathcal{B}$ であるとしてよい。大トーラス $T \subset G^*_{\bar{F}}$, $T_H \subset H_{\bar{F}}$ の擬対角化 $\eta_{B,T} : T_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{0,\bar{F}}$, $\eta_{B_H, T_H} : T_{H,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T^H_{0,\bar{F}}$ に対して、同型 $A_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$ が定ま

る [今野 11b, 6.1]。$T_H(\bar{F})$ の元 γ_H は $A_{B,B_H}(\gamma_H) \in G_{\mathrm{rs}}(\bar{F})$ のとき G 正則と呼ばれ、そのような元のなす H の Zariski 開集合を $H_{G\text{-rs}}$ で表していた。[同、補題 6.5] により、F 極大トーラス $T_H \subset H$ に対してはこの A_{B,B_H} が F トーラスの同型 $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ からくる (B_H, B) がある。これを T_H の G^* への許容埋め込みという。

仮定 $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ の下では半単純な $\gamma \in G(F)$ の安定共役類は γ の G での共役類 γ^G の F 値点の集合に等しい。$\gamma^G(F)$ は $G(\bar{F})$ での共役類と $G(F)$ の交わりに一致していた。このとき H も同様の仮定を満たすから ([同、補題 6.2])、$\gamma_H \in (T_H \cap H_{G\text{-rs}})(F)$ に $\eta_{B,B_H}(\gamma_H)$ の $G(\bar{F})$ 共役類を対応させることで、正則ノルム写像

$$\mathcal{A}_{H/G^*} : H_{G\text{-rs}}(F)/\mathrm{Ad}(H(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

ができる。他方で内部ひねり ψ_G は単射

$$\psi_G : G_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G(\bar{F})) \longrightarrow G^*_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G^*(\bar{F}))$$

を定める。G 正則な $\gamma_H \in H(F)$ と $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ が $\mathcal{A}_{H/G^*}(\gamma_H^H) = \psi_G(\gamma^G)$ を満たすとき、γ_H は γ の像と呼ばれていた。そのような γ が存在しないとき、γ_H は G の像に属さないなどという。

1.3　軌道積分と安定超関数

まず F がアルキメデス的な場合を考える。極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K} \subset G(F)$ を固定する。これは $G(F)$ 共役を除いて一意なので表現論の記述には無害である。$G(F)$ 上のコンパクト台付き C^∞ 関数 f で両側 $\boldsymbol{K}$ 有限、すなわち $\{x \mapsto f(k_1^{-1}xk_2) \,|\, k_i \in \boldsymbol{K}\}$ が有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間を張るものからなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\mathcal{H}(G(F))$ で表す。正確な定義は略すが、これは Schwartz 空間のように Fréchet 空間になっている。その Fréchet 位相に関して連続な $\mathcal{H}(G(F))$ 上の線形汎関数を $G(F)$ 上の超関数 (*distribution*) と呼び、その空間を $\mathcal{D}(G(F))$ と書く。F が非アルキメデス的なときには、関数 $f : G(F) \to \mathbb{C}$ で

- 各 $x \in G(F)$ のある近傍 U_x 上で f は定数。
- $\mathrm{supp} f := \{x \in G(F) \,|\, f(x) \neq 0\}$ はコンパクト。

を満たすものの空間を $\mathcal{H}(G(F))$ と書き、その上の線形汎関数を $G(F)$ 上の超関数という。すなわち $G(F)$ 上の超関数の空間 $\mathcal{D}(G(F))$ は $\mathcal{H}(G(F))$ の双対空間である。

いずれの場合にも $T \in \mathcal{D}(G(F))$ で $G(F)$ 不変、すなわち $f^g(x) := f(gxg^{-1})$ として

$$T(f^g) = T(f), \quad g \in G(F),\, f \in \mathcal{H}(G(F))$$

を満たすものの空間を $\mathcal{I}(G(F))$ とおき、その元を $G(F)$ 上の不変超関数 (*invariant distribution*) と呼ぶ。

例 1.1. 不変超関数の例としては次の二つが基本的である。
(i) 正則半単純元 $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ の連結中心化群を T_γ と書き、$f \in \mathcal{H}(G(F))$ の γ での (正則) 軌道積分を

$$O_\gamma\Big(f, \frac{dg}{dt}\Big) := \int_{T_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg}{dt}$$

で定義する。ここで dg は $G(F)$, dt は $T_\gamma(F)$ 上の不変測度である。これは F が非アルキメデス的なら [HC70, 補題 19], アルキメデス的な場合には [HC57, 定理 1] によって収束することが知られている。
(ii) F がアルキメデス的ならば $G(F)$ は実 Lie 群で、その Lie 環の複素化を $\mathfrak{g}$ として $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群が考えられる [Wal88, 3 章]。既約 $(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ 加群 (π, V) が $G(F)$ の Hilbert 空間上の連続表現 (π, H) の $\boldsymbol{K}$ 有限部分として得られるとする。このとき $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対して作用素

$$\pi(f) : H \ni \phi \longmapsto \int_{G(F)} f(g)\pi(g)\phi\,dg \in H$$

は跡族 (*trace class*) であり、そのトレース $\mathrm{tr}\,\pi(f)$ が考えられる [Wal88, 8.1]。こうして定まる $f \mapsto \mathrm{tr}\,\pi(f)$ は π の指標超関数 (*distribution character*) と呼ばれ、(π, V) の同型類のみで定まる。
(iii) F が非アルキメデス的なとき、$G(F)$ は局所コンパクト完全不連結群である。つまり開かつコンパクトな部分群からなる単位元の基本近傍系を持つ。よってその許容表現が考えられる [BZ76, 2.1]。$G(F)$ の既約許容表現の同型類の集合を $\mathrm{Irr}\,G(F)$ と書く。許容表現 (π, V) と $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対して作用素 (右辺の積分は実際には有限和になるので V の位相は定義に必要ない。)

$$V \ni v \longmapsto \pi(f)v := \int_{G(F)} f(g)\pi(g)v\,dg \in V$$

は階数有限であり、従ってそのトレース $\mathrm{tr}\,\pi(f)$ が考えられる [同 2.17]。この $\mathrm{tr}\,\pi$ も π の指標超関数と呼ばれ、(π, V) の同型類のみで決まる。

事実 1.2 (Harish-Chandra)**.** F が非アルキメデス的なとき、次の集合は $\mathcal{I}(G(F))$ の弱位相に関して稠密な部分空間を張る。

(i) $\left\{ O_\gamma\Bigl(f, \dfrac{dg}{dt}\Bigr) \,\middle|\, \gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F) \right\}$;

(ii) $\bigl\{ \operatorname{tr}\pi(f) \,|\, \pi \in \operatorname{Irr} G(F) \bigr\}$.

これを踏まえて次の定義を導入する。二つの元 $\gamma, \gamma' \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ が安定共役なとき、$\gamma' = \gamma^g := g^{-1}\gamma g$ となる $g \in G(\bar{F})$ は中心化群の同型 $\mathrm{Ad}(g) : T_{\gamma'} \xrightarrow{\sim} T_\gamma$ を与える。ここで剰余類 $gT_{\gamma'}(\bar{F})$ は γ, γ' から一意に定まり、$T_{\gamma'}$ はトーラス (可換) であるから上の同型は γ, γ' から一意に決まる。このとき $T_{\gamma'}(F)$ 上の不変測度を $T_\gamma(F)$ 上の不変測度 dt の上の同型による引き戻し dt^g に取る。こうして選んだ測度を用いて、$f \in \mathcal{H}(G(F))$ の γ での安定軌道積分 (*stable orbital integral*) を

$$SO_\gamma(f) := \sum_{\gamma^g \in \gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} O_{\gamma^g}\Bigl(f, \frac{dg}{dt^g}\Bigr) \tag{1.2}$$

と定義する。さらに $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ に対する SO_γ たちの張る $\mathcal{I}(G(F))$ の部分空間の弱位相に関する閉包を $S\mathcal{I}(G(F))$ と書き、その元を $G(F)$ 上の安定超関数 (*stable distribution*) という。

1.4 この原稿の目標

動機を述べるために前稿の大域的な状況にもどる。簡単のため G を代数体 F 上定義された準分裂な連結簡約線型代数群とし、引き続き $G_{\mathrm{der}} = G_{\mathrm{sc}}$ であると仮定する。その [今野 11b, 6.1] の意味の楕円的内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を取る。G 正則な $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)$ を取り、その中心化群 $T_H := Z_H(\gamma_H)$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$ を固定し、$\gamma := \eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in T(F)$ とおく。

素点 v で γ の安定共役類の元 $\gamma_v \in \gamma^{G_v}(F_v)$ を取る。定義から $\gamma_v = \gamma^{g_v}$ となる $g_v \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}_v)$ があるので、1 コサイクル $\{\partial g_{v,\sigma} := g_v \sigma(g_v)^{-1}\}_{\sigma\in\Gamma}$ のコホモロジー類を

$$\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v) = \mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma_v) \in \mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}})$$

で表す。その $\mathrm{H}^1(F_v, T)$ での像を $\overline{\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v)}$ と書けば、[同、4.1] で見たように全単射

$$\gamma^{G_v}(F_v)/\mathrm{Ad}(G(F_v)) \ni \gamma_v^{G(F_v)} \longmapsto \overline{\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v)} \in \mathfrak{D}(T_v),$$
$$\mathfrak{D}(T_v) := \ker[\mathrm{H}^1(F_v, T) \to \mathrm{H}^1(F_v, G)]$$

がある。$\mathfrak{D}(T_v)$ は一般に群にならないので、代わりにそれを含む $\mathrm{H}^1(F_v, T)$ の部分群 $\mathfrak{E}(T_v) := \mathrm{im}[\mathrm{H}^1(F_v, T_{\mathrm{sc}}) \to \mathrm{H}^1(F_v, T)]$ を考えるのだった。一方、Tate・中山双対性 $\mathrm{H}^1(F, T) \cong \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D$ ([同、命題 2.3]) から $\mathfrak{K}(T_v) := \mathrm{im}[\pi_0(\hat{T}^{\Gamma_v}) \to \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})]$ は $\mathfrak{E}(T_v)$ の Pontrjagin 双対である。

以上のもとで [今野 11b, 定理 6.11] の内側の和は

$$\mathfrak{K}(T) = \ker\Big(\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, Z_{\hat{G}}) \to \prod_v \mathrm{H}^1(\Gamma_v, Z_{\hat{G}})\Big)$$

の元 κ の $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma) \to \pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^{\Gamma_v})$ による像 κ_v に対する κ_v 軌道積分

$$O_\gamma^{\kappa_v}\Big(f_v, \frac{dg_v}{dt_v}\Big) := \sum_{\gamma_v \in \gamma^{G_v}(F_v)/\mathrm{Ad}(G(F_v))} \kappa_v(\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v))^{-1} O_{\gamma_v}\Big(f_v, \frac{dg_v}{dt_v}\Big)$$

たちの Euler 積に等しい。おおざっぱに言うと、この講ではこの κ_v 軌道積分を $H(F_v)$ 上の安定軌道積分で展開することを目標とする。しかし $H(F_v)$ から $G(F_v)$ へは安定共役類の間の写像しか与えられないが、κ_v 軌道積分は $\gamma^{G_v}(F_v)/\mathrm{Ad}(G(F_v))$ 内の原点 $\gamma^{G(F_v)}$ の取り方によっている。また内視データの $\xi : {}^L H \hookrightarrow {}^L G$ には $D_H := H/H_{\mathrm{der}}$ の L パラメーター $\zeta : W_F \to Z_{\hat{H}} \rtimes_{\rho_H} W_F$ 倍する自由があるが、κ_v 軌道積分にはその情報が反映されない。つまり我々の目標が意味を持つためには、軌道積分にかかるウェイト $\kappa_v(\mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v))$ を標準的でかつ ξ を反映するものに取り替えなくてはならない。それが以下に述べる移行因子である。

2 移行因子

ここでは Langlands-Shelstad の移行因子の定義を論文 [LS87] に沿って概説する。

1.1 節の状況にもどって、G は準分裂とは限らないが導来群が単連結な F 上の連結簡約群とし、その内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を取る。必要なら $\mathcal{E}$ を同型なデータで置き換えて

$$\xi(\mathcal{T}_H) = \mathcal{T}, \quad \xi(\mathcal{B}_H) \subset \mathcal{B}, \quad s \in \mathcal{T}$$

であるとしてよい。G 正則な $\gamma_H \in H(F)$ に対して、その中心化群 T_H の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ を止めて $\gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H) \in (T \cap G_{\mathrm{rs}})(F)$ とおく。正則半単純な $\gamma \in G(F)$ を取る。

移行因子は $\Delta_{\mathrm{I}}(\gamma_H, \gamma), \Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H, \gamma), \Delta_1(\gamma_H, \gamma; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}), \Delta_2(\gamma_H, \gamma), \Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H, \gamma)$ と書かれる 5 つの関数から構成される。

2.1 $\Delta_{\mathrm{I}}(\gamma_H, \gamma)$ の定義

この項は $\gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))$ 内の原点、言い換えれば許容埋め込み η_{B,B_H} の取り方の影響を打ち消すためのものである。

F 分裂 $\mathrm{spl}_{G^*} = (B_0, T_0, \{X_\alpha\})$ を思い出す。T_0 の G^* での Weyl 群 $\Omega(G^*, T_0) = N_{G^*}(T_0)/T_0$ は単純ルート $\alpha \in \Delta(B_0, T_0)$ に付随する鏡映 r_α たちで生成される Coxeter 群である。さて $\alpha \in \Delta(B_0, T_0)$ のルートベクトル X_α に対して $-\alpha$ のルートベクトル $X_{-\alpha}$ で $H_\alpha := [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ が $[H_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$ (複号同順) を満たすものがただ一つ存在する。このとき

$$n(r_\alpha) = \exp(X_\alpha)\exp(-X_{-\alpha})\exp(X_\alpha)$$

は r_α の $N_{G^*}(T_0)(\bar{F})$ での代表元である [Spr98, 8.1.4]。次に一般の $\omega \in \Omega(G^*, T_0)$ に対してその単純鏡映の積による被約表示 $\omega = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$ ([同、8.3.1] 参照) を取り、

$$n(\omega) := n(r_{\alpha_1}) \cdots n(r_{\alpha_\ell})$$

とおく。これは被約表示の取り方によらないので ([同、9.3.3])、こうして得られた完全代表系 $\{n(\omega) \,|\, \omega \in \Omega(G^*, T_0)\} \subset N_{G^*}(T_0)(\bar{F})$ は $\sigma(n(\omega)) = n(\sigma(\omega))$, $(\sigma \in \Gamma)$ を満たす。

例 2.1. $G^* = \mathrm{SL}_2$ の時、B_0 を上三角元からなる Borel 部分群、T_0 を対角元からなる極大トーラスとしてその単純ルートは $\alpha : T_0 \ni \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a^2 \in \mathbb{G}_m$ だけである。そのルートベクトルを $X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば、対する $X_{-\alpha}$ は $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ である: $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. このとき

$$n(r_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

特に $n(r_\alpha)^2 = -1$ だから、$n : \Omega(G^*, T_0) \to N_{G^*}(T_0)$ は準同型ではない。

許容埋め込み η_{B,B_H} に現れる擬対角化 $\eta_{B,T} : T_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{0,\bar{F}}$ を使って

$$\omega_T(\sigma) := \eta_{B,T} \circ \sigma(\eta_{B,T})^{-1} = \eta_{B,T} \circ \sigma \circ \eta_{B,T}^{-1} \circ \sigma^{-1}, \quad \sigma \in \Gamma$$

とおくと、これは $\Omega(G^*, T_0)$ 値の 1 コサイクルである。しかし上の例で見たとおり $n_T(\sigma) := n(\omega_T(\sigma))$ は必ずしも 1 コサイクルにならない。そのコバウンダリー

$$\partial n_T(\sigma, \tau) := n_T(\sigma)\sigma(n_T(\tau))n_T(\sigma\tau)^{-1}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma$$

を分解するために T に対する a データ、すなわち T の G^* でのルート $\alpha \in R(G^*, T)$ に対する $a_\alpha \in \bar{F}^\times$ の族で

(i) $a_{\sigma(\alpha)} = \sigma(a_\alpha), (\sigma \in \Gamma)$;

(ii) $a_{-\alpha} = a_\alpha^{-1}$

を満たすものを固定する。これを用いて

$$x_T(\sigma) := \prod_{\substack{\alpha \in R(B,T) \\ \sigma(\alpha) \notin R(B,T)}} \alpha^\vee(a_\alpha) \in T_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), \quad \sigma \in \Gamma$$

とおく。ただし $\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \to T_{\mathrm{sc},\bar{F}}$ は α のコルートである。このとき

$$\partial n_T(\sigma, \tau) = \eta_{B,T}(\partial x_T(\sigma,\tau))^{-1}, \quad \sigma, \tau \in \Gamma$$

が成り立つ [LS87, 補題 2.2.A]。具体的には $\eta_{B,T} = \mathrm{Ad}(g_T)|_T, (g_T \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F}))$ と書いて、

$$\begin{aligned} 1 &= x_T(\sigma)\sigma(x_T(\tau))g_T^{-1}\partial n_T(\sigma,\tau)g_T x_T(\sigma\tau)^{-1} \\ &= x_T(\sigma)g_T^{-1} \cdot \eta_{B,T} \circ \sigma(x_T(\tau))n_T(\sigma) \cdot \sigma(n_T(\tau))n_T(\sigma\tau)^{-1}g_T x_T(\sigma\tau)^{-1} \end{aligned}$$

定義から $\eta_{B,T} \circ \sigma = \omega_T(\sigma) \circ \sigma \circ \eta_{B,T}, \mathrm{Ad}(n_T(\sigma)) = \omega_T(\sigma)$ ゆえ

$$\begin{aligned} &= x_T(\sigma)g_T^{-1} \cdot n_T(\sigma)\sigma(\eta_{B,T}(x_T(\tau))) \cdot \sigma(n_T(\tau))n_T(\sigma\tau)^{-1}g_T x_T(\sigma\tau)^{-1} \\ &= x_T(\sigma)g_T^{-1}n_T(\sigma)\sigma(g_T) \cdot \sigma\Big(x_T(\tau)g_T^{-1}n_T(\tau)\tau(g_T)\Big) \\ &\qquad\qquad \sigma\tau(g_T)^{-1}n_T(\sigma\tau)g_T x_T(\sigma\tau)^{-1} \end{aligned}$$

となる。つまり $m_T(\sigma) := x_T(\sigma)g_T^{-1}n_T(\sigma)\sigma(g_T)$ は $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ 値 1 コサイクルである。その $\mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}})$ でのクラスを $\lambda(T_{\mathrm{sc}})$ と書こう。

一方で $\eta_{B,T} : T_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{0,\bar{F}}$ の双対同型を $\eta_{B,T}^* : \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \hat{T}$ として $s_T := \eta_{B,T}^*(s) \in \hat{T}$ とおく。内視データの定義 (1.2 節) の条件 (ii) からある $z \in Z_{\hat{G}}$ があって $[s, \xi(w)] = z\rho_G(w)(z)^{-1}, (w \in W_F)$ が成り立つ。ここで ${}^L H \overset{\xi}{\hookrightarrow} {}^L G$ の Weil 群への制限を $\xi(w) = a(w) \rtimes w, (w \in W_F)$ と書けば、これは

$$s\mathrm{Ad}(a(w))\rho_G(w)(s)^{-1} = z\rho_G(w)(z)^{-1}, \quad w \in W_F,$$

となって sz^{-1} が $\mathrm{Ad}(\xi(W_F))$ 不変なことを意味する。これと内視データの条件 (i) から $sz^{-1} \in \xi(Z_{\hat{H}}^\Gamma)$ を得る。さて許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim}_F T$ は Γ 同変な同型

$$\hat{T}_H \xrightarrow{\eta_{B_H,T_H}^{*,-1}} \mathcal{T}_H \xrightarrow{\xi} \mathcal{T} \xrightarrow{\eta_{B,T}^*} \hat{T}$$

の双対であった。η_{B_H,T_H}^* は $Z_{\hat{H}}$ 上恒等写像だから $sz^{-1} \in \xi(Z_{\hat{H}}^\Gamma) \subset \xi \circ \eta_{B_H,T_H}^{*,-1}(\hat{T}_H^\Gamma)$ となることに注意して、結局 $s_T z^{-1} = \eta_{B,T}^*(sz^{-1}) \in \hat{T}^\Gamma$ がわかる。特に s_T の $\hat{T}/Z_{\hat{G}}$ での像 $s_{T_{\mathrm{sc}}}$ は Γ 不変である。

定義 2.2. 以上の下で $s_{T_{\rm sc}}$ の $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)$ での像を $\boldsymbol{s}_{T_{\rm sc}}$ として

$$\Delta_{\rm I}(\gamma_H,\gamma)=\langle \boldsymbol{s}_{T_{\rm sc}},\lambda(T)\rangle$$

と定義する。右辺のペアリングは $T_{\rm sc}$ の Tate・中山双対性である [今野 11b, 命題 2.3]。

2.2 $\Delta_1(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})$ の定義

この項は幾何サイドの主要項で $\kappa(\mathrm{inv}(\gamma_*,\gamma))$ の振る舞いをするものである。しかし $G\not\simeq G^*$ の場合には $\gamma^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))$ 内の原点が特定されないため、次のような相対的な定義を採用する。なお 5 つの項のうちでこれだけが $\gamma\in G(F)$ に依存する。

内部ひねり ψ_G の定義から

$$\psi_G\circ\sigma(\psi_G)^{-1}:=\psi_G\circ\sigma\circ\psi_G^{-1}\circ\sigma^{-1}=\mathrm{Ad}(u_\sigma),\quad u_\sigma\in G^*_{\rm sc}(\bar{F})$$

と書ける。定義から $\mathrm{Ad}(u_\sigma)\in G^*_{\rm ad}(\bar{F})$ は 1 コサイクルだから、そのコバウンダリー ∂u は $Z_{G_{\rm sc}}(\bar{F})$ に値を持つ。補助的に $\bar{\gamma}\in G_{\rm rs}(F)$ とその像である $\bar{\gamma}_H\in H_{G\text{-rs}}(F)$ のペアを固定する。$\bar{T}_H:=Z_H(\bar{\gamma}_H)$ の許容埋め込み $\eta_{\bar{B},\bar{B}_H}:\bar{T}_H\xrightarrow{\sim}_F\bar{T}\subset G^*$ を取り、$\bar{\gamma}_*:=\eta_{\bar{B},\bar{B}_H}(\bar{\gamma}_H)$ とおく。

まず γ が γ_H の像である場合を考える。定義から $\psi_G(\gamma)=\gamma_*^g,\, g\in G^*_{\rm sc}(\bar{F})$ と書ける。そのような g を一つ取って

$$v_\sigma:=gu_\sigma\sigma(g)^{-1},\quad \sigma\in\Gamma$$

とおけば、$\gamma_*\in G^*(F), \gamma=\psi_G^{-1}(\gamma_*^g)\in G(F)$ に注意して

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(v_\sigma)\gamma_*&=\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G\circ\sigma(\psi_G)^{-1}\sigma(\gamma_*^g)=\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G\circ\sigma(\psi_G^{-1}(\gamma_*^g))\\&=\mathrm{Ad}(g)\circ\psi_G(\gamma)=\gamma_*.\end{aligned}$$

つまり v は $T_{\rm sc}(\bar{F})$ 値 1 コチェインで、そのコバウンダリーは明らかに u のコバウンダリーに等しい。同様に $\psi_G(\bar{\gamma})=\bar{\gamma}_*^{\bar{g}}$ となる $\bar{g}\in G^*_{\rm sc}(\bar{F})$ を使って $\bar{v}(\sigma):=\bar{g}u_\sigma\sigma(\bar{g})^{-1}$, $(\sigma\in\Gamma)$ とおく。ここでトーラス

$$\mathbb{T}=\mathbb{T}(T,\bar{T})=T_{\rm sc}*_{Z_{G_{\rm sc}}}\bar{T}_{\rm sc}:=T_{\rm sc}\times\bar{T}_{\rm sc}/\{(z,z^{-1})\,|\,z\in Z_{G_{\rm sc}}\}$$

を導入する。$\partial v=\partial\bar{v}=\partial u$ は $Z_{G_{\rm sc}}(\bar{F})$ 値なので、$(v,\bar{v}^{-1})$ の $\mathbb{T}(\bar{F})$ での像は定義可能な 1 コサイクルになる。そのコホモロジー類を

$$\mathrm{inv}\Big(\frac{\gamma_H,\gamma}{\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}}\Big)\in\mathrm{H}^1(F,\mathbb{T})$$

と書く。

Langlands 双対群 $\hat{G}$ の導来群 $\hat{G}_{\mathrm{der}}$ の単連結被覆を $\hat{G}_{\mathrm{sc}}$ と書けば、これは G_{ad} の双対群である。同様に $T_{\mathrm{ad}} := T/Z_G$ の双対トーラスを $\hat{T}_{\mathrm{sc}}$ と書く。$B_{\mathrm{ad}} := B/Z_G$ とおけば、擬対角化 $\eta_{B_{\mathrm{ad}},T_{\mathrm{ad}}} : T_{\mathrm{ad},\bar{F}} \xrightarrow{\sim} (T_{0,\mathrm{ad}})_{\bar{F}}$ およびその双対 $\eta^*_{B_{\mathrm{ad}},T_{\mathrm{ad}}} : \mathcal{T}_{\mathrm{sc}} \xrightarrow{\sim} \hat{T}_{\mathrm{sc}}$ がある。ただし $\mathcal{T}_{\mathrm{sc}}$ は $\mathcal{T}$ の $\hat{G}_{\mathrm{sc}} \to \hat{G}$ による逆像である。

$$\Delta : Z_{\hat{G}_{\mathrm{sc}}} \hookrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{sc}} \xrightarrow{\eta^*_{B_{\mathrm{ad}},T_{\mathrm{ad}}} \times \eta^*_{\bar{B}_{\mathrm{ad}},\bar{T}_{\mathrm{ad}}}} \hat{T}_{\mathrm{sc}} \times \hat{\bar{T}}_{\mathrm{sc}}$$

とおけば、$\mathbb{T}$ の Langlands 双対トーラスは $\hat{\mathbb{T}} := \hat{T}_{\mathrm{sc}} \times \hat{\bar{T}}_{\mathrm{sc}}/\Delta(Z_{\hat{G}_{\mathrm{sc}}})$ で与えられる [LS87, p.246]。$s \in \mathcal{T}$ の $\mathcal{T}_{\mathrm{sc}}$ での勝手な逆像 $\tilde{s}$ を固定して $\tilde{s}_T := \eta^*_{B_{\mathrm{ad}},T_{\mathrm{ad}}}(\tilde{s})$ などとおけば、$s_{\mathbb{T}} := (\tilde{s}_T, \tilde{s}_{\bar{T}})$ は定義可能な $\hat{\mathbb{T}}^\Gamma$ の元で $\tilde{s}$ の取り方によらない。その $\pi_0(\hat{\boldsymbol{T}}^\Gamma)$ での像を $\boldsymbol{s}_{\mathbb{T}}$ とする。

定義 2.3. $\Delta_{\mathrm{III},1}(\gamma_H, \gamma; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = \Delta_1(\gamma_H, \gamma; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) := \left\langle \boldsymbol{s}_{\mathbb{T}}, \mathrm{inv}\left(\dfrac{\gamma_H, \gamma}{\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}}\right) \right\rangle.$

注意 2.4. $G = G^*$ の場合には u_σ が自明なので、v_σ はコサイクルでそのクラスは 1.4 節の記号で $\mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma) \in \mathrm{H}^1(F, T_{\mathrm{sc}})$ である。よってこの場合には s_T の $\pi_0((\hat{T}/Z_{\hat{G}})^\Gamma)$ での像を $\kappa_T = \boldsymbol{s}_{T_{\mathrm{sc}}}$ などとして

$$\Delta_1(\gamma_H, \gamma; \bar{\gamma}_H, \bar{\gamma}) = \frac{\Delta_1(\gamma_H, \gamma)}{\Delta_1(\bar{\gamma}_H, \bar{\gamma})}, \quad \Delta_1(\gamma_H, \gamma) := \kappa_T(\mathrm{inv}(\gamma_H, \gamma))^{-1}$$

となる。

2.3 $\Delta_2(\gamma_H, \gamma)$ の定義

この項はスペクトルサイドの主要項で、L 群の埋め込み ξ の取り方を反映している。その定義には [今野 11b, 補題 6.8] で導入された双対トーラスの許容埋め込みを使う。まずはその構成を具体的に実行しよう。

■^LT の許容埋め込みの具体的構成 Langlands 双対群の分裂 $\mathrm{spl}_{\hat{G}} = (\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}_{\alpha^\vee}\})$ の単純ルートベクトル $\mathcal{X}_{\alpha^\vee}$ たちを使って、2.2 節と同様に Weyl 群 $\Omega(\hat{G}, \mathcal{T})$ の $N_{\hat{G}}(\mathcal{T})$ での代表系 $\{\hat{n}(\omega)\}_{\omega \in \Omega(\hat{G}, \mathcal{T})}$ ができる。Weyl 群の同一視 $\Omega(\hat{G}, \mathcal{T}) = \Omega(G^*, T_0)$ を思い出そう。双対群の方でも 2.2 節の 1 コサイクル $\{\omega_T(\sigma)\}_{\sigma \in \Gamma}$ の持ち上げ $\hat{n}_T(\sigma) := \hat{n}(\omega_T(\sigma))$ は必ずしもコサイクルではない。そのコバウンダリーを記述する。

ルート系 $R(G^*, T)$ 上のゲージとは、関数 $p : R(G^*, T) \to \{\pm 1\}$ で $p(-\alpha) = -p(\alpha)$, $(\alpha \in R(G^*, T))$ を満たすもののこととする。ゲージ p に対して

$$\hat{t}_p(\sigma, \tau) := \prod_{\substack{p(\alpha)=1 \\ p(\sigma^{-1}(\alpha))=-1 \\ p((\sigma\tau)^{-1}(\alpha))=1}} \eta_{B,T}(\alpha)(-1) \in \mathcal{T}$$

と定める。ただし $\eta_{B,T}(\alpha) : T_{0,\bar{F}} \overset{\eta_{B,T}^{-1}}{\to} T_{\bar{F}} \overset{\alpha}{\to} \mathbb{G}_m, \in R(G^*, T_0)$ を $\mathcal{T}$ のコルートと同一視している。例えば

$$p_B(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \in R(B, T) \text{ のとき} \\ -1 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とおけばこれは $R(G^*, T)$ 上のゲージになるが、実は $\partial\hat{n}_T(\sigma, \tau) = \hat{t}_{p_B}(\sigma, \tau)$ となるのである [LS87, 補題 2.1]。一方でこのような 2 コサイクルの Weil 群へインフレーション $\mathrm{infl}_{\Gamma_{K/F}}^{W_F} \partial\hat{n}_T$ は分解するのだった [今野 11b, 系 2.7]。次にその分解を具体的に与えよう。

まず χ データと呼ばれる補助データを導入する。T の G^* でのルート $\alpha \in R(G^*, T)$ に対して、$\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ における α の固定化群を Γ_α, $\{\pm\alpha\}$ の安定化群を $\Gamma_{\pm\alpha}$ と書き、それぞれの固定体を $F_\alpha, F_{\pm\alpha}$ と書く。T の χ データとは、$\alpha \in R(G^*, T)$ に対する連続指標 $\chi_\alpha : F_\alpha^\times \to \mathbb{C}^\times$ の族 $\{\chi_\alpha\}_\alpha$ であって

(i) $\chi_{-\alpha} = \chi_\alpha^{-1}$;

(ii) $\chi_{\sigma(\alpha)} = \sigma(\chi_\alpha) := \chi_\alpha \circ \sigma^{-1}, (\sigma \in \Gamma)$;

(iii) $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ が二次拡大の時には、$\chi_\alpha|_{F_{\pm\alpha}^\times}$ は $\omega_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}} : F_{\pm\alpha}^\times / \mathrm{N}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}(F_\alpha^\times) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$ に一致する。

を満たすものである。このようなものを一つ固定し、さらに次の記号を用意する。

(a) ルート系 $R(G^*, T)$ の自己同型群の Γ 作用と -1 倍で生成される部分群を Σ とし、$R(G^*, T)$ 内の各 Σ 軌道 $\mathscr{O}$ の代表元 α を取る。

(b) $d := [F_\alpha : F_{\pm\alpha}]$, $n := [F_{\pm\alpha} : F]$ として、$W_{F_\alpha} \backslash W_{F_{\pm\alpha}}$ の代表系 $\{v_j\}_{0 \le j < d}$, $W_{F_{\pm\alpha}} \backslash W_F$ の代表系 $\{w_i\}_{0 \le i < n}$ を止める。ただし $v_0 \in W_{F_\alpha}$ とする。$w_i \in W_F$ の $W_F \overset{\varphi_F}{\to} \Gamma$ ([今野 11b, 2.2]) による像を σ_i と書く: $\mathscr{O} = \{\pm\sigma_i^{-1}(\alpha)\}_{0 \le i < n}$.

$$p_0(\pm\sigma_i^{-1}(\alpha)) := \pm 1$$

として $R(G^*, T)$ 上のゲージが定まる。

(c) $w \in W_F$ と $0 \le i < n$ に対して、$w_i w = u_i(w) w_j, (\exists u_i(w) \in W_{F_{\pm\alpha}}, 0 \le \exists j < n)$ と書く。

(d) $u \in W_{F_{\pm\alpha}}$ に対して、$v_0 u = v_0(u) v_j$, ($\exists v_0(u) \in W_{F_\alpha}$, $0 \le \exists j < d$) と書く。

以上のもとで

$$r_0(w) := \prod_{\mathscr{O} \in R(G^*,T)/\Sigma} \prod_i \eta_{B,T}(\sigma_i^{-1}(\alpha))\Big(\chi_\alpha\big(v_0(u_i(w))\big)\Big) \in \mathcal{T}, \quad w \in W_F$$

とおけば、これは 1 コバウンダリー倍を除いて上記 (a)–(d) の補助データによらず定まり、$\hat{t}_{p_0}$ の W_F へのインフレーションを分解する [LS87, 補題 2.5.A]。二つのゲージ p, q に対して

$$s_{p/q}(\tau) := \prod_{\substack{p(\alpha)=q(\alpha)=1 \\ p(\tau^{-1}(\alpha))=-1 \\ q(\tau^{-1}(\alpha))=1}} \eta_{B,T}(\alpha)(-1) \prod_{\substack{q(\beta)=p(\beta)=1 \\ q(\tau^{-1}(\beta))=-1 \\ p(\tau^{-1}(\beta))=1}} \eta_{B,T}(\beta)(-1), \quad \tau \in \Gamma.$$

とおけば、$\hat{t}_p/\hat{t}_q = \partial s_{p/q}$ が成り立つ [同、補題 2.4.A]。これらから $r_T(w) := \mathrm{infl}_{\Gamma_{K/F}}^{W_F} s_{p_B/p_0}(w) r_0(w)$, ($w \in W_F$) が望む $\hat{t}_{p_B}$ の分解を与えることがわかる。

$$\partial \hat{n}_T(\varphi_F(v), \varphi_F(w)) = \partial r_T(v, w), \quad v, w \in W_F.$$

特に [今野 11b, 補題 6.8] の証明から

$$\xi_T : {}^L T \ni t \rtimes w \longmapsto \eta_{B,T}^{*,-1}(t) r_T(w) \hat{n}_T(\varphi_F(w)) \rtimes w \in {}^L G$$

は ${}^L T$ の許容埋め込みで、$\mathcal{T}$ 共役を除いて (a)–(d) の補助データによらず決まる。

■$\Delta_2(\gamma_H, \gamma)$ の定義　内視群 H と T_H に対しても、η_{B,B_H} によって $R(H, T_H) \subset R(G^*, T)$ と同一視することで、χ データ $\{\chi_\beta\}_{\beta \in R(H,T_H)} \subset \{\chi_\alpha\}_{\alpha \in R(G^*,T)}$ が定まる。許容埋め込み $\xi_{T_H} : {}^L T_H \hookrightarrow {}^L H$ を固定する。F 同型 $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T \subset G^*$ と併せて 2 種の許容埋め込み

$${}^L T \xhookrightarrow{\xi_T} {}^L G, \qquad {}^L T \xrightarrow{\eta_{B,B_H}^*} {}^L T_H \xhookrightarrow{\xi_{T_H}} {}^L H \xhookrightarrow{\xi} {}^L G$$

が得られる。よって [今野 11b, 補題 6.8] から L パラメーター $a : W_F \to {}^L T$ で

$$\xi \circ \xi_{T_H}(w) = a(w) \xi_T(w), \quad w \in W_F$$

となるものがあり、その $\mathrm{H}^1(W_F, \hat{T})$ でのクラス $\boldsymbol{a}$ に付随する連続指標 $\omega_{\boldsymbol{a}} : T(F) \to \mathbb{C}^\times$ が定まる [今野 11b, 定理 2.8]。(これは (a)–(d) のデータによらないことに注意。)

定義 2.5. $\Delta_{\mathrm{III},2}(\gamma_H, \gamma) = \Delta_2(\gamma_H, \gamma) := \omega_{\boldsymbol{a}}(\gamma_*)$.

2.4 $\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H,\gamma)$ の定義

この項は a データ、χ データの取り方の影響を相殺するとともに、$G(F), H(F)$ の表現論に現れる符号のずれを埋めてくれる。

定義 2.6. η_{B,B_H} によって $R(H,T_H)\subset R(G^*,T)$ と同一視する。

$$\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H,\gamma) := \prod_{\alpha\in(R(G^*,T)\smallsetminus R(H,T_H))/\Gamma} \chi_\alpha\left(\frac{\alpha(\gamma_*)-1}{a_\alpha}\right)$$

と定義する。ただし積はルートの Γ 軌道の代表系を走る。各項が Γ 軌道の代表元 α の取り方によらないことは a,χ データの定義から容易に確かめられる。

2.5 $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H,\gamma)$ の定義

これは単に $G(F), H(F)$ の Weyl の分母の比で、それぞれの上の不変超関数の特異挙動のずれを埋めるものである。重み付き軌道積分など跡公式のほかの項も扱う場合には、Arthur のようにこの項を軌道積分の定義の方に組み込んでおく流儀もある。

正則半単純元 $\gamma\in G(F)$ の中心化群 T_γ の Lie 環を $\mathfrak{t}_\gamma$ として

$$\Delta_G(t) := |\det(\mathrm{Ad}(\gamma)-1|_{\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{t}_\gamma(F)})|_F^{1/2}$$

とおく。

定義 2.7. $\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H,\gamma) := \dfrac{\Delta_{G^*}(\gamma_*)}{\Delta_H(\gamma_H)}.$

2.6 移行因子とその正規化

上で定義された $\Delta_I, \Delta_{\mathrm{II}}, \Delta_{\mathrm{III},1}, \Delta_{\mathrm{III},2}, \Delta_{\mathrm{IV}}$ は $(\gamma_H,\gamma), (\bar\gamma_H,\bar\gamma)$ に加えて以下の補助データによっていた。

- 分裂 $\mathrm{spl}_{G^*}, \mathrm{spl}_H$;
- 許容埋め込み $\eta_{B,B_H}: T_H \xrightarrow{\sim} T$;
- a データ $\{a_\alpha\}_{\alpha\in R(G^*,T)}$, χ データ $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in R(G^*,T)}$.

なお $(\bar\gamma,\bar\gamma_H)$ に対しても類似のデータを固定していた。

定義 2.8. Langlands-Shelstad の相対移行因子を

$$\Delta(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma}) := \frac{\Delta_I\Delta_{\mathrm{II}}\Delta_2\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H,\gamma)}{\Delta_I\Delta_{\mathrm{II}}\Delta_2\Delta_{\mathrm{IV}}(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})}\Delta_1(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})$$

と定義する。

定理 2.9 ([LS87], 定理 3.7.A)**.** (i) $\Delta(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})$ は上のすべての補助データによらない。
(ii) $G=G^*$ のとき、注意 2.4 の記号で

$$\Delta_0(\gamma_H,\gamma) := \Delta_I(\gamma_H,\gamma)\Delta_{\mathrm{II}}(\gamma_H,\gamma)\Delta_1(\gamma_H,\gamma)\Delta_2(\gamma_H,\gamma)\Delta_{\mathrm{IV}}(\gamma_H,\gamma)$$

と定めれば、これは許容埋め込みや a,χ データにはよらないが、分裂 $\mathrm{spl}_{G^*},\mathrm{spl}_H$ に依存する。

実用上は定数 $\Delta(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})\in\mathbb{C}^\times$ を一つ固定して

$$\Delta(\gamma_H,\gamma) := \Delta(\gamma_H,\gamma;\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})\Delta(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})$$

を正規化された移行因子として用いる。すなわち移行因子は定数倍を除いて一意に定まる。さらに $G=G^*$ の場合には、次のように表現論との相性のよい特別な $\Delta(\bar{\gamma}_H,\bar{\gamma})\in\mathbb{C}^\times$ の取り方がある。

■Whittaker 正規化　分裂 $\mathrm{spl}_{G^*}=(B_0,T_0,\{X_\alpha\})$ から、準同型

$$\mathrm{Tr}_{U_0} : (U_0/[U_0,U_0])_{\bar{F}} \ni \prod_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)} \exp(x_\alpha X_\alpha)[U_0,U_0]_{\bar{F}} \overset{\simeq}{\longmapsto} \sum_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)} x_\alpha \in \mathbb{G}_{a,\bar{F}}$$

が定まる。集合 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta(B_0,T_0)}$ は Γ 作用で保たれるから、これは実は F 上の準同型に落ちる。よって非自明な指標 $\psi_F : F\to\mathbb{C}^1$ に対して $U_0(F)$ の指標

$$\psi_{U_0} : U_0(F) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{U_0}} F \xrightarrow{\psi_F} \mathbb{C}^1$$

が定まる。この指標はその $B_0(F)$ での固定化群 $\{b\in B_0(F)\,|\,\psi_{U_0}\circ\mathrm{Ad}(b)=\psi_{U_0}\}$ が $Z_G(F)$ であるという意味で非退化である。Borel 部分群 $B_0\subset G^*$ とそのユニポテント根基 $U_0(F)$ の非退化指標の組 (B_0,ψ_{U_0}) を G^* の *Whittaker* データという。これから $G^*(F)$ の既約表現の Whittaker 模型が定義できるからである。

さて、$\mathbb{C}[\Gamma]$ 加群 $V_{G*} := X^*(T_0)\otimes\mathbb{C}$ の Artin L 因子の ε 因子を $\varepsilon(s,V_{G^*},\psi_F)$ と書く。なお我々は ε 因子を Langlands の慣習に則って記述するものとする [Tat79, (3.6)]。H に

ついても同様の定義をして、

$$\Delta_{\psi_{U_0}}(\gamma_H,\gamma) := \frac{\varepsilon(1/2, V_{G^*}, \psi_F)}{\varepsilon(1/2, V_H, \psi_F)}\Delta_0(\gamma_H,\gamma)$$

とおく。これが移行因子の Whittaker 正規化であり、例えば [LL79] で用いられている移行因子はこれである。

3 軌道積分の移行と基本補題

3.1 軌道積分の移行

$\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を G の内視データとする。G 正則な $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F)$ が $\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(F)$ の像であるとしよう。つまり $T_H = Z_H(\gamma_H)$ の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : T_H \xrightarrow{\sim} T$ があって、$\psi_G(\gamma) = \gamma_*^g, (g \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), \gamma_* := \eta_{B,B_H}(\gamma_H))$ である。

このとき $\psi_\gamma := \mathrm{Ad}(g) \circ \psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$ も内部ひねりで

$$\psi_\gamma(\gamma) = \gamma_*, \quad \psi_\gamma : T_{\gamma,\bar{F}} \xrightarrow{\sim} T_{\bar{F}}$$

を満たす。特に $\sigma \in \Gamma$ に対して $\psi_\gamma \circ \sigma(\psi_\gamma)^{-1} \in \Omega(G^*, T)$ である。(内部自己同型で $T_{\bar{F}}$ を保っているから。) ところがこれは正則元 γ_* を動かさない。

$$\psi_\gamma \circ \sigma(\psi_\gamma)^{-1}(\gamma_*) = \psi_\gamma \circ \sigma \circ \psi_G(\gamma_*^g) = \psi_\gamma(\gamma) = \gamma_*.$$

つまり $\psi_\gamma \circ \sigma(\psi_\gamma)^{-1} = \mathrm{id}$ となって $\psi_\gamma : T_\gamma \xrightarrow{\sim} T$ が F 同型であることがわかる。さらに g の右剰余類 $T_{\mathrm{sc}}(\bar{F})g$ は γ, γ_* から一意に定まる。こうして F トーラスの同型

$$T_H \xrightarrow[\sim]{\eta_{B,B_H}} T \xrightarrow[\sim]{\psi_\gamma} T_\gamma$$

が安定共役を除いて一意に存在することがわかる。$T_H(F)$ 上の測度 dt_H を $T_\gamma(F)$ 上の不変測度 ((1.2) で用いた安定共役で不変なもの) の上の同型による引き戻しとする。

1.4 節で述べた目標を達成するための第一歩は次の結果である。

定理 3.1 (軌道積分の移行)**.** $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ を G の内視データとし、その正規化された移行因子 $\Delta(\gamma_H, \gamma)$ を取る。$G(F), H(F)$ 上の不変測度 dg, dh を固定する。このとき任意の $f \in \mathcal{H}(G(F))$ に対して $f^H \in \mathcal{H}(H(F))$ で

$$SO_{\gamma_H}\Big(f^H, \frac{dh}{dt_H}\Big) = \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G_{\mathrm{rs}}(F)} \Delta(\gamma_H, \gamma) O_\gamma\Big(f, \frac{dg}{dt}\Big), \quad \forall \gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F) \tag{3.1}$$

を満たすものが存在する。ただし γ_H が γ の像のとき、$T_H(F)$ 上の不変測度 dt_H は同型 $T_H \xrightarrow{\sim} T_\gamma$ による $T_\gamma(F)$ 上の測度 dt の引き戻しに選ぶものとする。

この定理の証明の概略は後で紹介する。等式 (3.1) の関係を軌道積分の合致 (*matching orbital integrals*) と呼び、定理の条件を満たす f^H を f の H への移行 (*transfer*) という。ただしこれは軌道積分の間だけの関係だから f^H は f から一意に決まるわけではない。そこで以下ではこの関係を $f \rightsquigarrow f^H$ と書き表すことにする。

3.2 佐武同型と基本補題

この節では F を (標数 0 の) 非アルキメデス局所体とし、次の意味の不分岐な状況を考える。

- G は F 上不分岐 [今野 11b, 4.2]。すなわち G は F の整数環 $\mathcal{O}$ 上の滑らかな (連結簡約) 群スキーム $\mathcal{G}$ に延びる。このとき Bruhat-Tits 理論により $G(F)$ の *Bruhat-Tits* ビルは $G(F)$ での固定化群が $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ であるような超スペシャル点を持ち、従って G は準分裂で、ある有限次不分岐拡大上で分裂していなくてはならない。
- 内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ も不分岐。つまり H は F 上不分岐で ξ による惰性群 $I_F \subset W_F$ の像の $\hat{G}$ への射影が自明であるとする。

このとき G は準分裂な G^* の内部形式であるから G^* と同一視してよい。また $\psi_G(\mathrm{spl}_{G^*}) = \mathrm{Ad}(g)\mathrm{spl}_{G^*}$ となる $g \in G(\bar{F})$ があるから、ψ_G を $\mathrm{Ad}(g)^{-1} \circ \psi_G$ で取り替えて $\psi_G = \mathrm{id}_{G^*}$ としてよい。

T_0 の F 有理指標の群を $X^*(T_0)_F := \mathrm{Hom}(T_0, \mathbb{G}_m)^\Gamma$ と書き、$\mathfrak{a}_0 := \mathrm{Hom}(X^*(T_0)_F, \mathbb{R})$ とおく。これは実ベクトル空間で準同型 $H_0 : T_0(F) \to \mathfrak{a}_0$ が

$$\langle \mu, H_0(t) \rangle = \log |\mu(t)|_F, \quad \mu \in X^*(T_0)_F$$

で定まっている。T_0 を生成ファイバーに持つ標準的な $\mathcal{O}$ 群スキーム $\mathcal{T}_0$ ([BT84, 4.4] 参照) は $\mathcal{T}_0(\mathcal{O}) = T_0(F)^1 := \ker H_0$ を満たす [同、4.4.6 (2)]。

$A_0 \subset T_0$ を F 分裂な極大部分トーラスとし、$G(F)$ の Bruhat-Tits ビルの A_0 のアパート内の超スペシャル点に付随する G の $\mathcal{O}$ 上の模型を $\mathcal{G}$ とする [Tit79, 3.4.1]。すると $\mathcal{T}_0$ は $\mathcal{G}$ の閉部分群スキームであり、超スペシャル極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K} := \mathcal{G}(\mathcal{O}) \subset G(F)$ に対して

$$T_0(F) \cap \boldsymbol{K} = T_0(F)^1, \quad G(F) = B_0(F)\boldsymbol{K}$$

が成り立つ。$\mathcal{H}(G(F))$ 内の両側 $\boldsymbol{K}$ 不変な元からなる部分 $\mathbb{C}$ 代数を $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ と書き、$G(F)$ の不分岐 *Hecke* 環という。以下、この節では $G(F)$ 上の不変測度 dg を $\boldsymbol{K}$ の測度が 1 となるものとしておく。すると $\boldsymbol{K}$ の特性関数 $1_{\boldsymbol{K}}$ は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ の単位元である。

■不分岐表現の Langlands 対応　まず T_0 は不分岐な分解体を持つから [今野 11b, 注意 2.9] の不分岐 Langlands 対応

$$\mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1) \ni \chi \longleftrightarrow t(\chi) \in \mathcal{T}_\Gamma \tag{3.2}$$

が成り立っている。ここで $\mathcal{T}_\Gamma$ は $\mathcal{T}$ の Γ 不変商である。一方 $\chi \in \mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1)$ に対して、関数 $\phi : G(F) \to \mathbb{C}$ で

- ある開コンパクト部分群 $K_\phi \subset G(F)$ で右不変: $\phi(gk) = \phi(g)$, $(g \in G(F)$, $k \in K_\phi)$;
- $\phi(utg) = \chi(t)\delta_{B_0}(t)\phi(g)$, $(u \in U_0(F), t \in T_0(F), g \in G(F))$

を満たすものの空間を $I(\mathbb{C}_\chi)$ として、その上の $G(F)$ の許容表現

$$I(\chi, g)\phi(x) := \phi(xg), \quad g \in G(F), \phi \in I(\mathbb{C}_\chi)$$

を用意しておく (不分岐主系列表現)。ただし $U_0(F)$ 上の不変測度を du として、$\delta_{B_0}(t) := d\mathrm{Ad}(t)u/du$ と書いている (モジュラス指標)。

$G(F)$ の滑らかな表現 ([BZ76] の意味の代数表現) (π, V) が不分岐とは、V が $G(F)$ 加群として $\boldsymbol{K}$ 不変ベクトルの空間 $V^{\boldsymbol{K}}$ で生成されることとする。$G(F)$ の滑らかな不分岐表現のなすアーベル圏を $\mathscr{R}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ と書き、その既約対象の同型類の集合を $\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{K}}\, G(F)$ で表す。

(i) $G_{\mathrm{der}}(F)$ に対する [Bor76, 補題 4.7] と $G(F) = T_0(F)G_{\mathrm{der}}(F)$ から、$\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{K}}\, G(F)$ の任意の元はある $I(\chi)$, $(\chi \in \mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1))$ の組成因子である。

(ii) 従って [Ber84, 命題 2.10] から $\mathscr{R}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ は無限小指標 (あるいは超カスプ台) $(T_0, \mathcal{T}_\Gamma)$ を持つ滑らかな表現の圏 $(\mathrm{Alg}\, G(F))(T_0, \mathcal{T}_\Gamma)$ の充満部分圏である。ここで (3.2) により、$\mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1)$ を複素トーラス $\mathcal{T}_\Gamma$ と同一視している。

(iii) 岩澤分解から $I(\chi)^{\boldsymbol{K}}$ は 1 次元である。

(iv) 特に各 $I(\chi)$ は $\boldsymbol{K}$ 不変ベクトルを持つただ一つの組成因子 $\pi(\chi)$ を含む。A_0 の G での相対 Weyl 群 $W_0 := N_G(A_0)/T_0$ は $\mathrm{Irr}(T_0(F)/T_0(F)^1)$ に作用している。[BZ77, 定理 2.9] から $\pi(\chi)$ の同型類は軌道 $W_0.\chi$ のみで決まっている。

(i) および (iv) から全単射

$$\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{K}} G(F) \ni \pi(\chi) \overset{\simeq}{\longmapsto} W_0.t(\chi) \in \mathcal{T}_\Gamma / W_0 \tag{3.3}$$

がある。

上で W_0 は $\hat{G}$ の言葉で書ける。まず A_0 の G でのルート系を Σ_0 と書けば、[BT75, 定理 7.2] から W_0 は A_0 への作用を通じて Σ_0 の Weyl 群 $\Omega(\Sigma_0)$ と同一視される。幾何的 Frobenius 自己同型 $\mathrm{Fr} \in \mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ の Γ での逆像 σ を止め、簡略のため spl_{G^*} への σ 作用から定まる $G = G^*$ の F 自己同型を θ と書く:

$$\sigma \circ \mu \circ \sigma^{-1} = \mu \circ \theta^{-1}, \quad \sigma \circ \mu^\vee \circ \sigma^{-1} = \theta \circ \mu^\vee, \quad \mu \in X^*(T_0),\, \mu^\vee \in X_*(T_0).$$

T_0 は $X_*(T_0)$ の元の像で生成され、A_0 は $X_*(T_0)$ の Γ 不変、つまり θ 不変な元の像で生成されるから $A_0 = (T_0^\theta)^0$ である。特に Σ_0 は絶対ルート系 $R(G, T_0)$ の θ 不変部分 A_0 への制限ルート系 $R_\theta(G, T_0)$ である。([KS99, 1.3] 参照。そこでは $R_{\mathrm{res}}(G, T_0)$ と書かれている。) 定義から θ の双対同型は $\hat{\theta} := \rho_G(\sigma)$ の $\mathcal{T}$ への制限である。よって [同 (1.3.8)] から Γ 同変な全単射 $R_\theta(G, T_0) \to R_{\hat{\theta}}(\hat{G}, \mathcal{T})$ があり、特に前者の Weyl 群 W_0 は後者のルート系の不可分ルートの集合 $R(\hat{G}^{\hat{\theta}}, \mathcal{T}^{\hat{\theta}})$ [同 (1.3.4)] の Weyl 群 $\Omega(\hat{G}^{\hat{\theta}}, \mathcal{T}^{\hat{\theta}})$ に一致する。[同、1.1] の後半の議論と併せて結局、同一視

$$W_0 = \Omega(\hat{G}, \mathcal{T})^{\hat{\theta}} \tag{3.4}$$

が得られる[*1]。

元 $g \in \hat{G}$ が $\hat{\theta}$ 半単純とは自己同型 $\mathrm{Ad}(g) \circ \hat{\theta} \in \mathrm{Aut}(\hat{G})$ が準半単純、つまり $\hat{G}$ の導来群の Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}_{\mathrm{der}}$ への作用が半単純 (対角化可能) なこととする。$\hat{G}$ は自分自身に $\hat{\theta}$ 共役

$$\mathrm{Ad}_{\hat{\theta}}(g) : \hat{G} \ni x \longmapsto g x \hat{\theta}(g)^{-1} \in \hat{G}, \quad g \in \hat{G}$$

[*1] 記号を煩雑にしないよう、ここでは $\mathcal{T}^{\hat{\theta}}$ が連結であるかのように議論しているが、この問題は深刻ではない。Weyl 群だけが問題なので、連結性が気になる読者は G を G_{sc}, $\hat{G}$ を $\hat{G}/Z_{\hat{G}}$ で置き換えればよい。

で作用しているが、この作用による $\hat{G}$ 軌道を $\hat{\theta}$ 共役類と呼ぶ。$\hat{G}$ 内の $\hat{\theta}$ 半単純な元からなる $\hat{\theta}$ 共役類の集合を $\mathcal{C}\ell_{ss}(G,\hat{\theta})$ と書こう。一方、$\{t\hat{\theta}(t)^{-1}\,|\,t\in\mathcal{T}\}$ で生成される $\mathcal{T}$ の閉部分群を $\mathcal{T}(\hat{\theta})$ と書けば、$\mathcal{T}_\Gamma=\mathcal{T}/\mathcal{T}(\hat{\theta})$ である。このとき同一視 (3.4) と [KS99, 補題 3.2.A] から

$$\mathcal{C}\ell_{ss}(G,\hat{\theta})\ni C\longmapsto[C\cap\mathcal{T}\mod\mathcal{T}(\hat{\theta})]\in\mathcal{T}_\Gamma/W_0 \tag{3.5}$$

は全単射である。

連続準同型 $\varphi:W_F\to{}^LG$ で次の 2 条件を満たすものを G の不分岐 L パラメーターと呼ぶ。

- 各 $w\in W_F$ に対して $\mathrm{Ad}(\varphi(w))$ は $\hat{G}$ の準半単純自己同型。
- 惰性群の像 $\varphi(I_F)$ の $\hat{G}$ への射影は自明である。

二つの不分岐 L パラメーターが同値とは、それらが $\hat{G}$ 共役なこととし、不分岐 L パラメーターの同値類の集合を $\Phi_{\mathrm{ur}}(G)$ と書く。$\mathrm{Fr}\in\mathrm{Gal}(\bar{k}_F/k_F)$ の W_F での逆像の元 w_σ を取れば、

$$\Phi_{\mathrm{ur}}(G)\ni\varphi\longmapsto[\varphi(w_\sigma)\text{ の }\hat{G}\text{ 成分}]\in\mathcal{C}\ell_{ss}(G,\hat{\theta}) \tag{3.6}$$

は全単射である。

定理 3.2 (不分岐局所 Langlands 対応)**.** (3.6), (3.5), (3.3) の合成は全単射

$$\Phi_{\mathrm{ur}}(G)\ni[\varphi(w_\sigma)=t(\chi)\rtimes w_\sigma]\longmapsto\pi(\chi)\in\mathrm{Irr}_{\boldsymbol{K}}G(F)$$

を与える。

■佐武同型　分裂簡約群に対する不分岐表現と不分岐 Hecke 環の記述は佐武一郎先生による [Sat63]。その証明は球関数の Bruhat-Tits ビル上の振る舞いを具体的に記述することによるが、ここでは p 進簡約群の表現に対する Bernstein の中心の理論 [Ber84] を用いた短い証明を与える。

19 頁 (ii) の圏 $(\mathrm{Alg}\,G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)$ の中心を $\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}$ と書く。[Ber84, 定理 2.13] と (ii) から

$$\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}\ni z\longmapsto[t(\chi)\mapsto I(\chi,z)]\in\mathbb{C}[\mathcal{T}_\Gamma]^{W_0} \tag{3.7}$$

は $\mathbb{C}$ 代数の同型である。一方 (ii) から [同、3.13] の記号で

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))=\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)$$

である。[同、定理 3.14] と (iii) から、$\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}$ は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)$ の中心で、$\mathrm{Spec}(\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)})$ の開集合上で $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)$ は階数 1 の東屋 $\mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}$ 代数である:

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)[1/z] = \mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}[1/z], \quad \exists z \neq 0, \in \mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}.$$

よって $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) = \mathfrak{Z}(G(F))_{(T_0,\mathcal{T}_\Gamma)}$ であり、(3.7) と併せて次の結果が得られた。

命題 3.3 (佐武同型)**.** 次は $\mathbb{C}$ 代数の同型である。

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \ni f \longmapsto [f^\vee : t(\chi) \mapsto I(\chi, f)] \in \mathbb{C}[\mathcal{T}_\Gamma]^{W_0}$$

特に不分岐 Hecke 環 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ は $\mathrm{rank}_F G$ 変数多項式環に同型である。

■基本補題　$H(F)$ に対しても $G(F)$ と同様に T_0^H に関してよい位置にある超スペシャル極大コンパクト部分群 $\boldsymbol{K}_H \subset H(F)$ を固定し、その不分岐 Hecke 環を $\mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_H}(H(F))$ とする。やはり Frobenius 元 σ の作用を $\hat{\theta}_H := \rho_H(\sigma)$ と書く。全単射 (3.5), (3.6) の合成を使って

$$\xi : \mathcal{T}_{H,\Gamma}/W_0^H \xrightarrow{\sim} \Phi_{\mathrm{ur}}(H) \xrightarrow{\varphi \mapsto \xi\circ\varphi} \Phi_{\mathrm{ur}}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_\Gamma/W_0$$

とおく。これによる引き戻しと佐武同型により Hecke 環の準同型

$$\xi^\vee : \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathcal{T}_\Gamma/W_0] \xrightarrow{\xi^*} \mathbb{C}[\mathcal{T}_{H,\Gamma}/W_0^H] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_H}(H(F))$$

が得られる。

定理 3.4 (一般の基本補題)**.** 不分岐な状況で $f \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}}(G(F))$ と $\xi^\vee(f) \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_H}(H(F))$ に対して、軌道積分の合致 (3.1) が成り立つ。

4　証明の概要

定理 3.1, 3.4 はいずれも 1980 年代の半ばに Langlands-Shelstad によって定式化された。一般に $f \in \mathcal{H}(G(F))$ の軌道積分 $O_\gamma(f, dg/dt)$ は $\gamma \in T(F) \cap G_{\mathrm{rs}}(F)$ が $T(F)$ 内の正則でない元 δ に近づくとき、その中心化群 $G_\delta(F)$ のユニポテント共役類の幾何で統制される独特の振る舞いをすることが知られている。定理 3.1 はこの特異挙動が $G(F), H(F)$ の間で整合するという主張である。これは表現論に詳しいものにとっては非常に非自明な、

にわかには信じがたい予想であった。Langlands 自身も志村多様体のゼータ関数の研究からこうした主張にたどり着いたものの、当初は確信を持てなかったらしい。しかしアルキメデス的な場合に Shelstad が、極大トーラスの Cayley 変換に際しての軌道積分の振る舞いを記述する平井武先生の “patching condition” を用いて、定理 3.1 を証明した [She82] ことで予想として提出するに至ったという。

対する非アルキメデス的な場合は困難を極めた。Labesse-Langlands の SL_2 の場合の証明 [LL79] は対称空間 $\mathrm{SL}_2/\mathrm{SO}(2)$ の Cartan 分解で軌道積分が計算できる特殊事情によっていた。共役類の幾何の研究で中心的役割を果たす Grothendieck-Springer 多様体は、正則半単純元の上では Weyl 群の位数枚の有限被覆だが、特異半単純元ではその中心化群のユニポテント軌道に付随する因子が現れる複雑な特異性を持つ。Langlands は Grothendieck-Springer 多様体の類似である星多様体のファイバー積分として軌道積分を実現し、その特異性を具体的に解析する定理 3.1 への戦略を提案した [Lan83]。Kepler 予想への貢献でも知られる Hales は $\mathrm{U}_{E/F}(3)$ や Sp_2 などの低次の群の場合にこの戦略を実現して定理 3.1 を証明した [Hal89, Hal92]。しかし例えば Sp_3 であっても、星多様体は 48 個の Borel 部分群の位置関係を記述する 108 次元アフィン空間内の多様体で、その特異性を記述することは現実的ではない。

具体的な計算によらず特異多様体上のファイバー積分である軌道積分を調べるには、偏屈層の理論が唯一の手段とも思われる。しかし非アルキメデス局所体上の軌道積分はこうした理論で捉えることが難しく、両定理は 90 年代の終わり頃まで困難な予想として内視論や跡公式の応用の前に立ちふさがり続けた。

4.1 単位元への帰着

問題の解決に向けての第一歩は大域的な手法の導入であった。Hasse の局所類体論の構成のように、非アルキメデス局所理論を大域理論から引き出すのである。その最初の成果は、Hales がベースチェンジリフトの基本補題に対する Clozel の議論 [Clo90] を拡張して証明した次の結果である。

命題 4.1 (Hales, [Hal95])**.** 3.2 節の不分岐な状況にある任意の G とその内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ に対して、Hecke 環の単位元が軌道積分の合致

$$SO_{\gamma_H}\Big(1_{\boldsymbol{K}_H}, \frac{dh}{dt_H}\Big) = \sum_{\gamma^{G(F)} \subset G_{\mathrm{rs}}(F)} \Delta(\gamma_H, \gamma) O_\gamma\Big(1_{\boldsymbol{K}}, \frac{dg}{dt}\Big), \quad \forall \gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(F) \tag{4.1}$$

を満たせば、基本補題 (定理 3.4) が成り立つ。

証明の概略. Clozel, Hales のアイディアは、考えている局所体上の群を適切な代数体 k 上の準分裂簡約群 G, H のある素点 w での係数拡大 G_w, H_w として実現することに始まる。その w では任意の Hecke 関数 $f_w \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_w}(G(k_w))$ と $f_w^H := \xi^\vee(f_w) \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{K}_{H,w}}(H(k_w))$ をテスト関数に取る。それ以外の素点 v では有限体上の簡約群の Deligne-Lusztig 表現をインフレーションと誘導で持ち上げた超カスプ表現の行列成分や、特定の極大トーラスの共役類の上だけに台を持つ関数など特別なテスト関数 f_v, f_v^H を取る。こうしてできるテスト関数 $f = \bigotimes_v f_v$, $f^H = \bigotimes_v f_v^H$ に対しては、Arthur-Selberg 跡公式は Deligne-Kazhdan のシンプル跡公式と呼ばれる Selberg 跡公式のような単純な形になる [Hen83, 4.7–9]。特にその幾何サイドは [今野 11b, 5.3 節] の楕円正則項 $T^G_{\mathrm{ell,rs}}(f)$ だけとなるので、テスト関数の軌道積分の合致を仮定すれば次稿 [今野 11a] で紹介する議論により安定化することができる。

一方、上のような特殊なテスト関数に対しては、安定化に必要な軌道積分の合致が w 以外の素点で成り立ち、しかも安定化した跡公式は単一の内視群 H のみの寄与からなるようにできる。

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} R_0(f) &= T^G_{\mathrm{ell,rs}}(f) = \iota(G,H) ST^H_*(f^H), \\ \operatorname{tr} R_0(f^H) &= T^H_{\mathrm{ell,rs}}(f^H) = \iota(H,H) ST_*(f^H) \end{aligned}$$

ここで 1 行目の等式の証明には w での軌道積分の合致、つまり基本補題が必要だが、逆に w 以外の素点のテスト関数を走らせることにより、基本補題は

$$\operatorname{tr} R_0(f) - \frac{\iota(G,H)}{\iota(H,H)} \operatorname{tr} R_0(f^H) = 0 \tag{4.2}$$

から従うこともわかる。

ここからはこの式を f_w の線型汎関数の等式と見て調和解析、一種の不確定性原理を使う。まず跡公式から (4.2) の左辺は楕円軌道積分 $O_\gamma(f_w)$, $O_{\gamma_H}(f_w^H)$, $(\gamma \in G_{\mathrm{rs}}(k_w)_{\mathrm{ell}}$, $\gamma_H \in H_{G\text{-rs}}(k_w)_{\mathrm{ell}})$ たちの有限線型結合である。楕円軌道積分は "コンパクト指標" と呼

ばれるある種の截頭された指標超関数で展開される [Clo89]。しかも Hecke 関数に対する不分岐既約表現 $\pi(\chi)$ のコンパクト指標は

$$\sum_{w\in W_0} \hat{\tau}_P^G(w(\lambda))w(\lambda)(t(\chi)), \quad \lambda\in X_*(T_0)^\Gamma$$

の形の関数の線型結合である [Clo90, 命題 2.1 の系]。ここで $\hat{\tau}_P^G$ は跡公式の構成にも登場する $\mathfrak{a}_0$ のある開錐の特性関数である [Art05, 6 節]。特に佐武変換 $f^\vee = \sum_{\lambda\in X_*(T_0)^\Gamma} a_\lambda\lambda$ において支配的な λ (の W_0 軌道) の項のみが消えていない Hecke 関数 f_w を考えればよい。また楕円的でない正則元での f_w, f_w^H の軌道積分は消えているとしてよく、G は随伴型であるとしてよい: $Z_G=\{1\}$.

さて、(4.2) の軌道積分による表記のコンパクト指標による展開には、$G_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}, H_{\mathrm{rs}}(F)_{\mathrm{ell}}$ 上で非自明な指標を持つ、つまり楕円的な不分岐表現のみが寄与する。随伴型の群のそうした表現 $\pi(\chi)$ はある $I(\chi)$ の非自明な Langlands 商であり、特にそのような χ で $I(\chi)$ はユニタリ表現ではないことがわかる。

$$\operatorname{tr} R_0(f) - \frac{\iota(G,H)}{\iota(H,H)}\operatorname{tr} R_0(f^H) = \sum_{\chi;I(\chi)\ \text{非ユニタリ}} a_\chi e^{\langle\chi,\lambda\rangle}$$

一方、(4.2) の左辺そのものはユニタリ保型表現の局所成分の指標からなるから、もう一つの展開

$$\operatorname{tr} R_0(f) - \frac{\iota(G,H)}{\iota(H,H)}\operatorname{tr} R_0(f^H) = \sum_{\chi;I(\chi)\ \text{ユニタリ}} a'_\chi e^{\langle\chi,\lambda\rangle}$$

が得られる。ここで現れる λ は支配的なものの Weyl 群軌道に属するから、これらの表記が一致するためには両辺が消えるしかない。 □

4.2 Lie 環への帰着

Waldspurger は上記の Clozel や Hales の議論を Lie 環に拡張して、定理 3.1, 単位元に対する定理 3.4 の証明を以下で述べる特別な場合に帰着した。

■設定　まず Lie 環での状況を説明しよう。F を局所体として、$G, \psi_G : G_{\bar{F}} \xrightarrow{\sim} G^*_{\bar{F}}$, $\mathcal{E}=(H, {}^LH, s, \xi)$ を 3.1 節までの通りとする。特に G_{der} は単連結としている。G やその極大トーラス T の Lie 環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ などのドイツ小文字で表す。G の $\mathfrak{g}$ への随伴作用を Ad で表し、$X\subset\mathfrak{g}(F)$ の G での固定化群 (中心化群) を $G_X := \{g\in G\,|\,\mathrm{Ad}(g)X=X\}$ と書く。$X\in\mathfrak{g}$ が正則半単純とは $G_X\subset G$ が (極大) トーラスであることとし、正則半単純

元のなす開稠密集合を $\mathfrak{g}_{\mathrm{rs}} \subset \mathfrak{g}$ と書く。$X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ のときは G_X を T_X と書くことにして、$f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ の X での軌道積分

$$O_X\Big(f, \frac{dg}{dt}\Big) = \int_{T_X(F)\backslash G(F)} f(X^g)\, \frac{dg}{dt}$$

を導入する。ただし $X^g := \mathrm{Ad}(g)^{-1}X$ と略記している。

$X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ の安定軌道 $X^G(F)$ は今の場合、単に X の $G(\bar{F})$ 軌道 $X^{G(\bar{F})}$ と $\mathfrak{g}(F)$ の交わりである。$X^G(F)$ 内の $G(F)$ 軌道が $\mathfrak{D}(T_X)$ で記述されることなどは群の場合と同様である。また極大トーラスの許容埋め込み η_{B,B_H} に付随する射 $\eta_{B,B_H} : \mathfrak{t}_H \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}^*$ を用いて、$\mathfrak{h}(F)$ 内の G 正則元の集合 $\mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ や $Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ が $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ の像であることなどが定義される。

ここからは懸案である F が非アルキメデス的な場合を解説する。適当な 0 の近傍 $\Omega \subset \mathfrak{g}(F)$ 上では指数写像 $\exp : \Omega \to G(F)$ が定義されている。H に対しても同様である。$X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ とその像 $Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ に対して、$\lambda \in F^\times$ で $\lambda^2 X, \lambda^2 Y$ が指数写像の定義域に入っているものを取り、Lie 環上の移行因子を

$$\Delta(Y, X) := \Delta(\exp \lambda^2 Y, \exp \lambda^2 X)$$

と定める。右辺は 2.6 節で定義した群上の移行因子であり、これは十分 0 に近い λ の取り方によらない。Y が X の像でない場合にはもちろん $\Delta(Y, X) := 0$ とする。

注意 4.2. 移行因子のうち $\Delta_{\mathrm{III},2}(\gamma_H, \gamma) = \omega_{\boldsymbol{a}}(\gamma_*)$ は十分 1 に近い γ_* に対して 1 である。よって $\Delta(Y, X)$ は $\Delta_{\mathrm{III},2}$ を定める $\xi|_{W_F}$ によらない。言い換えれば Lie 環上の内視論には Weil 群は必要ないのである。

■Lie 環の基本補題　ここでは一時的に G および $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ が 3.2 節の意味で不分岐であるとする。特に $G = G^*, \psi_G = \mathrm{id}_{G^*}$ としてよい。同節のように超スペシャル点とそれに付随する整数環 $\mathcal{O}$ 上の G の模型 $\mathcal{G}$ を取り、その Lie 環を $\mathscr{g}$ と書く。超スペシャル $\mathcal{O}$ 格子 $\mathscr{g}(\mathcal{O})$ の特性関数を $1_{\mathfrak{g}}$ と略記する。H に対しても同様に $\mathcal{O}$ 上の模型 $\mathcal{H}$ の Lie 環 $\mathscr{h}$ および $\mathscr{h}(\mathcal{O})$ の特性関数 $1_{\mathfrak{h}}$ が考えられる。$Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ での安定軌道積分を

$$SO_Y\Big(f^H, \frac{dh}{dt}\Big) := \sum_{Y' \in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))} O_{Y'}\Big(f^H, \frac{dh}{dt}\Big), \quad f^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$$

と定める。

定理 4.3 (Lie 環の基本補題)**.** 上の不分岐な状況で、ある定数 $c \in \mathbb{C}^\times$ があって任意の $Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ に対して

$$SO_Y\Big(1_{\mathfrak{h}}, \frac{dh}{dt}\Big) = c \sum_{X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} \Delta(Y, X) O_X\Big(1_{\mathfrak{g}}, \frac{dg}{dt}\Big)$$

が成り立つ。

この定理は Waldspurger と Laumon, Ngô らの仕事により最終的に 2008 年頃証明されたが、ここではまずこの定理を仮定して先に進もう。

■Fourier 変換とその応用　非自明な加法指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^1$ を止め、$G(F)$ の随伴作用で不変な非退化対称形式 $\langle\, ,\, \rangle_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}(F) \otimes_F \mathfrak{g}(F) \to F$ を取る。これにより $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ の *Fourier* 変換

$$\hat{f}(X') := \int_{\mathfrak{g}(F)} f(X)\psi(\langle X, X' \rangle_{\mathfrak{g}})\, dX$$

が定まる。ただし不変測度 dX は上の Fourier 変換について自己双対に取っておく。

ここからは軌道積分の特異性を相殺するため、

$$\Delta_G(X) := |\det(\mathrm{ad}(X)|\mathfrak{g}(F)/\mathfrak{t}_X(F))|_F^{1/2}$$

とおいて、$J_G(X, f) := \Delta_G(X) O_X(f, dg/dt)$ を考える方が便利である。Fourier 変換 $\hat{J}_G(X, f) := J_G(X, \hat{f})$ を考える。[HC99, 定理 3] からこの Fourier 変換は次の等式が成り立つという意味での核関数 $\hat{i}^G : \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F) \times \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F) \to \mathbb{C}$ を持つ。

$$\hat{J}_G(X', f) = \sum_{\substack{T \subset G \\ \mathrm{mod}\ G(F)\ \text{共役}}} \frac{1}{|W(G, T)|} \int_{\mathfrak{t}(F)} J_G(X, f) \hat{i}^G(X', X)\, dX.$$

これを用いて

$$D_{G,H}(Y, X) := \gamma_\psi(\mathfrak{g}(F)) \sum_{X' \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} \Delta(Y, X') \hat{i}^G(X', X)$$

とおく。ここで $\gamma_\psi(V)$ は F 上の二次形式付き空間 $(V, (\, ,\,))$ の ψ に関する *Weil* 定数と呼ばれる不変量である。一方 $\mathfrak{h}(F)$ 上には、任意の許容埋め込み $\eta_{B,B_H} : \mathfrak{t}_H(F) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}(F)$ が二次空間の同型になるような非退化対称形式 $\langle\, ,\, \rangle_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h}(F) \otimes_F \mathfrak{h}(F) \to F$ がただ一つある。

これを使って G の場合と同様に軌道積分の Fourier 変換の核関数 $\hat{i}^H(Y',Y)$ を定め、

$$\tilde{D}_{G,H}(Y,X) := \gamma_\psi(\mathfrak{h}(F)) \sum_{\substack{Y'\in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F)) \\ Y''\in\mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)/\mathrm{Ad}(H(F))}} \frac{1}{|\mathfrak{D}(T_{Y''})|}\Delta(Y'',X)\hat{i}^H(Y',Y'')$$

とおく。

命題 4.4 ([Wal91] 定理 10.4)**.** $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$, $Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$ に対して $D_{G,H}(Y,X) = \tilde{D}_{G,H}(Y,X)$ である。

証明の概略. まず考えている G, H を代数体 k 上の適当な簡約群 G とその内視群 H のある素点 w での係数拡大として実現する。アデール環上の Lie 環 $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ 上の Schwartz-Bruhat 関数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ に対して

$$I^G(\phi) := \int_{G(k)\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\xi\in\mathfrak{g}(k)} \phi(\mathrm{Ad}(g)^{-1}\xi)\, dg$$

とおく。非自明指標 $\psi : \mathbb{A}/k \to \mathbb{C}^1$ を固定すれば、それに関する Fourier 変換

$$\hat{\phi}(X') := \int_{\mathfrak{g}(\mathbb{A})} \phi(X)\psi(\langle X, X'\rangle_{\mathfrak{g}})\, dX, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$$

が考えられる。テスト関数 $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ と $\hat{f}$ をともに楕円的な元の集合に台を持つ用に選べば、Poisson 和公式の両辺を積分することができて等式

$$I^G(f) = I^G(\hat{f})$$

が成り立つ。一方で $I^G(f)$ 内の和と積分の順序を入れ替えて、単純な幾何展開

$$I^G(f) = \sum_{\xi\in\mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(k)_{\mathrm{ell}}/\mathrm{Ad}(G(k))} \tau(T_\xi)\prod_v J_G(\xi, f_v)$$

を得る。こうして上の等式が Lie 環における跡公式の代わりとなる。Lie 環を考える利点はスペクトルサイドに当たる右辺も Fourier 変換に対する幾何展開となることである。H に対しても同様の等式が考えられる。

上の等式を安定化する。固定した w 以外の素点 v では定理 4.3 などを使って軌道積分の合致が成り立つテスト関数 $f_v \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(k_v))$, $f_v^H \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}(k_v))$ を取り、さらに内視群のうち H 以外のものの寄与は消えるようにしておく。さらに w では $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ を固定して、

$f_w \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(k_w))$, $f_w^H \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(k_w))$ を軌道積分の合致を満たし、かつ次の等式が成り立つように具体的に作る [Wal91, §8]。

$$\sum_{X' \in \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(k_w)/\mathrm{Ad}(G(k_w))} \Delta(Y, X') J_G(X', f_w) = c_1 \gamma_{\psi_w}(\mathfrak{g}(k_w))^{-1} D_{G,H}(Y, X),$$
$$\sum_{Y' \in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))} J_H(Y', f_w^H) = c_1 \gamma_\psi(\mathfrak{h}(k_w))^{-1} \tilde{D}_{G,H}(Y, X).$$

こうして得られたテスト関数 $f = \bigotimes_v f_v$, $f^H = \bigotimes_v f_v^H$ を用いて上の跡公式の類似を安定化すれば、等式

$$I^G(f) = c \frac{\tau(G^*)}{\tau(H)} I^H(f^H)$$

が得られる。これを Fourier 変換サイドに持って行った等式の両辺を比較して命題が証明される。 □

この命題は次に解説するような驚くべき帰結を持つ。$\mathfrak{g}(F)$ 内の冪零 $G(F)$ 軌道の集合を $\mathcal{N}(\mathfrak{g}(F))$ で表す。各 $\mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F))$ に対して *Shalika* 芽と呼ばれる $\mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ 内の 0 の近傍で定義された関数 $g^G(X, \mathfrak{o})$ があって、$J_G(X, f)$ は 0 の周りで漸近展開 (*Shalika* 芽展開)

$$J_G(X, f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F))} g^G(X, \mathfrak{o}) J_G(\mathfrak{o}, f)$$

を満たす。右辺の第二項は冪零軌道 $\mathfrak{o}$ 上の軌道積分である。内視データ $\mathcal{E} = (H, {}^L H, s, \xi)$ に対して、(G, H) 芽

$$g^{G,H}(Y, \mathfrak{o}) := \sum_{X' \in X^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} \Delta(Y, X') g^G(X', \mathfrak{o}), \quad Y \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)$$

を用意する。[LS90] の結果により、軌道積分の移行予想 (定理 3.1) はすべての簡約群とその内視群に対して

$$g^{G,H}(Y, \mathfrak{o}) \in \mathrm{span}\{g^{H,H}(Y, \mathfrak{o}_H) \,|\, \mathfrak{o}_H \in \mathcal{N}(\mathfrak{h}(F))\}, \quad \mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F)) \tag{4.3}$$

が成り立つことに帰着される。

一方、Fourier 変換に対する Shalika 芽展開から

$$\hat{i}^G(X', X) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F))} g^G(X', \mathfrak{o}) \hat{i}^G(\mathfrak{o}, X) \tag{4.4}$$

が成り立つ。右辺の $\hat{\imath}^G(\mathfrak{o}), (\mathfrak{o} \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}(F)))$ たちは線型独立なので、有限族 $\{X_i\} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{rs}}(F)$ があって逆に

$$g^G(X,\mathfrak{o}) = \sum_i c_{\mathfrak{o}}(i)\hat{\imath}^G(X,X_i), \quad c_{\mathfrak{o}}(i) \in \mathbb{C}$$

と解くことができる。これを用いて (G,H) 芽は

$$\begin{aligned} g^{G,H}(X,\mathfrak{o}) =& \sum_i c_{\mathfrak{o}}(i) \sum_{X' \in X^G(F)/\mathrm{Ad}(G(F))} \Delta(Y,X')\hat{\imath}^G(X',X_i) \\ =& \gamma_\psi(\mathfrak{g}(F))^{-1}\sum_i c_{\mathfrak{o}}(i) D_{G,H}(Y,X_i) \end{aligned}$$

と展開される。ところが命題 4.4 によれば $D_{G,H}(Y,X_i)$ は

$$\frac{\tilde{D}_{G,H}(Y,X_i)}{\gamma_\psi(\mathfrak{h}(F))} = \sum_{\substack{Y' \in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F)) \\ Y'' \in \mathfrak{h}_{G\text{-rs}}(F)/\mathrm{Ad}(H(F))}} \frac{1}{|\mathfrak{D}(T_{Y''})|}\Delta(Y'',X_i)\hat{\imath}^H(Y',Y'')$$

X_i の像 Y_i を取って

$$= \sum_{Y' \in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))} \Delta(Y_i,X_i)\hat{\imath}^H(Y',Y_i)$$

H に対する (4.4) を使えば

$$\begin{aligned} &= \sum_{Y' \in Y^H(F)/\mathrm{Ad}(H(F))} \Delta(Y_i,X_i) \sum_{\mathfrak{o}_H \in \mathcal{N}(\mathfrak{h}(F))} \hat{\imath}^H(\mathfrak{o}_H,Y_i)g^H(Y',\mathfrak{o}_H) \\ &= \sum_{\mathfrak{o}_H \in \mathcal{N}(\mathfrak{h}(F))} \Delta(Y_i,X_i)\hat{\imath}^H(\mathfrak{o}_H,Y_i)g^{H,H}(Y,\mathfrak{o}_H) \end{aligned}$$

と書ける。すなわち (4.3) が示されてしまう。よって次が得られた。

系 4.5 (Waldspurger)**.** Lie 環の基本補題 (定理 4.3) が成り立てば、定理 3.1 は正しい。

また同じく Shalika 芽展開と [LS90] の結果を用いた議論により、定理 4.3 から Hecke 環の単位元に対する基本補題 (4.1) が従うことも示せる。よって後は Lie 環の基本補題を示せばよい。

4.3 正標数の場合

さらに Waldspurger は Lie 環の基本補題の証明において、p 進体 F を正標数の局所体で置き換えてよいことを証明した [Wal06]。なおこの主張だけについては Clucker-Loeser がより公理的な側面に限定した別証明を与えている [CL10]。この正標数の場合の Lie 環の基本補題は Laumon-Ngô のユニタリ群の場合の証明を経て、Bao Châu Ngô によって幾何的な手法を用いて証明された。その概要は 2010 年度 RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」でも紹介させていただいたので、興味のある読者の方はその講演スライド [Kon10] を参照されたい。

参考文献

[Art05] James Arthur. An introduction to the trace formula. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Vol. 4 of *Clay Math. Proc.*, pp. 1–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Ber84] J. N. Bernstein. Le “centre” de Bernstein. In *Representations of reductive groups over a local field*, pp. 1–32. Hermann, Paris, 1984. Edited by P. Deligne.

[Bor76] Armand Borel. Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup. *Invent. Math.*, Vol. 35, pp. 233–259, 1976.

[BT75] A. Borel and J. Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, Vol. 27, pp. 55–150, 1975.

[BT84] F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielle valuée. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 60, pp. 197–376, 1984.

[BZ76] I N Bernshtein and A V Zelevinskii. Representations of the group $\mathrm{GL}(n, K)$ where K is a local field. *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 31, No. 3, pp. 1–68, 1976.

[BZ77] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 10, No. 4, pp. 441–472, 1977.

[CL10] Raf Cluckers and François Loeser. Constructible exponential functions, motivic Fourier transform and transfer principle. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 171, No. 2, pp.

1011–1065, 2010.

[Clo89] Laurent Clozel. Orbital integrals on p-adic groups: a proof of the Howe conjecture. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 129, No. 2, pp. 237–251, 1989.

[Clo90] L. Clozel. The fundamental lemma for stable base change. *Duke Math. J.*, Vol. 61, pp. 255–302, 1990.

[Hal89] T. Hales. Shalika germs on $GSp(4)$. *Astérisque*, No. 171-172, pp. 195–256, 1989. Orbites unipotentes et représentations, II.

[Hal92] T. Hales. Orbital integrals on $U(3)$. In *The zeta functions of Picard modular surfaces*, pp. 303–333. CRM, Montreal, Quebec, 1992.

[Hal95] Thomas C. Hales. On the fundamental lemma for standard endoscopy: reduction to unit elements. *Canad. J. Math.*, Vol. 47, No. 5, pp. 974–994, 1995.

[HC57] Harish-Chandra. A formula for semisimple Lie groups. *Amer. J. Math.*, Vol. 79, pp. 733–760, 1957.

[HC70] Harish-Chandra. *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Vol. 162 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1970. Notes by G. van Dijk.

[HC99] Harish-Chandra. *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, Vol. 16 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. Preface and notes by Stephen DeBacker and Paul J. Sally, Jr.

[Hen83] Guy Henniart. La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, Vol. 11-12, pp. 1–186, 1983.

[Kon10] Takuya Konno. Fundamental lemma and its proof after bào châu ngô. 数理研研究集会「代数的整数論とその周辺」での講演スライド, 2010. `http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/modules/d3downloads/` からダウンロードできる。

[KS99] Robert E. Kottwitz and Diana Shelstad. Foundations of twisted endoscopy. *Astérisque*, No. 255, pp. vi+190, 1999.

[Lan83] R. P. Langlands. Orbital integrals on forms of $SL(3)$. *Amer. J. Math.*, Vol. 105, pp. 465–506, 1983.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, Vol. 31, No. 4, pp. 726–785, 1979.

[LS87] R. P. Langlands and D. Shelstad. On the definition of transfer factors. *Math. Ann.*, Vol. 278, No. 1-4, pp. 219–271, 1987.

[LS90] R. Langlands and D. Shelstad. Descent for transfer factors. In *The Grothendieck*

Festschrift, Vol. II, Vol. 87 of *Progr. Math.*, pp. 485–563. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Sat63] I. Satake. Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields. *Publ. Math. IHES*, Vol. 18, pp. 5–70, 1963.

[She82] D. Shelstad. l-indistinguishability for real groups. *Math. Ann.*, Vol. 259, pp. 385–430, 1982.

[Spr98] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pp. 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Tit79] J. Tits. Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, pp. 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wal88] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups I*, Vol. 132 of *Pure and Applied Math.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], San Diego, CA, 1988.

[Wal91] Jean-Loup Waldspurger. Le lemme fondamental implique le transfert. *Comp. Math.*, Vol. 3, No. 3, pp. 219–307, 1991.

[Wal06] J.-L. Waldspurger. Endoscopie et changement de caractéristique. *J. Inst. Math. Jussieu*, Vol. 5, No. 3, pp. 423–525, 2006.

[今野 11a] 今野拓也. 楕円項の安定化. 若槻聡, 平賀郁（編）, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集. 2011. この報告集.

[今野 11b] 今野拓也. 内視論入門. 若槻聡, 平賀郁（編）, 第 18 回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集. 2011. この報告集.