GL(2) **の跡公式**

都築 正男 AND 若槻 聡

導入：Selberg は論文 [36] において、不連続群の作用を持つ弱対称リーマン空間という非常に広汎な枠組みの中で、L^2-保型函数のなす無限次元ヒルベルト空間に作用する積分作用素の「跡公式」を定式化した。一つの基本的な場合に Selberg の跡公式を述べると次のようになる。$X = G/K$ が連結半単純リー群 G に付随する非コンパクト型リーマン対称空間、Γ が G の離散部分群で、基本領域 $\Gamma\backslash X$ がコンパクトなものとする。L^2-空間 $L^2(\Gamma\backslash X)$ 上には、G 上のコンパクト台を持つ両側 K-不変 smooth 函数 (= point-pair invariant) φ の合成積として積分作用素 $R_\Gamma(\varphi)$ が定義される。この作用素の跡 $\mathrm{tr}R_\Gamma(\varphi)$ は２通りの異なった方法で与えられる：

$$\sum_{\pi} m(\pi)\, J(\pi,\varphi) = \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} a(\gamma)\, J(\gamma,\varphi) \tag{0.1}$$

左辺は spectral side と呼ばれ、G のユニタリー表現 $L^2(\Gamma\backslash G)$ の既約分解（或いは、X 上の不変微分作用素環の同時スペクトル分解）による $\mathrm{tr}R_\Gamma(\varphi)$ の表示であり、既約ユニタリー表現 π の指標 $J(\pi,\varphi)$ の線型和で表される。右辺は geometric side と呼ばれ、Γ の共役類分割による $\mathrm{tr}R_\Gamma(\varphi)$ の幾何的な表示であり、Γ-共役類 $\{\gamma\}_\Gamma$ の決める G-共役類 $\{\gamma\}_G$ に沿った φ の軌道積分 $J(\gamma,\varphi)$ の線型和で表される。Selberg の定式化では、群の既約表現（不変微分作用素のスペクトル）集合と、群の共役類集合の間の「双対性」が等式 (0.1) を介して顕れており、この「指標と共役類の双対性」という観点はその後の跡公式や表現論の発展において非常に重要であった。

$\Gamma\backslash X$ がコンパクトでない場合、公式 (0.1) の両辺は「適切に」修正されなければならない。Selberg は、上半平面に作用する第一種フックス群に対して跡公式を明示的に計算し、それを Riemann zeta 函数に対する Weil の明示公式と対置的に考察することによって有名な Selberg zeta 函数を導入した (権 [16] 参照)。リーマン面 $\Gamma\backslash X$ に対する Selberg 跡公式は、その後、[9] や [22] によって代数群 GL(2) のアデール化の枠組みに拡張された。これらの公式において「テスト函数」φ を特別なものに選べば、正則楕円保型形式の空間の次元公式やヘッケ作用素の跡を計算する公式なども導かれる。

X のランクが大きくなるにつれて、状況は著しく困難さを増す。まず、spectral side の導出に必要不可欠な $L^2(\Gamma\backslash G)$ の分解は、Langlands による一般 Eisenstein 級数の理論構築の結果として達成された ([28])。これを出発点とし、Langlands が提出した「函手性予想」([30]) や志村多様体の Hasse-Weil zeta 函数の計算などがおそらく強い動機付けとなり、１９７０年代終わり以降約３０年間に亘って James Arthur は跡公式に関する一連の研究を行った。その恩恵として、今や、代数体上定義された簡約代数群とそのアデール化の枠組みの中で、等式 (0.1) に対する一群の「適切な修正形」が得られており、これらは Arthur-Selberg の跡公式と総称されることが多い。(「適切な修正形」がいかにあるべきかは、研究過程で次第に認識されていき、目的に応じて「不変跡公式」([4], [5]) や「安定化跡公式」([29]) など様々なバージョンが派生した。詳しくは、[6] およびその文献表をご参照いただきたい。)

さて、この小論の目的は、トーラスついで最も基本的な簡約代数群 GL(2) に対する Arthur-Selberg の跡公式を解説することである。 各章の詳しい内容は次のとおりである。

- 第１章では、基本的な記号を準備した後、代数体の局所化とアデール化に伴う様々な位相群上のハール測度を固定する。

- 第２章では、局所コンパクトアーベル群とその格子に対する Poisson 和公式を復習する。この公式を代数体 F のイデール群 $\mathbb{A}^\times$ に特殊化したものが、上で述べた枠組みの中では F-代数群 GL(1) の Selberg 跡公式と見做せることを説明する。
- 第３章では、４章以下で展開される GL(2) のスペクトル理論と跡公式の導出に際して基本となる群やその上のハール測度を導入する。特に、アデール群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ のハール測度を岩澤分解に伴う積分公式によって固定する。
- 第４章では、$L^2(\mathrm{GL}(2,F)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})^1)$ の既約分解の連続スペクトルをアイゼンスタイン級数と大域絡作用素の理論を使って具体的に記述する。主結果は 4.4 節で述べられる。副産物として、アデール的な「基本領域」$\mathrm{GL}(2,F)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})^1$ の体積の明示公式が得られる（系５０）。
- 第５章は、第４章で使われたアイゼンシュタイン級数の基本性質を導出する。いろいろな方法が知られているが、ここでは、所謂、Iwasawa-Tate 理論に帰着させる方法を紹介する。
- 第６章では、GL(2) に対する Arthur-Selberg の跡公式を導出する。Gelbart-Jacquet のサーベイ論文 [13] や Gelbart の MSRI 講義録 [12] などがあるが、ここではこれらをベースにしつつも、一般の場合の Arthur の論文 [2], [3] により自然に接続されるように配慮した。
- 第７章は、第６章で得られた一般の跡公式から、テスト函数を特殊化することによって、応用上有用な公式をいくつか紹介する。応用に関しては本報告集の伊吹山 [20] と都築 [39] を参照されたい。

謝辞. 今回の「GL(2) の跡公式」の講演および原稿の作成において色々と協力してくださったサマースクールの講演者の方々に感謝を申し上げます。

Contents

1. 基本的な記号とハール測度

- $\mathbb{Z}$ を整数環、$\mathbb{Q}$ を有理数体、$\mathbb{R}$ を実数体、$\mathbb{C}$ を複素数体とする。$\mathbb{C}$ 上の絶対値を $|\ \ |$ とする: $|z|^2 = z\,\bar{z}$. 可換環 R に対して、その可逆元全体のなす群を $R^\times$ と書く。$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$ に対して $(\mathbb{R}^\times)^0$ を正の実数全体 ($\mathbb{R}^\times$ の 1 を含む連結成分) とする.
- F を有限次代数体、その整数環を $\mathfrak{O}$ とする。F のアルキメデス素点全体の集合を $\Sigma_\infty = \Sigma_\mathbb{R} \cup \Sigma_\mathbb{C}$, 有限素点全体の集合を Σ_{fin}、$\Sigma = \Sigma_\infty \cup \Sigma_{\mathrm{fin}}$ を素点全体の集合とする。
- 有限素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対し、$\mathfrak{O}_v$ を完備化 F_v の整数環、$\mathfrak{p}_v$ を $\mathfrak{O}_v$ の極大イデアル、ϖ_v を $\mathfrak{p}_v$ の生成元とし、剰余体 $\mathfrak{O}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数を q_v とかく: $q_v = \sharp(\mathfrak{O}_v/\mathfrak{p}_v)$.
- 完備化 $F_v\ (v \in \Sigma_\infty)$ の直積環を F_∞ とする: $F_\infty = \prod_{v\in\Sigma_\infty} F_v$. F のアデール環を $\mathbb{A}$ とすれば、$\mathbb{A}$ は有限アデール全体の環 $\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$ と F_∞ の直積に分解される: $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\mathrm{fin}}$.
- $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ の非自明指標 $\psi_\mathbb{Q}$ を Tate に従って固定して、$\psi_F = \psi_\mathbb{Q} \circ \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}$ とおく。$\psi_{F,v}$ に関する F_v の自己双対的ハール測度を $\mathrm{d}x_v$ とする。$F_v/\mathbb{Q}_p$ の diffenrential exponent d_v を
$$\{\xi \in F_v |\, \psi_{F,v}(\xi\mathfrak{O}_v) = \{1\}\,\} = \mathfrak{p}_v^{-d_v}$$
で定義すると、$\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v) = q_v^{-d_v/2}$ となる。$\mathbb{A}$ のハール測度 $\mathrm{d}x$ は ψ_F に関する自己双対的なものを固定する。すると、$\mathrm{d}x = \otimes_v \mathrm{d}x_v$ である。Δ_F を拡大 $F/\mathbb{Q}$ の絶対判別式とする。$\Delta_F = \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} q_v^{d_v}$ である。
- 素点 $v \in \Sigma$ に対して $|\ \ |_v$ を正規付値とする。ハール測度 $\mathrm{d}x_v$ と $a \in F_v^\times$ に対して $\mathrm{d}(ax_v) = |a|_v\, \mathrm{d}x_v$ が成り立つ。
- イデール群 $\mathbb{A}^\times$ 上のイデールノルムを $|\ \ |_\mathbb{A} = \prod_v |\ \ |_v$ で定める。任意の $t \in \mathbb{A}^\times$ について $\mathrm{d}(tx) = |t|_\mathbb{A}\, \mathrm{d}x$ が成り立つ。そして、
$$\mathbb{A}^1 = \{x \in \mathbb{A}^\times \mid |x|_\mathbb{A} = 1\}$$
と置く。このとき、$F^\times \subset \mathbb{A}^1$ であり、商群 $F^\times\backslash\mathbb{A}^1$ はコンパクトである。また、$\mathbb{A}^\times \cong \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{R}^\times)^0$ が成り立つ。
- 離散集合については、counting measure により測度を定める。
- 素点 $v \in \Sigma_\infty$ についての $F_v^\times$ 上のハール測度 $\mathrm{d}^\times x_v$ を $\dfrac{\mathrm{d}x_v}{|x|_v}$ により定める。
- 素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ についての $F_v^\times$ 上のハール測度 $\mathrm{d}^\times x_v$ を $(1-q_v^{-1})^{-1}\dfrac{\mathrm{d}x_v}{|x|_v}$ により定める。
- イデール群 $\mathbb{A}^\times$ 上の測度は $F_v^\times$ のハール測度の積測度により定める. $\mathbb{A}^1$ 上の測度を $\mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^\times/(\mathbb{R}^\times)^0$ による商測度によって定める。

集合 X 上の 2 つの正値函数 $f(x), g(x)$ に対して、定数 $C > 0$ が存在して $f(x) \leqslant C\, g(x)\ (\forall x \in X)$ が成り立つとき $f(x) \ll g(x)\ (x \in X)$ と書く。$f(x) \ll g(x)$, $g(x) \ll f(x)$ が同時に成り立つならば、$f(x) \asymp g(x)\ (x \in X)$ と書く。

2. ポアソン和公式と GL(1) の跡公式

まず、局所コンパクトアーベル群の枠組みにおいて、ポアソン和公式を想起しよう。

H を局所コンパクトアーベル群、$\Gamma \subset H$ をその格子（即ち、離散部分群であって商群 $\Gamma\backslash H$ がコンパクトなもの）とする。$\mathrm{d}h$ を H のハール測度とすれば、$\Gamma\backslash H$ の H-不変測度 $\mathrm{d}\dot{h}$ で
$$\int_H f(h)\,\mathrm{d}h = \int_{\Gamma\backslash H} \left\{ \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma h) \right\} \mathrm{d}\dot{h}, \qquad f \in L^1(H)$$

を満たすものが決まる。$\int_{\Gamma\backslash H} \mathrm{d}\dot{h} = 1$ となるようにハール測度 $\mathrm{d}h$ を正規化することが出来る。

$\hat{H}$ を H のポントリャーギン双対群とする。これは、開コンパクト位相によって局所コンパクトアーベル群になり、

$$\Gamma^{\perp} = \{\chi \in \hat{H} |\, \chi(\gamma) = 1\, (\forall \gamma \in \Gamma)\, \}$$

は $\hat{H}$ の格子である。

可積分函数 $f \in L^1(H)$ の指標 $\chi \in \hat{H}$ におけるフーリエ変換 $\hat{f}(\chi)$ は

$$\hat{f}(\chi) = \int_H f(h)\, \chi(h)\, \mathrm{d}h$$

で定義される。以上の準備のもとで、Poisson の和公式は次のように述べられる。

$f : H \to \mathbb{C}$ は連続函数であって、次の条件を満たすとする。

- $\sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma h)|$ は $h \in H$ に関して広義一様収束する。
- $\sum_{\chi\in\Gamma^{\perp}} |\hat{f}(\chi)| < +\infty.$

このとき、ポアソン和公式

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) = \sum_{\chi\in\Gamma^{\perp}} \hat{f}(\chi)$$

が成り立つ。特に $H = \mathbb{A}$ かつ $\Gamma = F$ の場合は、$y \in F$ に対して

$$\hat{f}(y) = \int_F f(x)\, \psi_F(xy)\, \mathrm{d}x$$

とすると、$f \in C_c^{\infty}(\mathbb{A})$ に対してポアソン公式

$$\sum_{x\in F} f(x) = \sum_{y\in F} \hat{f}(y) \tag{2.1}$$

を得る。

$\mathrm{GL}(1, \mathbb{A}) = \mathbb{A}^{\times}$ の跡公式は $H = \mathbb{A}^1$ かつ $\Gamma = F^{\times}$ の場合のポアソン和公式である。$L^2(F^{\times}\backslash\mathbb{A}^1)$ 上の右正則表現 $R_{F^{\times}}$ を $(R_{F^{\times}}(a)\Phi)(x) = \Phi(xa),\ a \in \mathbb{A}^1,\ \Phi \in L^2(F^{\times}\backslash\mathbb{A}^1)$ によって定める。このとき、$R_{F^{\times}}$ の既約分解（スペクトル分解）

$$R_{F^{\times}} \cong \hat{\bigoplus}_{\chi\in(F^{\times})^{\perp}} \mathbb{C}\cdot\chi$$

が成り立ち、さらに、$f \in C_c^{\infty}(\mathbb{A}^1)$ について $\mathrm{GL}(1)$ の跡公式

$$\sum_{\gamma\in F^{\times}} \mathrm{vol}(F^{\times}\backslash\mathbb{A}^1)\cdot f(\gamma) = \sum_{\chi\in(F^{\times})^{\perp}} \hat{f}(\chi) \tag{2.2}$$

が成り立つ。ただし、等式の $\mathrm{vol}(F^{\times}\backslash\mathbb{A}^1)$ はすでに固定したハール測度に依存して現れた。等式の左側が幾何サイド、右側がスペクトルサイドと呼ばれる。

3. GL(2) に関する記号とハール測度

F 上の代数群 G, P, M, N, Z を、任意の可換 F-代数 R に対して R-有理点が

$$G(R) = \mathrm{GL}(2, R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R,\ ad - bc \in R^\times \right\},$$
$$Z(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R^\times \right\},$$
$$M(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R^\times \right\},$$
$$N(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in R \right\},$$
$$P(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R^\times,\ b \in R \right\}$$

となるものとして定める。Z は G の中心である。$P(R) = M(R)N(R)$ が成り立ち、P は G の放物的部分群と呼ばれる。M を P の Levi 部分群、N を P の unipotent radical と呼ぶ。

アルキメデス素点 $v_0 \in \Sigma_\infty$ を一つ固定して、$y > 0$ に対して、$\underline{y}$ を $\underline{y}_{v_0} = y$, $\underline{y}_v = 1$ $(\forall v \neq v_0)$ なるイデールとする。そして、$G(\mathbb{A})$ の部分群 Z_∞^+ と M_∞^+ を

$$Z_\infty^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{y} & 0 \\ 0 & \underline{y} \end{pmatrix} \mid y \in (\mathbb{R}^\times)^0 \right\}, \quad M_\infty^+ = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{y} & 0 \\ 0 & \underline{y'} \end{pmatrix} \mid y,\, y' \in (\mathbb{R}^\times)^0 \right\}$$

とする。H を $\mathbb{Q}$ 上の代数群としたとき、A_H を H の maximal $\mathbb{Q}$-split central torus とする。スカラーの制限により $G(F)$ も $M(F)$ も $\mathbb{Q}$ 上の代数群として見ることができ、A_G と A_M が定義される。位相群 L に対して、その単位元の連結成分を L^0 で表す。特に

$$A_G(\mathbb{R})^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G(F_\infty) \mid a \in (\mathbb{R}^\times)^0 \right\} \cong (\mathbb{R}^\times)^0 \cong Z_\infty^+,$$
$$A_M(\mathbb{R})^0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G(F_\infty) \mid a, d \in (\mathbb{R}^\times)^0 \right\} \cong (\mathbb{R}^\times)^0 \times (\mathbb{R}^\times)^0 \cong M_\infty^+$$

となる。ただし、$(\mathbb{R}^\times)^0$ を対角埋め込みで $F_\infty^\times$ の部分群と見ている。

$G(\mathbb{A})$, $M(\mathbb{A})$ の閉部分群 $G(\mathbb{A})^1$, $M(\mathbb{A})^1$ を

$$G(\mathbb{A})^1 = \{ g \in G(\mathbb{A}) \mid |\det g|_{\mathbb{A}} = 1 \}, \qquad M(\mathbb{A})^1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M(\mathbb{A}) \mid |a|_{\mathbb{A}} = |d|_{\mathbb{A}} = 1 \right\}$$

で定義する。このとき、$G(\mathbb{A}) \cong G(\mathbb{A})^1 \times A_G(\mathbb{R})^0 \cong G(\mathbb{A})^1 \times Z_\infty^+$ と $M(\mathbb{A}) \cong M(\mathbb{A})^1 \times A_M(\mathbb{R})^0 \cong M(\mathbb{A})^1 \times M_\infty^+$ が成り立つ。

$G(F_v)$ の極大コンパクト部分群として

$$\mathbf{K}_v = \begin{cases} \mathrm{GL}(2, \mathfrak{O}_v), & (v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}), \\ \mathrm{O}(2) := \{ g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid g\, {}^t g = I_2 \}, & (v \in \Sigma_\infty,\ F_v \cong \mathbb{R}), \\ \mathrm{U}(2) := \{ g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \mid g\, {}^t \bar{g} = I_2 \}, & (v \in \Sigma_\infty,\ F_v \cong \mathbb{C}) \end{cases}$$

と定める。$\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$ は $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群である。このとき、岩澤分解

$$G(F_v) = P(F_v)\mathbf{K}_v \quad \text{and} \quad G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})\mathbf{K}$$

が成り立つ。

$g \in G(\mathbb{A})$ について、

$$g = nmak, \quad n \in N(\mathbb{A}),\ m \in M(\mathbb{A})^1,\ a \in M_\infty^+,\ k \in \mathbf{K}$$

と分解できる。特に、a は一意的に定まる。$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & \underline{a_2} \end{pmatrix} \in M_\infty^+$, a_1, $a_2 \in (\mathbb{R}^\times)^0$ として、

$$H(g) := \log \frac{a_1}{a_2}$$

により連続写像 $H : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}$ を定義する。$H(g) = H(nma) = H(ma) = H(a)$ に注意する。

$$\delta_P(g) = e^{H(g)} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad (g \in G(\mathbb{A}))$$

によって $G(\mathbb{A})$ 上の関数 δ_P を定義する。δ_P を $P(\mathbb{A})$ に制限した関数は P の module と呼ばれる。自然な埋め込みにより、H と δ_P は $G(F)$ や $G(F_v)$ 上の関数となる。

$N(F_v)$, $M(F_v)$ のハール測度 $\mathrm{d}n$, $\mathrm{d}h$ を同型 $N(F_v) \cong F_v$, $M(F_v) \cong F_v^\times \times F_v^\times$ によって

$$\begin{aligned} \mathrm{d}n &= \mathrm{d}b, \qquad \text{if}\, n = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in N(F_v), \\ \mathrm{d}h &= \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2, \qquad \text{if}\, h = \left[\begin{smallmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{smallmatrix}\right] \in M(F_v), \end{aligned}$$

として定める。(ただし、$\mathrm{d}b$ は F_v のハール測度, $\mathrm{d}^\times t_1$, $\mathrm{d}^\times t_2$ は $F_v^\times$ のハール測度である。いずれも上で決めたように正規化されたもの。)そして、$P(F_v)$ 上の左ハール測度 $\mathrm{d}p$ が

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p &= \mathrm{d}h\mathrm{d}n = \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2\, \mathrm{d}b, \qquad \text{if}\, p = hn \in P(F_v) \\ &= \delta_P(p)^{-1}\, \mathrm{d}n\mathrm{d}h = \left|\frac{t_2}{t_1}\right|_v \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2, \qquad \text{if}\, p = nh \in P(F_v) \end{aligned}$$

によって定められる。

$G(F_v)$ 上のハール測度を定めよう。$\mathrm{vol}(\mathbf{K}_v) = 1$ により正規化された $\mathbf{K}_v$ 上のハール測度を $\mathrm{d}k$ とする。元 $g \in G(F_v)$ は

$$g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} k, \quad b \in F_v, \quad t_1, t_2 \in F_v^\times, \quad k \in P(F_v) \cap \mathbf{K}_v \backslash \mathbf{K}_v$$

と一意的に岩澤分解されるので,

$$\mathrm{d}g = \left|\frac{t_2}{t_1}\right|_v \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2\, \mathrm{d}k'$$

($\mathrm{d}k'$ は $\mathrm{d}k$ と $P(F_v) \cap \mathbf{K}_v$ 上の $\mathrm{vol}(P(F_v) \cap \mathbf{K}_v) = 1$ により正規化されたハール測度による $P(F_v) \cap \mathbf{K}_v \backslash \mathbf{K}_v$ 上の商測度)により $G(F_v)$ 上のハール測度 $\mathrm{d}g$ が定まる。このとき、$G(F_v)$ 上のテスト関数 f について、

$$\int_{G(F_v)} f(g)\, \mathrm{d}g = \int_{\mathbf{K}_v} \int_{F_v^\times} \int_{F_v^\times} \int_{F_v} f(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} k) \left|\frac{t_2}{t_1}\right|_v \mathrm{d}b\, \mathrm{d}^\times t_1\, \mathrm{d}^\times t_2\, \mathrm{d}k$$

が成り立つことが分かる。

局所的な場合と同様にして、$N(\mathbb{A})$, $M(\mathbb{A})$ には同型 $N(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}$, $M(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times$ によって、$\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times$ の測度を移送する。他の $Z(\mathbb{A})$ や $A_M(\mathbb{R})^0$ や $M(\mathbb{A})^1$ などに関しても同様である。さらに Z_∞^+ や M_∞^+ にも同様に $(\mathbb{R}^\times)^0$ の測度を移送する。$\mathbf{K}$ 上のハール測度をその $\mathbf{K}_v$ のハール測度の積測度によって定める。明らかに $\mathrm{vol}(\mathbf{K}) = 1$ である。$G(\mathbb{A})$ 上の測度は上述で定めた $G(F_v)$ の測度による積測度で定める。$G(\mathbb{A})^1$ については $G(\mathbb{A})^1 \cong G(\mathbb{A})/Z_\infty^+$ による商測度によって測度 $\mathrm{d}^1 g$ を定める。$M(\mathbb{A})^1$ についても $M(\mathbb{A})^1 \cong M(\mathbb{A})/M_\infty^+$ による商測度によって測度 $\mathrm{d}^1 m$ を定める。$a \in (\mathbb{R}^\times)^0$ についてアンダーラインを略して $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_\infty^+/Z_\infty^+$

とする。すると、岩澤分解に関して次の積分公式が成立する：$G(\mathbb{A})$ 上のテスト関数 f について、

$$\int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\,\mathrm{d}^1 g$$
$$= \int_{n\in N(\mathbb{A})}\int_{a>0}\int_{m\in M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}} f(n \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m\,k)\, a^{-1}\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}^{\times}a\,\mathrm{d}^1 m\,\mathrm{d}k$$

となる。以後、似たような $g\in G(\mathbb{A})$ についての分解においては、特に断らない限り $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_\infty^+/Z_\infty^+$ とする。

最後に普遍包絡環に関する記号を定めておこう。$\mathfrak{g}$ を $G(F_\infty)$ の Lie 環の複素化とし、$U(\mathfrak{g})$ をその普遍包絡環とし、$Z(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{g})$ の中心とする。$U(\mathfrak{g})$ の詳細については [24] など実 Lie 群の表現論の本を参照されたい。

4. GL(2) のスペクトル理論

4.1. **準備.** • 直積分解 $G(\mathbb{A}) = Z_\infty^+\,G(\mathbb{A})^1$ から得られる同一視 $Z_\infty^+\backslash G(\mathbb{A}) \cong G(\mathbb{A})^1$ によって $G(\mathbb{A})^1$ 上の函数を対応する $G(\mathbb{A})$ 上の Z_∞^+-不変函数と区別しないで考える。

• 任意の $q > 1$ に対して、$\mathcal{L}^q = L^q(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1; \mathrm{d}^1 g)$ を次の条件を満たす可測函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の同値類（零集合の補集合上一致するものを同一視）全体のなす空間とする：

(i) $f(\gamma z g) = f(g), \qquad \gamma\in G(F),\, z\in Z_\infty^+,\, g\in G(\mathbb{A})^1,$

(ii) $\|f\|_{G,q} := \left(\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |f(g)|^q\,\mathrm{d}^1 g\right)^{1/q} < +\infty.$

函数 $f_1,\, f_2 : G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \to \mathbb{C}$ のエルミート pairing$\langle f_1|f_2\rangle_G$ を

$$\langle\, f_1 \,|\, f_2 \,\rangle_G = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f_1(g)\bar{f}_2(g)\,\mathrm{d}^1 g \tag{4.1}$$

で定義する。付随するノルムは $\|f\|_G = \langle\, f \,|\, f\,\rangle_G^{1/2}$ である。

• 函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ は次の条件を満たすとき smooth であるといわれる：

(i) ある開部分群 $K \subset \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ が存在して、$f(gk) = f(g)$ $(\forall k\in K, \forall g\in G(\mathbb{A}))$ となる。
(ii) 任意の $g_{\mathrm{fin}} \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ に対して、$G(F_\infty)$ 上の函数 $g_\infty \mapsto f(g_\infty g_{\mathrm{fin}})$ は C^∞-級である。

• 函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ の $g\in G(\mathbb{A})$ による右移動 $R(g)f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, 左移動 $L(g)f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ をそれぞれ次で定義する：

$$[R(g)f](h) = f(hg), \quad [L(g)f](h) = f(g^{-1}h), \qquad h\in G(\mathbb{A})^1$$

$H \subset G(\mathbb{A})$ を閉部分群とする。函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が条件

$$\dim_{\mathbb{C}}\langle R(h)f \,|\, h\in H\,\rangle_{\mathbb{C}} < \infty$$

を満たすとき右 H-有限であるという。同様に左 H-有限性は条件 $\dim_{\mathbb{C}}\langle L(h)f \,|\, h\in H\,\rangle_{\mathbb{C}} < \infty$ で定義される。

• $\mathrm{vol}_G = \mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$, $\mathrm{vol}_M = \mathrm{vol}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1)$ とおく。

4.1.1. *Hecke* 環. $v \in \Sigma$ とする。左 $\mathbf{K}_v$-有限かつ右 $\mathbf{K}_v$-有限な、コンパクト台を持つ smooth 函数 $\varphi : G(F_v) \to \mathbb{C}$ 全体 $\mathcal{H}(G(F_v))$ は合成積によって (単位元を持たない) $\mathbb{C}$-代数になる。これを v における局所 Hecke 環と呼ぶ。$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば $\mathbf{K}_v$ の特性函数 φ_v° は $\mathcal{H}(G(F_v))$ の冪等元になる。

$$\varphi(g) = \prod_v \varphi_v(g_v), \qquad g = (g_v) \in G(\mathbb{A}),$$
$$(\varphi_v \in \mathcal{H}(G(F_v)) \text{ で、殆ど全ての素点では } \varphi_v = \varphi_v^\circ)$$

の形を持つ $G(\mathbb{A})$ 上の函数 φ の有限 $\mathbb{C}$-線型結合全体を $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ とすると、これは $G(\mathbb{A})^1$ 上の合成積によって $L^1(G(\mathbb{A})^1)$ の部分 $\mathbb{C}$-代数になる。$\mathbb{C}$-代数 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を $G(\mathbb{A})$ の大域ヘッケ環と呼ぶ。$\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して、$\varphi^* \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を

$$\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g^{-1})} \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

で定義する。$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は単位元を持たないことに注意しよう。

• 左 $Z_\infty^+ G(F)$-不変かつ右 $\mathbf{K}$-有限な smooth 函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 全体の空間を $\mathcal{C}_G$ とする。この空間にはヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ が右移動 R によって自然に作用する：

$$[R(\varphi)f](g) = \int_{G(\mathbb{A})^1} f(gx)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}^1 x = f * \check{\varphi}(g), \qquad \varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})), \quad g \in G(\mathbb{A}) \tag{4.2}$$

4.1.2. ジーゲル領域. 相対コンパクト集合 $\omega \subset N(\mathbb{A})\,M(\mathbb{A})^1$ と正数 t に対して、

$$\mathfrak{S}(\omega, t) = \omega \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right] \in A_M(\mathbb{R})^0 \middle|\, a_1/a_2 > t \right\} \mathbf{K}$$

の形をもつ $G(\mathbb{A})$ の部分集合をジーゲル領域と呼ぶ。ω を $P(F)\,\omega = N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^1$ となるようにとるとき、次の性質を満たす t_0 の存在が知られている ([23, Corollary 7.9, Proposition 7.10], [22, §10])：

(1) $G(\mathbb{A}) = G(F)\,\mathfrak{S}(\omega, t_0)$
(2) $\sharp\{\gamma \in G(F) |\, \gamma\mathfrak{S}(\omega, t_0) \cap \mathfrak{S}(\omega, t_0) \neq \varnothing\} < +\infty$

以下、このような $\mathfrak{S}(\omega, t_0)$ を固定して簡単に $\mathfrak{S}$ と書く。

補題 1. 左 $Z_\infty^+ G(F)$-不変可側函数 $f : G(\mathbb{A}) \to [0, \infty)$ が、ある定数 $b \in \mathbb{R}$ に対して評価

$$f(g) \ll \delta_P(g)^b, \qquad g \in \mathfrak{S}$$

を満たすとする。$b < 1$ であれば $f \in \mathcal{L}^1$ である。

Proof : $\eta_{\mathfrak{S}}$ を $\mathfrak{S}$ の特性函数として、$\Phi(g) = \sum_{\gamma \in G(F)} \eta_{\mathfrak{S}}(\gamma g)$ とおく。上の性質 (a), (b) から $\Phi(g)$ は有限和であって $\Phi(g) \geqslant 1\,(\forall g \in G(\mathbb{A}))$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
\int_{Z_\infty^+ G(F)\backslash G(\mathbb{A})} f(g)\,\mathrm{d}g &\leqslant \int_{Z_\infty^+ G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \Phi(g)\,f(g)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_{Z_\infty^+ \backslash \mathfrak{S}} f(g)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_{u\in\omega} \int_{t_0}^\infty \int_{k\in\mathbf{K}} f\left(u \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] k\right)\, a^{-1}\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k \ll \int_{t_0}^\infty a^{b-1}\,\mathrm{d}^\times a
\end{aligned}$$

最後の積分は $b < 1$ ならば収束する。□

とくに、体積 $\mathrm{vol}(Z_\infty^+ G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ は有限になる。この値は系 52 で決定される。

4.2. L^2**-空間.** L^2-空間 $\mathcal{L}^2$ は内積 (4.1) に関して可分ヒルベルト空間になり、$G(\mathbb{A})$ を右移動 R

$$[R(g)f]\,(x) = f(xg), \qquad g \in G(\mathbb{A}),\ f \in \mathcal{L}^2.$$

によって作用させることによって、$(R, \mathcal{L}^2)$ は $G(\mathbb{A})$ のユニタリー表現を与える。当面の目標は、ユニタリー表現 $(R, \mathcal{L}^2)$ を $G(\mathbb{A})$ の既約表現の直和に分解することである。

さて、$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は (4.2) によって $\mathcal{L}^2$ に作用する。

命題 2. $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $f \in \mathcal{L}^2$ に対して、

$$\|R(\varphi)f\|_G \leqslant \|\varphi\|_{G(\mathbb{A})^1,1}\,\|f\|_G$$

が成り立つ。ただし、$\|\varphi\|_{G(\mathbb{A})^1,1} = \int_{G(\mathbb{A})^1} |\varphi(g)|\,\mathrm{d}g$ である。$R(\varphi) : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ は有界線型作用素になる。

$$K^\varphi(g,h) = \sum_{\gamma \in G(F)} \varphi(g^{-1}\gamma h), \qquad g,\ h \in G(\mathbb{A}) \tag{4.3}$$

は局所一様絶対収束して、任意の $g \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$[R(\varphi)f](g) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} K^\varphi(g,h)\,f(h)\,\mathrm{d}^1h, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

Proof : Cauchy-Schwartz 不等式を使うと、

$$\begin{aligned}
\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |\,[R(\varphi)f]\,(g)\,|^2\,\mathrm{d}^1g &\leqslant \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \left| \int_{G(\mathbb{A})^1} |f(gh)\,\varphi(h)|\,\mathrm{d}^1h \right|^2 \mathrm{d}^1g \\
&\leqslant \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \left(\int_{G(\mathbb{A})^1} |f(gh)|^2 |\varphi(h)|\,\mathrm{d}^1h \right) \left(\int_{G(\mathbb{A})^1} |\varphi(h)|\,\mathrm{d}^1h \right) \mathrm{d}^1g \\
&= \|\varphi\|_{G(\mathbb{A})^1,1} \int_{G(\mathbb{A})^1} \left(\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |f(gh)|^2\,\mathrm{d}^1g \right) |\varphi(h)|\,\mathrm{d}^1h \\
&= \|\varphi\|^2_{G(\mathbb{A})^1,1}\,\|f\|^2_G
\end{aligned}$$

これより、命題の前半部分が従う。

$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset G(\mathbb{A})^1$ をコンパクト集合とする。$\omega_\varphi = \mathrm{supp}(\varphi)$ とおくと、$\mathcal{U}_1\omega_\varphi\mathcal{U}_2^{-1}$ は $G(\mathbb{A})^1$ でコンパクトだから、$I = G(F) \cap \mathcal{U}_1\,\omega_\varphi\,\mathcal{U}_2^{-1}$ は有限集合であり、

$$K^\varphi(g,h) = \sum_{\gamma \in I} \varphi(g^{-1}\gamma h), \quad (g,h) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$$

となる。よって、特に (4.3) は広義一様絶対収束である。次の変形より命題の最後の主張が従う：

$$\begin{aligned}
[R(\varphi)f]\,(g) &= \int_{G(\mathbb{A})^1} f(gh)\varphi(h)\,\mathrm{d}^1h \\
&= \int_{G(\mathbb{A})^1} f(h)\varphi(g^{-1}h)\,\mathrm{d}^1h \\
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma h)\varphi(g^{-1}\gamma h)\,\mathrm{d}^1h \\
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \{\sum_{\gamma \in G(F)} \varphi(g^{-1}\gamma h)\}\,f(h)\,\mathrm{d}^1h \qquad (\because f \text{ は左 } G(F)\text{-不変})
\end{aligned}$$ □

定義 3. $K^\varphi(g,h)$ を $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対する核函数と呼ぶ。$\square$

4.3. **連続スペクトラムの構成.** 次の条件を満たす smooth 函数 $f : G(\mathbb{A})^1 \to \mathbb{C}$ 全体の空間を $\mathcal{C}_P$ とする：

(i) 左 $N(\mathbb{A})\,P(F)$-不変である。
(ii) 右 $\mathbf{K}$-有限である。

ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は右移動 (4.2) によってベクトル空間 $\mathcal{C}_P$ に自然に作用する。

4.3.1. アイゼンシュタイン級数とその定数項. $s \in \mathbb{C}$ に対して、次の条件を満たす函数 $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 全体の集合を $\mathbf{H}^0(s)$ とする：

(a) $f \in \mathcal{C}_P$
(b) f は左 $M(\mathbb{A})^1$-有限である。
(c) $f\left(\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] g\right) = a^{(s+1)/2}\, f(g), \qquad a \in (\mathbb{R}^\times)^0,\ g \in G(\mathbb{A}).$

$\mathbf{H}^0(s)$ は $\mathcal{C}_P$ の部分 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-加群であり、エルミート形式 $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}} : \mathbf{H}^0(s) \times \mathbf{H}^0(-\bar{s}) \to \mathbb{C}$,

$$\langle f_1, f_2\rangle_{\mathbf{K}} = \mathrm{vol}_M^{-1} \int_{m \in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1} \int_{k \in \mathbf{K}} f_1\,(m\,k)\ \bar{f}_2\,(m\,k)\ \mathrm{d}m\,\mathrm{d}k, \quad f_1 \in \mathbf{H}^0(s),\ f_2 \in \mathbf{H}^0(-\bar{s})$$

は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-不変 pairing になる。i.e.,

$$\langle R(\varphi) f_1, f_2\rangle_{\mathbf{K}} = \langle f_1, R(\varphi^*) f_2\rangle_{\mathbf{K}}, \quad \varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

$s \in i\mathbb{R}$ ならば、この pairing $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}}$ は $\mathbf{H}^0(s)$ のエルミート内積を与える。

定義 4. $\mathrm{Re}(s) > 1,\ g \in G(\mathbb{A})$ とする。

- $f \in \mathbf{H}^0(s)$ に対して、

$$[M(s)f](g) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} f(w_0 n g)\,\mathrm{d}n \tag{4.4}$$

と定義する。ただし、$w_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

- $f \in \mathbf{H}^0(s)$ に対して、

$$E(f : g) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} f(\gamma g), \qquad g \in G(\mathbb{A}) \tag{4.5}$$

とおき、f に対応するアイゼンシュタイン級数と呼ぶ。$\square$

命題 5. (1) $\mathrm{Re}(s) > 1$ ならば級数 (4.5) は $g \in G(\mathbb{A})$ に関して広義一様絶対収束する。$E(f;-) \in \mathcal{C}_G$ である。対応 $f \mapsto E(f : -)$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素:

$$E : \mathbf{H}^0(s) \longrightarrow \mathcal{C}_G$$

を定める。

(2) $\mathrm{Re}(s) > 1$ ならば、$g \in G(\mathbb{A})$ を変数と見たとき、積分 (4.4) は広義一様に絶対収束して $\mathbf{H}^0(-s)$ に属する函数を定める。対応 $f \mapsto M(s)f$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素

$$M(s) : \mathbf{H}^0(s) \longrightarrow \mathbf{H}^0(-s)$$

になる。更に、$f_1 \in \mathbf{H}^0(s),\ f_2 \in \mathbf{H}^0(\bar{s})$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ に対して

$$\langle M(s) f_1, f_2\rangle_{\mathbf{K}} = \langle f_1, M(\bar{s}) f_2\rangle_{\mathbf{K}} \tag{4.6}$$

が成り立つ。$\square$

Proof : (1) 第5章の命題61および補題63から従う。$\square$
函数 $\varphi \in \mathcal{C}_G$ に対して、その（フーリエ展開の）定数項は

$$\varphi_P(g) = \int_{F\backslash\mathbb{A}} \varphi\left(\left[\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] g\right) \mathrm{d}x, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

で定義される。

命題 6. $f \in \mathbf{H}^0(s)$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ とすると、アイゼンシュタイン級数 $E(f; -)$ の定数項は

$$E(f)_P(g) = f(g) + [M(s)f](g), \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

で与えられる。$\square$

Proof : [38, 命題6] を参照せよ。$\square$

4.3.2. 擬アイゼンシュタイン級数. 次の条件を満たす函数 $\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $\mathcal{D}_P$ とする：

(a) $\phi \in \mathcal{C}_P$
(b) ϕ は左 $M(\mathbb{A})^1$-有限である。
(c) ϕ は $\mathrm{mod}\ Z_\infty^+\, N(\mathbb{A})\, P(F)$ でコンパクト台をもつ。つまり、コンパクト集合 $\omega_\phi \subset G(\mathbb{A})$ が存在して、

$$g \notin Z_\infty^+\, N(\mathbb{A})\, P(F)\, \omega_\phi \implies \phi(g) = 0 \quad \square$$

同様に、$\mathrm{mod}\ Z_\infty^+\, G(F)$ でコンパクト台を持つ函数 $\varphi \in \mathcal{C}_G$ の空間を $\mathcal{D}_G$ と定義する。
注意 : $\mathcal{D}_P$, $\mathcal{D}_G$ はそれぞれ $\mathcal{C}_P$, $\mathcal{C}_G$ の部分 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-加群になる。写像 $\varphi \mapsto \varphi_P$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素 $\mathcal{C}_G \longrightarrow \mathcal{C}_P$ である。

定義 7. $\phi \in \mathcal{D}_P$ に対して、

$$\theta_\phi(g) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \phi(\gamma g), \qquad g \in G(\mathbb{A}) \tag{4.7}$$

を ϕ に対応する擬アイゼンシュタイン級数と呼ぶ。$\square$

命題 8. (1) 級数 (4.7) は局所的には有限和である。即ち、$\mathcal{U} \subset G(\mathbb{A})$ を任意のコンパクト集合とすると、有限部分集合 $I(\mathcal{U}) \subset P(F)\backslash G(F)$ が存在して、

$$\theta_\phi(g) = \sum_{\gamma \in I(\mathcal{U})} \phi(\gamma g), \qquad g \in \mathcal{U}$$

となる。
(2) 函数 $\theta_\phi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ は函数空間 $\mathcal{D}_G$ に属する。特に、$\theta_\phi \in \mathcal{L}^q$ $(\forall q > 0)$ である。対応 $\phi \mapsto \theta_\phi$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素 $\theta : \mathcal{D}_P \to \mathcal{D}_G$ を与える。$\square$

Proof : コンパクト集合 $\omega_\phi \subset G(\mathbb{A})$ が存在して $\mathrm{supp}(\phi) \subset Z_\infty^+ P(F) N(\mathbb{A}) \omega_\phi$ となる。更に、$N(\mathbb{A}) = N(F)\mathcal{U}_N$ なるコンパクト集合 $\mathcal{U}_N$ をとれば、$\mathrm{supp}(\phi) \subset Z_\infty^+ P(F) \mathcal{U}_N \omega_\phi$ となる。$\pi : G(\mathbb{A}) \to Z_\infty^+ P(F)\backslash G(\mathbb{A})$ を自然な射影として

$$I(\mathcal{U}) = \pi\left[G(F) \cap (Z_\infty^+ P(F) \mathcal{U}_N \omega_\phi \mathcal{U}^{-1})\right]$$

とおくと、$I(\mathcal{U})$ は、$Z_\infty^+ P(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の離散部分集合 $P(F)\backslash G(F)$ と相対コンパクト部分集合 $\pi(\mathcal{U}_N \omega_\phi \mathcal{U}^{-1})$ の共通部分に一致する。よって、$I(\mathcal{U})$ は有限集合である。明らかに $\phi(\gamma g) = 0$ $(\forall g \in \mathcal{U}, \forall \gamma \notin I(\mathcal{U}))$ なので、(1) が従う。θ_ϕ が左 $Z_\infty^+ G(F)$-不変な smooth 函数なことは (1) より明らか。$\mathrm{supp}(\theta_\phi) \subset Z_\infty^+ G(F) \omega_\phi$ なので、$\theta_\phi \in \mathcal{D}_G$ が分かる。(2) の残りの主張は自明である。$\square$

定義 9. $\phi \in \mathcal{D}_P$ のフーリエ・ラプラス変換を

$$\hat{\phi}(s:g) = \int_0^{+\infty} \phi\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right)\, y^{-(s+1)/2}\, \mathrm{d}^\times y, \qquad g \in G(\mathbb{A}),\, s \in \mathbb{C} \tag{4.8}$$

で定義する。□

命題 10. (1) 任意のコンパクト集合 $\mathcal{U} \subset G(\mathbb{A})$ に対して、ある数 $t_{\mathcal{U}} > 1$ が存在して、

$$\phi\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right) = 0, \qquad \forall g \in Z_\infty^+ \mathcal{U}, \quad \forall y \notin [t_{\mathcal{U}}^{-1}, t_{\mathcal{U}}]$$

となる。特に、積分 (4.8) は (s, g) について広義一様収束する。

(2) $g \in G(\mathbb{A})$ を固定すると、$\hat{\phi}(s:g)$ は s について整型函数である。任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して、$\hat{\phi}(s:-) \in \mathbf{H}^0(s)$ である。□

Proof : (1) コンパクト集合 $\omega_\phi \subset G(\mathbb{A})$ を $\mathrm{supp}(\phi) \subset Z_\infty^+\, N(\mathbb{A})\, P(F)\, \omega_\phi$ となるようにとる。このとき、

$$\phi\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right) \neq 0 \quad \Longrightarrow \left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g \in Z_\infty^+ N(\mathbb{A}) P(F) \omega_\phi \quad \Longrightarrow y \in H(\omega_\phi)\, H(g)^{-1}$$

g がコンパクト集合 $\mathcal{U}$ を走るとき、$H(\omega_\phi)\, H(g)^{-1}$ は $(0, +\infty)$ 一定のコンパクト集合にとどまる。これより (1) が従う。

(2) の最初の主張は (1) より自明である。$\hat{\phi}(s:-) \in \mathbf{H}^0(s)$ を示そう。2.2.1 節の最初に述べた条件 (a), (b), (c) を確かめればよい。(c) は定義式 (4.8) から容易に従う。部分群 $T_\infty^+ = \{\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \mid y > 0\}$ が部分群 $N(\mathbb{A})$ を正規化し $M(\mathbb{A})^1$ とは可換なことから、左 $N(\mathbb{A})P(F)$-不変性と条件 (b) は積分変換 (4.8) の前後で保たれる。積分変換 (4.8) は群 T_∞^+ の左作用を経由して定義しているので、右 $\mathbf{K}$-有限性を保つ。□

命題 11. $\phi \in \mathcal{D}_P$ とする。任意の $m \in \mathbb{N}$ および任意の 2 つの実数 $\sigma_1 < \sigma_2$ に対して、

$$|\hat{\phi}(s:g)| \ll_{m,\sigma_1,\sigma_2} \delta_P(g)^{(\mathrm{Re}(s)+1)/2}\, (1 + |\mathrm{Im}(s)|)^{-m}, \qquad g \in G(\mathbb{A}),\, s \in [\sigma_1, \sigma_2] + i\,\mathbb{R}.$$

Proof : ϕ は右 $\mathbf{K}$-有限だから有限個の函数 $\phi_j \in \mathcal{D}_P$ および連続函数 $c_j : \mathbf{K} \to \mathbb{C}$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$ が存在して $R(k)\phi = \sum_{j=1}^d c_j(k)\, \phi_j$ $(\forall k \in \mathbf{K})$ となる。よって、

$$\phi\left(\left[\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] k\right) = \sum_{j=1}^d c_j(k)\, \phi_j\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right), \qquad t \in \mathbb{A}^\times,\, k \in \mathbf{K} \tag{4.9}$$

$g \in G(\mathbb{A})$ を岩澤分解によって

$$g = \left[\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} az & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right] m\, k, \qquad (x \in \mathbb{A},\, t \in \mathbb{A}^\times,\, a, z > 0,\, m \in M(\mathbb{A})^1,\, k \in \mathbf{K})$$

と書き、$\phi_j \in \mathcal{D}_P$ に注意しながら、(4.9) を使って積分を変形すると、

$$\hat{\phi}(s:g) = \sum_{j=1}^d c_j(k)\, a^{(s+1)/2}\, \alpha_j(s:m), \tag{4.10}$$

$$\text{ただし、} \qquad \alpha_j(s;m) = \int_0^\infty \phi_j\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] m\right)\, y^{-(s+1)/2}\, \mathrm{d}^\times y$$

となる。さて、微分作用素 $D = y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$ は、$Dy^{-(s+1)/2} = -\frac{s+1}{2}\, y^{-(s+1)/2}$ を満たすので、部分積分を m 回繰り返すことにより、

$$\left(-\frac{s+1}{2}\right)^m \alpha_j(s;m) = (-1)^m \int_0^{+\infty} \left\{D_y^m \phi_j\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] m\right)\right\}\, y^{-(s+1)/2}\, \mathrm{d}^\times y$$

を得る。ここで、部分積分の「留数項」は命題 10(1) より消滅することに注意せよ。これより、任意の帯領域 $[\sigma_1, \sigma_2] + i\,\mathbb{R}$ に対して、評価

$$|\alpha_j(s;m)| \ll_{\sigma_1,\sigma_2,m} (1+|\mathrm{Im}(s)|)^{-m}, \quad m \in M(\mathbb{A})^1,\, s \in [\sigma_1,\sigma_2] + i\,\mathbb{R} \tag{4.11}$$

が従う。$a = \delta_P(g)$ に注意すると、(4.10), (4.11) から

$$|\hat{\phi}(s:g)| \ll \sum_j |c_j(k)|\, a^{(\mathrm{Re}(s)+1)/2} (1+|\mathrm{Im}(s)|)^{-m} \ll \delta_P(g)^{(\mathrm{Re}(s)+1)/2} (1+|\mathrm{Im}(s)|)^{-m}$$

を得る。□

注意 ：命題 11 はあとで精密化される（命題 20）。

命題 12. $\phi \in \mathcal{D}_P$ とすると、次の「反転公式」が成立する：

$$\phi(g) = \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\phi}(s:g)\,\mathrm{d}s, \qquad g \in G(\mathbb{A}) \tag{4.12}$$

ただし、$c \in \mathbb{R}$ は任意の実数で、積分路は垂直線 $\mathrm{Re}(s) = c$ に虚数部分が増加するように向き付ける。

Proof: $s = 4\pi i\tau$ $(\tau \in \mathbb{R})$ とすると、

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(s:g) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \phi\left(\left[\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right)\, y^{-(s+1)/2}\,\mathrm{d}^\times y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\left[\begin{smallmatrix} e^r & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right)\, e^{-(s+1)r/2}\mathrm{d}r \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(r)\, \exp(2\pi i r\tau)\,\mathrm{d}r = \hat{f}(\tau)
\end{aligned}$$

ただし、$f(r) = e^{-r/2}\,\phi\left(\left[\begin{smallmatrix} e^r & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] g\right)$ とおいた。Fourier 反転公式から

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(r)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(s:g)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \hat{\phi}(s:g)\,\mathrm{d}s$$

矩形領域 $Q_R = \{s \in \mathbb{C} |\, |\mathrm{Im}(s)| \leqslant R,\, 0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant c\}$ の周を半時計回りに周回する道に対して Cauchy の積分定理を使い、$R \to +\infty$ とする。命題 11 から実軸に水平な辺からの寄与は消滅するので、最後の線積分の積分路は虚軸から $\mathrm{Re}(s) = c$ に shift される。□

命題 13. $\phi \in \mathcal{D}_P$ とすると、任意の $c > 1$ に対して、

$$\theta_\phi(g) = \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(\hat{\phi}(s):g)\,\mathrm{d}s, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

が成立する。右辺の積分は絶対収束する。

Proof:

$$\begin{aligned}
\theta_\phi(g) &= \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \phi(\gamma g) \\
&= \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\phi}(s:\gamma g)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\phi}(s:\gamma g)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E(\hat{\phi}(s):g)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

命題 5(1) および命題 11 から

$$\int_{\mathrm{Re}(s)=c}\{\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}|\hat{\phi}(s;\gamma g)|\}\,\mathrm{d}|s|$$
$$\ll \sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\delta_P(\gamma g)^{(c+1)/2}\int_{\mathrm{Re}(s)=c}(1+|\mathrm{Im}(s)|)^{-m}\,\mathrm{d}|s|<+\infty$$

なので、上の計算における積分順序の交換は Fubini の定理で正当化される。□

4.3.3. 内積に関する随伴公式. エルミート pairing $\langle\,|\,\rangle_P:\mathcal{D}_P\times\mathcal{C}_P\to\mathbb{C}$ を

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle_P=\int_0^{+\infty}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}\phi_1\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\bar{\phi}_2\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)y^{-1}\,\mathrm{d}^\times y\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$

で定義する。$M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1\times\mathbf{K}$ はコンパクトなので、命題 10(1) よりこの積分は絶対収束する。

命題 14. (1) $\phi\in\mathcal{D}_P$, $\varphi\in\mathcal{C}_G$ のとき、

$$\langle\,\theta_\phi\,|\,\varphi\,\rangle_G=\langle\,\phi\,|\,\varphi_P\,\rangle_P$$

(2) $\phi\in\mathcal{D}_P$, $f\in\mathbf{H}^0(s)$ のとき、

$$\langle\,f\,|\,\phi\,\rangle_P=\mathrm{vol}_M\,\langle\,f,\hat{\phi}(-\bar{s})\,\rangle_{\mathbf{K}}$$

Proof: (1) は次のように示せる。

$$\langle\,\theta_\phi\,|\,\varphi\,\rangle_G=\int_{Z_\infty^+G(F)\backslash G(\mathbb{A})}\{\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\phi(\gamma g)\}\,\bar{\varphi}(g)\,\mathrm{d}^1g=\int_{Z_\infty^+P(F)\backslash G(\mathbb{A})}\phi(g)\,\bar{\varphi}(g)\,\mathrm{d}^1g$$
$$=\int_{n\in N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_0^{+\infty}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}\phi\left(n\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\bar{\varphi}\left(n\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\mathrm{d}n\,y^{-1}\mathrm{d}^\times y\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}\phi\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)\bar{\varphi}_P\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)y^{-1}\mathrm{d}^\times y\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k=\langle\phi|\varphi_P\rangle_P$$

$\theta_{|\phi|}\in\mathcal{D}_G$ より積分 $\langle\,\theta_{|\phi|}\,|\,\varphi\,\rangle_G$ は絶対収束するから、上の計算は Fubini の定理によって正当化される。

(2) は次のように示せる。

$$\langle\,f\,|\,\phi\,\rangle_P=\int_0^{+\infty}\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}f\left(m\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]k\right)\bar{\phi}\left(m\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]k\right)y^{-1}\,\mathrm{d}^\times y\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$
$$=\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}f(mk)\left\{\int_0^{+\infty}\bar{\phi}\left(\left[\begin{smallmatrix}y&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]mk\right)y^{(s-1)/2}\,\mathrm{d}^\times y\right\}\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$
$$=\int_{m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{k\in\mathbf{K}}f(mk)\,\overline{\hat{\phi}(-\bar{s}:mk)}\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}k$$
$$=\mathrm{vol}_M\,\langle\,f,\hat{\phi}(-\bar{s})\,\rangle_{\mathbf{K}}$$

積分 $\langle\,f\,|\,\phi\,\rangle_G$ の絶対収束性から、Fubini の定理によって上の計算は正当化される。□

4.3.4. 内積公式 *I.*

命題 15. $\phi_1,\,\phi_2\in\mathcal{D}_P$ に対して、$c>1$ であれば

$$\langle\,\theta_{\phi_1}\,|\,\theta_{\phi_2}\,\rangle_G=\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\{\langle\hat{\phi}_1(s),\hat{\phi}_2(-\bar{s})\rangle_{\mathbf{K}}+\langle M(s)\hat{\phi}_1(s),\hat{\phi}_2(\bar{s})\rangle_{\mathbf{K}}\}\,\mathrm{d}s \tag{4.13}$$

が成立する。

Proof :

$$\begin{aligned}\langle\,\theta_{\phi_1}\,|\,\theta_{\phi_2}\,\rangle_G&=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\left\{\frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}E(\hat{\phi}_1(s),g)\,\mathrm{d}s\right\}\overline{\theta_{\phi_2}(g)}\,\mathrm{d}^1g\qquad(\because\text{命題}\,13)\\&=\frac{1}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\langle\,E(\hat{\phi}_1(s))\,|\,\theta_{\phi_2}\,\rangle_G\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

ここで、命題 8 (1) (θ_{ϕ_2} が $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ でコンパクト台を持つ) および命題 13 に注意すると、積分順序交換は正当化される。非積分函数は次のように変形される：

$$\begin{aligned}\langle\,E(\hat{\phi}_1(s))\,|\,\theta_{\phi_2}\,\rangle_G&=\langle\,E(\hat{\phi}_1(s))_P\,|\,\phi_2\,\rangle_P\qquad(\because\text{命題}\,14(1))\\&=\langle\,\hat{\phi}_1(s)+M(s)\,\hat{\phi}_1(s)\,|\,\phi_2\,\rangle_P\qquad(\because\text{命題}\,6)\\&=\mathrm{vol}_M\,\{\langle\,\hat{\phi}_1(s),\hat{\phi}_2(-\bar{s})\,\rangle_{\mathbf{K}}+\langle\,M(s)\hat{\phi}_1(s),\hat{\phi}_2(\bar{s})\,\rangle_{\mathbf{K}}\}\qquad(\because\text{命題}\,14(2))\end{aligned}$$

□

4.3.5. 大域絡作用素の解析接続. ● $\mathfrak{X}^M$ をコンパクトアーベル群

$$M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1\cong(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\times(F^\times\backslash\mathbb{A}^1) \tag{4.14}$$

のポントリャーギン双対群とする:

$$\mathfrak{X}^M=\{\eta:M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1\to\mathbb{C}^1|\,\text{連続準同型写像}\,\}.$$

$N(\mathbb{A})$ が $M(\mathbb{A})$ で正規化されることに注意すると、群 (4.14) は、剰余類空間 $N(\mathbb{A})\,P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ に左乗法で矛盾無く作用し、従って、函数空間 $\mathcal{C}_P$ にも自然に作用する：

$$[L(m)\phi](\dot{g})=\phi(m^{-1}\dot{g}),\quad m\in M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1,\quad\dot{g}\in N(\mathbb{A})\,P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$$

$\mathcal{C}_P$ の定義に含まれる左 $M(\mathbb{A})^1$-有限性の条件から、この表現は $M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1$ の 1 次元表現の（代数的な）直和に分解する。具体的に分解を記述するには次のようにする。函数 $\phi\in\mathcal{C}_P$ と指標 $\mu\in\mathfrak{X}^M$ に対して、

$$\phi_\mu(g)=\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\phi(mg)\,\mu(m)\,\mathrm{d}^1m,\qquad g\in G(\mathbb{A})^1$$

と定義すると、対応 $\phi\mapsto\phi_\mu$ は $\mathcal{C}_P$ からその部分空間

$$\mathcal{C}_P(\mu)=\{\phi\in\mathcal{C}_P|\,L(m)\phi=\mu(m)\,\phi,\,m\in M(\mathbb{A})^1\,\}$$

の上への射影になり、

$$\mathcal{C}_P=\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\mathcal{C}_P(\mu)$$

と分解される. この分解は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の右作用 R によって保たれる。同様に、$\mathcal{C}_P$ の部分空間 $\mathcal{D}_P$, $\mathbf{H}^0(s)$ も、

$$\mathcal{D}_P(\mu)=\mathcal{C}_P(\mu)\cap\mathcal{D}_P,\qquad\mathbf{H}^0(\mu,s)=\mathcal{C}_P(\mu)\cap\mathbf{H}^0(s)$$

と定義すると、

$$\mathcal{D}_P=\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\mathcal{D}_P(\mu),\qquad\mathbf{H}^0(s)=\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\mathbf{H}^0(\mu,s)$$

と $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-加群として代数的直和に分解される。

• $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0(0)$, $s \in \mathbb{C}$ に対して、$\mathsf{f}^{(s)} : G(\mathbb{A})^1 \to \mathbb{C}$ を

$$\mathsf{f}^{(s)}(g) = \delta_P(g)^{s/2}\,\mathsf{f}(g), \qquad g \in G(\mathbb{A})^1,\ s \in \mathbb{C}$$

で定義すると、$\mathsf{f}^{(s)} \in \mathbf{H}^0(s)$ であり、$\mathsf{f}|\mathbf{K} = \mathsf{f}^{(s)}|\mathbf{K}$ が分かる。対応 $\mathsf{f} \mapsto \mathsf{f}^{(s)}$ は $\mathbf{K}$-同型写像 $\mathbf{H}^0(0) \cong \mathbf{H}^0(s)$ を導く。そこで、この同型によって $\mathbf{H}^0(s)$ 上の $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の右作用を $\mathbf{H}^0(0)$ に移送したものを π_s と書く：

$$[\pi_s(\varphi)\mathsf{f}](g) = [R(\varphi)\mathsf{f}^{(s)}](g)\,\delta_P(g)^{-s/2}, \quad \varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})),\ g \in G(\mathbb{A})^1$$

すると、pairing $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}}$ の $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-不変性は、

$$\langle \pi_s(\varphi)\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} = \langle \mathsf{f}_1, \pi_{-\bar{s}}(\varphi^*)\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}, \quad \mathsf{f}_1,\,\mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0(0),\ \varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

と読み替えられる。

• 同一視 (4.14) によって、μ は２つのイデール類群指標 $\mu_1, \mu_2 : F^\times\backslash\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ の組 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ と見做せる。このとき、

$$\check{\mu} = (\mu_2, \mu_1)$$

と定義する。すると、$M(s) : \mathbf{H}^0(s) \longrightarrow \mathbf{H}^0(-s)$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ は $\mathbf{H}^0(\mu, s)$ を $\mathbf{H}^0(\check{\mu}, -s)$ に写す：

$$M(s)\,\mathbf{H}^0(\mu, s) \subset \mathbf{H}^0(\check{\mu}, -s)$$

以下では、簡単のため $\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}^0(0)$, $\mathbf{H}^0_\mu = \mathbf{H}^0(\mu, 0)$ とおく。内積公式 (4.13) における積分路 $\mathrm{Re}(s) = c$ を虚軸（= unitary axis) にまで shift させたい。そのため、$M(s)$ の定義域を $i\mathbb{R}$ の近傍まで解析接続する必要がある。

命題 16. 可算な補集合をもつある開稠密部分集合 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された線型作用素の族 $\mathsf{M}(s) : \mathbf{H}^0 \longrightarrow \mathbf{H}^0$ $(s \in D)$ で次のようなものが存在する。

(1) $\mathrm{Re}(s) > 1$ であれば、任意の $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$ に対して

$$(\mathsf{M}(s)\mathsf{f})^{(-s)} = M(s)\mathsf{f}^{(s)}$$

(2) $\mathsf{M}(s)$ は $(\pi_s, \mathbf{H}^0)$ から $(\pi_{-s}, \mathbf{H}^0)$ への $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$)-絡作用素である。

(3) $\mathsf{M}(s)$ は有理型である。即ち、任意の $\mathsf{f}_1,\,\mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0$ に対して、$s \mapsto \langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}$ は $\mathbb{C} - D$ に極を持つ有理型函数である。

(4) $\mathsf{M}(s)$ は右半平面 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ では $s = 1$ を除いて整型である。$D \cap \{\mathrm{Re}(s) \geqslant 0,\, s \neq 1\} = \varnothing$

(5) $\mathsf{f}_1,\,\mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0$ とすると、 任意の $\sigma > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$|\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}| \ll (1 + |\mathrm{Im}(s)|)^N, \quad s \in [0, \sigma] + i\,\mathbb{R}$$

(6) $s \in i\mathbb{R}$ ならば

$$\begin{aligned}&\mathsf{M}(-s) \circ \mathsf{M}(s) = \mathrm{Id}, \\ &\langle \mathsf{M}(s)\,\mathsf{f}_1, \mathsf{M}(s)\,\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} = \langle \mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}, \quad (\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0).\end{aligned} \qquad \square$$

Proof : 証明は 3.2.1 節を参照せよ。$\square$

命題 17. (1) $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0_\mu$, $\mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0_\nu$ とする。$s \mapsto \langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}$ は $s = 1$ で高々１位の極を持ち、

$$\mathrm{Res}_{s=1}\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f}, \mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \check{\mu} = \mu,\ \mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0_\mu$$

(2) イデール類群指標 $\eta : F^\times\backslash\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ に対して、$G(\mathbb{A})$ 上の函数 $\eta\circ\det$ は $\mathbf{H}^0(-1)$ に属する。$r_2 = \sharp\Sigma_{\mathbb{C}}$,

$$C = \mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\,\Delta_F^{-1/2}\,\pi^{-r_2}\,\zeta_F(2)^{-1}$$

とおくと、任意の $\mu = (\eta,\eta)$ および任意の $\mathsf{f}_1,\,\mathsf{f}_2 \in \mathbf{H}^0_\mu$ に対して、

$$\mathrm{Res}_{s=1}\langle \mathsf{M}(s)\mathsf{f},\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} = C\,\langle \mathsf{f},\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}\,\overline{\langle \mathsf{f}_2,\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}}$$

が成り立つ。□

Proof : この証明の中では、第 3 章の結果や記号を自由に使う。

$\check{\mu}\neq\nu$ ならば $\mathbf{H}^0_{\check{\mu}}\perp\mathbf{H}^0_\nu$ だから、$\langle\mathsf{M}(s)\mathsf{f},\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} = 0$ である。以下、$\check{\mu}=\nu$ を仮定する。一般性を失わずに、

$$\mathsf{f} = \prod_v \mathsf{f}_v, \qquad \mathsf{f}_2 = \prod_v \mathsf{f}_{2,v},$$

($\mathsf{f}_v \in \mathbf{H}^0_v(\mu_v,0)$, $\mathsf{f}_{2,v}\in\mathbf{H}^0_v(\check{\mu}_v,0)$ で、有限個の素点の v を除いては f_v, $\mathsf{f}_{2,v}$ は不分岐)

の形であるとしてよい。S を素点の有限集合で、全てのアルキメデス素点を含み、しかも $v\notin S$ ならば μ_v, $\psi_{F,v}$ は不分岐かつ $\mathsf{f}_v = \mathsf{f}^\circ_v(\mu_v,0)$, $\mathsf{f}_{2,v} = \mathsf{f}^\circ_v(\check{\mu}_v,0)$ なるものとする。すると、定義 57 および系 58 によれば

$$\begin{aligned}\langle\mathsf{M}(s)\mathsf{f},\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} &= \prod_v \langle M_v(s)\mathsf{f}_v^{(s)},\mathsf{f}_{2,v}^{(\bar{s})}\rangle_{\mathbf{K}_v}\\ &= \epsilon(s,\mu_1\mu_2^{-1})^{-1}\,\frac{L(s,\mu_1\mu_2^{-1})}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\prod_{v\in S}\langle R_v(\mu_v,s)\mathsf{f}_v^{(s)},\mathsf{f}_{2,v}^{(\bar{s})}\rangle_{\mathbf{K}_v}\end{aligned}$$

で最後の内積因子は $\mathbb{C}$ で整型である。よって、この表示全体の $s=1$ での極は $L(s,\mu_1\mu_2^{-1})$ からのみ生じ、実際に極がでるには $\mu_1\mu_2^{-1}$ が自明指標が必要。これで (1) が示せた。以下、$\mu_1=\mu_2$ とする。従って、$\epsilon(s,\mu_1\mu_2^{-1}) = \Delta_F^{1/2-s}$, $L(s,\mu_1\mu_2^{-1}) = \zeta_F(s)$ である。上の等式の $s=1$ での留数をとって、命題 59 を使うと、

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{s=1}\langle\mathsf{M}(s)\mathsf{f},\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}} &= \Delta_F^{1/2}\frac{1}{\zeta_F(2)}\{\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s)\}\prod_{v\in S}\langle R_v(\mu_v,1)\mathsf{f}_v^{(1)},\mathsf{f}_{2,v}^{(1)}\rangle_{\mathbf{K}_v}\\ &= \Delta_F^{1/2}\frac{\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)}{\zeta_F(2)}\prod_{v\in S}C_v\,\langle\mathsf{f}_v^{(1)},\eta_v\circ\det\rangle_{\mathbf{K}_v}\,\langle\eta_v\circ\det,\mathsf{f}_{2,v}^{(1)}\rangle_{\mathbf{K}_v}\\ &= \frac{\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)}{\zeta_F(2)}\,\Delta_F^{-1/2}\,\pi^{-r_2}\langle\mathsf{f},\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}\,\overline{\langle\mathsf{f}_2,\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}}\end{aligned}$$
□

4.3.6. *Paley-Wiener* 切断. 整型函数 $\alpha : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が次の評価を満たすとき Paley-Wiener 函数と呼ぶ：

$$(\exists R\in\mathbb{R})\,(\forall m\in\mathbb{N})\quad |\alpha(s)| \ll e^{R|\mathrm{Re}s|}\,(1+|s|)^{-m},\quad s\in\mathbb{C}$$

$\mathrm{PW}(\mathbb{C})$ をこのような函数全体の空間とする。ここで、Paley-Wiener の定理を想起しよう：

定理 18. $f\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ に対して、そのフーリエ・ラプラス変換

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{2\pi ixs}\,\mathrm{d}x,\qquad s\in\mathbb{C}$$

は $\mathrm{PW}(\mathbb{C})$ に属する。対応 $f\mapsto\hat{f}$ は線型同型 $C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})\to\mathrm{PW}(\mathbb{C})$ を与える。

Proof : [40, IV §4 (p.161)] を参照せよ。□

定義 19. 写像 $\mathcal{F} : \mathbb{C}\to\mathcal{C}_P$ が次ぎの条件を満たすとき Paley-Wiener 切断とよぶ。

(1) 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して $\mathcal{F}(s) \in \mathbf{H}^0(s)$ である。
(2) $\mathbf{H}^0$ の有限函数族 $\{\mathsf{f}_j\}_{j=1}^d$ および $\mathbb{C}$ 上の Paley-Wiener 函数の有限族 $\{c_j(s)\}_{j=1}^d$ が存在して

$$\mathcal{F}(s) = \sum_{j=1}^{d} c_j(s)\, \mathsf{f}_j^{(s)}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

Paley-Wiener 切断全体の空間を $\mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ と書く。□

命題 20. $\phi \in \mathfrak{D}_P$ ならば、その Fourier-Laplace 変換 $\hat{\phi} : s \mapsto \hat{\phi}(s; -)$ は $\mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ に属する。対応 $\phi \mapsto \hat{\phi}$ は $\mathfrak{D}_P$ から $\mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ の上への線型同型である。

Proof : $\phi \in \mathfrak{D}_P$ は右 $\mathbf{K}$-有限かつ左 $M(\mathbb{A})^1$-有限だから、$\mathbf{K}$ の有限次元連続表現 (τ, W) と有限個の指標の集合 $\mathfrak{X}_0\,(\subset \mathfrak{X}^M)$ が存在して $\phi \in \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{X}_0} \mathfrak{D}_P(\mu)[\tau]$ となる。ただし、任意の $\mathbf{K}$-加群 X に対して、$X[\tau]$ は τ-等型成分 (自然な線型写像 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(W, X) \otimes W \to X$ の像) である。$\phi \mapsto \hat{\phi}(s)$ は $\mathfrak{D}_P(\mu)$ から $\mathbf{H}^0(\mu, s)$ への $\mathbf{K}$-絡作用素であり、更に $\mathbf{H}^0(\mu, s) \cong \mathbf{H}^0_\mu$ は $\mathbf{K}$-同型だから

$$\hat{\phi}(s) \in \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{X}_0} \mathbf{H}^0(\mu, s)[\tau] \cong \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{X}_0} \mathbf{H}^0_\mu[\tau]$$

となる。$\mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ は有限次元（$\mathbf{K}$-許容可能性) なので、$\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{X}_0} \mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ は有限正規直交基底 $\{\mathsf{f}_j\}$ を持つ。よって

$$\hat{\phi}(s) = \sum_{j} c_j(s)\, \mathsf{f}_j^{(s)}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

ただし、$c_j(s) = \langle \hat{\phi}(s), \mathsf{f}_j \rangle_{\mathbf{K}}$ である。$\mathsf{f}_j \in \mathbf{H}^0_{\mu_j}$ とすると、

$$c_j(s) = \int_0^\infty a_j(r)\, e^{-sr/2}\, \mathrm{d}r,$$
$$a_j(r) = e^{-r/2} \int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1} \int_{\mathbf{K}} \phi\left(\left[\begin{smallmatrix} e^r & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] mk\right) \bar{\mathsf{f}}_j(k)\, \mu_j(m)\, \mathrm{d}^1 m\, \mathrm{d}k$$

となる。命題 10 より $a_j \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ であるから、定理 18 から $c_j(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の Paley-Wiener 函数になる。これで、$\hat{\phi} \in \mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ が示された。

命題の後半を示すには逆写像 $\mathfrak{P}^0(\mathbb{C}) \to \mathfrak{D}_P$ を構成すればよい。任意の $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ に対して、

$$\tilde{\mathcal{F}}(g) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathcal{F}(s)(g)\, \mathrm{d}s, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

と定義すると、Fourier 反転公式と定理 (18) から $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{D}_P$ および $\hat{\tilde{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$ が容易に確かめられる。一方、命題 12 は $\tilde{\hat{\phi}} = \phi$ を示している。□

4.3.7. 内積公式 *II.*

定義 21. (1) $\phi \in \mathfrak{D}_P$ に対して、$\mathsf{a}_\phi : \mathbb{R} \to \mathbf{H}^0$ を

$$(\mathsf{a}_\phi(y))^{(iy)} = \hat{\phi}(iy) + M(-iy)\, \hat{\phi}(-iy), \qquad y \in \mathbb{R}$$

と定義する。
(2) イデール類指標 $\eta : F^\times \backslash \mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ に対して、

$$\varphi_\eta(g) = \mathrm{vol}_G^{-1/2}\, \eta(\det g), \quad g \in G(\mathbb{A})$$

と定義する。函数 φ_η は $\mathcal{L}^2$ の単位ベクトルになる。□

補題 22. 任意の $\phi \in \mathcal{D}_P$ に対して、

$$\langle \theta_\phi | \varphi_\eta \rangle_G = \langle\, \phi \,|\, \varphi_\eta \,\rangle_P = \mathrm{vol}_G^{-1/2}\, \mathrm{vol}_M\, \langle \hat{\phi}(1), \eta \circ \det \rangle_{\mathbf{K}} \qquad \square$$

Proof :

$$\begin{aligned} \langle\, \theta_\phi \,|\, \varphi_\eta \,\rangle_G &= \langle \phi | (\varphi_\eta)_P \rangle_P \qquad (\because \text{命題 } 14(1)) \\ &= \langle\, \phi \,|\, \varphi_\eta \,\rangle_P \qquad (\because (\varphi_\eta)_P = \varphi_\eta) \\ &= \mathrm{vol}_M\, \langle \hat{\phi}(1), \varphi_\eta \rangle_{\mathbf{K}} \qquad (\because \text{命題 } 14(2)) \qquad \square \end{aligned}$$

命題 23. $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}_P$ のとき、

$$\langle \theta_{\phi_1} | \theta_{\phi_2} \rangle_G = \frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle \mathsf{a}_{\phi_1}(y), \mathsf{a}_{\phi_2}(y) \rangle_{\mathbf{K}}\, \mathrm{d}y + \frac{C}{2} \frac{\mathrm{vol}_G}{\mathrm{vol}_M} \sum_\eta \langle \theta_{\phi_1} | \varphi_\eta \rangle_G\, \overline{\langle \theta_{\phi_2} | \varphi_\eta \rangle_G}$$

が成り立つ。$C = \mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)\, \Delta_F^{-1/2}\, \pi^{-r_2}\, \zeta_F(2)^{-1}$ $(r_2 = \sharp \Sigma_{\mathbb{C}})$ である。

Proof : $c > 1$ を固定する。$R > 0$ に対して Q_R を矩形領域 $\{ s \in \mathbb{C} |\, 0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant c,\, |\mathrm{Im}(s)| \leqslant R \}$ とする。命題 16(3), (4) および命題 17 より、s の函数

$$\Xi(s) = \langle \hat{\phi}_1(s), \hat{\phi}_2(-\bar{s}) \rangle_{\mathbf{K}} + \langle M(s) \hat{\phi}_1(s), \hat{\phi}_2(\bar{s}) \rangle_{\mathbf{K}}$$

は $\mathbb{C}$ 上有理型であり Q_R の周および内部に存在する極は $s = 1$ における高々 1 位の極のみである。留数定理より、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} \Xi(s)\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR}^{iR} \Xi(s)\, \mathrm{d}s + I(R) + \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \tag{4.15}$$

となる。ただし、$I(R)$ は水平線分 $[0, c] \pm iR$ 上の線積分である。命題 16 (5) および命題 11 から、任意の $m > 0$ に対して帯領域 $[0, c] + i\mathbb{R}$ において一様な評価 $|\Xi(s)| \ll (1 + |\mathrm{Im}(s)|)^{-m}$ が成立する。よって、$R \to +\infty$ のとき $I(R)$ はゼロに収束する。虚軸上で $M(iy)$ がユニタリー作用素であることと $\mathsf{M}(iy) \mathsf{a}_\phi(iy) = \mathsf{a}_\phi(-iy)$ であることを使うと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} \Xi(s)\, \mathrm{d}s &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \Xi(iy)\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \langle \hat{\phi}_1(iy), \hat{\phi}_2(iy) \rangle_{\mathbf{K}} + \langle \hat{\phi}_1(iy), M(-iy) \hat{\phi}_2(-iy) \rangle_{\mathbf{K}} \}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \langle \hat{\phi}_1(iy), \mathsf{a}_{\phi_2}(iy) \rangle_{\mathbf{K}} \}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \langle \hat{\phi}_1(iy) + M(-iy) \hat{\phi}_1(-iy), \mathsf{a}_{\phi_2}(iy) \rangle_{\mathbf{K}} \}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \{ \langle \mathsf{a}_{\phi_1}(iy), \mathsf{a}_{\phi_2}(iy) \rangle_{\mathbf{K}} \}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \mathrm{Res}_{s=1} \Xi(s) \end{aligned}$$

あとは $\Xi(s)$ の留数を計算すればよい。命題 20 より $\hat{\phi}_1(s), \hat{\phi}_2(s)$ は

$$\hat{\phi}_1(s) = \sum_j a_j(s)\, \mathsf{f}_j^{(s)}, \qquad \hat{\phi}_2(s) = \sum_j b_j(s)\, \mathsf{f}_j^{(s)}$$

とかける。ただし、$\{\mathsf{f}_j\}$ は $\mathbf{H}^0$ の函数の有限族であって、各 f_j は適当な指標 $\mu_j \in \mathfrak{X}^M$ に対する $\mathbf{H}^0_{\mu_j}$ に属し、$a_j(s), b_j(s) \in \mathrm{PW}(\mathbb{C})$ である。さて、命題 17 から、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=1}\Xi(s) &= \sum_{i,j} \mathrm{Res}_{s=1}\{a_i(s)\, b_j(s)\, \langle\, M(s)\mathsf{f}_i^{(s)}, \mathsf{f}_j^{(s)}\rangle_{\mathbf{K}}\} \\
&= \sum_{i,j} a_i(1)\, b_j(1)\, \mathrm{Res}_{s=1}\langle\, M(s)\mathsf{f}_i^{(s)}, \mathsf{f}_j^{(s)}\rangle_{\mathbf{K}} \\
&= C \sum_{i,j}\sum_{\eta} a_i(1)\, b_j(1)\, \langle \mathsf{f}_i, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}\, \overline{\langle \mathsf{f}_j, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}} \\
&= C \sum_{\eta} \langle \hat{\phi}_1(1), \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}\, \overline{\langle \hat{\phi}_2(1), \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}}} \\
&= C\, \mathrm{vol}_G\, \mathrm{vol}_M^{-1} \sum_{\eta} \langle\, \theta_{\phi_1} \,|\, \varphi_\eta\, \rangle_G\, \overline{\langle\, \theta_{\phi_2} \,|\, \varphi_\eta\, \rangle_G}
\end{aligned}$$

最後の等式は補題 22 による。□

4.3.8. *L^2-空間の分解.* $\mathbf{H}^0$ を内積 $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}}$ によって完備化して得られるヒルベルト空間を $\mathbf{H}$ とする。$y \in \mathbb{R}$ のとき $\mathsf{M}(iy) : \mathbf{H}^0 \to \mathbf{H}^0$ はユニタリー作用素だったから、完備化 $\mathbf{H}$ のユニタリー作用素に連続延長される。ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の $\mathbf{H}^0$ への作用 $\pi_{iy}(\varphi)$ から自然に $G(\mathbb{A})$ のユニタリー表現 $(\pi_{iy}, \mathbf{H})$ が定まる。

$\mu \in \mathfrak{X}^M$, $\tau \in \hat{\mathbf{K}}$ に対して、τ-等型成分 $\mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ の正規直交基底 $\mathcal{B}_\mu[\tau]$ を固定する。$\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}_\mu[\tau]$ ($\mu \in \mathfrak{X}^M$, $\tau \in \hat{\mathbf{K}}$) 全体の合併集合とすると、$\mathcal{B}$ は $\mathbf{H}$ の可算正規直交基底であり、$\mathcal{B} = \{\mathsf{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と番号付けることが出来る。以下このような基底を一つ固定しておく。

定義 24. 函数 $\mathsf{a} : \mathbb{R} \to \mathbf{H}$ で次の条件を満たすもの全体（の同値類）の空間を $\mathfrak{H}$ とする：

(1) $\mathsf{a}(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(y)\, \mathsf{f}_n$ と表すとき、係数函数 c_n はすべて可測函数である。
(2) 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathsf{M}(iy)\, \mathsf{a}(y) = \mathsf{a}(-y)$
(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \|\mathsf{a}(y)\|^2_{\mathbf{K}}\, \mathrm{d}y < +\infty$

内積

$$(\mathsf{a}_1|\mathsf{a}_2)_{\mathfrak{H}} = \frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi} \int_0^{+\infty} \langle \mathsf{a}_1(y), \mathsf{a}_2(y)\rangle_{\mathbf{K}}\, \mathrm{d}y$$

によって、$\mathfrak{H}$ はヒルベルト空間になり、しかも次の公式で定義される群 $G(\mathbb{A})$ の作用 ρ によってユニタリー表現になる。

$$[\rho(g)\mathsf{a}](y) = \pi_{iy}(g)(\mathsf{a}(y)), \qquad \text{a.e in } y \in \mathbb{R}, \quad (\mathsf{a} \in \mathfrak{H}) \quad \square$$

注意：普通、ユニタリー表現 $(\rho, \mathfrak{H})$ は $(\pi_{iy}, \mathbf{H})$ のヒルベルト直和と呼ばれ、

$$\int_{y\in\mathbb{R}_+^\times}^{\oplus} (\pi_{iy}, \mathbf{H})\, \frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\, \mathrm{d}y$$

と書かれる。□

定義 25. (1) θ_ϕ ($\phi \in \mathcal{D}_P$) 全体の空間を Θ、 $\mathcal{L}^2$ におけるその閉包を $\bar{\Theta}$ と定義する：

$$\Theta = \{\theta_\phi |\, \phi \in \mathcal{D}_P\}, \qquad \bar{\Theta} = \mathcal{L}^2\text{-Closure of } \Theta$$

(2) イデール類指標 $\eta : F^\times\backslash\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}^1$ に対して、$\Theta(\eta) = \mathbb{C}\,\varphi_\eta$ とおく。

$$\mathrm{P}_\eta : \mathcal{L}^2 \longrightarrow \Theta(\eta), \qquad \mathrm{P}_\eta(f) = \langle\, f \,|\, \varphi_\eta \,\rangle_G\, \varphi_\eta$$

を直交射影子とする。$\square$

$R(g)\varphi_\eta = \eta(\det g)\,\varphi_\eta$ だから、$\Theta(\eta)$ は $G(\mathbb{A})$ が 1 次元表現 $\eta\circ\det$ で作用する $\mathcal{L}^2$ の $G(\mathbb{A})$-部分空間である。また、部分空間 $\Theta(\eta)$ 達は L^2-内積に関して互いに直交する。

補題 26. 有限個の L^2-函数 $c_j \in L^2(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$ と有限個のスカラー $a_j\,(1 \leqslant j \leqslant d)$ を与える。任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\alpha_j \in \mathrm{PW}(\mathbb{C})$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} |c_j(y) - \alpha_j(iy)|^2\, \mathrm{d}y < \epsilon, \qquad \alpha_j(1) = a_j, \qquad (1 \leqslant j \leqslant d)$$

となる。

Proof : [8, Lemma 17.3(p.172)] を参照せよ。$\square$

補題 27. $\{(\mathsf{a}_\phi,\, \{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\}_\eta) \,|\, \phi \in \mathfrak{D}_P\,\}$ は $\mathfrak{H}\hat{\oplus}\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)$ の稠密部分空間である。

Proof : $\mathsf{a} \in \mathfrak{H}^0$ および有限個の異なる指標 η_j $(1 \leqslant j \leqslant d)$ とスカラー $a_j \in \mathbb{C}$ を任意にとる。$N \in \mathbb{N}$ を十分大きく選べば $\mathsf{a}(s) = \sum_{n=0}^N c_n(s)\,\mathsf{f}_n$ $(c_j \in L^2(\mathbb{R}))$ と表せる。さらに、十分大きく N をとることで $n > N$ のとき $\langle \mathsf{f}_n, \eta_j\circ\det\rangle_{\mathbf{K}} = 0\,(1 \leqslant j \leqslant d)$ であるとしてもよい。イデール類群指標 η に対して、$\tilde\eta = \eta\circ\det|\mathbf{K}$ で 1 次元表現 $\tilde\eta \in \hat{\mathbf{K}}$ を定義すると、$\mathbf{H}^0[\tilde\eta]$ は 1 次元である。$\eta_j\,(1 \leqslant j \leqslant d')$ を $\mathsf{f}_{n_j} \in \mathbf{H}^0[\tilde\eta_j]$ となる $0 \leqslant n_j \leqslant N$ が存在するような指標 η 全体とする。N のとり方から $d \leqslant d'$ である。スカラー $b_n\,(0 \leqslant n \leqslant N)$ を

$$\begin{aligned} b_{n_j} &= \mathrm{vol}_M\, \mathrm{vol}_G^{-1/2}\, a_j, \quad (1 \leqslant j \leqslant d'), \\ b_n &= 0, \quad (n \notin \{n_1, \ldots, n_{d'}\}) \end{aligned}$$

で決める。$\epsilon > 0$ を任意に与えるとき、補題 26 より、$\alpha_n \in \mathrm{PW}(\mathbb{C})$ $(0 \leqslant n \leqslant N)$ であって

$$\int_{\mathbb{R}} |c_n(y) - \alpha_n(iy)|^2\, \mathrm{d}y < \epsilon(4N)^{-1}, \quad \alpha_n(1) = b_n$$

となるものが存在する。$\mathcal{F}(s) = \sum_{n=0}^N \alpha_n(s)\,\mathsf{f}_n^{(s)}$ によって Paley-Wiener 切断 $\mathcal{F} \in \mathfrak{P}^0(\mathbb{C})$ がきまり、さらに命題 20 を適用すると、$\mathcal{F} = \hat\phi$ となる $\phi \in \mathfrak{D}_P$ が定まる。このとき、

$$\begin{aligned} &\|\mathsf{a}_\phi - \mathsf{a}\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \epsilon, \\ &\mathrm{P}_{\eta_j}(\theta_\phi) = a_j\, \varphi_{\eta_j}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant d') \end{aligned}$$

が確かめられる。$\eta \neq \eta_j\,(1 \leqslant j \leqslant d')$ ならば、$\langle \mathsf{f}_n, \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}} = 0\,(0 \leqslant n \leqslant N)$ なので、$\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi) = 0$ となる。よって、$(\mathsf{a}_\phi, \{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\})$ は $\mathsf{a} + \sum_{j=1}^d a_j\varphi_{\eta_j}$ の ϵ-近傍に含まれる。従って、$\mathfrak{H}^0 \oplus \bigoplus_\eta \mathbb{C}\varphi_\eta$ の任意の元は $\{(\mathsf{a}_\phi,\, \{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\}_\eta) \,|\, \phi \in \mathfrak{D}_P\,\}$ の点列の極限になることが示された。一方、$\mathfrak{H}^0 \oplus \bigoplus_\eta \mathbb{C}\varphi_\eta$ は $\mathfrak{H}\hat{\oplus}\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)$ で稠密なので証明終わり。$\square$

$\mathfrak{H}\hat{\oplus}\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)$ の内積を

$$\langle\, (\mathsf{a}, \{a_\eta\varphi_\eta\}) \,|\, (\mathsf{b}, \{b_\eta\,\varphi_\eta\})\,\rangle = (\mathsf{a}|\mathsf{b})_{\mathfrak{H}} + \frac{C}{2}\frac{\mathrm{vol}_G}{\mathrm{vol}_M} \sum_\eta a_\eta \bar{b}_\eta$$

で定義する。(注意：実は、$\frac{C}{2}\frac{\mathrm{vol}_G}{\mathrm{vol}_M} = 1$ が後で (系 52) 分かるので、この内積は自然なものである。)

定理 28. $G(\mathbb{A})$ の作用と可換な等長同型写像

$$\mathrm{T}:\bar{\Theta}\xrightarrow{\cong}\mathfrak{H}\,\hat{\oplus}\,\left(\hat{\bigoplus}_{\eta}\Theta(\eta)\right)$$

で、任意の $\phi\in\mathcal{D}_P$ に対して

$$\mathrm{T}(\theta_\phi)=(\mathsf{a}_\phi,\ \{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\}_\eta) \tag{4.16}$$

となるものがただ一つ存在する。

Proof : 命題 14 より、

$$\|\theta_\phi\|_G^2=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\|\mathsf{a}_\phi(y)\|_{\mathbf{K}}^2\,\mathrm{d}y+\frac{C}{2}\,\frac{\mathrm{vol}_G}{\mathrm{vol}_M}\sum_{\eta}\|\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\|_G^2 \tag{4.17}$$

となる。これより、$\theta_\phi=0$ となる必要十分条件は $\mathsf{a}_\phi(iy)=0\,(\text{a.e.}\,y\in\mathbb{R})$ かつ $\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)=0\,(\forall\eta)$ である。これは線型写像 $\mathrm{T}:\Theta\to\mathfrak{H}\,\hat{\oplus}\,\left(\bigoplus_\eta\Theta(\eta)\right)$ が (4.16) によって矛盾無く定義されることを示している。(4.17) よりこの線型写像は等長写像 $\mathrm{T}:\bar{\Theta}\to\mathfrak{H}\,\hat{\oplus}\,\left(\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)\right)$ に延長される。同様に、補題 27 から等長写像 $\mathrm{T}':\mathfrak{H}\,\hat{\oplus}\,\left(\hat{\bigoplus}_\eta\Theta(\eta)\right)\to\mathfrak{H}$ で $\mathrm{T}'((\mathsf{a}_\phi,\ \{\mathrm{P}_\eta(\theta_\phi)\}_\eta))=\theta_\phi$ なるものが存在する。$\mathrm{T}\circ\mathrm{T}'=\mathrm{Id}$, $\mathrm{T}'\circ\mathrm{T}=\mathrm{Id}$ はそれぞれ稠密部分空間上で成立するので、T, T' は互いに逆写像になる。

定義 29. T による $\mathfrak{H}$ の逆像を $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$, $\bar{\Theta}$ の $\mathcal{L}^2$ における直交補空間を $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ と定義する。更に、１次元空間 $\Theta(\eta)$ ($\eta\in\widehat{F^\times\backslash\mathbb{A}^1}$) 全体の生成する閉部分空間を $\mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}$ と定義する。□

命題 30. (1) $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}=\{f\in\bar{\Theta}|\,\langle\,f\,|\,\varphi_\eta\,\rangle_G=0\,(\forall\eta\in\widehat{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times})\,\}$

(2) $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}=\left\{f\in\mathcal{L}^2|\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}f(ng)\,\mathrm{d}n=0\quad\text{a.e. in }g\in G(\mathbb{A})\right\}$

Proof : (1) T の定義から、任意の $f\in\bar{\Theta}$ に対して $\mathrm{T}(f)=(\mathrm{S}(f),\{\langle f|\varphi_\eta\rangle_G\varphi_\eta\}_\eta)$ と書ける。定義 29 から、$f\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$ は $\langle f|\varphi_\eta\rangle_G=0$ $(\forall\eta)$ と同値である。

(2) 命題 14 (1) (と同様な変形) から $f\in\mathcal{L}^1$ に対して $\langle\,\theta_\phi\,|\,f\,\rangle_G=\langle\,\phi\,|\,f_P\,\rangle_P$ である。よって、$f\in\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ は、$\langle\,\phi\,|\,f_P\,\rangle_P=0$ $(\forall\phi\in\mathcal{D}_P)$ と同値。$\mathcal{D}_P$ は $C_{\mathrm{c}}^\infty(N(\mathbb{A})\,P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の稠密部分空間であるから、これは、$f_P(g)=0$ (a.e. $g\in G(\mathbb{A})$) と同値である。□

4.4. L^2-函数のスペクトル分解.

4.4.1. 高さ函数と函数の増大度条件. $v\in\Sigma$ とする。群 $G(F_v)$ 上の高さ関数 $||\ ||_v$ を与えよう。もし $v\in\Sigma_\infty$ ならば $g\in G(F_v)$ について

$$||g||_v=\sqrt{\mathrm{tr}(g\overline{{}^tg})+\mathrm{tr}(g^{-1}\overline{{}^tg^{-1}})}=\sqrt{1+|\det(g)|^{-2}}\sqrt{\mathrm{tr}(g\overline{{}^tg})}$$

と定義する。もし $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば $g\in G(F_v)$ について

$$||g||_v=\max_{1\leqslant i,j\leqslant 2}\{\,|g_{ij}|_v\,,\ |g_{ij}|_v/|\det(g)|_v\,\},\quad g=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}$$

と定義する。そして、$G(\mathbb{A})$ 上の高さ関数 $||\ ||$ を $g=(g_v)\in G(\mathbb{A})$ に対して

$$||g||=\prod_{v\in\Sigma}||g_v||_v$$

と定義する。ここで、$v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば $\|k\|_v=1\,(\forall k\in\mathbf{K}_v)$ であることから、右辺の積は実質的に有限積になることに注意する。

補題 31. 任意の $g,\,h \in G(\mathbb{A})$ に対して次が成り立つ。

(1) $||g|| \geqslant 1.$
(2) $||gh|| \leqslant ||g||\,||h||.$
(3) $||g|| = ||g^{-1}||.$
(4) $||kgk'|| = ||g||,\ {}^{\forall}k,\,{}^{\forall}k' \in \mathbf{K}.$

任意の $t \in (\mathbb{R}^{\times})^0$ について、$G_t = \{g \in G(\mathbb{A}) \,|\, ||g|| < t\}$ と置く。

(5) G_t はコンパクト。
(6) ある定数 C_0 と N_0 が存在して $\sharp(G(F) \cap G_t) \leqslant C_0 t^{N_0}$ が成り立つ。
(7) 定数 $C > 0$ が存在して、任意の $g \in \mathfrak{S} \cap G(\mathbb{A})^1$ および任意の $\gamma \in G(F)$ に対して $\|g\| \leqslant C\,\|\gamma g\|$ が成り立つ。

Proof. (1) 各素点 $v \in \Sigma$ と $g \in G(F_v)$ について $||g||_v \geqslant 1$ を示せばよい。$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ の場合は自明なので、$v \in \Sigma_\infty$ の場合のみを考える。$\mathrm{tr}(g\,\overline{{}^t g}) = r$ と置く。そのとき、

$$|\det(g)|^2 \leqslant (|g_{11}|\,|g_{22}| + |g_{12}|\,|g_{21}|)^2 \leqslant r^2$$

が成り立つので、

$$||g||_v \geqslant \sqrt{1+r^{-2}}\,\sqrt{r} = \sqrt{r+r^{-1}} \geqslant 1$$

が得られる。

(2) 各素点 $v \in \Sigma$ と $g,\,h \in G(F_v)$ について $||gh||_v \leqslant ||g||_v\,||h||_v$ を示せばよい。まずは $v \in \Sigma_\infty$ の場合を考えよう。

$$\mathrm{tr}(gh\,\overline{{}^t(gh)}) = \mathrm{tr}(\overline{{}^t g}g\,h\,\overline{{}^t h})$$

となるので、正値エルミート行列 $S,\,T$ について、$\mathrm{tr}(ST) \leqslant \mathrm{tr}(S)\,\mathrm{tr}(T)$ となることを示せばよい。ある $k \in \mathbf{K}_v$ について

$$kS\,{}^t k = \begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}, \quad kT\,{}^t k = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

として良い。正値性から、対角成分は全て正の数であることに注意しよう。

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(S)\mathrm{tr}(T) - \mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(kS\,{}^t k)\mathrm{tr}(kT\,{}^t k) - \mathrm{tr}(kS\,{}^t kkT\,{}^t k) \\ &= (s_1+s_2)(t_1+t_2) - (s_1t_1+s_2t_2) = s_2t_1 + s_1t_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

これで求める不等式が示された。

次に $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ の場合を考える。gh の (i,j) 成分について

$$\begin{aligned} &|g_{i1}h_{1j} + g_{i2}h_{2j}|_v \leqslant \max\{|g_{i1}h_{1j}|_v\,,\ |g_{i2}h_{2j}|_v\} \\ &\leqslant \max\{|g_{i1}|\,,\ |g_{i2}|_v\}\max\{|h_{1j}|_v\,,\ |h_{2j}|_v\} \leqslant ||g||_v\,||h||_v \end{aligned}$$

となるので、明らかに不等式が従う。

(3) これは定義より自明。

(4) 各素点 $v \in \Sigma$ と $g \in G(F_v)$ について示そう。$v \in \Sigma_\infty$ の場合は定義より自明なので、$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ とする。各 $k \in \mathbf{K}_v$ について $||kg||_v = ||g||_v$ となることを示せばよい。$\|k\|_v = \|k^{-1}\|_v = 1$ に注意すると、(2) から次の 2 つの不等式がえられる：

$$\|kg\|_v \leqslant \|k\|_v\,\|g\|_v = \|g\|_v = \|k^{-1}\,kg\|_v \leqslant \|k^{-1}\|_v\,\|kg\|_v = \|kg\|_v$$

従って、$\|kg\|_v = \|g\|_v$ である。

(5) 元 $g = (g_v) \in G(\mathbb{A})$ について (1) より $||g|| < t$ ならば各 $v \in \Sigma$ について $1 \leqslant ||g_v||_v < t$ を得る。そのため、すべての $v \in \Sigma$ について G_t の $G(F_v)$ への射影 $G_{t,v}$ はコンパクトになるのだから、G_t もコンパクトである。

(6) 環 R に対して $\mathrm{Mat}(2,R)$ を R を成分としてもつ 2 次の正方行列全体の集合とする。(5) の証明より

$$\sharp(G(F)\cap G_t)\leqslant\sharp\left\{g\in\mathrm{Mat}(2,F)\;\middle|\;\begin{array}{c}||g||_v<t\quad(\forall v\in\Sigma_\infty)\\ {}^{\exists}m\in\mathbb{Z}_{>0}\text{ s.t. }g\in\mathrm{Mat}(2,m^{-1}\mathcal{O})\text{ and }m<t\end{array}\right\}$$
$$\leqslant\sum_{m=1}^{[t]}\sharp\{g\in\mathrm{Mat}(2,m^{-1}\mathcal{O})\mid\max\{|g_{11}|,|g_{12}|,|g_{21}|,|g_{22}|\}\leqslant t\}$$

が成り立つので (6) が従う。

(7) $\mathfrak{S}\cap G(\mathbb{A})^1$ の任意の要素は $g=\left(\begin{smallmatrix}x_{11}&x_{12}\\0&x_{22}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{smallmatrix}\right)k$、ただし $\left(\begin{smallmatrix}x_{11}&x_{12}\\0&x_{22}\end{smallmatrix}\right)\in\omega\cap G(\mathbb{A})^1$, $a\in(\mathbb{R}^\times)^0$ $(a^2>t)$, $k\in\mathbf{K}$ と書ける。$\gamma\in G(F)$ を任意にとる。すると、

$$\gamma gk^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma_{11}ax_{11}&*\\\gamma_{21}ax_{11}&*\end{pmatrix}$$

となる。ここで、$\gamma_{11}\neq0$ または $\gamma_{21}\neq0$ である。$\gamma_{11}\neq0$ ならば、$|\gamma_{11}|_{\mathbb{A}}=1$ により、

$$\|\gamma gk^{-1}\|\geqslant|\gamma_{11}ax_{11}|_{\mathbb{A}}=|a|_{\mathbb{A}}\,\|x_{11}|_{\mathbb{A}}$$

x_{11} は $\mathbb{A}^\times$ のコンパクト集合を走る。更に、$\mathfrak{S}\cap G(\mathbb{A})^1$ 上で $\|g\|\asymp|a|_{\mathbb{A}}$ であるから、γ, g に無関係なある定数 $C>0$ が存在して $\gamma_{11}\neq0$ ならば常に $\|\gamma g\|\geqslant C\,\|g\|$ $(\forall g\in\mathfrak{S}\cap G(\mathbb{A})^1)$ である。$\gamma_{21}\neq0$ のときも同様。 □

高さ関数 $\|\;\|$ を使って緩増大関数、急減少関数と一様緩増大関数を定義しよう。まず $\mathfrak{S}^1=\mathfrak{S}\cap G(\mathbb{A})^1$ と置く。

定義 32. (1) $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数 f が緩増大関数であるとは、ある定数 $N\in\mathbb{R}$ および $C>0$ が存在して

$$|f(g)|\leqslant C\,\|g\|^N,\qquad g\in G(\mathbb{A})^1$$

が成り立つことと定義する。

(2) 関数 $f\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ が一様緩増大であるとは、ある定数 $N_0\geqslant0$ が存在して、任意の $D\in U(\mathfrak{g})$ に対して、不等式

$$|(R(D)f)(g)|\;\leqslant\;C_D\,||g||^{N_0},\quad{}^{\forall}g\in G(\mathbb{A})^1$$

を満たす定数 C_D が存在することと定義する。

(3) 関数 $f\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ が $\mathfrak{S}^1$ 上急減少関数であるとは、任意の $N>0$ に対して、不等式

$$|f(g)|\;\leqslant\;C_N\,||g||^{-N},\quad g\in\mathfrak{S}^1$$

を満たす定数 C_N が存在することと定義する。□

4.4.2. 保型形式. 関数 $f:G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき、$G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の保型形式であるといい、その全体の空間を $\mathcal{A}_G$ と書く：

- $f\in\mathcal{C}_G$
- f は右 $Z(\mathfrak{g})$-有限である。
- f は $G(\mathbb{A})^1$ 上で緩増大である。

さらに、カスプ条件

- $f_P(g)=0\qquad(\forall g\in G(\mathbb{A}))$

を満たす $f\in\mathcal{A}_G$ をカスプ形式といい、その全体を $\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ と定義する。

命題 33. $f\in\mathcal{A}_G$ ならば f は $G(\mathbb{A})^1$ 上一様緩増大函数である。

Proof : f が右 $\mathbf{K}$-有限かつ右 $Z(\mathfrak{g})$-有限であることから、ある函数 $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ が存在して $f = R(\check{\varphi})f$ が成り立つ ([18, §8, Theorem 1], [8, Theorem 2.14 (p.22)])。f は緩増大だから、ある定数 $N \in \mathbb{R}$, $C_1 > 0$ が存在して $|f(g)| \leqslant C_1 \|g\|^N$ $(\forall g \in G(\mathbb{A})^1)$ が成り立つ。補題 31 (1) より $N > 0$ としてもよい。$\mathcal{U} = \mathrm{supp}(\varphi)$ とすると、$\mathcal{U}$ は $G(\mathbb{A})^1$ のコンパクト集合であり、任意の $D \in U(\mathfrak{g})$ に対して $C_2 = \sup_{h\in\mathcal{U}} |R(D)\varphi(h^{-1})|$ は有限である。

$$\begin{aligned}|R(D)f\,(g)| &\leqslant \int_{G(\mathbb{A})^1} |f(gh)|\,|[R(D)\varphi](h^{-1})|\,\mathrm{d}^1h\\ &= \int_{\mathcal{U}} |f(gh)|\,|[R(D)\varphi](h^{-1})|\,\mathrm{d}^1h\\ &\leqslant C_1\,C_2 \int_{\mathcal{U}} \|gh\|^N\,\mathrm{d}^1h\\ &\leqslant \{C_1\,C_2 \int_{\mathcal{U}} \|h\|^N\,\mathrm{d}^1h\} \times \|g\|^N \qquad (\because \text{補題 } 31(2))\end{aligned}$$

N は D に無関係だから、この評価から一様緩増大性がわかる。□

命題 34. $f \in \mathcal{C}_G$ が次ぎの 2 条件を満たすとすると、f はジーゲル領域上 $\mathfrak{S}$ 上で急減少関数である。

(1) f は $\mathfrak{S}$ 上一様緩増大である。
(2) 定数項が消える, i.e., $f_P(g) = 0$ $(\forall g \in G(\mathbb{A})^1)$ □

Proof : [25, 命題 1.10] を参照せよ。□

系 35. $f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ はジーゲル領域 $\mathfrak{S}$ 上で急減少関数である。特に、$\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}} \subset \mathcal{L}^q$ $(\forall q > 1)$ である。

Proof : 命題 34、命題 33 および補題 1 より自明である。□

ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は右作用によって保型形式の空間 $\mathcal{A}_G$ に作用し、$\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ は部分 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-加群になることが分かる。

4.4.3. カスプ的保型表現.

命題 36. (Gelfand-Graev-Piatetsuki Shapiro) : $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ は既約閉部分空間のヒルベルト直和に分解される。i.e., $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ の既約閉部分空間の族 $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ が存在して、$\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}} = \hat{\bigoplus}_\alpha \mathcal{V}_\alpha$ となる。更に、既約ユニタリー表現の各同値類 $\pi \in \widehat{G(\mathbb{A})}$ に対して、$\pi \cong \mathcal{V}_\alpha$ となる α の濃度 $m_{\mathrm{cus}}(\pi)$(=π の重複度) は有限である。

Proof : [25, 定理 1.13] を参照せよ。□

命題 37. (重複度 1 定理): $m_{\mathrm{cus}}(\pi) \leqslant 1$ $(\forall \pi \in \widehat{G(\mathbb{A})})$

Proof ：[25, 定理 4.5] を参照せよ。□

定義 38. $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ の既約部分表現をカスプ的保型表現と呼ぶ。□

補題 39. $q \geqslant 1$, $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ とする。このとき、定数 $c_\varphi > 0$ が存在して、任意の $f \in \mathcal{L}^q$ に対して

$$|\,[f * \varphi](g)\,| \leqslant c_\varphi\,\|f\|_{G(\mathbb{A})^1,q}\,\|g\|^{2/q}, \quad g \in G(\mathbb{A})^1 \tag{4.18}$$

が成り立つ。ここで、$\|f\|_{G(\mathbb{A})^1,q} = \left(\int_{G(\mathbb{A})^1} |f(g)|^q\,\mathrm{d}^1 g\right)^{1/q}$ である。□

Proof : (*cf.* [8, Proposition 5.7]) $T_\infty^+ = \{[\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}] \in G(F_\infty) \,|\, t \in (\mathbb{R}^\times)^0\,\}$ とおくと、岩澤分解は $G(\mathbb{A})^1 = N(\mathbb{A})\,M(\mathbb{A})^1\,T_\infty^+\,\mathbf{K}$ となる。$\mathcal{U} = \mathrm{supp}(\varphi)$ はコンパクト集合なので、

$$\mathbf{K}\,\mathcal{U}^{-1} \subset \mathcal{U}_P\,\mathcal{U}_{T,\infty}\,\mathbf{K}$$

を満たすコンパクト集合 $\mathcal{U}_P \subset N(\mathbb{A})\,M(\mathbb{A})^1$ および $\mathcal{U}_{T,\infty} \subset T_\infty^+$ が存在する。$g \in G(\mathbb{A})^1$ に対して $t(g) \in T_\infty^+$ を $g \in N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^1\,t(g)\,\mathbf{K}$ で定義する。$g \in \mathfrak{S}$ とすると、

$$g\,\mathcal{U}^{-1} \subset \omega\, t(g)\,\mathbf{K}\,\mathcal{U}^{-1} \subset \omega\, t(g)\,\mathcal{U}_P\,\mathcal{U}_{T,\infty}\,\mathbf{K} \subset t(g)\,\{t(g)^{-1}\,\omega\, t(g)\,\mathcal{U}_P\}\,t(g)^{-1}\cdot t(g)\,\mathcal{U}_{T,\infty}\cdot\mathbf{K}$$

$g \in \mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\omega, t_0)$ より、$t(g) \geqslant t_0$ である。したがって、$t(g)^{-1}\,\omega\, t(g)\,\mathcal{U}_P$ $(g \in \mathfrak{S})$ は一定のコンパクト集合 $D \subset N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^1$ に含まれる。

$$
\begin{aligned}
|[f*\varphi](g)| &= \left|\int_{G(\mathbb{A})^1} f(x)\,\varphi(x^{-1}g)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{g\,\mathcal{U}^{-1}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \|\varphi\|_\infty \int_{h \in t(g)\,D\,t(g)^{-1}} \int_{a \in t(g)\,\mathcal{U}_{T,\infty}} \int_{k \in \mathbf{K}} |f(hak)|\,\delta_P(a)^{-1}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}k
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

$\mathcal{P}(g) = \{\delta \in P(F) \,|\, \delta\omega \cap t(g)\,D\,t(g)^{-1} \neq \varnothing\,\}$ とおくと、$t(g)\,D\,t(g)^{-1}$ は $\delta\omega$ $(\delta \in \mathcal{P}(g))$ で被覆される。f は左 $P(F)$ 不変だから、

$$\int_{h \in t(g)\,D\,t(g)^{-1}} |f(hak)|\,\mathrm{d}h \ll \{\sharp\mathcal{P}(g)\} \int_{h \in \omega} |f(hak)|\,\mathrm{d}h$$

更に、$\sharp\mathcal{P}(g) \ll \mathrm{vol}(t(g)\,D\,t(g)^{-1}) \asymp \delta_P(g)$ は容易に分かる。故に、$Q(g) = \omega\, t(g)\,\mathcal{U}_{T,\infty}\,\mathbf{K}$ とおくと、(4.19) から、

(4.20)

$$|[f*\varphi](g)| \ll \delta_P(g) \int_{h \in \omega} \int_{a \in t(g)\,\mathcal{U}_{T,\infty}} \int_{k \in \mathbf{K}} |f(hak)|\,\delta_P(a)^{-1}\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}k = \delta_P(g) \int_{Q(g)} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

となる。$1/q + 1/r = 1$ で指数 $r > 1$ を決めよう。すると、Hölder の不等式から

$$
\begin{aligned}
\int_{Q(g)} |f(x)|\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{Q(g)} |f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \left(\int_{Q(g)} \mathrm{d}x\right)^{1/r} \\
&\leqslant \|f\|_{G(\mathbb{A})^1,q}\,\mathrm{vol}(Q(g))^{1/r} \asymp \|f\|_{G(\mathbb{A})^1,q}\,\delta_P(g)^{-1/r}
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

$\mathfrak{S}^1$ 上で $\delta_P(g) \asymp \|g\|^2$ となることが容易に分かるので、(4.20), (4.21) より不等式 (4.18) が $\mathfrak{S}^1$ 上では成り立つ。$f*\varphi$ は左 $G(F)$-不変なので、補題 31 (7) より不等式 (4.18) は $G(\mathbb{A})^1$ 全体に拡張される。□

命題 40. (1) 任意のカスプ的保型表現 $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ に対して、$\mathcal{V}_\pi$ に含まれる右 $\mathbf{K}$-有限函数全体の空間を V_π とおくと、$V_\pi \subset \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ であり、V_π は $\mathcal{V}_\pi$ で稠密である。特に、V_π に含まれる $\mathcal{V}_\pi$ の正規直交基底 $\mathcal{B}_\pi$ が存在する。
(2) $\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ は $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ において稠密である。□

Proof ： (1) $f \in V_\pi$ がカスプ形式の条件を満たすことを確かめる。まず、π は既約ユニタリー表現なので許容可能 ([10, Theorem 4]) である。これと [24, Proposition 8.5] により、f は $G(\mathbb{A})$ 上の smooth 函数になる。左 $Z_\infty^+ G(F)$-不変性は明らかなので $f \in \mathcal{C}_G$ となる。また、カスプ条件は明らか。$Z(\mathfrak{g})$ は V_π にスカラーで作用する ([24, Corollary 8.14]) ので、f は $Z(\mathfrak{g})$-有限になる。f は $\mathbf{K}$-有限かつ $Z(\mathfrak{g})$-有限なので、$f = R(\check{\varphi})f$ を満たす $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ が存在する ([18, §8 Theorem 1], [8, Theorem 2.14 (p.22)])。従って、補題 39 から f は緩増大になる。

$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の元は両側 $\mathbf{K}$-有限なので、包含 $R(\mathcal{H}(G(\mathbb{A})))\,\mathcal{V}_\pi \subset V_\pi$ は明らかである。$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ はデルタ近似列（即ち、正の函数列 φ_n であって、$\mathrm{supp}(\varphi_n) \to \{e\}$ かつ $\int_{G(\mathbb{A})^1} \varphi_n(g)\,\mathrm{d}^1 g = 1$ となるもの）を含む。$\lim_{n\to\infty} \|R(\varphi_n)f - f\|_G = 0$ となるので、$R(\mathcal{H}(G(\mathbb{A})))\,\mathcal{V}_\pi$ は $\mathcal{V}_\pi$ で稠密である。

(2) は (1) と命題 36 から従う。□

補題 41. $f \in \mathcal{L}^q$ $(q > 1)$ がカスプ的、即ち、$\langle\, f \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G = 0$ $(\forall \phi \in \mathcal{D}_P)$ とする。このとき、任意の $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して $R(\varphi)f$ はジーゲル領域 $\mathfrak{S}$ 上で急減少である。特に、$R(\varphi)f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ である。

Proof: 任意の $D \in U(\mathfrak{g})$ に対して $R(D)\,(f * \varphi) = f * R(D)\varphi$ だから、補題 39 より

$$|\,[R(D)(R(\varphi)f)](g) \ll_{D,\varphi,f} \|g\|^{2/q}, \quad g \in G(\mathbb{A})^1$$

となり、$R(\varphi)f$ は一様緩増大となる。一方、$\langle\, R(\varphi)f \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G = \langle\, f \,|\, R(\varphi^*)\theta_\phi \,\rangle_G = \langle\, f \,|\, \theta_{R(\varphi^*)\phi} \,\rangle_G = 0$ より $R(\varphi)f$ もカスプ的である。命題 30(3) の証明より、これは $(R(\varphi)f)_P = 0$ $(\forall g \in G(\mathbb{A})^1)$ と同値。従って、函数 $R(\varphi)f$ に補題 34 を適用すれば結論を得る。□

命題 42. 任意の $q > 1$ に対して、$\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}} + \Theta$ は $\mathcal{L}^q$ の稠密部分空間である。

Proof: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ となる $r > 1$ をとると、pairing $\langle\,|\,\rangle_G$ によって $\mathcal{L}^r$ は $\mathcal{L}^q$ 位相的双対空間となる。よって、Hahn-Banach の定理から、$f \in \mathcal{L}^r$ に対して、

$$\langle \Theta + \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}} \,|\, f \rangle_G = \{0\} \tag{4.22}$$

のもとで $f = 0$ を示せばよい。条件 (4.22) より、$\langle \theta_\phi \,|\, f\,\rangle_G = 0$ $(\forall \phi \in \mathcal{D}_P)$ となるので、補題 41 によれば、任意の $\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ に対して $R(\varphi)f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ である。命題 40(2) より、$\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ の函数列 (f_n) で $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ において $R(\varphi)f$ に収束するものがある。$R(\varphi^*)f_n \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ なので、(4.22) より

$$\langle\, R(\varphi)f \,|\, f_n \,\rangle_G = \langle\, f \,|\, R(\varphi^*)f_n \,\rangle_G = 0$$

となる。$n \to \infty$ として、$\|R(\varphi)f\|_G^2 = 0$、つまり、$R(\varphi)f = 0$ を得る。$\varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ は任意なので、デルタ函数近似列を使うと $f = 0$ が従う。□

4.4.4. アイゼンシュタイン級数の波束. $\mathcal{L}^2$ から $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$ への射影を記述するためには、アイゼンシュタイン級数 $E(\mathsf{f}^{(s)} : g)$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ を虚軸まで解析接続することが必要になる。必要とされる結果は次のようにまとめられる：

定理 43. 各 $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$ に対して、次のような函数 $\mathsf{E}(\mathsf{f}) : D \times G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ が存在する。

(1) $g \in G(\mathbb{A})^1$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ ならば、$\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g) = E(\mathsf{f}^{(s)} : g)$ である。
(2) $\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g)$ は s に関して $\mathbb{C}$ 上有理型函数であり、極は D の補集合に含まれる。
(3) $s \in D$ を固定すると、$\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -) \in \mathcal{A}_G$ である。
(4) $g \in G(\mathbb{A})^1$ を固定すると、$s \mapsto \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g)$ は右半平面 $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$ では $s = 1$ を除いて整型である。
(5) 函数等式が成り立つ：

$$\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g) = \mathsf{E}(\mathsf{M}(s)\mathsf{f}; -s, g), \qquad \mathsf{f} \in \mathbf{H}^0,\ s \in D,\ g \in G(\mathbb{A})$$

Proof: 3.2.2 節を参照せよ。□

命題 44. $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$, $s \in D$ とすると、

$$\langle\, \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -) \,|\, f \rangle_G = 0, \qquad \forall f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$$

Proof: 定理 43(3)) より $E(|\mathsf{f}^{(s)}|,-) \in \mathcal{A}_G$ なので、ある $N \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$E(|\mathsf{f}^{(s)}|, g) \ll \delta_P(g)^N, \quad g \in \mathfrak{S}$$

$f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ なので命題 35 より

$$|f(g)| \ll \delta_P(g)^{-N}, \qquad g \in \mathfrak{S}$$

なる評価が存在する。従って、$\mathrm{Re}(s) > 1$ であれば

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |f(g)| \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} |\mathsf{f}^{(s)}(\gamma g)| \, \mathrm{d}^1 g \ll \int_{\mathfrak{S}} |f(g)| \, E(|\mathsf{f}^{(s)}|, g) \, \mathrm{d}g \ll \int_{\mathfrak{S}} \mathrm{d}g = \mathrm{vol}(\mathfrak{S}) < +\infty$$

よって、命題 (14)(1) と同じ積分変形で

$$\langle\, E(\mathsf{f}^{(s)}, -) \mid f \,\rangle_G = \langle\, \mathsf{f}^{(s)} \mid f_P \,\rangle_P$$

が示されるが、$f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ ゆえ、収束域 $\mathrm{Re}(s) > 1$ において右辺は消える。収束域の外では、解析接続によって $\langle\, \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -) \mid f \,\rangle_G = 0$ が成立する。□

$\mathrm{P}_{\mathrm{cont}} : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$ を直交射影子とする。等長同型写像 $\mathrm{T} : \mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}} \cong \mathfrak{H}$ との合成として

$$\mathrm{S} = \mathrm{T} \circ \mathrm{P}_{\mathrm{cont}} : \mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathfrak{H}$$

を定義する。この写像 S を具体的に記述したい。定義から、$\phi \in \mathcal{D}_P$ に対しては $\mathrm{S}(\theta_\phi) = \mathsf{a}_\phi$ であることを注意しよう。

補題 45. 任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\mathcal{L}^{2+\epsilon} \subset \mathcal{L}^2$ であり、包含写像は連続である。□

Proof: $0 < q_1 < q_2$ として、$\mathcal{L}^{q_2} \subset \mathcal{L}^{q_1}$ を示せばよい。$l = q_2/q_1$ として、$1/l + 1/m = 1$ によって $m > 1$ を決めると、Hölder の不等式から

$$\|f\|_{G,q_1} \leqslant \|1\|_{G,m}^{1/m} \, \||f|^{q_1}\|_{G,l}^{1/l} = \mathrm{vol}_G^{1/m} \, \|f\|_{G,q_2}^{1/l}$$

これより包含 $\mathcal{L}^{q_2} \subset \mathcal{L}^{q_1}$ とその連続性は明らか。□

さて、$\varphi \in \mathcal{L}^{2+\epsilon}$ とする。$\mathrm{S}\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{H}$ は可側函数であった。よってこの函数を決めるには、任意の元 $f \in \mathbf{H}^0$ との内積 $\langle f, (\mathrm{S}\varphi)(y) \rangle_{\mathbf{K}}$ を記述すればよい。それは次の命題で与えられる：

命題 46. $\varphi \in \mathcal{L}^{2+\epsilon}$ とする。このとき、任意の $f \in \mathbf{H}^0$ に対して、

$$\langle \mathsf{f}, (\mathrm{S}\varphi)(y) \rangle_{\mathbf{K}} = \mathrm{vol}_M^{-1} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \mathsf{E}(\mathsf{f}; iy, g) \, \overline{\varphi(g)} \, \mathrm{d}g, \qquad (\text{for a.e. in } y \in \mathbb{R}) \tag{4.23}$$

右辺の積分は任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して絶対収束する。□

Proof: $m = (2+\epsilon)/(1+\epsilon)$ とおくと $1/m + 1/(2+\epsilon) = 1$ となる。従って、Hölder の不等式から

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g)| \, |\varphi(g)| \, \mathrm{d}^1 g \leqslant \|\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -)\|_{G,m} \, \|\varphi\|_{G,2+\epsilon}$$

ここで、$s \in i\mathbb{R}$ なので、ジーゲル領域 $\mathfrak{S}$ 上での評価 $|\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g)| \ll \delta_P(g)^{1/2}$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \|\mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -)\|_{G,m}^m &\leqslant \int_{\mathfrak{S}} \delta_P(g)^{m/2} \, \mathrm{d}g \\ &\ll \int_{t_0}^{+\infty} a^{m/2-1} \, \mathrm{d}^\times a \\ &< +\infty \qquad \left(\because \; \frac{m}{2} - 1 = \frac{-\epsilon}{2(1+\epsilon)} < 0\right) \end{aligned}$$

これで、(4.23) 右辺の積分は絶対収束し、φ の汎函数としては $\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ 上連続なことも示された。一方、左辺は φ の汎函数としては $\mathcal{L}^2$ 上連続であり、補題 45 より、その $\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ への制限も連続になる。故に、等式 (4.23) を、$\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ の稠密部分空間 $\Theta + \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ (命題 42) 上で示せば十分である。$\varphi \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ ならば、(4.23) の左辺は S の定義からゼロである。右辺は、命題 44 により、やはりゼロとなって等号が成立する。次に、$\varphi = \theta_\phi \ (\phi \in \mathcal{D}_P)$ とする。任意の $\beta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ および任意の $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$ に対して、$\mathsf{b}(y) = b(y)\,\mathsf{f}$ によって函数 $\mathsf{b} : \mathbb{R} \to \mathbf{H}$ を定義すると、命題 15 の証明と同様に、命題 14 および命題 6 を使って

$$\mathrm{vol}_M^{-1} \langle\, \mathsf{E}(\mathsf{b}(y); iy) \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G = \langle\, \mathsf{b}(y), \hat{\phi}_1(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} + \langle\, \mathsf{M}(iy)\mathsf{b}(y), \hat{\phi}(-iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \tag{4.24}$$

が示せる。命題 11 および命題 16(5) から右辺は急減少、特に、可積分であることを注意しよう。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\mathrm{vol}_M^{-1} \int_{\mathbb{R}} \langle\, \mathsf{E}(\mathsf{b}(y); iy) \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \{\langle\, \mathsf{b}(y), \hat{\phi}(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} + \langle\, \mathsf{M}(iy)\,\mathsf{b}(y), \hat{\phi}(-iy) \,\rangle_{\mathbf{K}}\} \,\mathrm{d}y \qquad (\because (4.24)) \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle \mathsf{b}(y),\ \hat{\phi}(iy) + M(-iy)\hat{\phi}(-iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y \qquad (\because \text{命題 } 16\ (6)) \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle \mathsf{b}(y),\ \mathsf{a}_\phi(y) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle\, \mathsf{b}(y),\ [\mathrm{S}(\theta_\phi)]\,(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

故に、

$$\frac{1}{8\pi}\mathrm{vol}_M^{-1} \int_{\mathbb{R}} \beta(y) \,\langle\, \mathsf{E}(\mathsf{f}; iy) \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G \,\mathrm{d}y = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \beta(y) \,\langle\, \mathsf{f},\ [\mathrm{S}(\theta_\phi)]\,(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y \tag{4.25}$$

となる。$\beta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ は任意なので、$\varphi = \theta_\phi$ に対して (4.23) が従う。□

$\mathbf{K}$-有限かつコンパクト台 (i.e., ある $T > 0$ が存在して、$\mathbb{R} - [-T, T]$ 上殆ど至るところ $\mathsf{a}(y) = 0$) をもつ元 $\mathsf{a} \in \mathfrak{H}$ 全体のなす $\mathfrak{H}$ の部分空間を $\mathfrak{H}^0$ とする。随伴作用素 $\mathrm{S}^* : \mathfrak{H} \to \mathcal{L}^2_{\mathrm{cont}}$ は次の命題で与えられる。

命題 47. $\mathsf{a} \in \mathfrak{H}^0$ のとき、

$$[\mathrm{S}^*(\mathsf{a})](g) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathsf{E}(\mathsf{a}(y) : iy : g) \,\mathrm{d}y \qquad (\text{a.e. in } g \in G(\mathbb{A})^1) \tag{4.26}$$

Proof : $\mathbf{H}$ の正規直交基底 $\{\mathsf{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ (\subset \mathbf{H}^0)$ を固定してあることを想起しよう（定義 24）。$\mathsf{a} \in \mathfrak{H}^0$ とすると、有限集合 $I \subset \mathbb{N}$ とコンパクト台のスカラー値可測函数の族 $c_n\ (n \in I)$ が存在して

$$\mathsf{a}(y) = \sum_{n\in I} c_n(y)\,\mathsf{f}_n, \qquad (\text{a.e. in } y \in \mathbb{R})$$

となる。命題 46 の証明中で、任意の $\beta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R})$ 任意の $\mathsf{f} \in \mathbf{H}^0$ に対して、(4.25) を示した。極限移行によって、この等式は β を任意のコンパクト台の可測函数としても成立する。従って、

$$\frac{1}{8\pi}\mathrm{vol}_M^{-1} \int_{\mathbb{R}} \langle\, \mathsf{E}(\mathsf{a}(y); iy) \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G \,\mathrm{d}y = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \langle\, \mathsf{a}(y),\ [\mathrm{S}(\theta_\phi)]\,(iy) \,\rangle_{\mathbf{K}} \,\mathrm{d}y$$

が成り立つ。(4.26) 右辺を g の函数として $\varphi(g)$ とすれば、これは、次のように書きなおせる。

$$\langle\, \varphi \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G = \langle\, \mathrm{S}^*\mathsf{a} \,|\, \theta_\phi \,\rangle_G$$

従って、$\varphi - \mathrm{S}^*(\mathsf{a})$ は Θ と直交する。命題 44 より、$\varphi - \mathrm{S}^*(\mathsf{a})$ は $\mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ とも直交することが容易に分かる。さて、虚軸上の評価 $|\mathsf{E}(\mathsf{f}; iy, g)| \ll \delta_P(g)^{1/2}$ $(g \in \mathfrak{S})$ を積分することで、φ もジーゲル領域上 $\delta_P(g)^{1/2}$ で上から評価される。特に、補題 1 より、$\varphi \in \mathcal{L}^{1+\epsilon}$ $(\exists \epsilon \in (0,1))$ である。また、命題 45 より、$\mathrm{S}^*\mathsf{a} \in \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^{1+\epsilon}$ だから $\varphi - \mathrm{S}^*\mathsf{a} \in \mathcal{L}^{1+\epsilon}$ となる。したがって、命題 42 から、$\varphi - \mathrm{S}^*(\mathsf{a})$ は殆どいたるところでゼロなことが結論される。$\square$

命題 48. $\varphi \in \mathcal{L}^2$ が $\mathbf{K}$-有限であれば、$\mathsf{a}_\varphi \in \mathfrak{H}$ が存在して

$$\mathrm{P}_{\mathrm{cont}}(\varphi) = \lim_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{8\pi} \int_{-T}^{T} \mathsf{E}(\mathsf{a}_\varphi(y); iy, -)\, \mathrm{d}y \right) \qquad (\text{in } \mathcal{L}^2) \tag{4.27}$$

となる。更に、φ が $\mathcal{L}^{2+\epsilon}$ に属するならば、

$$\mathsf{a}_\varphi(y) = \mathrm{vol}_M^{-1} \sum_n \left\{ \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \varphi(g)\, \mathsf{E}(\bar{\mathsf{f}}_n; -iy, g)\, \mathrm{d}g \right\} \mathsf{f}_n$$

と与えられる。

Proof : $\mathsf{a}_\varphi = \mathrm{S}(\varphi) \in \mathfrak{H}$ とおく。任意の正数 T に対して、$\mathsf{a}_\varphi^T(y)$ を $\mathsf{a}_\varphi(y)$ と区間 $[-T, T]$ の特性函数の積とすれば、$\mathsf{a}_\varphi = \lim_{T\to\infty} \mathsf{a}_\varphi^T$ ($\mathfrak{H}$ での収束）となる。よって、

$$\mathrm{P}_{\mathrm{cont}}(\varphi) = \mathrm{S}^* \circ \mathrm{S}(\varphi) = \mathrm{S}^*(\mathsf{a}_\varphi) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{S}^*(\mathsf{a}_\varphi^T)$$

ここで命題 47 を使えば最初の主張が従う。$\mathsf{a}_\varphi(y) = \sum_n \langle \mathsf{a}_\varphi(y), \mathsf{f}_n \rangle_{\mathbf{K}}\, \mathsf{f}_n$ (a.e. $y \in \mathbb{R}$) と展開される。$\varphi \in \mathcal{L}^{2+\epsilon}$ ならば命題 46 より、$\langle \mathsf{a}_\varphi(y), \mathsf{f}_n \rangle_{\mathbf{K}}$ が与えられる。$\square$

4.4.5. 留数形式.

命題 49. η をユニタリーなイデール類群指標として、$\mu = (\eta, \eta) \in \mathfrak{X}^M$ とする。任意の $\mathsf{f} \in \mathbf{H}_\mu^0$ に対して、

$$\mathrm{Res}_{s=1} \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g) = -\frac{\mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)}{\Delta_F^{1/2}\, \zeta_F(2)} \langle \mathsf{f}^{(1)}, \eta \circ \det \rangle_{\mathbf{K}}\, \mathrm{vol}_G^{1/2}\, \varphi_\eta(g), \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

Proof : 補題 63 より $\mathsf{f}^{(s)} = B(s)\, f_\Phi(\mu, s)$ となる $\Phi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ と $\mathrm{Re}(s) > -1$ でゼロを持たない整型関数 $B(s)$ が存在する。従って、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=1} \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, g) &= B(1)\, \zeta_F(2)\, \mathrm{Res}_{s=1} E(\Phi, \mu, s; g) \\
&= -B(1)\, \mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)\, \eta(\det g))\, \hat{\Phi}(0) \qquad (\because \text{命題 } 61(2)) \\
&= -B(1)\, \mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)\, \eta(\det g)\, \Delta_F^{-1/2} \langle f_\Phi(\mu, 1), \eta \circ \det \rangle_{\mathbf{K}} \qquad (\because (5.7)) \\
&= -\frac{\mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)}{\Delta_F^{1/2}\, \zeta_F(2)} \langle \mathsf{f}^{(1)}, \eta \circ \det \rangle_{\mathbf{K}}\, \eta(\det g) \qquad \square
\end{aligned}$$

系 50. η をユニタリーなイデール類群指標とすると、$\langle\, \varphi_\eta \mid f \,\rangle_G = 0\, (\forall f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}})$ である。

Proof : $f \in \mathcal{A}_{G,\mathrm{cus}}$ とする。命題 44 より $\langle\, \mathsf{E}(\mathsf{f}; s, -) \mid f \,\rangle_G = 0$ である。この式で $s = 1$ における留数を考える。f がジーゲル領域の上で急減少なことから積分と留数操作は可換であり、結論は命題 49 から従う。$\square$

4.4.6. スペクトル分解.

命題 51. $\mathcal{L}^2_{\rm cus}$, $\mathcal{L}^2_{\rm cont}$, $\mathcal{L}^2_{\rm res}$ は $G(\mathbb{A})$-不変な閉部分空間であって、直交直和分解

$$\mathcal{L}^2=\mathcal{L}^2_{\rm cus}\hat{\oplus}\mathcal{L}^2_{\rm cont}\hat{\oplus}\mathcal{L}^2_{\rm res} \tag{4.28}$$

が成立する。$f\in\mathcal{L}^2$ を直交分解 (4.28) に沿って $f={\rm P}_{\rm cus}(f)+{\rm P}_{\rm res}(f)+{\rm P}_{\rm cont}(f)$ と書くとき、

$${\rm P}_{\rm cus}(f)=\sum_{\pi\in\Pi_{\rm cus}(G)}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_\pi}\langle\, f\,|\,\phi\,\rangle_G\,\phi, \tag{4.29}$$

$${\rm P}_{\rm res}(f)=\sum_{\eta}\langle\, f\,|\,\varphi_\eta\,\rangle_G\,\varphi_\eta \tag{4.30}$$

であり、${\rm P}_{\rm cont}(f)$ は命題 48 で与えられる。ここで、$\Pi_{\rm cus}(G)$ はカスプ保型表現全体の集合であり、$\mathcal{B}_\pi$ は V_π の正規直交基底である（命題 40)。

Proof : 定義 29 から、$\mathcal{L}^2_{\rm res}=\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp$ を示せばよい。系 50 より $\mathcal{L}^2_{\rm cus}\perp\mathcal{L}_{\rm res}$、従って、$\mathcal{L}_{\rm res}\subset(\mathcal{L}^2_{\rm cus})^\perp=\bar{\Theta}$ となる。命題 30 から $\mathcal{L}^2_{\rm cont}\perp\mathcal{L}^2_{\rm res}$ である。これで、$\mathcal{L}^2_{\rm res}\subset\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp$ が分かった。逆の包含を示すため、任意に $f\in\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp$ をとり、$f_0=f-\sum_\eta\langle\, f\,|\,\varphi_\eta\rangle_G\,\varphi_\eta$ とおく。一方で、$\langle\, f_0\,|\,\varphi_\eta\rangle_G=0\ (\forall\eta)$ は明らかであり、他方で、前半で示した包含より $f_0\in\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp$ となる。故に、${\rm T}(f_0)=0$ である。T の単射性から $f_0=0$ であるが、これは $f\in\mathcal{L}^2_{\rm res}$ を意味する。これで、$\bar{\Theta}\cap(\mathcal{L}^2_{\rm cont})^\perp\subset\mathcal{L}^2_{\rm res}$ が示された。□

系 52. Δ_F を $F/\mathbb{Q}$ の判別式、$\zeta_F(s)$ をガンマ因子で完備化した Dedekind ゼータ函数、$r_2=\sharp\Sigma_{\mathbb{C}}$ とすると、

$${\rm vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)=2\,\Delta_F^{1/2}\,\pi^{r_2}\,\zeta_F(2)\,{\rm vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)$$

Proof : T の等長性から、$f\in\bar{\Theta}$ に対して、

$$\|f\|_G^2=\frac{{\rm vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\|[{\rm S}(f)](y)\|^2_{\mathbf{K}}\,{\rm d}y+\frac{C}{2}\frac{{\rm vol}_G}{{\rm vol}_M}\sum_\eta\|{\rm P}_\eta(f)\|_G^2$$

である。命題 51 から $\mathcal{L}^2_{\rm res}\subset\bar{\Theta}$ だから、特に、$f=\varphi_\eta$ とることができて、$1=\frac{C}{2}\frac{{\rm vol}_G}{{\rm vol}_M}$ となる。${\rm vol}_M={\rm vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)^2$ であることと、命題 17(2) で与えられている C の値から結論が出る。□

注意 : 一般には、(4.29), (4.30), (4.27) は $\mathcal{L}^2$ のノルムの意味でしか収束していない。しかし、$\mathbf{K}$-有限かつ smooth な函数 f が、任意の $m\in\mathbb{N}$ および任意の $v\in\Sigma_\infty$ に対して $R(\Omega_v^m)f\in\mathcal{L}^{2+\epsilon}\ (\exists\epsilon>0)$（ただし、$\Omega_v$ は $G(F_v)$ のカシミール作用素）を満たせば、そのスペクトル展開

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\rm cus}(G)}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_\pi}\langle\, f\,|\,\phi\,\rangle_G\,\phi(g)+\sum_\eta\langle\, f\,|\,\varphi_\eta\,\rangle_G\,\varphi_\eta(g)+\frac{{\rm vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle\, f\,|\,\mathsf{E}(\mathsf{f}_n;iy)\,\rangle_G\,\mathsf{E}(\mathsf{f}_n;iy,g)\,{\rm d}y$$

における和と積分は、$g\in G(\mathbb{A})$ に関して広義一様絶対収束して、この表示は全ての g で函数の値 $f(g)$ に一致することが示せる。

4.5. **カスピダルデータ.** $\mathfrak{X}^M$ への群 $W_0=\{1,w_0\}$ の作用を ${}^{w_0}\mu=\check{\mu}$ で定義し、$\mu\in\mathfrak{X}^M$ の軌道を $[\mu]$ と書こう。従って、$\mu=(\mu_1,\mu_2)$ としたとき、$\mu_1\neq\mu_2$ ならば $[\mu]=\{\mu,\check{\mu}\}$ であり、$\mu_1=\mu_2$ ならば $[\mu]=\{\mu\}$ である。次のような形を持った対 χ を G のカスピダルデータとよび、その全体を $\mathfrak{X}^G$ と書く：

$$\chi=(G,\pi)\ (\pi\text{ はカスプ保型表現})\ \text{または}\ \chi=(P,[\mu])\ ([\mu]\in\mathfrak{X}^M/W_0)$$

$\chi\in\mathfrak{X}^G$ に対して、$\mathcal{L}^2$ の閉部分空間 $\mathcal{L}^2_\chi$ を次のように定義する。

- $\chi=(G,\pi)$ の場合、$\mathcal{L}^2_\chi=\mathcal{V}_\pi$（重複度 1 定理より、これは $\mathcal{L}^2_{\rm cus}$ における π-等型成分と等しい）

- $\chi=(P,[\mu])$ の場合、

$$\mathcal{L}^2_\chi = \text{Closure of }\ \{\theta_\phi |\, \phi\in\mathcal{D}_P(\mu)+\mathcal{D}_P(\check{\mu})\}$$

$\bar{\Theta}=\mathcal{L}^2_{\rm cont}\hat{\oplus}\mathcal{L}^2_{\rm res}$ が部分空間 $\mathcal{L}^2_{(P,[\mu])}$ $([\mu]\in\mathfrak{X}^M/W_0)$ の直交直和になることに注意すれば、命題 51 は次のように言い換えられる。

命題 53. $\mathcal{L}^2$ は $G(\mathbb{A})$-不変閉部分空間 $\mathcal{L}^2_\chi$ $(\chi\in\mathfrak{X}^G)$ の直和に分解される：

$$\mathcal{L}^2=\hat{\bigoplus}_{\chi\in\mathfrak{X}^G}\mathcal{L}^2_\chi$$

4.6. **中心指標付きの場合.** ユニタリー指標 $\omega: Z_\infty^+Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})\to\mathbb{C}^1$ に対して、

$$\mathcal{L}^2(G,\omega)=\{\phi\in\mathcal{L}^2|\,\phi(zg)=\omega(z)\,\phi(g)\ (\forall\, z\in Z(\mathbb{A}))\,\}$$

と定義する。これは $G(\mathbb{A})$-不変閉部分空間であって、$\mathcal{L}^2$ は $\mathcal{L}^2(G,\omega)$ 全体の直和に分解される。$\mathcal{L}^2_{\rm cus}(G,\omega)=\mathcal{L}^2_{\rm cus}\cap\mathcal{L}^2(G,\omega)$, $\mathcal{L}^2_{\rm cont}(G,\omega)=\mathcal{L}^2_{\rm cont}\cap\mathcal{L}^2(G,\omega)$, $\mathcal{L}^2_{\rm res}(G,\omega)=\mathcal{L}^2_{\rm res}\cap\mathcal{L}^2(G,\omega)$ とおくと、命題 51 から容易に $\mathcal{L}^2(G,\omega)$ の分解が得られる：

$$\mathcal{L}^2(G,\omega)=\mathcal{L}^2_{\rm cus}(G,\omega)\hat{\oplus}\mathcal{L}^2_{\rm cont}(G,\omega)\hat{\oplus}\mathcal{L}^2_{\rm res}(G,\omega)$$

5. アイゼンシュタイン級数の基本性質

5.1. **局所絡作用素.** $v\in\Sigma$ とする。$\mathfrak{X}^M_v$ を $M(F_v)\cong F_v^\times\times F_v^\times$ のポントリャーギン双対群とする。$\mathfrak{X}^M_v$ は $F_v^\times$ のユニタリー指標の組 $\mu=(\mu_1,\mu_2)$ 全体からなる。$\mu\in\mathfrak{X}^M_v$, $s\in\mathbb{C}$ に対して、$\mathbf{H}^0_v(\mu,s)$ を主系列表現 $\mathrm{Ind}_{P(F_v)}^{G(F_v)}(\mu_1|\,|_v^{s/2}\boxtimes\mu_2|\,|_v^{-s/2})$ の $\mathbf{K}_v$-有限ベクトル全体の空間とすると、これは自然に Hecke 環 $\mathcal{H}(G(F_v))$ 上の加群になる。$\mathcal{H}(G(F_v))$-不変な非退化 pairing $\langle\,,\,\rangle_{\mathbf{K}_v}:\mathbf{H}^0_v(\mu,s)\times\mathbf{H}^0_v(\check{\mu},-s)\to\mathbb{C}$ が次のように定義される：

$$\langle f_1,f_2\rangle_{\mathbf{K}_v}=\int_{\mathbf{K}_v}f_1(k)\,\bar{f}_2(k)\,\mathrm{d}k$$

$\mathsf{f}_v\in\mathbf{H}^0_v(\mu,0)$ に対して、

$$\mathsf{f}_v^{(s)}(g_v)=\delta_P(g_v)^{s/2}\,\mathsf{f}_v(g_v),\qquad s\in\mathbb{C},\ g_v\in G(F_v)$$

として $\mathsf{f}_v^{(s)}\in\mathbf{H}^0_v(\mu,s)$ を定義する。

$F_v^2=\{[x,y]|\,x,\,y\in F_v\,\}$ 上の Schwartz-Bruhat 函数全体の空間 $\mathcal{S}(F_v^2)$ には群 $G(F_v)$ が自然に作用する：

$$(g\Phi)([x,y])=\Phi([x,y]g),\qquad \Phi\in\mathcal{S}(F_v^2),\ g\in G(F_v)$$

次で定義される函数は $\mathcal{S}(F_v^2)$ の $\mathbf{K}_v$-不変ベクトルであることが容易にわかる：

$$\Phi^0_v([x,y])=\begin{cases}\exp(-\pi(|x|_{\mathbb{R}}^2+|y|_{\mathbb{R}}^2)), & v\in\Sigma_{\mathbb{R}},\\ \exp(-2\pi(|x|_{\mathbb{C}}+|y|_{\mathbb{C}})), & v\in\Sigma_{\mathbb{C}},\\ \mathfrak{O}_v^2\text{ の特性函数}, & v\in\Sigma_{\rm fin}\end{cases}$$

$\mathbf{K}_v$-有限函数全体のなす $\mathcal{S}(F_v^2)$ の部分空間を $\mathcal{S}_0(F_v^2)$ とする。$v\in\Sigma_{\rm fin}$ の場合は、$\mathcal{S}(F_v^2)=\mathcal{S}_0(F_v^2)$ であることに注意する。$G(F_v)$ の表現から $\mathcal{S}_0(F_v^2)$ には自然に $\mathcal{H}(G(F_v))$-加群構造が決まる。

$\Phi\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\mathfrak{X}^M_v$, $s\in\mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(s)>-1)$ に対して、

$$f_{\Phi,v}(\mu,s:g)=\frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\int_{F_v^\times}\Phi([0,t]g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t,\qquad g\in G(F_v)\tag{5.1}$$

と定義する。擬指標 $\eta : F_v^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して、$Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta) : \mathcal{S}(F_v) \to \mathbb{C}$ を Tate の局所ゼータ distribution

$$Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta;\varphi) = \int_{F_v^\times} \eta(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}^\times t, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(F_v)$$

とすれば、

$$f_{\Phi,v}(\mu, s : g)\,\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g^{-1}) = \frac{Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1};\Phi([0,\bullet]g)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})} \tag{5.2}$$

と書ける。ただし、擬指標 $\eta : F_v^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して、$L_v(\eta)$ を局所 L 因子、$\epsilon_v(\eta, \psi_{F,v})$ を局所 ϵ-因子とする。$Z_v^{\mathrm{GL}(1)}$ に関して必要な結果を引用しておく：

命題 54. η をユニタリー指標とする。

(1) $\mathrm{Re}(s) > 0$ ならば、任意の $\varphi \in \mathcal{S}(F_v)$ について積分 $Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta|\,|_v^s;\varphi)$ は絶対収束して s の整型函数を定める。

(2) $\varphi \in \mathcal{S}(F_v)$ に対して、$Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta|\,|_v^s;\varphi)/L_v(\eta|\,|_v^s)$ は $s \in \mathbb{C}$ の整型函数に延長されて次の「局所函数等式」を満たす：

$$\frac{Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta^{-1}|\,|_v^{1-s};\hat{\varphi})}{L_v(\eta^{-1}|\,|_v^{1-s})} = \epsilon_v(\eta|\,|_v^s, \psi_{F,v})\,\frac{Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\eta|\,|_v^s;\varphi)}{L_v(\eta|\,|_v^s)}$$

ただし、$\hat{\varphi}(t) = \int_{F_v} \varphi(u)\,\psi_{F,v}(tu)\,\mathrm{d}u$ はフーリエ変換である。また、$L_v(\eta|\,|_v^s)$, $\epsilon_v(\eta|\,|_v^s;\psi_{F,v})$ はそれぞれ擬指標 $\eta|\,|_v^s$ に対する局所 L-因子および局所 ϵ-因子である。

Proof: [37], [35] を参照せよ。$\square$

命題 55. (1) $f_{\Phi,v}(\mu, s; g)$ は変数 $g \in G(F_v)$ および s ($\mathrm{Re}(s) > -1$) に関して広義一様に絶対収束して $\mathbf{H}_v^0(\mu, s)$ の要素を決める。

(2) $g \in G(F_v)$ を固定するとき、$s \mapsto f_{\Phi,v}(\mu, s; g)$ ($\mathrm{Re}(s) > -1$) は $\mathbb{C}$ 上の整型函数に延長される。

(3) μ が不分岐 (i.e., μ_1, μ_2 が $\mathfrak{O}_v^\times$ 上で自明）とすると、$\mathrm{Re}(s) > -1$ なる任意の $s \in \mathbb{C}$ について

$$f_{\Phi_v^0,v}(\mu, s; g_v) = 1, \qquad g_v \in \mathbf{K}_v$$

(4) $\Phi \mapsto f_{\Phi,v}(\mu, s; -)$ は $\mathcal{H}(G(F_v))$-絡作用素 $\mathcal{S}_0(F_v^2) \longrightarrow \mathbf{H}_v^0(\mu, s)$ を定義する。$\mathrm{Re}(s) > -1$ の範囲で、$\mathcal{H}(G(F_v))$-絡作用素 $\mathcal{S}_0(F_v^2) \longrightarrow \mathbf{H}_v^0(\mu, s)$ は全射である。

$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば、任意の $\mathsf{f}_v \in \mathbf{H}_v^0(\mu_v, 0)$ に対して、$\Phi \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$ が存在して、

$$f_{\Phi,v}(\mu, s; g_v) = \frac{1}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\,\mathsf{f}_v^{(s)}(g_v), \qquad g_v \in G(F_v), \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

となる。$v \in \Sigma_\infty$ ならば、$\mathbf{K}_v$ の任意の既約表現 τ と任意の $\mathsf{f}_v \in \mathbf{H}_v^0(\mu_v, 0)[\tau]$ に対して、$\Phi \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$ および τ のみに依存し $\mathrm{Re}(s) > -1$ で零点を持たない多項式 $P_\tau(s)$ が存在して、

$$f_{\Phi,v}(\mu, s; g_v) = P_\tau(s)\,\mathsf{f}_v^{(s)}(g_v), \qquad g_v \in G(F_v), \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

となる。

Proof: コンパクト集合 $\mathcal{U} \subset G(F_v)$ に依存して、ある Schwrtz-Bruhat 函数 $\varphi \in \mathcal{S}(F_v)$ が存在して、

$$|\Phi([0,t]g)| \ll \varphi(t), \qquad t \in F_v,\ g \in \mathcal{U}$$

となることが容易に分かる。(1) は $\sigma > 0$ に対して $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)|t|_v^{\sigma+1}\,\mathrm{d}^\times t < +\infty$ であることより従う。

(2) は 公式 (5.2) および命題 54(2) から従う。

$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して、主張 (3), (4) の証明は [25, 命題 3.10, 3.11] を参照。以下 $v \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ とする。$\mu_1\mu_2^{-1}(t) = \mathrm{sgn}(t)^\epsilon$ ($\epsilon \in \{0,1\}$ とかける。$L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^s) = \pi^{-(s+\epsilon)/2}\Gamma((s+\epsilon)/2)$ である。各 $m \in 2\mathbb{Z}+\epsilon$ に対して、$\mathsf{f}_m(k_\theta) = e^{m\pi i\theta}$ ($\forall k_\theta = \left[\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SO}(2)$) となる函数 $\mathsf{f}_m \in \mathbf{H}_v^0(\mu_v, 0)$ がただ一つに決まり、$\{\mathsf{f}_m|\, m \in 2\mathbb{Z}+\epsilon\}$ が $\mathbf{H}_v^0(\mu_v,0)$ の基底になる。$\Phi_m([x,y]) = (ix+y)^m \exp(-\pi(x^2+y^2))$ と定義すると、

$$\begin{aligned} f_{\Phi_m}(\mu, s; k_\theta) &= \frac{1}{\pi^{-(s+\epsilon+1)/2}\Gamma((s+\epsilon+1)/2)}\int_{\mathbb{R}^\times} e^{mi\theta}\exp(-\pi t^2)\,|t|^{s+1}\,t^m\,\mathrm{sgn}(t)^\epsilon\,\mathrm{d}^\times t \\ &= 2\frac{\pi^{-(s+m+1)/2}\,\Gamma((s+m+1)/2)}{\pi^{-(s+\epsilon+1)/2}\Gamma((s+\epsilon+1)/2)}\,\mathsf{f}_m(k_\theta) \end{aligned}$$

よって、$P_m(s) = 2\pi^{-(m-\epsilon)/2}\prod_{j=0}^{[(m-\epsilon)/2]-1}\left(\frac{s+\epsilon+1}{2}+j\right)$ とおけば $P_m(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > -1$ で零点を持たず、$f_{\Phi_m}(\mu,s) = P_m(s)\,\mathsf{f}_m$ となる。$v \in \Sigma_{\mathbb{C}}$ のときも同様の議論で示される。□

$\Phi \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$ のフーリエ変換 $\hat{\Phi} \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$ は

$$\hat{\Phi}(Y) = \int_{F_v^2}\Phi(X)\,\psi_{F,v}(X\,{}^tY)\,\mathrm{d}Y, \quad Y \in F_v^2$$

で定義される。

$\mu \in \mathfrak{X}_v^M$, $s \in \mathbb{C}$ ($\mathrm{Re}(s) > 0$) とする。函数 $f \in \mathbf{H}_v^0(\mu, s)$ に対して、積分

$$[M_v(s)f]\,(g) = \int_{F_v} f\left(w_0\left[\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]g\right)\mathrm{d}x, \qquad g \in G(F_v) \tag{5.3}$$

を考える。

命題 56. (1) $\mathrm{Re}(s) > 0$ とする。(5.3) は $g \in G(F_v)$ に関して広義一様絶対収束して $\mathbf{H}_v^0(\check{\mu}, -s)$ に属する函数を定める。対応 $f \mapsto M_v(s)f$ は絡作用素

$$M_v(s) : \mathbf{H}_v^0(\mu, s) \longrightarrow \mathbf{H}_v^0(\check{\mu}, -s)$$

を定める。

(2) $\Phi \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$, $g \in G(F_v)$ に対して、

$$\varphi_{\Phi,g}(t) = \int_{F_v}\Phi([x,t]w_0 g)\,\mathrm{d}x, \qquad t \in F_v$$

とおくと $\varphi_{\Phi,g} \in \mathcal{S}(F_v)$ であり、

$$[M_v(s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g) = \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\,Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^s; \varphi_{\Phi,g}), \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

(3) $\Phi \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$ とする。$s \mapsto M_v(s)\Phi$ ($\mathrm{Re}(s) > 0$) は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続されて、

$$[M_v(s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g) = \epsilon_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^s, \psi_{F,v})^{-1}\frac{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^s)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\,f_{\hat{\Phi},v}(\check{\mu}, -s; gw_0) \tag{5.4}$$

Proof : (2) は次の計算によって示される。

$$\begin{aligned}
[M_v(s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g) &= \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\int_F\left\{\int_{F_v^\times}\Phi([0,t]w_0\left[\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right]g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\right\}\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\int_F\left\{\int_{F_v^\times}\Phi([-tx,t]w_0g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\right\}\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\int_F\left\{\int_{F_v^\times}\Phi([x,t]w_0g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s})(t)\,\mathrm{d}^\times t\right\}\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\,Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s};\varphi_{\Phi,g})
\end{aligned}$$

(1) の証明およびこの計算の正当化には、$\mathcal{U}\subset G(F_v)$ を任意のコンパクト集合とるとき、$\mathrm{Re}(s)>0$ において

$$\sup_{g\in\mathcal{U}}\int_{x\in F_v}\int_{t\in F_v^\times}|\Phi([x,t]w_0g)|\,|t|_v^{\mathrm{Re}(s)}\,\mathrm{d}^\times t\,\mathrm{d}x<+\infty$$

を示せばよい。正値の $\Psi\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$ が存在して、

$$|\Phi([x,t]w_0g)|\ll\Psi(x,t),\qquad g\in\mathcal{U},\,(x,t)\in F_v^2$$

が成り立つ。よって、上の積分は $g\in\mathcal{U}$ に関して一様に

$$\int_{F_v^2}\Psi(x,t)\,|t|_v^{\mathrm{Re}(s)-1}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

で上から押さえられる。この積分は $\mathrm{Re}(s)>0$ ならば有限である。

(3) 命題 54 と (2) から、(3) の最初の主張が従う。局所函数等式より

$$\begin{aligned}
[M_v(s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g) =&\frac{\mu_1|\,|_v^{(s+1)/2}(\det g)}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})}\,\epsilon_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s},\psi_{F,v})^{-1}\,\frac{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s})}{L_v(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})}\\
&\times Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1};\hat{\varphi}_{\Phi,g})
\end{aligned}$$

であり、更に、$\mathrm{Re}(s)<1$ のとき、

$$\begin{aligned}
&Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1};\hat{\varphi}_{\Phi,g})\\
&=\int_{t\in F_v^\times}\hat{\varphi}_{\Phi,g}(t)\,(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=\int_{t\in F_v^\times}\left\{\int_{y\in F_v}\varphi_{\Phi,g}(y)\,\psi_{F,v}(yt)\,\mathrm{d}y\right\}(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=\int_{t\in F_v^\times}\left\{\int_{y\in F_v}\int_{x\in F_v}\Phi([x,y]w_0g)\,\psi_{F,v}(yt)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right\}(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=\int_{t\in F_v^\times}|\det g|_v^{-1}\,\hat{\Phi}([0,t]{}^t(w_0g)^{-1})\,(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=|\det g|_v^{-1}\int_{t\in F_v^\times}\hat{\Phi}([0,t](\det g)^{-1}gw_0)\,(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\qquad(\because\ w_0^{-1}gw_0=(\det g)\,{}^tg^{-1})\\
&=(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s})(\det g)\int_{t\in F_v^\times}\hat{\Phi}([0,t]gw_0)\,(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=(\mu_1^{-1}|\,|_v^{-(s+1)/2})(\det g)\,L_v(\mu_2\mu_1^{-1}|\,|_v^{-s+1})\,f_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s;gw_0)
\end{aligned}$$

なので (5.4) が従う。$\square$

定義 57. 正規化された $G(F_v)$-絡作用素 $R_v(\mu,s):\mathbf{H}_v^0(\mu,s)\longrightarrow\mathbf{H}_v^0(\check{\mu},-s)$ を

$$R_v(\mu,s)=\epsilon_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^s,\psi_{F,v})\frac{L_v(\mu_1\mu_2|\,|_v^{s+1})}{L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^s)}\,M_v(s)$$

で定義する。

系 58. $\Phi\in\mathcal{S}_0(F_v^2)$, $g\in G(F_v)$ に対して、$s\mapsto[R_v(\mu,s)f_{\Phi,v}(\mu,s)]\,(g)$ は $\mathbb{C}$ 上整型である。また、$v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ かつ μ, $\psi_{F,v}$ が不分岐ならば、$\mathsf{f}_v^\circ(\mu,s)|\mathbf{K}_v=1$ なる $\mathbf{K}_v$-不変函数 $f_v^\circ(\mu,s)\in\mathbf{H}^0(\mu,s)$ に対して、

$$R_v(\mu,s)\mathsf{f}_v^\circ(\mu,s)=\mathsf{f}_v^\circ(\check{\mu},-s)$$

Proof: 命題 56 および命題 55(2) より従う。$\square$

補題 59. η を $F_v^\times$ のユニタリー指標として、$\mu=(\eta,\eta)\in\mathfrak{X}_v^M$ とおく。$f\in\mathbf{H}^0(\mu,1)$, $g\in G(F_v)$ に対して、

$$R_v(\mu,1)f=C_v\,\langle f,\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}_v}\,\eta(\det g)\tag{5.5}$$

ただし、

$$C_v=\begin{cases}q_v^{-d_v} & (v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}),\\ 1 & (v\in\Sigma_{\mathbb{R}}),\\ \pi^{-1} & (v\in\Sigma_{\mathbb{C}})\end{cases}$$

Proof: 命題 55 (4) より $f=f_\Phi(\mu,1)$ $(\Phi\in\mathcal{S}_0(F_v^2))$ として示せばよい。$\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})$ が $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ ならば $q_v^{-d_v/2}$ であり、$v\in\Sigma_\infty$ ならば 1 であることに注意すると、(5.5) は次の 2 式から従う。

$$[R_v(\mu,1)f_\Phi(\mu,1)]\,(g)=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\hat{\Phi}(0)\,\eta(\det g),\tag{5.6}$$

$$\langle f_\Phi(\mu,1),\eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}_v}=\hat{\Phi}(0)\times\begin{cases}q_v^{d_v/2} & (v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}),\\ 1 & (v\in\Sigma_{\mathbb{R}}),\\ \pi & (v\in\Sigma_{\mathbb{C}})\end{cases}\tag{5.7}$$

(5.6) の証明：

$$\begin{aligned}
&[R_v(\mu,1)f_\Phi(\mu,1)](g)\\
&=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\frac{\zeta_{F,v}(2)}{\zeta_{F,v}(1)}\cdot\frac{\eta(\det g)|\det g|_v}{\zeta_{F,v}(2)}\,Z_v^{\mathrm{GL}(1)}(|\,|_v;\varphi_{\Phi,g})\\
&=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\frac{\eta(\det g)|\det g|_v}{\zeta_{F,v}(1)}\int_{F_v^\times}\left\{\int_{F_v}\Phi([x,t]w_0g)\,\mathrm{d}x\right\}|t|_v\,\mathrm{d}^\times t\\
&=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\eta(\det g)|\det g|_v\int_{F_v^2}\Phi([x,t]w_0g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\qquad(\because\ \mathrm{d}^\times t=\zeta_{F,v}(1)\,\frac{\mathrm{d}t}{|t|_v})\\
&=\epsilon_v(|\,|_v,\psi_{F,v})\,\eta(\det g)\hat{\Phi}(0)
\end{aligned}$$

(5.7) の証明： $F_v^2-\{(0,0)\}$ は $G(F_v)$ の軌道になっており、対応 $g\mapsto[0,1]g$ によって $N(F_v)T(F_v)\backslash G(F_v)\cong F_v^2-\{(0,0)\}$ である。任意の $X\in F_v^2-\{(0,0)\}$ は $X=[0,t]k\,(t\in F_v^\times,\,k\in\mathbf{K}_v)$ と表せる。このとき、F_v^2 のハール測度 $\mathrm{d}X$ と $F_v\times\mathbf{K}_v$ 上の積測度 $|t|_v^2\mathrm{d}^\times\mathrm{d}k$ は比例する：

$$c_v\,\mathrm{d}X=|t|_v^2\,\mathrm{d}^\times t\,\mathrm{d}k$$

ここで、比例定数 $c_v > 0$ はこれら 2 つの測度による函数 Φ_v^0 の積分を比較することで決められる。実際、$v \in \Sigma_{\rm fin}$ の場合

$$\int_{F_v^2} \Phi_v^0(X)\,\mathrm{d}X = \mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v^2) = q_v^{-d_v},$$

$$\int_{F_v^\times}\int_{\mathbf{K}_v} \Phi_v^0([0,t]k)\,|t|_v^2 \mathrm{d}^\times t\,\mathrm{d}k = \mathrm{vol}(\mathbf{K}_v)\int_{\mathfrak{O}_v} |t|_v^2 \mathrm{d}^\times t$$
$$= \zeta_{F,v}(2)\,\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v^\times) = \zeta_{F,v}(2)\,q_v^{-d_v/2}$$

より、$c_v = \zeta_{F,v}(2)\,q_v^{d_v/2}$ を得る。$v \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ のとき $c_v = \zeta_{F,v}(2)$, $v \in \Sigma_{\mathbb{C}}$ のとき $c_v = \zeta_{F,v}(2)\,\pi$ も同様にしめせる。さて、

$$\langle f_\Phi(\mu,1), \eta\circ\det\rangle_{\mathbf{K}_v} = \frac{1}{\zeta_{F,v}(2)}\int_{\mathbf{K}_v}\int_{F_v^\times} \Phi([0,t]k)\,|t|_v^2 \mathrm{d}^\times t\,\mathrm{d}k$$
$$= \frac{c_v}{\zeta_{F,v}(2)}\int_{F_v^2}\Phi(X)\,\mathrm{d}X = \frac{c_v}{\zeta_{F,v}(2)}\hat{\Phi}(0)$$

だから、(5.7) が従う。$\square$

5.2. **アイゼンシュタイン級数と大域絡作用素.** $\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ を次の形をもつ函数の有限線型結合全体とする：

$$\Phi(g) = \prod_v \Phi_v(g_v), \qquad g \in G(\mathbb{A})$$
$$(\Phi_v \in \mathcal{S}_0(F_v^2) \text{ で有限個の素点以外では } \Phi_v = \Phi_v^\circ)$$

$\Phi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$, $\mu = (\mu_1,\mu_2) \in \mathfrak{X}^M$, $s \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(s) > 0)$ に対して、

$$(5.8)\qquad f_\Phi(\mu,s;g) = \frac{\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2}(\det g)}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\int_{\mathbb{A}^\times} \Phi([0,t]g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

とおく。(ユニタリーな) イデール類群指標 $\eta = \otimes_v \eta_v$ に対して、$L(s,\eta) = \prod_v L_v(\eta_v|\,|_v^s)$ は（完備化された）Hecke L 函数である。

命題 60. (1) $\mathrm{Re}(s) > 0$ とする。変数 $g \in G(\mathbb{A})$ に関して積分 (5.8) は広義一様絶対収束して $\mathbf{H}^0(\mu,s)$ の要素を定める。対応 $\Phi \mapsto f_\Phi(\mu,s)$ は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$-絡作用素 $\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2) \to \mathbf{H}^0(\mu,s)$ を与える。
(2) 各 $g \in G(\mathbb{A})$ に対して、$s \mapsto f_\Phi(\mu,s;g)$ $(\mathrm{Re}(s) > 0)$ は $\mathbb{C}$ 上の整型函数に延長される。

Proof : $\mathcal{U} \subset G(\mathbb{A})$ をコンパクト集合とすると、ある非負値 $\Psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ が存在して、

$$|\Phi(gh)| \ll_{\mathcal{U}} \Psi(g), \qquad g \in G(\mathbb{A}),\, h \in \mathcal{U}$$

となる。しかも、$\Psi = \prod_v \Psi_v$, $(\Psi_v \in \mathcal{S}_0(F_v^2))$ の形であるとしてよい。ただし、ある有限集合 $S \subset \Sigma$ の外で $\Psi_v = \Phi_v^\circ$ である。S を十分大きくとって $v \notin S$ のとき, μ_v, $\psi_{F,v}$ が不分岐になるようにすると、

$$\int_{\mathbb{A}^\times} |\Psi([0,t])|\,|t|_{\mathbb{A}}^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times t = \prod_v \int_{F_v^\times} |\Psi_v([0,t])|\,|t|_v^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times t$$
$$= \{\prod_{v\in S}\int_{F_v^\times} |\Psi_v([0,t])|\,|t|_v^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times t\}\,\{\prod_{v\notin S}(1 - q_v^{-(\mathrm{Re}(s)+1)})^{-1}\}$$

右辺の第一因子は $\mathrm{Re}(s) > -1$ の範囲で収束する（命題 56 (1))。第二因子のオイラー積の収束条件は $\mathrm{Re}(s) > 0$ である。よって、(1) が従う。

(2) $\Phi=\prod_v \Phi_v$ の形であるとする。命題 56 (3) より、$g\in G(\mathbb{A})$ に応じて S を十分広くとれば $f_{\Phi_v,v}(\mu_v,s;g_v)=1$ ($\forall v\notin S$) となる。よって、

$$f_\Phi(\mu,s;g)=\prod_{v\in S} f_{\Phi_v,v}(\mu_v,s;g_v),\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

右辺は有限積なので、主張は命題 56 (2) から従う。□

$f_\Phi(\mu,s)\in\mathbf{H}^0(\mu,s)$ 対してアイゼンシュタイン級数

$$E(\Phi,\mu,s;g)=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)} f_\Phi(\mu,s;\gamma g),\qquad g\in G(\mathbb{A}) \tag{5.9}$$

を考察する。

$$E^*(\Phi,\mu,s;g)=L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})\,E(\Phi,\mu,s;g)$$

とおく。また、$\Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ のフーリエ変換を

$$\hat{\Phi}(X)=\int_{\mathbb{A}^2}\Phi(Y)\psi_F(X^tY)\,\mathrm{d}Y,\qquad Y\in\mathbb{A}^2$$

で定義する

命題 61. (1) $\mathrm{Re}(s)>1$ のとき、級数 (5.9) は (s,g) に関して広義一様絶対収束する。

(2) $s\mapsto E^*(\Phi,\mu,s;g)$ ($\mathrm{Re}(s)>1$) は全複素平面に有理型に解析接続されて、$s=\pm1$ において単純な極がある可能性を除いては整型である。

$$\mathrm{Res}_{s=1}E^*(\Phi,\mu,s;g)=-\delta_{\mu_1,\mu_2}\,\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\,\mu_1(\det g)\,\hat{\Phi}(0)$$

(3) $s\neq\pm1$ に対して $E^*(\Phi,\mu,s;-)\in\mathcal{A}_G$ である。

(4) 函数等式 $E^*(\Phi,\mu,s;g)=E^*(\hat{\Phi};\check{\mu},-s;gw_0)$ が成立する。

Proof: (1) まず、形式的に積分変形を行う：

(5.10)

$$\begin{aligned}
E^*(\Phi,\mu,s;g)&=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det\gamma g)\int_{\mathbb{A}^\times}\Phi([0,t]\gamma g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\sum_{\xi\in F^\times}\Phi([0,t\xi]\gamma g)\,(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\left\{\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\sum_{\xi\in F^\times}\Phi([0,t\xi]\gamma g)\right\}(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t\\
&=(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\Theta(\Phi;g,t)(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})(t)\,\mathrm{d}^\times t
\end{aligned}$$

ここで、

$$\Theta(\Phi;g,t)=\sum_{\gamma\in P(F)\backslash G(F)}\sum_{\xi\in F^\times}\Phi([0,t\xi]\gamma g)=\sum_{X\in F^2-\{(0,0)\}}\Phi(Xgt)$$

とおいた。よって、$\mathcal{U}\subset G(\mathbb{A})$ を任意のコンパクト集合、$c\,(>[F:\mathbb{Q}])$ を任意定数とするとき、

$$\sup_{g\in\mathcal{U}}\Theta\left(|\Phi|;\left[\begin{smallmatrix} r&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]g,t\right)\ll_c \sup(r^{2c},r^{-2c-1})\,\inf(|t|_{\mathbb{A}}^{-2c},|t|_{\mathbb{A}}^{-2}),\quad r\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ t\in\mathbb{A}^\times, \tag{5.11}$$

$$\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\Theta\left(|\Phi|;g,t\right)\,|t|_{\mathbb{A}}^{(\sigma+1)}\,\mathrm{d}^\times t<+\infty\qquad g\in\mathcal{U}\quad \text{if }\sigma>1 \tag{5.12}$$

であることを示せば、(5.10) における変形の正当化と同時に級数 (5.9) の絶対収束性も証明される。Φ は分解可能、即ち $\Phi=\prod_v \Phi_v$ の形であるとしてよい。ここで、, $\Phi_v \in \mathcal{S}_0(F_v^2)$ であり、有限個の例外を除いては $\Phi_v=\Phi_v^0$ である。直積分解 $G(\mathbb{A})=G(F_\infty)\,G(\mathbb{A}_{\rm fin})$ に応じて $\mathcal{U}=\mathcal{U}_\infty\mathcal{U}_{\rm fin}$ と分解しているとしてもよい。すると、$\Phi, \mathcal{U}_{\rm fin}$ のみに依存したある $\mathfrak{O}_F$-格子 $L\subset F_\infty^2$ が存在して、任意の $c>0$ に対して

$$|\Phi\,(Xm_\infty g)\,| \ll_{\mathcal{U},c} (1+\|Xm_\infty\|^2)^{-c}\,\delta_L(X), \qquad X\in F^2,\, g\in\mathcal{U},\, m_\infty\in M(F_\infty)$$

なる評価がある。ただし, $\|X\|$ は F_∞^2 上の適当なユークリッドノルムである。$\delta_L(X)\in\{0,1\}$ は $X\in L$ のときに限り 1 を表すとする。$c>[F:\mathbb{Q}]$ としておくことで $\sum_{X\in L}(1+\|X\|^2)^{-c}<+\infty$ となって、$a\in(\mathbb{R}^\times)^0$ に関する遠方評価

(5.13)

$$\Theta(|\Phi|;\left[\begin{smallmatrix} r & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] g,a) \ll_{\mathcal{U},c} \sum_{X\in L-\{(0,0)\}} \left(1+\|X\left[\begin{smallmatrix} r & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] a\|^2\right)^{-c} \ll (1+r^2)^c\, a^{-2c}, \quad a>1,\, r\in(\mathbb{R}^\times)^0,\, g\in\mathcal{U}$$

が従う。Poisson 和公式から

$$\sum_{X\in F^2}\Phi(Xgt)=|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}|t|_{\mathbb{A}}^{-2}\sum_{X\in F^2}\hat{\Phi}(X{}^tg^{-1}t^{-1}), \qquad \Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2),\, t\in\mathbb{A}^\times,\, g\in G(\mathbb{A})^1$$

これは、

$$\Theta(\Phi;g,t)=|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}|t|_{\mathbb{A}}^{-2}\,\Theta(\hat{\Phi};{}^tg^{-1},t^{-1})-\Phi(0)+|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}|t|_{\mathbb{A}}^{-2}\,\hat{\Phi}(0) \tag{5.14}$$

とかけるので、(5.13) とあわせると、a に関する微小評価

$$\Theta\,(|\Phi|;\left[\begin{smallmatrix} r & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right] g,a) \ll (1+r^{-2})^c r^{-1}a^{-2}, \qquad a\in(0,1],\, r\in(\mathbb{R}^\times)^0,\, g\in\mathcal{U} \tag{5.15}$$

がわかる。(5.13), (5.15) より (5.11) が従う。

$\mathbb{A}^1/F^\times$ はコンパクトなことに注意すると、(5.11) より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}\Theta\,(|\Phi|;g,t)\,|t|_{\mathbb{A}}^{\sigma+1}\,\mathrm{d}^\times t &= \int_0^{+\infty}\int_{u\in\mathbb{A}^1/F^\times}\Theta\,(|\Phi|;\left[\begin{smallmatrix} u & 0\\ 0 & u\end{smallmatrix}\right] g,a)\ a^{\sigma+1}\,\mathrm{d}^\times a\\ &\ll_{\mathcal{U},c}\int_0^1 a^{\sigma-1}\,\mathrm{d}^\times a+\int_1^{+\infty}a^{\sigma+1-2c}\,\mathrm{d}^\times a\end{aligned}$$

右辺最初の積分は $\sigma>1$ ならば収束、２番目の積分は $c>(\sigma+1)/2$ ならば収束する。これで (5.12) が示せた。(1) の証明おわり。

$\mathrm{Re}(s)>1$ において成立する (5.10) の最後の積分表示において、積分域を $|t|_{\mathbb{A}}\geqslant 1$, $|t|_{\mathbb{A}}\leqslant 1$ の２つに分割し、$|t|_{\mathbb{A}}\leqslant 1$ 上の積分では公式 (5.14) を代入することで、

$$E^*(\Phi,\mu,s;g)=(\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\,\{J_0(\Phi,\mu,s;g)+J_1(\Phi,\mu,s;g)\}$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned}J_0(\Phi,\mu,s;g)&=\int_{a\in(0,1]}\int_{u\in\mathbb{A}^1/F^\times}\{|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}a^{-2}\,\Theta(\hat{\Phi};{}^tg^{-1},u^{-1}a^{-1})\\ &\qquad -\Phi(0)+|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\,a^{-2}\,\hat{\Phi}(0)\}(\mu_1\mu_2^{-1})(u)\,\mathrm{d}^1u\,a^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times a\\ J_1(\Phi,\mu,s;g)&=\int_{[1,+\infty)}\left\{\int_{u\in\mathbb{A}^1/F^\times}\Theta\,(\Phi;g,ua)\ (\mu_1\mu_2^{-1})(u)\,\mathrm{d}^1u\right\}\,a^{\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times a\end{aligned}$$

とおいた。評価 (5.11) から積分 $J_1(\Phi,\mu,s;g)$ は任意の s で絶対収束して $\mathbb{C}$ 上の整型函数を定める。$\mathrm{Re}(s)>1$ において $J_0(\Phi,\mu,s;g)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} J_0(\Phi,\mu,s;g) &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\int_{a\in[1,+\infty)}\left\{\int_{u\in\mathbb{A}^1/F^\times}\Theta(\hat{\Phi};{}^tg^{-1},u^{-1}a)\,(\mu_1\mu_2^{-1})(u)\mathrm{d}^1u\right\}a^{-\mathrm{Re}(s)+1}\,\mathrm{d}^\times a \\ &\qquad + \delta_{\mu_1,\mu_2}\,\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\left(\frac{\Phi(0)}{s+1}-|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\frac{\hat{\Phi}(0)}{s-1}\right) \\ &= |\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\,J_1(\hat{\Phi},\mu^{-1},-s;{}^tg^{-1})+\delta_{\mu_1,\mu_2}\,\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\left(\frac{\Phi(0)}{s+1}-|\det g|_{\mathbb{A}}^{-1}\frac{\hat{\Phi}(0)}{s-1}\right) \end{aligned}$$

この式により、$J_0(\Phi,\mu,s;g)$ は全平面に有理型に解析接続されて、可能な極は $s=\pm1$ であることも分かる。さて、

$$\begin{aligned} (5.16)\quad & E^*(\Phi,\mu,s;g) \\ &= (\mu_1|\,|^{(s+1)/2})(\det g)\,J_1(\Phi,\mu,s;g)+(\mu_1^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{(-s+1)/2})(\det{}^tg^{-1})\,J_1(\hat{\Phi},\mu^{-1},-s;{}^tg^{-1}) \\ &\quad + \delta_{\mu_1,\mu_2}\,\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)\left((\mu_1|\,|_{\mathbb{A}}^{(s+1)/2})(\det g)\frac{\Phi(0)}{s+1}+(\mu_1^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{(-s+1)/2}(\det{}^tg^{-1})\frac{\hat{\Phi}(0)}{1-s}\right) \end{aligned}$$

これより、$E^*(\Phi,\mu,s;g)=E^*(\hat{\Phi},\mu^{-1};{}^tg^{-1})$ を得る。$f(\Phi,\mu^{-1},s;{}^tg^{-1})=f(\Phi,\check{\mu},s;w_0^{-1}gw_0)$ は容易に分かる。これより、$E^*(\hat{\Phi},\mu^{-1};{}^tg^{-1})=E^*(\hat{\Phi},\check{\mu},-s;w_0^{-1}gw_0)$ となる。

(3) を示そう。(5.11) から、コンパクト集合 $\mathcal{U}\subset G(\mathbb{A})$ と $s\in\mathbb{C}$ に応じてある定数 $C>0$ が存在して、

$$J_1\left(\Phi,\mu,s;\left[\begin{smallmatrix} r & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]g\right)\ll r^C,\qquad J_1\left(\hat{\Phi},\check{\mu},-s;\left[\begin{smallmatrix} r^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]{}^tg^{-1}\right)\ll r^C,\qquad r>1,\ g\in\mathcal{U}$$

となる。これと、(5.16) より、ある定数 C_1 があって

$$\left|E^*\left(\Phi,\mu,s;\left[\begin{smallmatrix} r & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]g\right)\right|\ll r^{C_1},\qquad g\in\mathcal{U}$$

なる評価を得る。これより、$E^*(\Phi,\mu,s;g)$ は $\mathfrak{S}$ 上緩増大であることが従う。保型形式になるための他の条件は容易に確かめられる。□

命題 62. 絡作用素 $M(s):\mathbf{H}^0(\mu,s)\longrightarrow\mathbf{H}^0(\check{\mu},-s)$ $(\mathrm{Re}(s)>1)$ の $\Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ に付随する切断 $f_\Phi(\mu,s)\in\mathbf{H}^0(\mu,s)$ への作用は

$$[M(s)f_\Phi(\mu,s)]\,(g)=\frac{L(-s+1,\mu_2\mu_1^{-1})}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\,f_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s;gw_0),\qquad \mathrm{Re}(s)>1$$

で与えられる。$g\in G(\mathbb{A})$ を固定するとき、函数 $s\mapsto[M(s)f_\Phi(\mu,s)]\,(g)$ は全平面に有理型に解析接続される。

Proof: $f_\Phi^*(\mu,s;-)=L(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_{\mathbb{A}}^{s+1})\,f_\Phi(\mu,s;-)$ とおく。命題 6 より、$\mathrm{Re}(s)>1$ において

$$(5.17)\qquad [M(s)f_\Phi^*(\mu,s)]\,(g)=-f_\Phi^*(\mu,s;g)+\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}E^*(\Phi,\mu,s;ng)\,\mathrm{d}n$$

が成立する。$E^*(\Phi,\mu,s;g)$ の有理型性と命題 60 (2) により、左辺は s の函数として全平面に有理型に延長される。$[M(s)f_\Phi(\mu,s)](g)=L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})^{-1}\,[M(s)f_\Phi^*(\mu,s)](g)$ なので、Hecke L 函数の有理型性より命題の最後の主張を得る。函数等式 $E^*(\Phi,\mu,s;g)=E(\hat{\Phi},\check{\mu},-s;gw_0)$ の定数項を考えると、

$$f_\Phi^*(\mu,s;g)+[M(s)f_\Phi^*(\mu,s)](g)=f_{\hat{\Phi}}^*(\check{\mu},-s;gw_0)+[M(-s)f_{\hat{\Phi}}^*(\check{\mu},-s)](gw_0)$$

を得る。両辺の $\mathbf{H}^0(\check{\mu},-s)$ への射影を考えれば

$$[M(s)f^*_\Phi(\mu,s)](g)=f^*_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s;gw_0)$$

となり命題の最初の主張が従う。$\square$

$\mathbf{K}_\infty$ の既約表現 τ に対して、

$$\mathbf{H}^0_\mu[\tau]=\{\mathsf{f}\in\mathbf{H}^0_\mu|\,\langle R(\mathbf{K}_\infty)\mathsf{f}\rangle_{\mathbb{C}}\text{ は }\tau\text{ の有限個のコピーの直和に分解する }\}$$

とする。

補題 63. $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\mathfrak{X}^M$ とする。τ を $\mathbf{K}_\infty$ の既約表現として、任意の $\mathsf{f}\in\mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ をとる。S を素点の有限集合で、Σ_∞ を含み、S の外では $\mu_1,\mu_2,\,\psi_F$ がすべて不分岐で f は $\mathbf{K}_v$-不変になるものとする。すると、τ のみに依存する $\mathrm{Re}(s)>-1$ で零点を持たない多項式 $P_\tau(s)$ および s に無関係で $\mathbf{K}$-有限な $\Phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{A}^2)$ が存在して、

$$\mathsf{f}^{(s)}(g)=\{\prod_{v\in S-\Sigma_\infty}L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})\}\,\frac{1}{P_\tau(s)}\,f(\Phi,\mu,s;g),\qquad g\in G(\mathbb{A}),\qquad \mathrm{Re}(s)>-1$$

となる。

Proof : f は分解可能な元の有限線型結合である。故に $\mathsf{f}=\prod_{v\in S}\mathsf{f}_v\prod_{v\notin S}\mathsf{f}^\circ_v$ の形であるとして証明すればよい。$\tau=\bigotimes_{v\in\Sigma_\infty}\tau_v$ と書ける。ここで、各素点 $v\in S$ に対して、$\mathsf{f}_v\in\mathbf{H}^0(\mu_v,0)[\tau_v]$ であり、$\mathsf{f}^\circ_v\in\mathbf{H}^0_v(\mu_v,0)$ $(v\notin S)$ は $\mathsf{f}^\circ_v(1)=1$ なる $\mathbf{K}_v$-不変ベクトルとする。そこで命題 56 (3), (4) を使えばよい。$\square$

5.2.1. 命題 *16* の証明. $\mathsf{f}\in\mathbf{H}^0_\mu[\tau]$ を補題 63 のとおりとする。補題 63、命題 62 より任意の $\mathsf{f}_2\in\mathbf{H}^0_\nu$ に対して、$\mathrm{Re}(s)>1$ において

$$\langle\mathsf{M}(s)\mathsf{f},\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}=\{\prod_{v\in S-\Sigma_\infty}L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})\}\,\frac{1}{P_\tau(s)}\,\frac{L(-s+1,\mu_1^{-1}\mu_2)}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\,\langle f_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s),\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}\tag{5.18}$$

が成り立つ。これにより $s\mapsto\langle\mathsf{M}(s)\mathsf{f},\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}$ は全複素平面上の有理型函数に延長される。(極集合 $\mathbb{C}-D$ は $s=\pm1$ および次の 3 集合の合併に含まれる： (i) $L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})$ の零点集合 (ii) $\prod_{v\in S-\Sigma_\infty}L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})$ の極集合 (iii) $P_\tau(s)$ の零点集合。）$w_0^2=-1_2$, $(\hat{\Phi})\check{}(X)=\Phi(-X)$ に注意すれば、等式 (5.18) から $\mathsf{M}(-s)\mathsf{M}(s)\mathsf{f}=\mathsf{f}$ がわかる。$\mathsf{M}(s)$ の虚軸におけるユニタリー性は $\mathsf{M}(-s)\mathsf{M}(s)=\mathrm{Id}$ と (4.6) から従う。命題 16 の主張のうち、あとは (5) を示せばよい。（他は容易であるか、或いは自明。）$\sigma>0$ を任意にあたえる。$\mathsf{f}_2=\prod_v\mathsf{f}_{2,v}$ と分解されると仮定し、S_1 を $\mathsf{f}_{2,v}\neq\mathsf{f}^\circ_v(\nu_v,0)$ または $\hat{\Phi}_v\neq\Phi^\circ_v$ なる v を全て含む素点の集合としておくと、命題 56 (3) より

$$\langle f_{\hat{\Phi}}(\check{\mu},-s),\mathsf{f}_2\rangle_{\mathbf{K}}=\prod_{v\in S_1}\int_{\mathbf{K}_v}f_{\hat{\Phi}_v,v}(\check{\mu}_v,-s;k_v)\,\mathsf{f}_{2,v}(k_v)\mathrm{d}k_v$$

となる。積分表示 (5.1) より右辺の各 v 因子は $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上有界である。よって、(5.18) 右辺の最後の内積は $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上有界。第 1 および第 2 因子も $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上有界になることは見やすい。第 3 因子は Hecke L 函数の関数等式から

$$WD^{s-1/2}\,\frac{L(s,\mu_1\mu_2^{-1})}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}$$

に等しい。(ここで、W はある絶対値 1 の複素数、D はある正の数である。）この函数のガンマ因子は Stirling 公式から $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上有界な寄与しか生まない。有限部分に関しては、de la Vallée Poussin の議論から示される

$$|L_{\mathrm{fin}}(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})^{-1}|\ll\log(2+|\mathrm{Im}s|),\qquad s\in[0,\sigma]+i\mathbb{R}$$

と合わせて、(例えば「凸評価」などの) 多項式評価

$$|L_{\mathrm{fin}}(s,\mu_1\mu_2^{-1})| \ll (1+|\mathrm{Im} s|)^N, \qquad s\in[0,\sigma]+i\mathbb{R}$$

を援用すれば $[0,\sigma]+i\mathbb{R}$ 上で $\ll (1+|\mathrm{Im}(s)|)^{N+\epsilon}$ が分かる。$\square$

5.2.2. 定理 *43* の証明. 補題 63 より $\mathrm{Re}(s)>1$ において

(5.19)

$$E(\mathsf{f}^{(s)}:g)=\{\prod_{v\in S-\Sigma_\infty} L_v(\mu_1\mu_2^{-1}|\,|_v^{s+1})\}\,\frac{1}{P_\tau(s)}\,\frac{1}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\,E^*(\Phi,\mu,s;g),\quad g\in G(\mathbb{A}),$$

となる。これと命題 61 から、函数 $s\mapsto E(\mathsf{f}^{(s)}:g)$ は全複素平面に有理型に解析接続されることが分かる。この解析接続を $\mathsf{E}(\mathsf{f};s,g)$ と書くと、定理 43 は命題 61 から従う。例えば主張 (5) (函数等式) を導いてみる。命題 61 (4)、命題 62 から

$$\begin{aligned} E(f_\Phi(\mu,s):g) &= \frac{L(-s+1,\mu_2\mu_1^{-1})}{L(s+1,\mu_1\mu_2^{-1})}\,E(f_{\hat\Phi}(\check\mu,-s):gw_0) \\ &= E(M(s)f_{\hat\Phi}(\check\mu,-s):g) \end{aligned}$$

これと (5.18), (5.19) より函数等式 $\mathsf{E}(\mathsf{f};s,g)=\mathsf{E}(\mathsf{M}(s)\mathsf{f};-s,g)$ を得る。$\square$

6. GL(2) の跡公式

6.1. Modified kernel. まずテスト関数 $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ を任意に一つ固定する。以下、サブセクション 6.1, 6.2, 6.3 を通じて f を固定したまま話を進めていく。

関数 f に対して関数 $K_P(g,h)$ を

$$K_P(g,h)=\int_{N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M(F)} f(g^{-1}\gamma nh)\mathrm{d}n\,,\quad g,\,h\in N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})$$

と定義する。もし R_P をヒルベルト空間 $L^2(N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 上の右正則表現とするならば、$K_P(g,h)$ は $R_P(f)$ に関する核関数である。次に $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ に対して関数 $K_G(g,h)$ を

$$K_G(g,h)=\sum_{\gamma\in G(F)} f(g^{-1}\gamma h)\,,\quad g,\,h\in G(F)\backslash G(\mathbb{A})$$

と定義する。(4.3) で定義された $K^f(g,h)$ と $K_G(g,h)$ は同じであるが、便宜上記号を変更する。$\mathbb{R}$ 上の関数 $\widehat{\tau}_P$ を

$$\widehat{\tau}_P(H)=\begin{cases}1\,, & H>0\,,\\ 0\,, & H\leqslant 0\end{cases}$$

と定める。パラメーター $T\in\mathbb{R}$ に対して、次のように Modified kernel $k^T(g,f)$ が定義される。

$$k^T(g,f)=K_G(g,g)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} K_P(\delta g,\delta g)\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T).$$

T は正の実数であると仮定する。そして積分 $J^T(f)$ を

$$J^T(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k^T(g,f)\,\mathrm{d}^1 g$$

と定める。

定理 64. T を十分大きい正の実数とする。このとき、積分 $J^T(f)$ は絶対収束する。つまり、

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |k^T(g,f)|\,\mathrm{d}^1 g < +\infty$$

が成り立つ。ただし、T の大きさは f のサポートにのみ依存している。

この定理を証明する前に、以下の補題を証明しておこう。

補題 65. 任意の $g \in G(\mathbb{A})$ と $h \in G(F)$ について、もし $h \notin P(F)$ ならば $H(hg) \leqslant -H(g)$ が成り立つ。

Proof. まず次のように記号を定める。

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G(F) \cap \mathbf{K}, \quad n \in N(\mathbb{A}),\ m \in M(\mathbb{A})^1,\ a \in A_M(\mathbb{R})^0,\ k \in \mathbf{K}.$$

任意の $g = nmak \in G(\mathbb{A})$ について、$n' = (ma)^{-1} nma \in N(\mathbb{A})$ と置くと、

$$H(wg) = -H(a) + H(wn')$$

が成り立つ。これより、もし任意の $n \in N(\mathbb{A})$ について $H(wn) \leqslant 0$ であることを示せば、$H(wg) \leqslant -H(g)$ が示せる。そして Bruhat 分解 $G(F) = P(F) \cup (P(F)wN(F))$ よりこの命題が従う。したがって後は、任意の素点 $v \in \Sigma$ と $n_v \in N(F_v)$ について $H(wn_v) \leqslant 0$ であることを示せば良い。

$$wn_v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \omega \end{pmatrix} k, \quad n_v = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{K}_v,\ \alpha, \omega \in F_v^\times,\ \beta, u \in F_v$$

と置くと、

$$wk^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha u & -u\beta + \omega \end{pmatrix}$$

を得る。$wk^{-1} \in \mathbf{K}_v$ だから、$v \in \Sigma_\infty$ の場合は $|\alpha|^2 + |\alpha u|^2 = 1$ を得て、$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ の場合は $\alpha \in \mathfrak{O}_v$ を得る。また $\det(wn) = 1$ なのだから、$|\alpha\omega|_v = 1$ となり、$H(wn) = \log|\alpha|_v^2$ を得る。これらより $H(wn) \leqslant 0$ がすぐに従う。 □

ジーゲル領域 $\mathfrak{S}$ に対して、$g \in G(\mathbb{A})$ についての関数 $F^G(g,T)$ を

$$\left\{ g \in G(\mathbb{A}) \mid {}^\exists \delta \in G(F) \text{ s.t. } \delta g \in \mathfrak{S} \text{ and } H(\delta g) \leqslant T \right\}$$

の特性関数とする。

補題 66. 任意の $g \in G(\mathbb{A})$ について、等式

$$F^G(g,T) + \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(H(\delta g) - T) = 1$$

が成り立つ。

Proof. $g \in G(\mathbb{A})$ を一つ固定して考えよう。

$F^G(g,T) = 1$ を仮定する。つまり、ある $\delta \in G(F)$ について $\log t_0 < H(\delta g) \leqslant T$ が成り立つ。さらに、ある $\delta' \in G(F)$ について $H(\delta' g) > T$ と仮定する。もし $\delta\delta'^{-1} \in P(F)$ ならば

$$H(\delta' g) = H(\delta\delta'^{-1}\delta' g) = H(\delta g) \leqslant T$$

となり矛盾する。もし $\delta\delta'^{-1} \notin P(F)$ ならば補題 65 より

$$H(\delta' g) \leqslant -H(\delta\delta'^{-1}\delta' g) = -H(\delta g) < \log t_0 < T$$

となりこれも矛盾する。しかがって任意の $\gamma \in P(F)\backslash G(F)$ について $H(\gamma g) \leqslant T$ が成り立つため、$\sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \widehat{\tau}_P(H(\delta g) - T) = 0$ となる。

$F^G(g,T)=0$ を仮定する。$G(\mathbb{A})=G(F)\mathfrak{S}$ なので、ある $\delta\in G(F)$ について $\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)=1$ となる。$\delta'\neq\delta$ であるような $\delta'\in G(F)$ について $\widehat{\tau}_P(H(\delta' g)-T)=1$ となるとしよう。そして、$\delta\delta'^{-1}\notin P(F)$ と仮定すると、

$$T<H(\delta' g)\leqslant -H(\delta\delta'^{-1}\delta' g)=-H(\delta g)<-T$$

となり、T が正の実数であることに矛盾する。つまり、$\delta'\in\delta P(F)$ となる。
以上より、この補題は示された。

□

Proof. 定理 64 の証明を始めよう。まず記号を次の様に定める。

$$k_G(g,f)=K_G(g,g),\quad k_P(g,f)=K_G(g,g)-K_P(g,g).$$

補題 66 より

$$k^T(g,f)=k_G(g,f)\,F^G(g,T)\,+\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}k_P(\delta g,f)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k^T(x,f)|\,\mathrm{d}^1g\leqslant&\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_G(g,f)|\,F^G(g,T)\,\mathrm{d}^1g\\&+\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_P(g,f)|\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1g\end{aligned}\tag{6.1}$$

となる。つまり右辺の二つの項をそれぞれ評価すれば良い。
(6.1) の右辺の第一項を評価しよう。$G(\mathbb{A})$ のコンパクト集合と $G(F)$ との共通部分は有限集合であることに気をつける。C を $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の任意のコンパクト集合とする。定義より $g,\,h\in C$ に対して $K_G(g,h)$ の $G(F)$ に関する和は有限和なので、$K_G(g,h)$ は C 上有界となる。$F^G(g,T)$ の $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上のサポートはコンパクトなのだから、

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_G(g,f)|\,F^G(g,T)\,\mathrm{d}^1g<+\infty$$

が従う。
(6.1) の右辺の第二項を評価しよう。元 $g\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ が $\widehat{\tau}_P(H(g)-T)=1$ を満たすとする。つまり $H(g)>T$ となる。次の様に記号を定める。

$$\begin{aligned}&\gamma=\begin{pmatrix}* & *\\ c & *\end{pmatrix}\in G(F)-P(F)\,,\quad g=\begin{pmatrix}u_1 & *\\ 0 & u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1\,,\\&u_1,\,u_2\in F^\times\backslash\mathbb{A}^1,\ a\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ k\in\mathbf{K}\,.\end{aligned}$$

そして

$$g^{-1}\gamma g=k^{-1}\begin{pmatrix}* & *\\ au_1u_2^{-1}c & *\end{pmatrix}k\tag{6.2}$$

となる。条件より $c\neq 0$ かつ $\log a>T$ なので、(6.2) の $(2,1)$ 成分は $|au_1u_2^{-1}c|_{\mathbb{A}}=a>e^T$ となる。よって、任意の $\gamma\in G(F)-P(F)$ について、(6.2) の $(2,1)$ 成分が f のサポートから外れるような正の実数 T が存在することが分かる。以下、T をそのような十分大きい実数とする。これより任意の $\gamma\in G(F)-P(F)$ について

$$f(g^{-1}\gamma g)\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)=0$$

が成り立つ。ゆえに、後は

$$\left|\sum_{\gamma\in P(F)} f(g^{-1}\gamma g)\ -\int_{N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M(F)} f(g^{-1}\gamma n g)\,\mathrm{d}n\right| \tag{6.3}$$

が $\{g\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \mid H(g)>T\}$ 上の積分で収束することを示せばよい。まず $N(F)$ の和にポアソン和公式 (2.1) を用いると、

$$(6.3)\leqslant \sum_{\gamma\in M(F)}\left|\sum_{\xi\in F}\int_{\mathbb{A}} f(g^{-1}\gamma\exp(x)g)\,\psi_F(x\xi)\mathrm{d}x-\int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma n g)\,\mathrm{d}n\right|$$

を得る。ここで

$$h_{g,\gamma}(y)=\int_{\mathbb{A}} f(g^{-1}\gamma\exp(x)g)\,\psi_F(xy)\mathrm{d}x$$

と置くと、

$$(6.3)\leqslant \sum_{\gamma\in M(F)}\Big|\sum_{\xi\in F^\times} h_{g,\gamma}(\xi)\Big|$$

と整理できる。記号を次の様に定める。

$$g=\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}mk\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1,\quad u\in F\backslash\mathbb{A},\ a\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ m\in M(\mathbb{A})^1,\ k\in\mathbf{K}.$$

このとき

$$h_{g,\gamma}(\xi)=a\,h_{g',\gamma}(a\xi),\quad g'=\begin{pmatrix}1&a^{-1}u\\0&1\end{pmatrix}mk$$

が成り立つ。その結果、(6.3) の $\{g\in P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \mid H(g)>T\}$ 上の積分は

$$\int_{F\backslash\mathbb{A}}\mathrm{d}u\int_{e^T}^\infty \mathrm{d}^\times a\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\mathrm{d}^1 m\int_{\mathbf{K}}\mathrm{d}k\ \sum_{\gamma\in M(F)}\Big|\sum_{\xi\in F^\times} h_{g',\gamma}(a\xi)\Big| \tag{6.4}$$

で押さえられる。この積分において g' の動く範囲は明らかにコンパクト集合に含まれる。また f のサポートはコンパクト集合に含まれるのだから、$\gamma\in M(F)$ の動く範囲を有限個として良い。そして $h_{g',\gamma}(y)$ は y の関数として Schwartz 関数であり、$a\xi$ は $\xi\in F^\times$ より F_{v_0} において十分に大きいことに注意しよう。ゆえに、任意の正の整数 N に対して、f のサポートに依存する形で T を十分に大きくとると、ある定数 c_N が存在して、

$$(6.4)\leqslant c_N\times\int_{e^T}^\infty a^{-N}\mathrm{d}^\times a\leqslant c_N\times\frac{e^{-TN}}{N}$$

となり収束が示される。

以上より (6.1) の右辺の収束が示されたので、定理 64 の証明が完了した。

□

定理 64 より $J^T(f)$ が意味を持った。これより $J^T(f)$ を幾何サイドとスペクトルサイドに展開していこう。

6.2. **幾何サイド.** まず $G(F)$ を分割するための同値類を導入しよう。元 $\gamma\in G(F)$ のジョルダン分解における半単純部分を γ_s とし、ユニポテント部分を γ_u とする。このとき $\gamma=\gamma_s\gamma_u=\gamma_u=\gamma_s$ が成り立つ。二つの元 $\gamma,\ \gamma'\in G(F)$ について、γ と γ' が $\mathcal{O}$-同値であるとは、γ_s と γ_s' が $G(F)$-共役であることを意味する。$\mathcal{O}$ を $G(F)$ の $\mathcal{O}$-同値類の集合とする。

$G(F)=\mathrm{GL}(2,F)$ なので、$G(F)$ の元たちは三つの場合: (1)(F-) 楕円、(2)(F-) 双曲、(3)(F-) ユニポテント、に分類される。γ を $G(F)$ の元としよう。γ に対して $\{\gamma\}_{G(F)}$ を γ の $G(F)$-共役類とする。

(1) γ が楕円であるとは、γ の属する $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ について $\mathfrak{o}\cap P(F)=\emptyset$ が成り立つことを意味する。この場合、$\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ となり、$\gamma=\gamma_s$ である。
(2) γ が双曲であるとは、γ の属する $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ について $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ であり、かつ $\mathfrak{o}\cap P(F)\neq\emptyset$ を意味する。この場合、$\gamma=\gamma_s$ であり、もし $\gamma\in P(F)$ ならば $\gamma=\begin{pmatrix}\alpha & * \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ と置くと $\alpha\neq\beta$ が成り立つ。
(3) γ がユニポテントであるとは、γ の属する $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ について、ある $z\in Z(F)$ が存在して $\mathfrak{o}=\{z\}\cup\{z\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}_{G(F)}$ が成り立つことをいう。この場合のみ、$\gamma\neq\gamma_s$ となる。

$\mathfrak{o}\in\mathcal{O}$ について、

$$K_{G,\mathfrak{o}}(g,h)=\sum_{\gamma\in\mathfrak{o}}f(g^{-1}\gamma h)\ ,\quad K_{P,\mathfrak{o}}(g,h)=\int_{N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M(F)\cap\mathfrak{o}}f(g^{-1}\gamma nh)\mathrm{d}n$$

と定義する。そして、$f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ とパラメーター T について

$$k_{\mathfrak{o}}^T(g,f)=K_{G,\mathfrak{o}}(g,g)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}K_{P,\mathfrak{o}}(\delta g,\delta g)\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T),$$
$$J_{\mathfrak{o}}^T(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}k_{\mathfrak{o}}^T(g,f)\,\mathrm{d}^1g$$

と定める。定理 64 の証明と同様の議論によって次の定理を得る。

定理 67. T を十分大きい正の実数とする。このとき、

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_{\mathfrak{o}}^T(g,f)|\,\mathrm{d}^1g<+\infty$$

が成り立つ。ただし、T の大きさは f のサポートにのみ依存している。

この定理により、

$$J^T(f)=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}J_{\mathfrak{o}}^T(f)$$

を得る。この等式の右側の和は有限和であることに気をつけよう。これより各 $J_{\mathfrak{o}}(f)$ を詳しく記述していく。

群 H と元 $\gamma\in H$ に対して、H_γ を H における γ の中心化群とする。つまり $H_\gamma=\{h\in H\,|\,h\gamma=\gamma h\}$ と定める。元 $\gamma\in G(F)$ について、$\mathrm{d}g_\gamma$ を $G(\mathbb{A})_\gamma$ 上のハール測度としよう。$G(\mathbb{A})^1_\gamma\cong G(\mathbb{A})_\gamma/Z_\infty^+$ により定まる商測度を d^1g_γ とし、$\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)=\int_{G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma}\mathrm{d}^1g_\gamma$ と置く。また $\mathrm{d}\dot{g}$ を $G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})$ 上の商測度とする。

命題 68. 楕円元 $\gamma\in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ について、

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f)=\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f(g^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}$$

が成り立つ。

Proof. Z_∞^+ が $G(\mathbb{A})_\gamma$ の部分群であることと定理 64 の証明より和と積分の交換が可能であることに注意すると次のように証明できる。

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{o}}^T(f) &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\delta\in\{\gamma\}_{G(F)}} f(g^{-1}\delta g)\mathrm{d}^1 g = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\delta\in G(F)_\gamma\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\mathrm{d}^1 g \\ &= \sum_{\delta\in G(F)_\gamma\backslash G(F)} \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\mathrm{d}^1 g = \sum_{\delta\in G(F)_\gamma\backslash G(F)} \int_{\delta\, G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}^1 g \\ &= \int_{G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}^1 g = \int_{G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma} \mathrm{d}g_\gamma \int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}\dot{g}. \end{aligned}$$

□

次に双曲元について次の命題を得る。

命題 69. 双曲元 $\gamma\in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ について、

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{o}}^T(f) =& \frac{1}{2}\sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}} \mathrm{vol}_M \int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1}n^{-1}\delta nk)\,(-H(wn))\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k \\ &+ T\sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}} \mathrm{vol}_M \int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1}\delta nk)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}k \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof.

$$k_{G,\mathfrak{o}}(g,f)=K_{G,\mathfrak{o}}(g,g)\,,\quad k_{P,\mathfrak{o}}(g,f)=K_{G,\mathfrak{o}}(g,g)-K_{P,\mathfrak{o}}(g,g)$$

と置く。このとき、

$$k_{\mathfrak{o}}^T(g,f)=k_{G,\mathfrak{o}}(g,f)F^G(g,T)+\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} k_{P,\mathfrak{o}}(\delta g,f)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

が成り立ち、そして、定理 64 の証明より

$$\begin{aligned} &\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |k_{G,\mathfrak{o}}(g,f)|\,F^G(g,T)\,\mathrm{d}^1 g<+\infty\,, \\ &\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} |k_{P,\mathfrak{o}}(g,f)|\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g<+\infty \end{aligned}$$

が従う。

まず積分

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} k_{P,\mathfrak{o}}(n_1 g)\mathrm{d}n_1 \tag{6.5}$$

について考えよう。$\gamma=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, $\alpha\neq\beta$, α, $\beta\in F^\times$ と仮定しても一般性は失わない。この場合

$$M(F)\cap\mathfrak{o}=\{\,\gamma\,,\,w\gamma w\,\}$$

となる。また $G(F)_\gamma = M(F)$ が成り立つ。こうすると、(6.5) は

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}n_1^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta n_1 g)\,\mathrm{d}n_1 - \sum_{\gamma_1\in\{\gamma,\, w\gamma w\}} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}n_1^{-1}\gamma_1 n n_1 g)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}n_1$$

と等しくなる。

$$\begin{pmatrix}1 & -u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & (1-\alpha^{-1}\beta)u\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

と $1-\alpha^{-1}\beta\in F^\times$ より、上の式の第二項の積分は変数変換によって

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}n_1^{-1}\gamma_1 n n_1 g)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}n_1 = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}n_1^{-1}n^{-1}\gamma_1 n n_1 g)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}n_1$$
$$= \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\mathrm{d}n_1\ \int_{N(\mathbb{A})} f(g^{-1}n^{-1}\gamma_1 n g)\,\mathrm{d}n = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\sum_{\nu\in N(F)} f(g^{-1}n^{-1}\nu^{-1}\gamma_1\nu n g)\,\mathrm{d}n$$

となる。$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\mathrm{d}n = 1$ であることに注意しよう。この (6.5) の式変形と変数変換より

$$\begin{aligned}
&\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{P,\mathfrak{o}}(g,f)\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g \\
&\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} k_{P,\mathfrak{o}}(n_1 g,f)\mathrm{d}n_1\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g \\
&= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\Big\{\sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}n_1^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta n_1 g) \\
&\qquad - \sum_{\gamma_1\in\{\gamma,\,w\gamma w\}}\sum_{\nu\in N(F)} f(g^{-1}n_1^{-1}\nu^{-1}\gamma_1\nu n_1 g)\Big\}\,\mathrm{d}n_1\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g \\
&= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\Big\{\sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g) \\
&\qquad - \sum_{\gamma_1\in\{\gamma,\,w\gamma w\}}\sum_{\nu\in N(F)} f(g^{-1}\nu^{-1}\gamma_1\nu g)\Big\}\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g \\
&= \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F),\ \delta^{-1}\gamma\delta\notin P(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1 g
\end{aligned} \tag{6.6}$$

を得る。ただし、$\delta^{-1}\gamma\delta\in P(F)$ と $\delta\in P(F)\cup wP(F)$ は必要十分である。定理 64 の証明での議論により、T が十分に大きいので最後の積分の値は 0 である。このことからも積分 (6.6) は絶対収束し、その値が 0 であることが分かる。

$$\tilde{k}_{\mathfrak{o}}^T(g,f) = \sum_{\gamma\in\mathfrak{o}} f(g^{-1}\gamma g) - \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\sum_{\gamma_1\in\{\gamma,\,w\gamma w\}}\sum_{\nu\in N(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\nu^{-1}\gamma_1\nu\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

と置く。等式 (6.6) と $k_G(x,f)$ の役割とそれぞれの積分の収束性より、

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\tilde{k}_{\mathfrak{o}}^T(g,f)\,\mathrm{d}^1 g$$

が成り立ち、積分は絶対収束する。明らかに

$$\tilde{k}_{\mathfrak{o}}^T(g,f)=\sum_{\delta\in M(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta g)\left\{1-\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)-\widehat{\tau}_P(H(w\delta g)-T)\right\}$$

成り立つので、

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f)=\int_{M(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} f(g^{-1}\gamma g)\{1-\widehat{\tau}_P(H(g)-T)-\widehat{\tau}_P(H(wg)-T)\}\mathrm{d}^1 g$$

となる。$g\in G(\mathbb{A})^1$ について

$$g=m\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}nk,\quad m\in M(\mathbb{A})^1,\ a\in(\mathbb{R}^\times)^0,\ n\in N(\mathbb{A}),\ k\in\mathbf{K}$$

と分解すると、

$$H(g)=\log|a|,\quad H(wg)=-\log|a|+H(wn)$$

が成りつのだから、

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{o}}^T(f)=&\mathrm{vol}_M\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})}\int_0^\infty f(k^{-1}n^{-1}\gamma nk)\{1-\widehat{\tau}_P(H(g)-T)-\widehat{\tau}_P(H(wg)-T)\}\mathrm{d}^\times a\mathrm{d}n\mathrm{d}k\\=&\mathrm{vol}_M\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1}n^{-1}\gamma nk)\{2T-H(wn)\}\mathrm{d}n\mathrm{d}k\end{aligned}$$

を得る。後は γ を $w\gamma w$ に入れ替えても同じ議論になることに気をつければ、この命題がすぐに得られる。 □

最後にユニポテント元について次の命題を得る。

命題 70. 中心元 $z\in Z(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{z\}\cup\{z\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\}_{G(F)}$ について、

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{o}}^T(f)=&\mathrm{vol}_G\,f(z)+\mathrm{vol}_Z\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\int_{\mathbb{A}^\times}F_z(a)\,|a|_{\mathbb{A}}^s\,\mathrm{d}^\times a\\&+T\,\mathrm{vol}_M\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})}f(k^{-1}znk)\,\mathrm{d}n\mathrm{d}k\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、$Z(\mathbb{A})^1=Z(\mathbb{A})/Z_\infty^+$ 上のハール測度 d^1z を $\mathbb{A}^1$ の測度で定めて $\mathrm{vol}_Z=\int_{Z(F)\backslash\mathbb{Z}(\mathbb{A})^1}\mathrm{d}^1z$ と置き、$C_c^\infty(\mathbb{A})$ に属する関数 $F_z(u)$ を

$$F_z(u)=\int_{\mathbf{K}}f(k^{-1}z\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}k)\mathrm{d}k$$

で定めた。

Proof.

$$\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}_{G(F)}=\left\{\delta^{-1}\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\delta\,\middle|\,u\in F^\times,\ \delta\in P(F)\backslash G(F)\right\}$$

となるのだから、

$$\begin{aligned}J_{\mathfrak{o}}^T(f)=&\mathrm{vol}_G\,f(z)+\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\left\{\sum_{u\in F^\times}f(g^{-1}\delta^{-1}z\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}\delta g)\right.\\&\left.-\int_{N(\mathbb{A})}f(g^{-1}\delta^{-1}zn\delta g)\mathrm{d}n\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\right\}\mathrm{d}^1g\end{aligned}$$

となる。ここで、$g \in G(\mathbb{A})^1$ に対して

$$g = nz_1 z_\infty^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} k,\ n \in N(\mathbb{A}),\ z_1 \in Z(\mathbb{A})^1,\ a \in \mathbb{A}^\times,\ z_\infty^+ \in Z_\infty^+,\ H(z_\infty^+) = \log |a|_{\mathbb{A}},\ k \in \mathbf{K}$$

と分解すると、

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \mathrm{vol}_G\, f(z) + \mathrm{vol}_Z\, U_z,$$

$$U_z = \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \left\{ \sum_{u \in F^\times} F_z(au) - \int_{\mathbb{A}} F_z(au) \mathrm{d}u\, \widehat{\tau}_P(-\log |a|_{\mathbb{A}} - T) \right\} |a|_{\mathbb{A}} \mathrm{d}^\times a$$

を得る。

ポアソン和公式 (2.1) より

$$\sum_{u \in F} F_z(au) = \sum_{u \in F} \hat{F}_z(a^{-1}u)\, |a|_{\mathbb{A}}^{-1}$$

が成り立つので、

$$\sum_{u \in F^\times} F_z(au) = \sum_{u \in F^\times} \hat{F}_z(a^{-1}u)\, |a|_{\mathbb{A}}^{-1} + \hat{F}_z(0)\, |a|_{\mathbb{A}}^{-1} - F(0)$$

を得る。これを用いると、等式

$$\begin{aligned} U_z = & \int_{|a|_{\mathbb{A}} \leqslant 1} \sum_{u \in F^\times} \hat{F}_z(a^{-1}u)\, \mathrm{d}^\times a\, + \int_{e^T \leqslant |a|_{\mathbb{A}} \leqslant 1} \mathrm{d}^\times a \times \hat{F}_z(0) \\ & - \int_{|a|_{\mathbb{A}} \leqslant 1} |a| \mathrm{d}^\times a \times F_z(0) + \int_{1 \leqslant |a|_{\mathbb{A}}} \sum_{u \in F^\times} F(au)\, |a| \mathrm{d}^\times a \end{aligned}$$

が得られる。これより U_z の収束性も分かる。続いて、$s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ について、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}^\times} F_z(a) |a|_{\mathbb{A}}^s \mathrm{d}^\times a = & \int_{F^\times \backslash \mathbb{A}^\times} \sum_{u \in F^\times} F(au) |a|_{\mathbb{A}}^s \mathrm{d}^\times a \\ = & \int_{|a|_{\mathbb{A}} \leqslant 1} \sum_{u \in F^\times} \hat{F}_z(a^{-1}u) |a|_{\mathbb{A}}^{s-1}\, \mathrm{d}^\times a\, + \int_{|a|_{\mathbb{A}} \leqslant 1} |a|_{\mathbb{A}}^{s-1} \mathrm{d}^\times a \times \hat{F}_z(0) \\ & - \int_{|a|_{\mathbb{A}} \leqslant 1} |a|^s \mathrm{d}^\times a \times F_z(0) + \int_{1 \leqslant |a|_{\mathbb{A}}} \sum_{u \in F^\times} F(au)\, |a|^s \mathrm{d}^\times a \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\int_{|a|_{\mathbb{A}} \leqslant 1} |a|_{\mathbb{A}}^{s-1} \mathrm{d}^\times a \times \hat{F}_z(0) = \frac{1}{s-1} \mathrm{vol}(F^\times) \times \hat{F}_z(0)$$

であり、他の項は $s = 1$ で解析的なので、上の二つの等式から

$$U_z = \lim_{s \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (s-1) \int_{\mathbb{A}^\times} F(a) |a|^s \mathrm{d}^\times a + \int_{e^{-T} \leqslant |a|_{\mathbb{A}} \leqslant 1} \mathrm{d}^\times a$$

が得られる。これより命題が従う。 □

6.3. **スペクトルサイド.** スペクトルサイドはカスピダルデータによって展開する。Modified kernel から Truncated kernel に移行することによってスペクトルサイドの詳細が記述される。

このサブセクションを通じて、これより $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を仮定する。

6.3.1. *Modified kernel* の分解. まずカスピダルデータ $\chi \in \mathfrak{X}^G$ について R_χ を $\mathcal{L}^2_\chi$ への $(R, \mathcal{L}^2)$ の制限とする。そして、カスピダルデータ $\chi = (G, \pi) \in \mathfrak{X}^G$ について、$\mathcal{B}_{G,\chi}$ を $\mathcal{L}^2_\chi$ の $\mathbf{K}$-有限な元のみから成る正規直交基底として、

$$K_{G,\chi}(g,h) = \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\,, \quad K_{P,\chi}(g,h) = 0$$

と定義する。続いてカスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu \neq \check{\mu}$ について考える。$\mathbf{H}_\mu$ を内積 $\langle\ \rangle_{\mathbf{K}}$ によって $\mathbf{H}^0_\mu$ を完備化して得られるヒルベルト空間とする。$\mathcal{B}_\mu$ を $\mathbf{H}^0_\mu$ の元から成る $\mathbf{H}_\mu$ の正規直交基底とする。$\mathcal{B}_{P,\chi} = \mathcal{B}_\mu \cup \mathcal{B}_{\check{\mu}}$ は $\mathbf{H}^0_\mu \oplus \mathbf{H}^0_{\check{\mu}}$ の元から成る $\mathbf{H}_\mu \oplus \mathbf{H}_{\check{\mu}}$ の正規直交基底であり、

$$K_{G,\chi}(g,h) = \frac{1}{8\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi; is, g)\,\overline{\mathsf{E}(\phi; is, h)}\,\mathrm{d}s,$$
$$K_{P,\chi}(g,h) = \frac{1}{4\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} (\pi_{is}(f)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\,\mathrm{d}s$$

と定義する。最後にカスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu = (\mu_1, \mu_1)$ について、$\mathcal{B}_{P,\chi} = \mathcal{B}_\mu$ として、

$$\begin{aligned} K_{G,\chi}(g,h) =& \frac{1}{8\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi; is, g)\,\overline{\mathsf{E}(\phi; is, h)}\,\mathrm{d}s \\ &+ \mathrm{vol}_G^{-1}\, \mu_1(\det g)\,\overline{\mu_1(\det h)} \int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\mu_1(\det g)\,\mathrm{d}^1 g, \\ K_{P,\chi}(g,h) =& \frac{1}{4\pi \mathrm{vol}_M} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} (\pi_{is}(f)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

と定義する。$K_{G,\chi}(g,h)$ の s に関する積分の収束は、定理 76 の証明の中で示される。特に (6.9) に注意されたい。$K_{P,\chi}(g,h)$ の積分 $\int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}} (\pi_{is}(f)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)}\,\mathrm{d}s$ の収束も同様の議論で示される。

カスピダルデータ $\chi = (G, \phi) \in \mathfrak{X}^G$ の場合、$K_{G,\chi}(g,h)$ は明らかに $R_\chi(f)$ に関する核関数である。カスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$ の場合の $K_{G,\chi}(g,h)$ について考えよう。

$$\mathrm{P}_{\mathrm{cont}} \circ R(f) \circ \mathrm{P}_{\mathrm{cont}} = S^* \circ \rho(f) \circ S$$

が成り立つので、命題 46 と合わせて、$\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}_P$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathrm{P}_{\mathrm{cont}}\circ R(f)\circ \mathrm{P}_{\mathrm{cont}}(\theta_{\varphi_1})\,|\,\theta_{\varphi_2}\rangle_G=\langle S^*\circ\rho(f)\circ S(\theta_{\varphi_1})\,|\,\theta_{\varphi_2}\rangle_G=\langle\rho(f)\circ S(\theta_{\varphi_1})\,|\,S(\theta_{\varphi_2})\rangle_{\mathfrak{H}}\\
&=\langle\rho(f)\circ S(\theta_{\varphi_1})\,|\,S(\theta_{\varphi_2})\rangle_{\mathfrak{H}}=\langle\rho(f)\mathsf{a}_{\varphi_1}\,|\,\mathsf{a}_{\varphi_2}\rangle_{\mathfrak{H}}=\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\int_0^\infty\langle\pi_{is}(f)\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle\pi_{is}(f)\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}'\in\mathcal{B}}\langle\pi_{is}(f)\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\,,\,\mathsf{f}'\rangle_{\mathbf{K}}\,\langle\mathsf{f}'\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f},\mathsf{f}'\in\mathcal{B}}\langle\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\,,\,\mathsf{f}\rangle_{\mathbf{K}}\,\langle\pi_{is}(f)\mathsf{f}\,,\,\mathsf{f}'\rangle_{\mathbf{K}}\,\langle\mathsf{f}'\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{\mathrm{vol}_M}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}\overline{\langle\mathsf{f}\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_1}(s)\rangle_{\mathbf{K}}}\,\langle\pi_{is}(f)\mathsf{f}\,,\,\mathsf{a}_{\varphi_2}(s)\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{8\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\overline{E(\mathsf{f},is,h)}\,\theta_{\varphi_1}(h)\mathrm{d}^1h\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}E(\pi_{is}(f)\mathsf{f},is,g)\,\overline{\theta_{\varphi_2}(g)}\,\mathrm{d}^1g\,\mathrm{d}s\\
&=\langle\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\frac{1}{8\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}E(\pi_{is}(f)\mathsf{f},is,*)\,\overline{E(\mathsf{f},is,h)}\,\mathrm{d}s\,\theta_{\varphi_1}(h)\,\mathrm{d}^1h\,|\,\theta_{\varphi_2}\rangle_G
\end{aligned}
$$

を得る。つまり、カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ について $K_{G,\chi}(g,h)$ は $R_\chi(f)$ に関する核関数となっている。続いて、カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ についての $K_{P,\chi}(g,h)$ を考えよう。このとき、上の計算とほぼ同じ手順によって、$\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{D}_P$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\langle R(f)\varphi_1\,|\,\varphi_2\rangle_P=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle R(f)\hat{\varphi}_1(is)\,|\,\varphi_2\rangle_P\,\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle\pi_{is}(f)\hat{\varphi}_1(is)\,,\,\hat{\varphi}_2(is)\rangle_{\mathbf{K}}\,\mathrm{d}s\\
&=\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}\overline{\langle\mathsf{f}\,,\,\hat{\varphi}_1(is)\rangle_{\mathbf{K}}}\,\langle\pi_{is}(f)\mathsf{f}\,,\,\hat{\varphi}_2(is)\rangle_{\mathbf{K}}\,\mathrm{d}s\\
&=\frac{1}{4\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}\overline{\langle\mathsf{f}\,|\,\varphi_1\rangle_P}\,\langle\pi_{is}(f)\mathsf{f}\,|\,\varphi_2\rangle_P\,\mathrm{d}s\\
&=\langle\int_{N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\frac{1}{4\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\mathsf{f}\in\mathcal{B}}(\pi_{is}(f)\mathsf{f})(*)\overline{\mathsf{f}(h)}\mathrm{d}s\,\varphi_1(h)\,\mathrm{d}h\,|\,\varphi_2\rangle_P
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって、$L^2(N(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ における $\mathcal{D}_P(\mu)+\mathcal{D}_P(\check{\mu})$ で張られる空間の閉包への R_P の制限を $R_{P,\chi}$ とすると、カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ についての $K_{P,\chi}(g,h)$ は $R_{P,\chi}$ に関する核関数となる。したがって、R_P が $N(\mathbb{A})M(F)$ の自明な表現から $G(\mathbb{A})^1$ への誘導表現であることに注意すれば、スペクトル分解より、

$$K_G(g,h)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}K_{G,\chi}(g,h)\,,\quad K_P(g,h)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}K_{P,\chi}(g,h)$$

が従う。

$$k_\chi^T(g,f)=K_{G,\chi}(g,g)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}K_{P,\chi}(\delta g,\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

と置いて、

$$J_\chi^T(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}k_\chi^T(g,f)\mathrm{d}^1g$$

と定める。スペクトルサイドとして $J^T(f)=\sum_\chi J_\chi^T(f)$ と展開することが目的である。そのために、$\sum_\chi\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k_\chi^T(g,f)|\mathrm{d}^1g<+\infty$ を示すことが目標になる。

6.3.2. *Truncation operator.* まずは Truncation opeator を定義しよう。$\mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ を $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の局所有界な可測関数から成る空間とする。十分大きい正の実数 T と関数 $\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ に対して、$\mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の関数 $\Lambda^T\phi$ を

$$(\Lambda^T\phi)(g) = \phi(g) - \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n\delta g)\,\mathrm{d}n\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g) - T)$$

によって定義する。もし $\phi \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ ならば定義より $\Lambda^T\phi = \phi$ が明らかに成り立つ。

$\Lambda^T\phi$ が $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上の関数になることを示しておこう。ある $\alpha \in G(F)$ について $H(\alpha g) > T$ となる場合に等式 $\Lambda^T\phi(\delta g) = \Lambda^T\phi(g)$, $({}^\forall\delta \in G(F))$ が成り立つことを示せばよい。補題 65 より $\delta \notin P(F)$ について $H(\delta\alpha g) \leqslant -H(\alpha g) < -T < T$ となるので、

$$(\Lambda^T\phi)(\alpha g) = \phi(\alpha g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n\alpha g)\,\mathrm{d}n = \phi(g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n\alpha g)\,\mathrm{d}n = (\Lambda^T\phi)(g)$$

が成り立つ。よって示せた。

補題 71. 任意の $\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ と $H(g) > T$ を満たす任意の $g \in G(\mathbb{A})^1$ について次が成り立つ。

$$(\Lambda^T\phi)_P(g) = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} (\Lambda^T\phi)(ng)\mathrm{d}n = 0.$$

Proof. 上述と同様に補題 65 より $\delta \notin P(F)$ について $H(\delta g) < T$ となるので、

$$(\Lambda^T\phi)(g) = \phi(g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n_1 g)\,\mathrm{d}n_1$$

となり、

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} (\Lambda^T\phi)(nx)\mathrm{d}n = \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(nx)\mathrm{d}n - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(n_1 nx)\mathrm{d}n_1\mathrm{d}n = 0$$

を得る。 □

この補題と命題 34, 43 によって、$\Lambda^T\mathsf{E}(\mathsf{f}; s)$ が急減少関数になることが分かる。

次の 2 つの命題は後で使うことはないが、Truncation operator の基本的な性質なので、紹介する。

命題 72. $\Lambda^T \circ \Lambda^T = \Lambda^T$.

Proof. $\phi \in \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ と $H(g) > T$ を満たす $g \in G(\mathbb{A})^1$ について $(\Lambda^T(\Lambda^T\phi))(g) = (\Lambda^T\phi)(g)$ となることを示しさえすればよい。補題 71 より

$$(\Lambda^T(\Lambda^T\phi))(g) = (\Lambda^T\phi)(g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} (\Lambda^T\phi)(ng)\mathrm{d}n = (\Lambda^T\phi)(g)$$

となり、命題が従う。 □

命題 73. 任意の $\phi_1 \in \mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ と $\phi_2 \in C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ について

$$\langle\, \Lambda^T\phi_1 \,|\, \phi_2 \,\rangle_G = \langle\, \phi_1 \,|\, \Lambda^T\phi_2 \,\rangle_G$$

が成り立つ。

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \Lambda^T \phi_1 \,|\, \phi_2 \,\rangle_G \\
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \Big\{ \phi_1(g) - \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi_1(n\delta g)\mathrm{d}n\, \widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T) \Big\}\, \overline{\phi_2(g)}\mathrm{d}^1 g \\
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \phi_1(g)\, \overline{\phi_2(g)}\, \mathrm{d}^1 g - \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi_1(ng)\, \overline{\phi_2(g)}\, \widehat{\tau}_P(H(g)-T)\, \mathrm{d}n\mathrm{d}^1 g \\
&= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \phi_1(g)\, \overline{\phi_2(g)}\, \mathrm{d}^1 g - \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi_1(g)\, \overline{\phi_2(ng)}\, \widehat{\tau}_P(H(g)-T)\, \mathrm{d}n\mathrm{d}^1 g \\
&= \langle\, \phi_1 \,|\, \Lambda^T \phi_2 \,\rangle_G.
\end{aligned}
$$

□

これら 2 つの命題より $\langle (1-\Lambda^T)\phi_1 \,|\, \Lambda^T\phi_2\rangle = 0,\ {}^\forall\phi_1,\ \phi_2 \in \mathcal{L}^2$ が成り立つので、Truncation operator Λ^T は $\mathcal{L}^2$ 上の直交射影であることが分かる。また、命題 73 とその証明より、truncation operator Λ^T は $\mathcal{L}^2$ 上の hermitian operator であることが分かる。

K を $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の開コンパクト部分群とすると、$G(\mathbb{A})^1$ のある有限部分集合 $\{g_1, g_2, \dots, g_l\}$ が存在して

$$
G(\mathbb{A})^1 = \bigcup_{t=1}^{l} G(F)\, g_t\, G(F_\infty)^1 K \quad \text{(disjoint union)}
$$

が成り立つことに注意しよう。そのため、$\phi \in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の $G(F_\infty)$ での性質は $G(F_\infty)^1$ についてのみ定めれば良いことが分かる。そして、

$$
C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1) = \varinjlim_K C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1/K)
$$

であることにも気をつけよう。

正の整数 r に対して $C^r(G(\mathbb{A}))$ を $G(F_\infty)$ 上 C^r 級であり $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ 上 smooth であるような $G(\mathbb{A})$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数全体の空間とする。

補題 74. 定数 $N,\ N_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ の開コンパクト部分群 K を任意に固定する。このとき、$G(F_\infty)$ 上のある左不変微分作用素の有限集合 $\{X_t\}$ とある定数 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して、もし $(\Omega, \mathrm{d}\omega)$ が可測空間で

$$
\phi \,:\, \Omega \to C^r(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1/K)\,, \quad \phi(\omega) : g \mapsto \phi(\omega, g)
$$

が任意の可測関数ならば

$$
\sup_{g\in\mathfrak{S}^1} \Big(||g||^N \int_\Omega |(\Lambda^T\phi)(\omega,g)|\mathrm{d}\omega \Big) < \sup_{h\in G(\mathbb{A})^1} \Big(||h||^{-N_0} \sum_t \int_\Omega |(X_t\phi)(\omega,h)|\mathrm{d}\omega \Big)
$$

が成り立つ。

Proof. 定義と補題 66 より

$$
\begin{aligned}
(\Lambda^T\phi(\omega))(g) = {}&\phi(\omega,g)F^G(g,T) \\
&+ \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \Big(\phi(\omega,\delta g) - \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \phi(\omega, n\delta g)\mathrm{d}n \Big)\, \widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。$F^G(g,T)$ のサポートは $\mathfrak{S}^1$ 上コンパクトなのだから上の式の第一項の評価に関しては明らかである。補題 65 を思い出せば上の式の第二項に関する評価について

$$\sup_{g\in\mathfrak{S}^1}\Big|\,||g||^N\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\Big(\phi(\omega,\delta g)-\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\phi(\omega,n\delta g)\mathrm{d}n\Big)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\Big|$$

$$=\sup_{g\in\mathfrak{S}^1\,,\,H(g)>T}\Big|\,||g||^N\Big(\phi(\omega,g)-\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\phi(\omega,ng)\mathrm{d}n\Big)\Big|$$

を得る。評価すべき上の式の関数がだいたいカスプ形式であることから、命題 34 を思い出せば、いかにも同じような議論で証明できそうである。命題 34 と同様、この式の評価に関しては、[25, 命題 1.10] の証明を参照されたい。 □

命題 75. もし $\phi\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ が一様緩増大ならば $\Lambda^T\phi$ は急減少である。

Proof. $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ のある開コンパクト部分群 K について $\phi\in C^\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1/K)$ として良い。$(\Omega,\mathrm{d}\omega)$ を自明にして補題 74 を適用すると、

$$\sup_{g\in\mathfrak{S}^1}\big(||g||^N|(\Lambda^T\phi)(g)|\big)<\sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\big(||h||^{-N_0}\sum_t|(X_t\phi)(h)|\big)$$

を得る。ϕ は一様緩増大なのだから N_0 を適切にとれば右辺は定数で押さえられる。N は任意なので命題が従う。 □

6.3.3. 収束性. 二変数 (g,h) の関数 $f_1(g,h)\in\mathcal{B}_{\mathrm{loc}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1\times G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の変数 g に関して Λ^T を作用させたものを $(\Lambda^T_1 f_1)(g,h)$ と書き、変数 h について Λ^T を作用させたものを $(\Lambda^T_2 f_1)(g,h)$ と書く。

定理 76. T を正の実数とする。

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|(\Lambda^T_2K_{G,\chi})(g,g)|\,\mathrm{d}^1g<+\infty$$

が成り立つ。

Proof. 正の整数 r に対して $f_1\in C^r_c(G(\mathbb{A}))$ として、$\sum_{\gamma\in G(F)}f_1(g^{-1}\gamma h)$ について考える。和における γ の動く範囲は $g\,\mathrm{supp}(f_1)\,h^{-1}$ であるので、補題 31 の (2)(3)(6) より、ある定数 $N_1\in\mathbb{Z}_{>0}$ と f_1 に依存した定数 $c(f_1)>0$ によって

$$\Big|\sum_{\gamma\in G(F)}f_1(g^{-1}\gamma h)\Big|\leqslant c(f_1)\,||g||^{N_1}\,||h||^{N_1}\,,\quad {}^\forall g,\,{}^\forall h\in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \tag{6.7}$$

が成り立つ。

r を十分大きい正の整数と仮定する。このとき、f は右かつ左 $\mathbf{K}$-有限な関数 $f_1,\ f_2\in C^r_c(G(\mathbb{A}))$ の畳み込み f_1*f_2 の有限和で表せることが知られている。(cf. [9] and [2, p.928–929])。ただし、$(f_1*f_2)(g)=\int_{G(\mathbb{A})^1}f_1(gh)f_2(h^{-1})\mathrm{d}^1h$ とする。そして、$t=1$ or 2 として、

$$K_{G,t}(g,h)=\sum_{\gamma\in G(F)}(f_t*f_t^*)(g^{-1}\gamma h)$$

と置く。X を左不変微分作用素として、$(X_1K_{G,t})(g,h)$ を X を変数 g に作用させたもの、$(X_2K_{G,t})(g,h)$ を X を変数 h に作用させたものとする。

テスト関数 f, f_1, f_2 や Xf が $\mathbf{K}$-有限であるので、それぞれの核関数の定義における基底の和は有限和になることに注意する。$\mathcal{B}'_{G,\chi}$ を $\mathcal{B}_{G,\chi}$ の十分大きい有限部分集合とする。そして、

$$v_g(h)=\sum_{\phi\in\mathcal{B}'_{G,\chi}}\overline{\phi(g)}\,\phi(h)$$

と置く。明らかに $\mathcal{B}'_{G,\chi}$ で張られる部分空間に属する元 ψ に対して、$\langle \psi \,|\, v_g \rangle_G = \psi(g)$ となる。また左不変微分作用素 X^* を $\langle \psi_1 \,,\, X\psi_2 \rangle_G = \langle X^*\psi_1 \,,\, \psi_2 \rangle_G$ で定める。このとき、

$$\begin{aligned}
&\sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1 * f_2)\phi)(g)\,\overline{(X\phi)(h)} = \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} \langle \phi | R_\chi((f_1 * f_2)^*) v_g \rangle_G \, \langle v_h \,|\, X\phi \rangle_G \\
&= \langle \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} \langle X^* v_h \,|\, \phi \rangle_G \phi \,|\, R_\chi((f_1 * f_2)^*) v_g \rangle_G = \langle X^* v_h | R_\chi((f_1 * f_2)^*) v_g \rangle_G \\
&= \langle R_\chi(f_2) X^* v_h | R_\chi(f_1^*) v_g \rangle_G
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって Hölder の不等式と上の等式より、$\chi = (G, \pi) \in \mathfrak{X}^G$ のときは、

$$\begin{aligned}
&\Big| \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1 * f_2)\phi)(g)\,\overline{(X\phi)(h)} \Big| = \big| \langle R_\chi(f_2) X^* v_h | R_\chi(f_1^*) v_g \rangle_G \big| \\
&\leqslant \langle R_\chi(f_1 * f_1^*) v_g \,| v_g \rangle_G^{1/2} \, \langle R_\chi(f_2^* * f_2) X^* v_h \,| X^* v_h \rangle_G^{1/2} \\
&= \Big(\sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1 * f_1^*)\phi)(g)\overline{\phi(g)} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (X R_\chi(f_2^* * f_2)\phi)(h)\overline{(X^*\phi)(h)} \Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

が成り立つ。最後の等式は上の等式を逆にたどれば得られる。さらに Hölder の不等式から $a_k,\, b_l \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ の収束可算和について

$$\sum (a_k b_k)^{1/2} \leqslant \big(\sum a_k \big)^{1/2} \big(\sum b_l \big)^{1/2}$$

が成り立つのだから、上の結果をまとめると、

(6.8)

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi = (G,\pi) \in \mathfrak{X}^G} \Big| \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1 * f_2)\phi)(g)\,\overline{\phi(h)} \Big| &\leqslant \Big(\sum_{\chi = (G,\pi) \in \mathfrak{X}^G} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (R_\chi(f_1 * f_1^*)\phi)(g)\overline{\phi(g)} \Big)^{1/2} \\
&\times \Big(\sum_{\chi = (G,\pi) \in \mathfrak{X}^G} \sum_{\phi \in \mathcal{B}_{G,\chi}} (X R_\chi(f_2^* * f_2)\phi)(h)\overline{(X^*\phi)(h)} \Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

を得る。

$\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$ に対して不等式 (6.8) と同様のものを証明しよう。$\mathcal{B}'_{P\chi}$ を $\mathcal{B}_{P,\chi}$ の十分大きい有限部分集合とする。さっきと同様に

$$w_g(h) = \sum_{\phi \in \mathcal{B}'_{P,\chi}} \overline{\phi(g)} \phi(h)$$

と置く。もし ψ が $\mathcal{B}'_{P,\chi}$ で張られる部分空間に属するならば $\langle \psi \,,\, w_g \rangle_{\mathbf{K}} = \psi(g)$ である。さらに

$$E(w_g, s, h) = \sum_{\gamma \in P(F) \backslash G(F)} w_{\gamma g}(h) \overline{\delta_P(\gamma g)^{s/2}} = \sum_{\phi \in \mathcal{B}'_{P,\chi}} \phi(h)\, \overline{E(\phi^{(s)} : g)}$$

と置くと、

$$\langle \psi \,,\, E(w_g, s) \rangle_{\mathbf{K}} = E(\psi^{(s)} : g)\,, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

が成り立つ。よって、$\mathsf{E}(\phi; s, g)$, $\phi \in \mathcal{B}_{P,\chi}$ と $\mathsf{E}(\psi; s, g)$ の性質から有理型関数

$$\mathsf{E}(w_g, s, h) = \sum_{\phi \in \mathcal{B}'_{P,\chi}} \phi(h)\, \overline{\mathsf{E}(\phi; s, g)}$$

について、

$$\langle \psi \,,\, \mathsf{E}(w_g, is) \rangle_{\mathbf{K}} = \mathsf{E}(\psi; is, g)\,, \quad s \in \mathbb{R}$$

が成り立つとして良い。また X に対して $R(D) = X,\ D \in U(\mathfrak{g})$ とすると、$X\mathsf{E}(\psi; s, g) = \mathsf{E}(\pi_s(D)\psi; is, g)$ が成り立つ。そして、$(\pi_s(D))^*$ を $\langle \psi_1\,,\, \pi_s(D)\psi_2 \rangle_{\mathbf{K}} = \langle (\pi_s(D))^*\psi_1\,,\, \psi_2\rangle_{\mathbf{K}}$ で定め、X^* を $X^*\mathsf{E}(\psi; s, g) = \mathsf{E}((\pi_s(D))^*\psi; is, g)$ で定める。こうすると、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f_1 * f_2)\phi; is, g)\overline{X\mathsf{E}(\phi; is, h)} \\
&= \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \langle \pi_{is}(f_1 * f_2)\phi\,,\, \mathsf{E}(w_g, is)\rangle_{\mathbf{K}}\, \langle \mathsf{E}(w_h, is)\,,\, \pi_{is}(D)\phi\rangle_{\mathbf{K}} \\
&= \langle \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \langle \mathsf{E}(w_h, is)\,,\, \pi_{is}(D)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\phi\,,\, \pi_{is}((f_1 * f_2)^*)\mathsf{E}(w_g, is)\rangle_{\mathbf{K}} \\
&= \langle (\pi_{is}(D))^*\mathsf{E}(w_h, is)\,,\, \pi_{is}((f_1 * f_2)^*)\mathsf{E}(w_g, is)\rangle_{\mathbf{K}} \\
&= \langle \pi_{is}(f_2)(\pi_{is}(D))^*\mathsf{E}(w_h, is)\,,\, \pi_{is}(f_1^*)\mathsf{E}(w_g, is)\rangle_{\mathbf{K}}
\end{aligned}
$$

を得る。Hölder の不等式と上の等式より、

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f_1 * f_2)\phi; is, g)\overline{X\mathsf{E}(\phi; is, h)}\Big| \\
&\leqslant \langle \pi_{is}(f_1 * f_1^*)\mathsf{E}(w_g, is)\,,\, \mathsf{E}(w_g, is)\rangle_{\mathbf{K}}^{1/2}\, \langle \pi_{is}(f_2^* * f_2)(\pi_{is}(D))^*\mathsf{E}(w_h, is)\,,\, (\pi_{is}(D))^*\mathsf{E}(w_h, is)\rangle_{\mathbf{K}}^{1/2} \\
&= \Big(\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f_1 * f_1^*)\phi; is, g)\overline{\mathsf{E}(\phi; is, g)}\Big)^{1/2} \\
&\quad\times \Big(\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(D)\pi_{is}(f_2^* * f_2)\phi; is, h)\overline{\mathsf{E}((\pi_{is}(D))^*\phi; is, h)}\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

を得る。もう一回 Hölder の不等式を使って、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G} \int_{\mathbb{R}} \Big|\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f_1 * f_2)\phi; is, g)\overline{X\mathsf{E}(\phi; is, h)}\Big| \mathrm{d}s \\
&= \Big(\sum_{\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(f_1 * f_1^*)\phi; is, g)\overline{\mathsf{E}(\phi; is, g)}\mathrm{d}s\Big)^{1/2} \\
&\quad\times \Big(\sum_{\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} \mathsf{E}(\pi_{is}(D)\pi_{is}(f_2^* * f_2)\phi; is, h)\overline{\mathsf{E}((\pi_{is}(D))^*\phi; is, h)}\mathrm{d}s\Big)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

が導ける。したがって、(6.8) と (6.9) と $\mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}$ の部分と Hölder の不等式によって次の不等式を得る。

$$
\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} |(X_2K_{G,\chi})(g, h)| \,\leqslant\, \sum_{(f_1,f_2)} \Big(K_{G,1}(g, g)\Big)^{1/2} \Big((X_1X_2^*K_{G,2})(h, h)\Big)^{1/2}.
$$

ただし、和 $\sum_{(f_1,f_2)}$ は有限和である。さらに、(6.7) によって、ある正の整数 N_1 と定数 $c_X(f)$ について、

$$
\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} |(X_2K_{G,\chi})(g, h)| \,\leqslant\, c_X(f)\, ||g||^{N_1}\, ||h||^{N_1}
$$

が成り立つ。そして、補題 74 より

$$\begin{aligned}\sup_{h\in\mathfrak{S}^1}\Big(||h||^N\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,h)|\Big) &< \sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\Big(||h||^{-N_0}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|\sum_l((X_l)_2K_{G,\chi})(g,h)|\Big)\\ &\leqslant \sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\Big(\sum_l||h||^{-N_0}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|((X_l)_2K_{G,\chi})(g,h)|\Big)\\ &\leqslant \sup_{h\in G(\mathbb{A})^1}\Big(\sum_l||h||^{-N_0}\,c_{X_l}(f)\,||g||^{N_1}\,||h||^{N_1}\Big)\\ &\leqslant (\sum_l c_{X_l}(f))\,||g||^{N_1}\end{aligned}$$

を得る。最後に $g=h$ とすれば、

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}|(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,g)|\leqslant \mathrm{constant}\times||g||^{N_1-N}\,,\quad {}^\forall g\in\mathfrak{S}^1$$

が成り立つ。N は任意なので十分大きい自然数とすれば、この定理が従う。 □

補題 77. T を十分大きい正の実数とする。任意の $\chi\in\mathfrak{X}^G$ について、

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|\,k_\chi^T(g,f)-(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,g)\,|\,\mathrm{d}^1g=0$$

が成り立つ。ただし、T の大きさは f のサポートにのみ依存している。

Proof. まず $\chi=(G,\pi)$ のときは、定義より明らかに成り立つ。そのため、$\chi=(P,[\mu])$ として等式を証明しよう。定義より、$K_{G,\chi}(\delta g,h)=K_{G,\chi}(g,h)$, ${}^\forall\delta\in G(F)$ と $K_{P,\chi}(g,h)=\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}K_{P,\chi}(g,nh)\mathrm{d}n$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}&k_\chi^T(g,f)-(\Lambda_2^T K_{G,\chi})(g,g)\\ &=\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\{\,K_{G,\chi}(\delta g,n\delta g)-K_{P,\chi}(\delta g,n\delta g)\,\}\mathrm{d}n\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\end{aligned}$$

を得る。もし $\mu\neq\check{\mu}$ ならば $\sigma=\mu+\check{\mu}$ と置き、もし $\mu=\check{\mu}$ ならば $\sigma=\mu$ と置く。指標の直交性より

$$K_{P,\chi}(g,h)=\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}K_P(g,mh)\,\sigma(m)\,\mathrm{d}m$$

が成り立つ。命題 6 から $\phi\in\mathbf{H}_\mu^0$ について $\phi_1=M(s)\phi\in\mathbf{H}_{\check{\mu}}^0$ とおくと

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\mathsf{E}(\phi,is,ng)\,\mathrm{d}n=\phi^{(is)}(g)+\phi_1^{(-is)}(g)\,,\quad g\in G(\mathbb{A})^1$$

が成り立つのだから、g, $h\in G(\mathbb{A})^1$ を固定した状態で $m\in M(\mathbb{A})^1$ について

$$\begin{aligned}&\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\int_{\mathbb{R}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is,g)\,\overline{\mathsf{E}(\phi;is,nmh)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}n\\ &=\int_{\mathbb{R}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is,g)\,\overline{\phi^{(is)}(h)}\,\mathrm{d}s\times\overline{\mu(m)}+\int_{\mathbb{R}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is,g)\,\overline{\phi_1^{(-is)}(h)}\,\mathrm{d}s\times\overline{\check{\mu}(m)}\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、これらの等式と指標の直交性とカスプ条件より

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}K_{G,\chi}(g,nh)\mathrm{d}n=\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}K_{G,\chi}(g,nmh)\,\sigma(m)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}m$$

を得る。つまり

$$k^T_\chi(g,f)-(\Lambda^T_2K_{G,\chi})(g,g)=\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}$$
$$\{\,K_G(\delta g,nm\delta g)-K_P(\delta g,nm\delta g)\,\}\,\sigma(m)\mathrm{d}n\mathrm{d}^1m\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

が導ける。そして、

$$K_P(g,nh)=\sum_{n_2\in N(F)}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M(F)}f(g^{-1}\gamma n_2n_1nh)\mathrm{d}n_1$$

となるから、変数変換 $n_1\to n_1n^{-1}$ により

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\{\,K_G(g,nh)-K_P(g,nh)\,\}\mathrm{d}n=\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in G(F)-P(F)}f(g^{-1}\gamma nh)\mathrm{d}n$$

と変形できる。これらの等式より

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|\,k^T_\chi(g,f)-(\Lambda^T_2K_{G,\chi})(g,g)\,|\,\mathrm{d}^1g$$
$$\leqslant\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\left|\mathrm{vol}_M^{-1}\int_{M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1}\int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in G(F)-P(F)}f(g^{-1}\gamma nmg)\,\sigma(m)\mathrm{d}n\mathrm{d}^1m\right|$$
$$\widehat{\tau}_P(H(g)-T)\,\mathrm{d}^1g$$

を得る。この不等式と定理 64 の証明での (6.2) に関する議論から、この補題がすぐに従う。 □

補題 77 より十分大きい T について

$$J^T_\chi(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}k^T_\chi(g,f)\mathrm{d}^1g=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}(\Lambda^T_2K_{G,\chi})(g,g)\mathrm{d}^1g$$

が成り立つ。そのため、定理 76 と補題 77 より次の定理を得る。

定理 78. T を十分大きい正の実数とする。このとき、

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}|k^T_\chi(g,f)|\,\mathrm{d}^1g<+\infty$$

が成り立つ。ただし、T の大きさは f のサポートにのみ依存している。

この定理により、

$$J^T(f)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}J^T_\chi(f)$$

を得る。

6.3.4. 明示的公式. $\mu\in\mathfrak{X}^M$ に対して $\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}$ 上の線型作用素 $\pi_{is}(f)$ のトレースは

$$\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}})=\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\phi\rangle_{\mathbf{K}}$$

と定義される。他のトレースも同様に定義される。

命題 79. T を十分大きい正の実数とする。$\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\neq\mu_2$ のとき、

$$J^T_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}})\mathrm{d}s+\frac{T}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}})\mathrm{d}s$$

が成り立つ。

Proof. 補題 77 より十分大きい T について

$$J_\chi^T(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\frac{1}{8\pi\mathrm{vol}_M}\int_{\mathbb{R}}\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is,g)\overline{\Lambda^T\mathsf{E}(\phi;is,g)}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}^1g$$

となることに注意して、内積

$$\langle\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is)\,|\,\Lambda^T\mathsf{E}(\phi;is)\rangle_G\,,\quad \phi\in\mathbf{H}^0$$

を計算することから始めよう。$\mathrm{Re}(s)>1$ の場合、

$$\Lambda^TE(\phi^{(s)}:g)=E(\phi^{(s)}:g)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}E(\phi^{(s)})_P(\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)$$

となるので、$E(\phi^{(s)}:g)$ の定義と命題 6 より

$$\Lambda^TE(\phi^{(s)}:g)=\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}\{\phi^{(s)}(\delta g)\{1-\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\}-(M(s)\phi^{(s)})(\delta g)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta g)-T)\}$$

が従う。さらに命題 14 の証明より、$\mathrm{Re}(s_2)>\mathrm{Re}(s_1)>1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\langle E(R(f)\phi^{(s_1)})\,|\,\Lambda^TE(\phi^{(\overline{s_2})})\rangle_G\times\mathrm{vol}_M^{-1}\\
&=\langle E(R(f)\phi^{(s_1)})_P\,|\,\phi^{(\overline{s_2})}\,\{1-\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\}\rangle_P\times\mathrm{vol}_M^{-1}\\
&\quad-\langle E(R(f)\phi^{(s_1)})_P\,|\,(M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})})\,\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\rangle_P\times\mathrm{vol}_M^{-1}\\
&=\langle R(f)\phi^{(s_1)}\,|\,\phi^{(\overline{s_2})}\,\{1-\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\}\rangle_P\times\mathrm{vol}_M^{-1}\\
&\quad+\langle M(s_1)R(f)\phi^{(s_1)}\,|\,\phi^{(\overline{s_2})}\,\{1-\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\}\rangle_P\times\mathrm{vol}_M^{-1}\\
&\quad-\langle R(f)\phi^{(s_1)}\,|\,(M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})})\,\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\rangle_P\times\mathrm{vol}_M^{-1}\\
&\quad-\langle M(s_1)R(f)\phi^{(s_1)}\,|\,(M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})})\,\widehat{\tau}_P(H(-)-T)\rangle_P\times\mathrm{vol}_M^{-1}\\
&=\langle R(f)\phi^{(s_1)}\,|\,\phi^{(\overline{s_2})}\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{2^{-1}(s_1+s_2)T}}{2^{-1}(s_1+s_2)}+\langle M(s_1)R(f)\phi^{(s_1)}\,|\,\phi^{(\overline{s_2})}\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{2^{-1}(-s_1+s_2)T}}{2^{-1}(-s_1+s_2)}\\
&\quad-\langle R(f)\phi^{(s_1)}\,|\,M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})}\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{-2^{-1}(-s_1+s_2)T}}{2^{-1}(-s_1+s_2)}-\langle M(s_1)R(f)\phi^{(s_1)}\,|\,M(\overline{s_2})\phi^{(\overline{s_2})}\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{-2^{-1}(s_1+s_2)T}}{2^{-1}(s_1+s_2)}
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで解析接続を用いると、$s_1=-s_2=is\neq0$, $s\in\mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\langle\mathsf{E}(\pi_{is}(f)\phi;is)\,|\,\Lambda^T\mathsf{E}(\phi;is)\rangle_G\times\mathrm{vol}_M^{-1}\\
&=\lim_{t\to0}\langle\frac{e^{itT}\mathsf{M}(-it+is)-e^{-itT}\mathsf{M}(it+is)}{it}\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(-it+is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\\
&\quad-\langle\mathsf{M}(is)\pi_{is}(f)\phi\,,\phi\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{-isT}}{is}+\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\,\frac{e^{isT}}{is}\\
&=2T\,\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\phi\rangle_{\mathbf{K}}-2\,\langle\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)\phi\,,\phi\rangle_{\mathbf{K}}\\
&\quad+\frac{e^{isT}}{is}\,\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\frac{e^{-isT}}{is}\,\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}
\end{aligned}\tag{6.10}$$

を得る。この命題の $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ と $\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}$ に対して、$\mu\neq\check{\mu}$ なので $M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1$ 上の積分と指標の直交性を用いれば、$\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}=\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}=0$ が従う。よって、等式 (6.10) よりこの命題の等式が得られる。 □

命題 80. T を十分大きい正の実数とする。$\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1=\mu_2$ のとき、

$$\begin{aligned}J_\chi^T(f)=&-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\mathrm{d}s+\frac{T}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathsf{M}(0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})+\int_{G(\mathbb{A})^1}f(g)\,\mu_1(\det g)\,\mathrm{d}^1g\end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. 等式 (6.10) より $\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}$ に対して

$$\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\Big\{\frac{e^{isT}}{is}\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\frac{e^{-isT}}{is}\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\Big\}\mathrm{d}s=2\pi\,\mathrm{tr}(\mathsf{M}(0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})$$

を十分大きい T に対して示せば、この命題が従う。この等式の左辺の有限和の中を

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{isT}-e^{-isT}}{is}\,\langle\mathsf{M}(-is)\pi_{is}(f)\phi\,,\,\phi\rangle_{\mathbf{K}}\mathrm{d}s\\&+\int_{\mathbb{R}}\big\{\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\big\}\,\frac{e^{-isT}}{is}\,\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{6.11}$$

と補題 81 より変形できる。この第一項について考えよう。

$$v_1(\phi;s)=\langle\mathsf{M}(-is)\pi_{is}(f)\phi\,,\,\phi\rangle_{\mathbf{K}}$$

とする。補題 81 より $v_1(s)$ は連続かつ可積分である。ここで、$\mathbb{R}$ 上の Schwartz 関数 $v(s)$ で $v_1(0)=v(0)$ となるものを考える。

$$w(\phi;t)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ist}-e^{-ist}}{is}v(\phi;(2\pi)^{-1}s)\,\mathrm{d}s$$

と置く。よって、

$$\begin{aligned}w'(\phi;t)=&\int_{\mathbb{R}}(e^{ist}+e^{-ist})\,v(\phi;(2\pi)^{-1}s)\,\mathrm{d}s=2\pi\int_{\mathbb{R}}(e^{2\pi ist}+e^{-2\pi ist})\,v(\phi;s)\,\mathrm{d}s\\=&2\pi\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\end{aligned}$$

となる。そして、

$$w(\phi;T)=2\pi\int_0^T\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s=2\pi v(\phi;0)-2\pi\int_T^\infty\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s$$

となる。$v(\phi;0)=v_1(\phi;0)=\langle\mathsf{M}(0)\pi_0(f)\phi\,,\phi\rangle_{\mathbf{K}}$ なので、

$$\begin{aligned}&\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}v_1(\phi;s)\frac{e^{isT}-e^{-isT}}{is}\mathrm{d}s\\&=2\pi\,\mathrm{tr}(\mathsf{M}(0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})+\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\{v_1(\phi;s)-v(\phi;s)\}\frac{e^{isT}-e^{-isT}}{is}\mathrm{d}s\\&\quad-2\pi\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_T^\infty\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{6.12}$$

が成り立つ。一方、T とは別の任意の十分大きい T_0 について、定義より

$$
\begin{aligned}
J_\chi^T(f)-J_\chi^{T_0}(f)=&\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} K_{P,\chi}(g,g)\{-\widehat{\tau}_P(H(g)-T)+\widehat{\tau}_P(H(g)-T_0)\}\,\mathrm{d}^1g\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\mathrm{d}s\times(T-T_0)
\end{aligned}
$$

を得る。したがって、この差と (6.10) と (6.11) と (6.12) から、任意の十分大きい T と T_0 について

$$
\begin{aligned}
0=&\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\big\{\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\big\}\,\frac{e^{-isT}-e^{-isT_0}}{is}\,\mathrm{d}s\\
&+\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\{v_1(\phi;s)-v(\phi;s)\}\frac{e^{isT}-e^{-isT}-e^{isT_0}+e^{-isT_0}}{is}\mathrm{d}s\\
&-2\pi\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_T^{T_0}\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

を得る。補題 81 と $v_1(0)=v(0)$ より、関数

$$
\frac{\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}}{is}\,,\quad\frac{v_1(\phi;s)-v(\phi;s)}{is}
$$

はどちらも $\mathbb{R}$ 上に拡張でき、$\mathbb{R}$ 上の可積分関数である。可積分関数 $w_1(s)$ について、そのフーリエ変換 $\int_{\mathbb{R}}w_1(s)e^{isT_0}\mathrm{d}s$ は $T_0\to\infty$ とすると 0 に収束することが知られている。その結果、上の等式において、$T_0\to\infty$ とすることができて、十分大きい任意の T について

$$
\begin{aligned}
0=&\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\big\{\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}-\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}\big\}\,\frac{e^{-isT}}{is}\,\mathrm{d}s\\
&+\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_{\mathbb{R}}\{v_1(\phi;s)-v(\phi;s)\}\frac{e^{isT}-e^{-isT}}{is}\mathrm{d}s-2\pi\sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}}\int_T^{\infty}\{\hat{v}(\phi;s)+\hat{v}(\phi;-s)\}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

が成り立つ。よって、命題の等式を示すことができた。 □

補題 81. $\phi\in\mathbf{H}_\mu^0$ について $v_1(s)=\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}$, $v_2(s)=\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(-is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}$ とおく。$\mathbb{R}$ 上の関数 $v_1(s)$ と $v_2(s)$ は $\mathbb{R}$ 上連続である。さらに、任意の $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して、ある正の定数 c_m が存在して $|v_1(s)|<c_m\times(1+|s|)^{-m}$, $|v_2(s)|<c_m\times(1+|s|)^{-m}$ が成り立つ。

Proof. 関数 $v_1(s)$ と $v_2(s)$ が連続であることは命題 16 から明らかなので、可積分であることを示そう。どちらも同様に示せるので $v_1(s)$ についてのみ証明する。素点 $v\in\Sigma_\infty$ を一つ固定して、その素点 v 上のカシミール元を $\Omega\in U(\mathfrak{g})$ とする。カシミール元については [33] を参照されたい。このとき、$\pi_{is}(\Omega)\phi^{(is)}=\lambda(is)\,\phi^{(is)}$ を満たす 2 次の多項式 $\lambda(s)$ が存在する。したがって、$M(\mathbb{A})^1\mathbf{K}$ 上 $\phi^{(is)}=\phi$ なので、任意の $l,\,m\in\mathbb{Z}_{>0}$ について

$$
\begin{aligned}
\lambda(is)^m v_1(s)=&\lambda(is)^m\,\langle\pi_{is}(f)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}=\langle\pi_{is}(f)\,\lambda(is)^m\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\,\phi\rangle_{\mathbf{K}}\\
=&\langle\pi_{is}(f)\pi_{is}(\Omega)^m\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}
\end{aligned}
$$

を得る。よって、$v_1(s)=\lambda(is)^{-m}\,\langle\pi_{is}(f_m)\phi\,,\,\mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}$ が成り立つ。ただし、$f_m=R(\Omega^m)f$ である。π_{is} はユニタリー表現だから $\|\pi_{is}(f_m)\phi\|_{\mathbf{K}}\leqslant\|f_m\|_{G(\mathbb{A})^1,1}\|\phi\|_{\mathbf{K}}$ である。更に、作用素

$\mathsf{M}(is)$ もユニタリー (命題 16 (6)) だから、

$$\begin{aligned}|\lambda(is)^{-m}\, v_1(s)| &= |\langle \pi_{is}(f_m)\phi, \mathsf{M}(is)\phi\rangle_{\mathbf{K}}| \\ &\leqslant \|\pi_{is}(f_m))\phi\|_{\mathbf{K}}\, \|\mathsf{M}(is)\phi\|_{\mathbf{K}} \\ &\leqslant \|f_m\|_{G(\mathbb{A})^1,1}\|\phi\|_{\mathbf{K}}^2\end{aligned}$$

となり s について有界になる。従って、任意の $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ について $|v_1(s)|<\mathrm{constant}\times(1+|s|)^{-m}$ が従う。 □

6.4. **まとめ.** テスト関数 $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を任意に一つ固定する。定理 64、67、78 を合わせると、十分大きい T について

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} J_\chi^T(f)$$

と幾何サイドの展開とスペクトルサイドの展開の等式が得られる。この等式と $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ と $J_\chi^T(f)$ の明示的公式 (命題 68、69、70、79、80) を合わせて GL(2) の跡公式が完成した。これよりこの公式の意味や使い方や改良について考えよう。

R_{cus} は $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}$ への $(R,\mathcal{L}^2)$ の制限とする。ある $\mu\in\mathfrak{X}^M$ によって $\chi=(P,[\mu])$ となるような $\mathfrak{X}^G$ の元全体を $\mathfrak{X}_P$ と書く。このとき、等式

$$\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus}}(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f) - \sum_{\chi\in\mathfrak{X}_P} J_\chi^T(f) \tag{6.13}$$

を得る。GL(2) の跡公式を使う我々の主な目的は $\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus}}(f)$ を調べることにある。そのため、以後、等式 (6.13) の右辺を応用し易い形に変形していくことになる。命題 68、69、70、79、80 により、十分大きい T に関して (6.13) の右辺は T の一次の多項式であることが分かる。(6.13) の左辺は T に関係ない定数なので、当然、右辺の T の係数はキャンセルして 0 になる。$\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus}}(f)$ に関係する部分のみが必要なのだから T の部分は必要ない。そのため、各 $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ と $J_\chi^T(f)$ を T の多項式とみて $T=0$ を代入したものを考えればよい。つまり、T の多項式とみて

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=J_{\mathfrak{o}}^0(f)\,,\quad J_\chi(f)=J_\chi^0(f)$$

と置く。$\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus}}(f)$ を調べることを目的として、これまでの結果は次のようにまとめられる。

定理 82. 任意の関数 $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ について等式

$$\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus}}(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f) - \sum_{\chi\in\mathfrak{X}_P} J_\chi(f)$$

が成り立つ。そして、右辺の各項は次のように与えられる。楕円元 $\gamma\in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ について

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}$$

である。双曲元 $\gamma\in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ について

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \frac{1}{2}\sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}} \mathrm{vol}_M \int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})} f(k^{-1}n^{-1}\delta nk)\,(-H(wn))\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k$$

である。中心元 $z\in Z(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{z\}\cup\{z\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\}_{G(F)}$ について

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \mathrm{vol}_G\, f(z) + \mathrm{vol}_Z\,\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\int_{\mathbb{A}^\times} F_z(a)\,|a|_{\mathbb{A}}^s\,\mathrm{d}^\times a$$

である。ただし、$F_z(u)=\int_{\mathbf{K}} f(k^{-1}z\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix}k)\mathrm{d}k$ と定めた。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu\neq\check{\mu}$ について

$$J_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu\oplus\mathbf{H}_{\check{\mu}}})\mathrm{d}s$$

である。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_1)$ について

$$\begin{aligned}J_\chi(f)=&-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,\mathsf{M}(-is)\mathsf{M}'(is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\mathsf{M}(0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})+\int_{G(\mathbb{A})^1}f(g)\,\mu_1(\det g)\,\mathrm{d}^1g\end{aligned}$$

である。

T の係数について少し考えておこう。(6.13) の右辺でキャンセルして零になる理由はなんだろうか？

$$f^P(m)=\delta(m)^{1/2}\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})}f(k^{-1}mnk)\mathrm{d}n\mathrm{d}k\,,\quad m\in M(\mathbb{A})$$

により $f^P\in C_c^\infty(M(\mathbb{A}))$ を定義する。このように記号を定まると、

$$\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})=\int_{M(\mathbb{A})^1}\int_{(\mathbb{R}^\times)^0}f^P(m\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix})\,\mu(m)\,a^{is/2}\,\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}^\times a$$

と書けることに注意しよう。命題 69 と 70 より $\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ の T の係数は

$$\mathrm{vol}_M\sum_{\gamma\in M(F)}f^P(\gamma)$$

となる。そして、命題 79 と 80 より $\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}J_\chi^T(f)$ の T の係数は

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\int_{\mathbb{R}}\int_{(\mathbb{R}^\times)^0}\int_{M(\mathbb{A})^1}f^P(m\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix})\,\mu(m)\,a^{is/2}\mathrm{d}^1m\,\mathrm{d}^\times a\,\mathrm{d}s$$

となる。つまり s と a によるフーリエ逆変換と $M(F)\backslash M(\mathbb{A})^1$ のポアソン和公式 (cf. (2.2)) によって、(6.13) の右辺の T の係数がキャンセルして零になることが分かる。逆に、T の係数のキャンセルによって得られる等式は、$M=\mathrm{GL}(1)\times\mathrm{GL}(1)$ の跡公式であることが分かった。

6.5. **テスト関数への仮定.** 定理 82 の右辺をより扱い易い形に変えていこう。

仮定 83. テスト関数 $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ を $f_v\in\mathcal{H}(G(F_v))$ によって

$$f=\prod_{v\in\Sigma}f_v$$

と与える。

この仮定 83 の下では幾何サイドの $J_{\mathfrak{o}}(f)$ の積分は各素点上の積分に分解される。特にほとんどすべての有限素点において f_v は $\mathbf{K}_v$ の特性関数であることに注意しよう。

スペクトルサイドの $G(\mathbb{A})^1$ の表現を各素点に綺麗に分解するために上と異なるテスト関数への仮定を考えよう。$J^T(f)$ や $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$, $J_\chi^T(f)$ の定義を見れば分かるように、それらは f の $G(\mathbb{A})^1$ 上の値にしか依存していない。**そのため、$\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の元と $G(\mathbb{A})^1$ 上で一致するような $G(\mathbb{A})$ 上の任意の関数 f について、このセクションのこれまでの結果が成り立つ。**空間 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ を

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)=\{f'|_{G(\mathbb{A})^1}\mid f'\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))\}$$

によって定義する。

仮定 84. $f_1 \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ が $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ によって $f_1 = \prod_{v\in\Sigma} f_v$ と与えられるとする。そして、テスト関数 f を

$$f(g) = \int_{Z_\infty^+} f_1(xg)\, \mathrm{d}^\times x\,, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

によって定義する。

この仮定 84 のテスト関数 f は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ に属することが次のように示せる。つまり

$$f|_{G(\mathbb{A})^1} = f'$$

を満たす $f' \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ の存在を示そう。Z_∞^+ と $(\mathbb{R}^\times)^0$ を同一視して、$r(1) = 1$ を満たす $r \in C_c^\infty(Z_\infty^+)$ を一つ取って、

$$f_1'(g) = r(|\det g|_{\mathbb{A}})\, f(g)\,, \quad g \in G(\mathbb{A})$$

と置く。明らかに $f_1' \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ であり、$f' = f_1'|_{G(\mathbb{A})^1} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ とすると $f|_{G(\mathbb{A})^1} = f'$ が成り立つ。よって仮定 84 の f は $\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ の元と $G(\mathbb{A})^1$ 上同一視できるので、**仮定 84 を満たすテスト関数 f に対して、このセクションのこれまでの結果が成り立つ。**この仮定のメリットは $G(\mathbb{A})^1$ 上の表現を各素点 v 上の表現の積にそのまま分解できることにある。例として $\pi_s(f)$ の場合について説明しよう。$\mu = (\mu_v) \in \mathfrak{X}^M$ とする。$\mathbf{H}_{\mu_v}^0$ を $\mathbf{H}_\mu^0$ の局所類似として次のように定義する。$G(F_v)$ 上の smooth かつ右 $\mathbf{K}_v$-有限な $\mathbb{C}$ 関数 ϕ_v で等式 $\phi_v(n_v m_v g_v) = \mu_v(m_v)\delta_P(m_v)^{1/2}\phi_v(g_v)$, $^\forall m_v \in M(F_v)$, $^\forall n_v \in N(F_v)$ を満たすようなもの全体からなら空間を $\mathbf{H}_{\mu_v}^0$ と定める。もちろん、この空間は先に定義した $\mathbf{H}_v^0(\mu, 0)$ と同一である。そして、同じエルミート形式 $\langle\, ,\, \rangle_{\mathbf{K}_v}$ を用いる。$\mathbf{H}_{\mu_v}$ を $\langle\, ,\, \rangle_{\mathbf{K}_v}$ による $\mathbf{H}_{\mu_v}^0$ の完備化して得られるヒルベルト空間とする。次に、$f_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$ について、

$$[\pi_{s,v}(f_v)\phi_v](g_v) = \int_{G(F_v)} f(h_v)\phi(g_v h_v)\, \delta_P(g_v h_v)^{s/2}\, \delta_P(g_v)^{-s/2} \mathrm{d}h_v$$

と $\pi_{s,v}(f_v)$ を定める。π_s を Z_∞^+ 上の作用を自明なものとして、$G(\mathbb{A})$ 上の表現と同一視しよう。このとき、$\phi = (\phi_v) \in \mathbf{H}_\mu^0$ に対して

$$\pi_s(f)\phi = \int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\pi_s(g)\phi\, \mathrm{d}^1 g = \int_{G(\mathbb{A})} f_1(g)\pi_s(g)\phi\, \mathrm{d}g = \bigotimes_{v\in\Sigma} \pi_{s,v}(f_v)\phi_v$$

と各素点上の表現として分解される。

次のセクションで、仮定 83 または仮定 84 の下で定理 82 の式の右辺を各素点上の積分の形に変形する。大域的な部分と局所的な部分を分けて、局所的な話に持ち込める部分は局所的に調べる方が、応用上好ましい。特に大域的な量と有限個の素点上の積分との積で記述されることに注目してほしい。ただし、楕円元の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ とカスピダルデータ $\chi = (G, \pi)$ の場合に関してはこのノートでは言及しないので、本報告集の [39] を参照されたい。

6.6. $J_{\mathfrak{o}}(f)$ と $J_\chi(f)$ の改良.

命題 85. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。双曲元 $\gamma \in G(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(F)}$ を一つ固定する。素点の有限集合 S で Σ_∞ を含み、そして $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v) \neq 1$ であるような素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ も含むものを考える。f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でない、またはある $\delta \in M(F) \cap \mathfrak{o}$ について $\delta \notin \mathbf{K}_v$ となるようなすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ を含むような S が存在する。そして、そのような素点の有限集合 S に対して、

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{o}}(f) =& \frac{1}{2} \sum_{\delta \in M(F)\cap\mathfrak{o}} \sum_{v\in S} \mathrm{vol}_M \int_{\mathbf{K}_v} \int_{N(F_v)} f_v(k_v^{-1} n_v^{-1} \delta n_v k_v)\, (-H(w n_v))\, \mathrm{d}n_v\, \mathrm{d}k_v \\ & \times \prod_{v' \in S - \{v\}} \int_{\mathbf{K}_{v'}} \int_{N(F_{v'})} f_{v'}(k_{v'}^{-1} n_{v'}^{-1} \delta n_{v'} k_{v'})\, \mathrm{d}n_{v'}\, \mathrm{d}k_{v'} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、重み因子 $-H(wn_v)$ は、$n_v = \begin{pmatrix} 1 & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$-H(wn_v) = \begin{cases} \log(1+|x_v|^2) & \textit{if } v \in \Sigma_\infty\,, \\ \max\{0\,,\ \log|x_v|_v^2\} & \textit{if } v \in \Sigma_{\mathrm{fin}} \end{cases}$$

となる。もしテスト関数 f が仮定 *84* を満たす場合は、上の等式での無限素点 $v_0 \in \Sigma_\infty$ のテスト関数 $f_{v_0}(*)$ を $\int_{Z_\infty^+} f_{v_0}(x*)\,\mathrm{d}^\times x$ に置き換えれば良い。無限素点 v_0 は Z_∞^+ を定義するときに固定した素点である。

Proof. ほとんどすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について f_v は $\mathbf{K}_v$ の特性関数であり、かつ $\delta \in M(F) \cap \mathfrak{o}$ は $\mathbf{K}_v$ に属するので、そのような S の存在は明らか。その条件下において、$v \notin S$ ならば ${}^\forall k_v \in \mathbf{K}_v$ について $f_v(k_v^{-1} n_v^{-1} \delta n_v k_v) = f_v(n_v^{-1}\delta n_v)$ となり、そして、$f_v(n_v^{-1}\delta n_v) = 1$ if $n_v \in \mathfrak{O}_v$, $f_v(n_v^{-1}\delta n_v) = 0$ if $n_v \notin \mathfrak{O}_v$ がすぐに分かる。その結果、この命題の $J_{\mathfrak{o}}(f)$ の等式が従う。重み因子 $-H(wn_v)$ については直接計算による。 □

命題 86. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。中心元 $z \in Z(F)$ と $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{z\} \cup \{z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{G(F)}$ を一つ固定する。素点の有限集合 S で Σ_∞ を含み、そして $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v) \neq 1$ であるような素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ も含むものを考える。f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でない、または $z \notin \mathbf{K}_v$ となるようなすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ を含むような S が存在する。そして、そのような素点の有限集合 S に対して、

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{o}}(f) = {} & \mathrm{vol}_G \prod_{v\in\Sigma} f_v(z) \\ & + \mathrm{vol}_M \sum_{v\in S} \int_{\mathbf{K}_v} \int_{F_v} f_v(k_v^{-1} z \begin{pmatrix} 1 & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_v)\, \log|x_v|_v \,\mathrm{d}x_v\,\mathrm{d}k_v \\ & \qquad \times \prod_{v'\in S-\{v\}} \int_{\mathbf{K}_{v'}} \int_{N(F_{v'})} f_{v'}(k_{v'}^{-1} z n_{v'} k_{v'})\,\mathrm{d}n_{v'}\,\mathrm{d}k_{v'} \\ & + \mathrm{vol}_Z\, a(S) \prod_{v\in S} \int_{\mathbf{K}_v} \int_{N(F_v)} f_v(k_v^{-1} z n_v k_v)\,\mathrm{d}n_v\,\mathrm{d}k_v \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、定数 $a(S)$ は

$$\zeta_F^S(s) = \prod_{v\notin S}(1-q_v^{-s})^{-1}\,, \quad a(S) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{(s-1)\zeta_F^S(s)\}|_{s=1}}{\prod_{v\in S}(1-q_v^{-1})}$$

と定める。もしテスト関数 f が仮定 *84* を満たす場合は、上の等式での無限素点 $v_0 \in \Sigma_\infty$ のテスト関数 $f_{v_0}(*)$ を $\int_{Z_\infty^+} f_{v_0}(x*)\,\mathrm{d}^\times x$ に置き換えれば良い。

Proof. そして、命題 85 の証明と類似の議論で、

$$\int_{\mathbb{A}^\times} F_z(a)\,|a|_{\mathbb{A}}^s\,\mathrm{d}^\times a = \zeta_F^S(s) \prod_{v\in S} \int_{\mathbf{K}_v} \int_{F_v^\times} f_v(k_v^{-1} z \begin{pmatrix} 1 & a_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_v)\,|a_v|_v^s\,\mathrm{d}^\times a_v\,\mathrm{d}k_v$$

を得る。局所ゼータ関数 $\zeta_{F,v}(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ で正則なのだから、$\zeta_F^S(s)$ は $s=1$ に一位の極を持つことが分かる。そのため、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\int_{\mathbb{A}^\times} F_z(a)\,|a|_{\mathbb{A}}^s\,\mathrm{d}^\times a \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{(s-1)\zeta_F^S(s)\}\big|_{s=1}\prod_{v\in S}\int_{\mathbf{K}_v}\int_{F_v^\times} f_v(k_v^{-1}z\begin{pmatrix}1 & a_v\\ 0 & 1\end{pmatrix}k_v)\,|a_v|_v\,\mathrm{d}^\times a_v\,\mathrm{d}k_v \\
&\quad + \mathrm{Residue}_{s=1}\zeta_F^S(s)\sum_{v\in S}\int_{\mathbf{K}_v}\int_{F_v^\times} f_v(k_v^{-1}z\begin{pmatrix}1 & a_v\\ 0 & 1\end{pmatrix}k_v)\,|a_v|_v\log|a_v|_v\,\mathrm{d}^\times a_v\,\mathrm{d}k_v \\
&\qquad\qquad \times\prod_{v'\in S-\{v\}}\int_{\mathbf{K}_{v'}}\int_{F_{v'}^\times} f_{v'}(k_{v'}^{-1}z\begin{pmatrix}1 & a_{v'}\\ 0 & 1\end{pmatrix}k_{v'})\,|a_{v'}|_{v'}\,\mathrm{d}^\times a_{v'}\,\mathrm{d}k_{v'}
\end{aligned}
$$

となる。あとは、$\mathrm{d}^\times a_v=(1-q_v^{-1})^{-1}\mathrm{d}a_v$ と

$$\mathrm{Residue}_{s=1}\zeta_F^S(s)\times\prod_{v\in S}(1-q_v^{-1})^{-1}=\mathrm{vol}(F^\times\backslash\mathbb{A}^1)$$

に気をつければ命題が従う。 $\square$

定義 57 において、$\mu_v\in\mathfrak{X}_v^M$ について正規化された絡作用素 $R_v(\mu_v,s)$ が定義された。$\mu=(\mu_v)\in\mathfrak{X}^M$ について、

$$R(\mu,s)=\bigotimes_{v\in\Sigma}R(\mu_v,s)\,,\quad m(\mu,s)=\epsilon(\mu_1\mu_2^{-1}|\ |_{\mathbb{A}}^s\,,\,\psi_F)\,\frac{L(\mu_1\mu_2|\ |_{\mathbb{A}}^{s+1})}{L(\mu_1\mu_2^{-1}|\ |_{\mathbb{A}}^s)}$$

と置く。このとき、$M(\mu,s)=M(s)|_{(\pi_s,\mathbf{H}_\mu)}$ とすると、$M(\mu,s)=m(\mu,s)\,R(\mu,s)$ である。

命題 87. テスト関数 f は仮定 *84* を満たすとする。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\neq\mu_2$, $\mu_1=(\mu_{1,v})$, $\mu_2=(\mu_{2,v})$ を一つ固定する。素点の有限集合 S で Σ_∞ を含み、そして $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v)\neq 1$ であるような素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ も含むものを考える。f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でない、もしくは $\mu_{1,v}$ または $\mu_{2,v}$ が分岐しているようなすべての素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ を含むような S が存在する。そして、そのような素点の有限集合 S に対して、

$$
\begin{aligned}
J_\chi(f)=&-\frac{1}{4\pi}\sum_{\xi=(\xi_v)=\mu\text{ or }\check{\mu}}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\xi,is)}{m(\xi,is)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})\,\mathrm{d}s \\
&+\sum_{v\in S}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,R_v(\xi_v,is)^{-1}R_v'(\xi_v,is)\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})\prod_{v'\in S-\{v\}}\mathrm{tr}(\pi_{is,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\xi_{v'}}})\,\mathrm{d}s\Big\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

Proof. $M(\xi,s)=m(\xi,s)\otimes_{v\in\Sigma}R_v(\xi_v,s)$ と $M(\xi,-s)=\dfrac{1}{m(\xi,s)}\,R(\xi,s)^{-1}$ が成り立つので、

$$M(\xi,-s)M'(\xi,s)=\frac{m'(\xi,s)}{m(\xi,s)}\,\mathrm{id}+\sum_{v\in\Sigma}R_v(\xi_v,s)^{-1}R_v'(\xi_v,s)\otimes_{v'\neq v}\mathrm{id}_{v'}$$

が成り立つ。よって、あとは各素点 $v\notin S$ におけるトレースを考えれば良い。素点 $v\notin S$ とする。このとき、f_v は $\mathbf{K}_v$ の特性関数であり $\mu_{1,v}$ と $\mu_{2,v}$ は不分岐である。この場合、$\mathbf{H}_{\xi_v}$ における $\pi_{is,v}$ の $\mathbf{K}_v$-不変ベクトル全体の部分空間の次元は 1 であることが知られている。そこで、$\mathbf{K}_v$-不変ベクトル ϕ_0 を含むような $\mathbf{H}_{\xi_v}$ の正規直交基底 $\mathcal{B}_{\xi_v}$ を考える。任意の $\phi\in\mathcal{B}_{\xi_v}$, $\phi\neq\phi_0$ について $\pi_{is,v}(f_v)\phi$ は $\mathbf{K}_v$-不変かつ $\langle\pi_{is,v}(f_v)\phi\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}=\langle\phi\,,\,\pi_{is,v}(f_v)\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}=\langle\phi\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}=0$

なので、$\pi_{is,v}(f_v)\phi = 0$ となる。したがって $v \notin S$ ならば $\mathrm{tr}(\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}}) = 1$ を得る。また系 58 より

$$\begin{aligned}&\langle R_v(\xi_v, is)^{-1} R'_v(\xi_v, is)\pi_{is,v}(f_v)\phi_0\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v} = \langle R_v(\xi_v, is)^{-1} R'_v(\xi_v, is)\phi_0\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle R_v(\xi_v, is)^{-1} R_v(\xi_v, is+it)\phi_0\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle R_v(\xi_v, is)^{-1}\phi_0\,,\,\phi_0\rangle_{\mathbf{K}_v}\Big|_{t=0} = 0\end{aligned}$$

を得る。これらの値よりこの命題の仮定 84 に関する部分が従う。 □

命題 88. テスト関数 f は仮定 *84* を満たすとする。カスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu = (\mu_1, \mu_1)$, $\mu_1 = (\mu_{1,v})$ を一つ固定する。素点の有限集合 S で Σ_∞ を含み、そして $\mathrm{vol}(\mathfrak{O}_v) \neq 1$ であるような素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ も含むものを考える。f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でない、または $\mu_{1,v}$ が分岐しているようなすべての素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ を含む S が存在する。そして、そのような素点の有限集合 S に対して、

$$\begin{aligned}J_\chi(f) = &-\frac{1}{4\pi}\Big\{\int_{\mathbb{R}} \frac{m'(\mu, is)}{m(\mu, is)} \prod_{v\in S} \mathrm{tr}(\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mathrm{d}s\\ &+ \sum_{v\in S}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\,R_v(\mu_v, is)^{-1} R'_v(\mu_v, is)\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}}) \prod_{v'\in S-\{v\}} \mathrm{tr}(\pi_{is,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\mu_{v'}}})\,\mathrm{d}s\Big\}\\ &+ \frac{1}{4}\, m(\mu, 0)\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(R_v(\mu_v, 0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}}) + \prod_{v\in S}\int_{G(F_v)} f_v(g)\,\mu_{1,v}(\det g_v)\,\mathrm{d}g_v\end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. 命題 87 の証明と同様の議論により証明される。 □

テスト関数 f が仮定 83 を満たす場合にも、命題 87 と 88 と同様に各素点上の積分の積の形にすることができる。そのためには、Z_∞^+ の作用を考える必要がある。$\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度 $\mathrm{d}r$ を取り、$t \in \mathbb{R}$ について

$$f_t = f_{v_0,t}\prod_{v\neq v_0} f_v\,, \quad f_{v_0,t}(g) = \int_{\mathbb{R}} f_{v_0}(e^r g)\, e^{2\pi i r t}\,\mathrm{d}r$$

と関数 f_t と $f_{v_0,t}$ を定義する。次に $G(\mathbb{A})$ の $\mathbf{H}_\mu$ 上のユニタリ表現 $\pi_{is,it}$ を

$$\pi_{is,it}(\varphi) = \int_{G(\mathbb{A})} \varphi(g) e^{\pi i t\,\log|\det g|_{\mathbb{A}}}\,\pi_{is}(g)\mathrm{d}g\,, \quad \varphi \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$$

によって定義する。また各素点 $v \in \Sigma$ についても同様に

$$\pi_{is,it,v}(\varphi_v) = \int_{G(F_v)} \varphi_v(g_v)\, e^{\pi i t\,\log|\det g_v|_v}\,\pi_{is,v}(g_v)\,\mathrm{d}g_v\,, \quad \varphi_v \in \mathcal{H}(G(F_v))$$

と $\mathbf{H}_{\mu_v}$ 上のユニタリ表現 $\pi_{is,it,v}$ を定義する。こうすると、$\phi = \otimes_v\phi_v \in \mathbf{H}_\mu = \otimes_v \mathbf{H}_{\mu_v}$ について

$$\mathrm{tr}(\pi_{is}(f_t)|_{\mathbf{H}_\mu}) = \prod_{v\in\Sigma}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})$$

が成り立つことがすぐにわかる。また、フーリエ逆変換により

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{is}(f_t)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})$$

が成り立つことに注意する。その結果、命題 87 の証明と同様の議論で、以下の命題を得る。

命題 89. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1\neq\mu_2$, $\mu_1=(\mu_{1,v})$, $\mu_2=(\mu_{2,v})$ を一つ固定する。そして、命題 *87* と同じ素点の有限集合 S に対して、

$$J_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{\xi=(\xi_v)=\mu\text{ or }\tilde{\mu}}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\xi,is)}{m(\xi,is)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{v\in S}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,R_v(\xi_v,is)^{-1}R'_v(\xi_v,is)\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\xi_v}})\prod_{v'\in S-\{v\}}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\xi_{v'}}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big\}$$

が成り立つ。

命題 90. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。カスピダルデータ $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_1)$, $\mu_1=(\mu_{1,v})$ を一つ固定する。そして、命題 *88* と同じ素点の有限集合 S に対して、

$$J_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\Big\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\mu,is)}{m(\mu,is)}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$
$$+\sum_{v\in S}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\,R_v(\mu_v,is)^{-1}R'_v(\mu_v,is)\pi_{is,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\prod_{v'\in S-\{v\}}\mathrm{tr}(\pi_{is,it,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\mu_{v'}}})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big\}$$
$$+\frac{1}{4}\,m(\mu,0)\int_{\mathbb{R}}\prod_{v\in S}\mathrm{tr}(R_v(\mu_v,0)\pi_{0,it,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\mathbb{R}}\prod_{v\in S}\int_{G(F_v)}f_v(g)\,\mu_{1,v}(\det g_v)\,e^{\pi it\log|\det g_v|_v}\,\mathrm{d}g_v\,\mathrm{d}t$$

が成り立つ。

7. 応用に関連した公式

このセクションでは、前セクションで与えられた GL(2) の跡公式より導かれる応用上有用な公式をいくつか紹介する。特にこれらの公式は本報告集の伊吹山 [20] と都築 [39] で用いられる。

7.1. **Simple trace formula.** まず [39] の Jacquet-Langlands 対応の証明で用いられる「Simple trace formula」について説明しよう。

任意の素点 $v\in\Sigma$ と $f_v\in C_c^\infty(G(F_v))$ について

$$f_v^P(m_v)=\delta_P(m_v)^{1/2}\int_{\mathbf{K}_v}\int_{N(F_v)}f(k_v^{-1}m_vn_vk_v)\,\mathrm{d}n_v\,\mathrm{d}k_v\,,\quad m_v\in M(F_v)$$

によって $f_v^P\in C_c^\infty(M(F_v))$ が定義される。$\mu_v\in\mathfrak{X}_v^M$ と $\pi_{is,v}$ について

$$\mathrm{tr}(\pi_{is,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})=\int_{M(F_v)}f_v^P(m_v)\,\mu_v(m_v)\,\delta_P(m_v)^{is/2}\,\mathrm{d}m_v$$

が成り立つことに注意する。そして、f_v がカスピダルであるとは、任意の $\mu_v\in\mathfrak{X}_v^M$ について

$$\int_{M(F_v)}f_v^P(m_v)\,\mu_v(m_v)\,\mathrm{d}m_v=0$$

となることを意味する。

$\mathrm{d}\mu_v$ を $\mathfrak{X}_v^M$ 上のハール測度とする。任意の $\varphi\in C_c^\infty(M(F_v))$ についてフーリエ逆変換

$$\varphi(m'_v)=\int_{\mathfrak{X}_v^M}\int_{M(F_v)}\varphi(m_v)\,\mu_v(m_v)\,\mathrm{d}m_v\,\mu_v(m'_v)^{-1}\mathrm{d}\mu_v$$

が成り立つことが知られている。ただし、$\mathrm{d}\mu_v$ は上の等式が成り立つように正規化する。

補題 91. $f_v \in C_c^\infty(G(F_v))$ について次の三つの条件は同値となる。

(1) f_v はカスピダルである。

(2) $^\forall\gamma_v \in M(F_v) - Z(F_v)$ について $\int_{\mathbf{K}_v}\int_{N(F_v)} f_v(k_v^{-1}n_v^{-1}\gamma_v n_v k_v)\,\mathrm{d}n_v\,\mathrm{d}k_v = 0$ が成り立つ。

(3) $^\forall\gamma_v \in M(F_v) - Z(F_v)$ について $f_v^P(\gamma_v) = 0$ が成り立つ。

Proof. (1) ならば (3) であることは、上述のフーリエ逆変換より明らか。(3) ならば (1) は $\int_{M(F_v)-Z(F_v)} \mathrm{d}m_v = \int_{M(F_v)} \mathrm{d}m_v$ より従う。変数変換より (2) と (3) が同値であることが従う。 □

補題 92. $f_v \in C_c^\infty(G(F_v))$ がカスピダルならば、$^\forall z_v \in Z(F_v)$ について $f_v^P(z_v) = 0$ が成り立つ。

Proof. 任意の元 $z_v \in Z(F_v)$ の任意の近傍に $M(F_v)$ の元が存在するので、$f_v^P \in C_c^\infty(M(F_v))$ と補題 91 より明らか。 □

R_{res} を $\mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}$ への $(R, \mathcal{L}^2)$ の制限とする。$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ について、

$$\mathrm{tr}R_{\mathrm{res}}(f) = \sum_{\mu\in\mathfrak{X}^M} \int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\,\mu(\det g)\,\mathrm{d}^1 g$$

となる。次の定理が Simple trace formula と呼ばれる公式である。

定理 93. テスト関数 f は仮定 *83* または *84* を満たすとする。さらに二つの素点 v_1 と v_2, $(v_1 \neq v_2)$ について、f_{v_1} と f_{v_2} はカスピダルとする。このとき、

$$\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus}}(f) + \mathrm{tr}R_{\mathrm{res}}(f) = \sum_{z\in Z(F)} \mathrm{vol}_G\, f(z) + \sum_{\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)},\,\gamma\text{は楕円}} J_{\mathfrak{o}}(f)$$

が成り立つ。ただし、和において $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(F)}$ は γ が楕円であるような $\mathcal{O}$-同値類全体を走る。

Proof. 定理 82 と命題 85, 86, 87, 88, 89, 90 に補題 91, 92 を合わせれば明らか。 □

さらに、この定理を中心指標ごとの空間に分けよう。ω を $Z_\infty^+ Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})$ 上のユニタリ指標とする。仮定 84 を満たすテスト関数 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ から、関数 $f_\omega \in C^\infty(G(\mathbb{A}))$ を

$$f_\omega(g) = \int_{Z(\mathbb{A})^1} f(zg)\,\omega(z)\,\mathrm{d}^1 z$$

によって定義する。この f_ω は

$$f_\omega(zg) = \omega(z)^{-1} f(g)\,, \quad {}^\forall z \in Z(\mathbb{A})^1$$

を満たし、modulo $Z(\mathbb{A})$ でコンパクトサポートを持つ。$\tilde{G} = Z\backslash G$ と置き、$\mathrm{d}\tilde{g}$ は $Z(\mathbb{A})$ と $G(\mathbb{A})$ 上のハール測度による $\tilde{G}(\mathbb{A})$ 上の商測度とする。$R_\omega(f_\omega)$ の $\mathcal{L}^2(G,\omega)$ 上への作用が

$$R(f_\omega)\phi = \int_{\tilde{G}(F)\backslash\tilde{G}(\mathbb{A})} f_\omega(g)\,R(g)\phi\,\mathrm{d}\bar{g}\,, \quad \phi \in \mathcal{L}^2(G,\omega)$$

で定められる。$R_\omega(f_\omega)$ の $\mathcal{L}^2_{\mathrm{cus}}(G,\omega)$ への制限を $R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega)$、$\mathcal{L}^2_{\mathrm{res}}(G,\omega)$ への制限を $R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega)$ とする。明らかに

$$\mathrm{tr}R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega) = \sum_{\mu\in\mathfrak{X}^M,\,\mu^2=\omega} \int_{\tilde{G}(\mathbb{A})} f_\omega(g)\,\mu(\det g)\mathrm{d}\tilde{g}$$

となる。また $\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega)$ が存在することは定理 76 より明らかである。そして、$\gamma \in G(F)$ の $\tilde{G}(F)$ への像の元を $\tilde{\gamma}$ と記述する。

定理 94. テスト関数 f は仮定 *84* を満たすとする。さらに二つの素点 v_1 と v_2, $(v_1 \neq v_2)$ について、f_{v_1} と f_{v_2} はカスピダルとする。そして、$Z_\infty^+ Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})$ 上のユニタリ指標 ω を一つ固定して、上述の通り f より f_ω を定める。このとき、

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega) + \mathrm{tr}R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega)\\ &= \mathrm{vol}(\tilde{G}(F)\backslash\tilde{G}(\mathbb{A}))\, f_\omega(I_2) + \sum_{\{\tilde{\gamma}\}_{\tilde{G}(F)},\,\gamma\text{は楕円}} \mathrm{vol}(\tilde{G}(F)_\gamma\backslash\tilde{G}(\mathbb{A})_\gamma)\,\iota(\gamma)^{-1}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})} f_\omega(g^{-1}\gamma g)\mathrm{d}\dot{g}\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、和において $\{\tilde{\gamma}\}_{\tilde{G}(F)}$ は γ が楕円であるような $\tilde{G}(F)$ における $\tilde{G}(F)$ 共役類全体を走る。そして、

$$\iota(\gamma) = \begin{cases} 1 & \textit{if } -\gamma \notin \{\gamma\}_{G(F)} \\ 2 & \textit{if } -\gamma \in \{\gamma\}_{G(F)} \end{cases}$$

とする。

Proof. $(\pi, \mathcal{V}_\pi)$ を $G(\mathbb{A})^1$ のユニタリー表現とする。有界作用素 $\pi(f) : \mathcal{V}_\pi \to \mathcal{V}_\pi$ を

$$\pi(f) = \int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\,\pi(g)\,\mathrm{d}^1 g$$

で定義する。π を既約とし、その中心指標を ω_π とする。

$$\pi(f) = \int_{\tilde{G}(\mathbb{A})}\int_{Z(\mathbb{A})} f_1(zg)\,\pi(zg)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tilde{g} = \int_{\tilde{G}(\mathbb{A})} f_{\omega_\pi}(g)\,\pi(g)\,\mathrm{d}\tilde{g}$$

が成り立つ。さて、定理 93 により、$m(\pi)$ を $\mathcal{L}_{\mathrm{cus}} \oplus \mathcal{L}_{\mathrm{res}}$ における π の重複度とすると、

$$\sum_{\pi\in\hat{G}(\mathbb{A})} m(\pi)\,\mathrm{tr}\pi(f) = \mathrm{vol}_G \sum_{\zeta\in Z(F)} f(\zeta) + \sum_{\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}} J_{\mathfrak{o}}(f)$$

が成り立つ。もちろん、右辺の $\mathfrak{o}$ の和は楕円のみ走る。$\mathcal{U}$ を $Z_\infty^+ Z(F)\backslash Z(\mathbb{A})$ の一つの基本領域として固定する。そして、$z = (z_v) \in \mathcal{U}$ に対して $f_{v,z}(g_v) = f_v(z_v g_v)$ と置く。これら $f_{v,z}$ より仮定 84 を満たすテスト関数 f_z が得られる。もちろん、$f_z(g) = f(zg)$ となる。この f_z と f を置き換えると、次の式を得る。

$$\sum_{\pi\in\hat{G}(\mathbb{A})} m(\pi)\,\mathrm{tr}\pi(f_z) = \mathrm{vol}_G \sum_{\zeta\in Z(F)} f_z(\zeta) + \sum_{\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}} J_{\mathfrak{o}}(f_z). \tag{7.1}$$

この (7.1) に $\omega(z)$ をかけて $z \in \mathcal{U}$ について積分する。その左辺は

$$\begin{aligned}&\int_{z\in\mathcal{U}} \omega(z)\{\sum_\pi m(\pi)\,\mathrm{tr}\pi(f_z)\}\,\mathrm{d}z = \int_{z\in\mathcal{U}} \omega(z)\sum_\pi m(\pi)\,\mathrm{tr}\left(\int_{G(\mathbb{A})^1} f(zg)\,\pi(g)\,\mathrm{d}^1 g\right)\mathrm{d}z\\ &= \sum_\pi m(\pi)\mathrm{tr}\left(\int_{z\in\mathcal{U}} \omega(z)\int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\pi(z^{-1}g)\,\mathrm{d}^1 g\,\mathrm{d}z\right)\\ &= \sum_\pi m(\pi)\mathrm{tr}\left(\int_{z\in\mathcal{U}} \omega(z)\omega_\pi(z^{-1})\mathrm{d}z\int_{G(\mathbb{A})^1} f(g)\pi(g)\,\mathrm{d}^1 g\right)\\ &= \mathrm{vol}(\mathcal{U})\sum_{\pi,\,\omega_\pi=\omega} m(\pi)\,\mathrm{tr}\pi(f) = \mathrm{vol}(\mathcal{U})\,\{\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega) + \mathrm{tr}R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega)\}\end{aligned}$$

となる。

次に (7.1) に $\omega(z)$ をかけて $z \in \mathcal{U}$ について積分したものの右辺について考える。第一項は

$$\int_{z\in\mathcal{U}} \omega(z)\,\{\sum_{\zeta\in Z(F)} f(z\zeta)\}\,\mathrm{d}z = \int_{z\in\mathcal{U}}\sum_{\zeta\in Z(F)}\int_{a\in Z_\infty^+} \omega(a\zeta z)\,f_1(a\zeta z)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}z = f_\omega(I_2)$$

より明らか。第二項について考えよう。まず次の注意を与える。楕円元 γ の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ に対して、$z\in Z(F)$ を

$$z\cdot\{\gamma\}_{G(F)}=\{z\gamma\}_{G(F)}$$

と作用させる。これは楕円元からなる $\mathcal{O}$-同値類全体の集合 $\mathcal{O}_{\mathrm{ell}}$ への $Z(F)$ の作用を定義する。この作用での $\{\gamma\}_{G(F)}$ の固定部分群を $Z(F)_{\{\gamma\}}$ と書くと、

$$Z(F)_{\{\gamma\}}=\{z\in Z(F)\,|\,z\gamma \text{ と } \gamma \text{ は } G(F) \text{ 共役}\}$$

となる。$z\gamma$ と γ の行列式を比較すれば、$Z(F)_{\{\gamma\}}\subset\{I_2,-I_2\}$ で高々 2 元集合であり、$Z(F)_{\{\gamma\}}$ の位数は上で定めた $\iota(\gamma)$ と一致する。これを踏まえた上で、右辺の第二項は次の様に計算される。

$$\begin{aligned}
&\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\Big\{\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\mathrm{ell}}}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}\Big\}\,\mathrm{d}z\\
&=\int_{z\in\mathcal{U}}\omega(z)\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\mathrm{ell}}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\sum_{\zeta\in Z(F)/Z(F)_{\{\gamma\}}}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f(zg^{-1}\zeta\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}\,\mathrm{d}z\\
&=\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\mathrm{ell}}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}\int_{Z(\mathbb{A})/Z(F)_{\{\gamma\}}}\omega(z)f_1(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{g}\\
&=\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\mathrm{ell}}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\,\iota(\gamma)^{-1}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}\int_{Z(\mathbb{A})}\omega(z)f_1(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\dot{g}\\
&=\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\mathrm{ell}}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\,\iota(\gamma)^{-1}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f_\omega(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}.
\end{aligned}$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}(\mathcal{U})\,\{\mathrm{tr}R_{\mathrm{cus},\omega}(f_\omega)+\mathrm{tr}R_{\mathrm{res},\omega}(f_\omega)\}\\
&=\mathrm{vol}_G\,f_\omega(I_2)+\sum_{\{\gamma\}_{G(F)}\in\mathcal{O}_{\mathrm{ell}}/Z(F)}\mathrm{vol}(G(F)_\gamma\backslash G(\mathbb{A})^1_\gamma)\,\iota(\gamma)^{-1}\int_{G(\mathbb{A})_\gamma\backslash G(\mathbb{A})}f_\omega(zg^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}
\end{aligned}$$

を得る。したがって、後は両辺を $\mathrm{vol}(\mathcal{U})$ で割れば、求める公式が得られる。 □

7.2. **ヘッケ作用素の跡についての明示的公式.** このセクションでは、正則カスプ形式の空間上に作用するヘッケ作用素の跡についての明示的公式について説明する。

7.2.1. 不変跡公式. 実素点の表現が離散系列表現であるようなカスピダルデータ $\chi=(G,\pi)$ の情報を跡公式から引き出すためには、表現の指標が不変超関数であることに注目する必要がある。テスト関数 $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ と $g\in G(\mathbb{A})$ に対して関数 f^g を $f^g(h)=f(ghg^{-1})$ で定義する。このとき、$G(\mathbb{A})$ のユニタリ表現 π のトレースは $\mathrm{tr}\pi(f^g)=\mathrm{tr}\pi(f)$, ${}^\forall g\in G(\mathbb{A})$ という $G(\mathbb{A})$-不変な性質を持つ。しかし、一般には $J_{\mathfrak{o}}(f^g)=J_{\mathfrak{o}}(f)$ と $J_\chi(f^g)=J_\chi(f)$ は成り立たない。そのため、各項が $G(\mathbb{A})$-不変な性質を持つように跡公式を変形しよう。

説明の簡略化のため、**このセクションでは、これよりテスト関数 f が仮定 83 を満たすと仮定する。**

楕円元 $\gamma\in G(F)$ による $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ とカスピダルデータ $\chi=(G,\pi)\in\mathfrak{X}^G$ について

$$I_{\mathfrak{o}}(f)=J_o(f)\,,\quad I_\chi(f)=J_\chi(f)$$

で $I_{\mathfrak{o}}(f)$ と $I_\chi(f)$ を定義する。

次に双曲元 $\gamma\in G(F)$ による $\mathcal{O}$ 同値類 $\mathfrak{o}=\{\gamma\}_{G(F)}$ について考える。$\widehat{M(\mathbb{A})}$ を $M(\mathbb{A})$ のポントリャーギン双対群とし、$\widehat{M(\mathbb{A})^1}$ を $M(\mathbb{A})^1$ のポントリャーギン双対群とする。$\mathrm{d}\mu$ を $\mathfrak{X}_v^M$ 上のハール測度 $\mathrm{d}\mu_v$ の積測度によって定まる $\widehat{M(\mathbb{A})}$ 上のハール測度とする。$(\mathbb{R}^\times)^0\times(\mathbb{R}^\times)^0$ のポントリャーギン双対群上のハール測度を指標 $(a,b)\mapsto(a^{2\pi ix},b^{2\pi iy})$ に対して $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ で与える。$\mathrm{d}^1\mu$ をそのハール測度と $\mathrm{d}\mu$ の商測度によって定まる $\widehat{M(\mathbb{A})^1}$ 上のハール測度とする。$m\in M(\mathbb{A})^1$ について

$$\phi_M^\vee(f;m)=\int_{\mu\in\widehat{M(\mathbb{A})^1}}\int_{s\in\mathbb{R}}\mathrm{tr}(R(\mu,is)^{-1}R'(\mu,is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mathrm{d}s\,\mu(m)^{-1}\,\mathrm{d}^1\mu$$

と定める。そして、

$$I_{\mathfrak{o}}(f)=J_{\mathfrak{o}}(f)+\frac{1}{4\pi}\mathrm{vol}_M\sum_{\delta\in M(F)\cap\mathfrak{o}}\phi_M^\vee(f;\delta)$$

と $I_{\mathfrak{o}}(f)$ を定義する。

中心元 $z\in Z(F)$ による $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}=\{z\}\cup\{z\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\}$ については、

$$I_{\mathfrak{o}}(f)=J_o(f)+\frac{1}{4\pi}\mathrm{vol}_M\,\phi_M^\vee(f;z)$$

と $I_{\mathfrak{o}}(f)$ を定義する。

カスピダルデータ $(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu\neq\check{\mu}$ については、

$$I_\chi(f)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{\xi=\mu\text{ or }\check{\mu}}\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\xi,is)}{m(\xi,is)}\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\xi})\,\mathrm{d}s$$

と $I_\chi(f)$ を定義する。

カスピダルデータ $(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$, $\mu=(\mu_1,\mu_1)$ については、

$$\begin{aligned}I_\chi(f)=&-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{m'(\mu,is)}{m(\mu,is)}\mathrm{tr}(\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mathrm{d}s+\frac{1}{4}m(\mu,0)\,\mathrm{tr}(R(\mu,0)\pi_0(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\\&+\int_{G(\mathbb{A})^1}f(g)\,\mu_1(\det g)\,\mathrm{d}^1g\end{aligned}$$

と $I_\chi(f)$ を定義する。以上で、$I_{\mathfrak{o}}(f)$ と $I_\chi(f)$ の定義が出来た。次の定理の最初の等式が不変跡公式と呼ばれている公式である。

定理 95. テスト関数 f は仮定 *83* を満たすとする。このとき、等式

(7.2)
$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}I_{\mathfrak{o}}(f)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G}I_\chi(f)$$

が成り立つ。そして、任意の $g\in G(\mathbb{A})$ について

(7.3)
$$I_{\mathfrak{o}}(f^g)=I_{\mathfrak{o}}(f)\,,\quad I_\chi(f^g)=I_\chi(f)$$

が成り立つ。

Proof. $M(F)$ に関する $\phi_M^\vee(f)$ のポアソン和公式を示せば $I_{\mathfrak{o}}(f)$ と $I_\chi(F)$ の定義と定理 82 より等式 (7.2) が従うので、$\phi_M^\vee(f)$ が $C_c^\infty(M(\mathbb{A})^1)$ に属することを証明しよう。命題 87 と 89 の周辺での議論を思い出しながら関数 f_t を使うと、$m\in M(\mathbb{A})^1$ について

$$\phi_M^\vee(f;m)=\int_{\widehat{M(\mathbb{A})^1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(R(\mu,is)^{-1}R'(\mu,is)\pi_{is}(f_t)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mu(m)^{-1}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^1\mu$$

が成り立ち、さらに $\mu_v=(\mu_{1,v},\mu_{2,v})$ に対して

$$\mu_{s,t,v}=(\mu_{1,v}\,|\;|^{is/2}\,|\;|^{\pi it}\,,\,\mu_{1,v}\,|\;|^{-is/2}\,|\;|^{\pi it})$$

おくと, f_v が $\mathbf{K}_v$ の特性関数でないような素点の有限集合 S について

$$\begin{aligned}(7.4)\qquad \frac{1}{4\pi}\phi_M^\vee(f;m)=&\frac{1}{4\pi}\int_{\widehat{M(\mathbb{A})^1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Big\{\sum_{v\in S}\mathrm{tr}(R(\mu_{s,t,v},0)^{-1}R'(\mu_{s,t,v},0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_{s,t,v}}})\\ &\times\prod_{v'\neq v}\mathrm{tr}(\pi_{0,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\mu_{s,t,v'}}})\Big\}\,\mu(m)^{-1}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^1\mu\\ =&\int_{\widehat{M(\mathbb{A})}}\Big\{\sum_{v\in S}\mathrm{tr}(R(\mu_v,0)^{-1}R'(\mu_v,0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\mu_v(m)^{-1}\\ &\times\prod_{v'\neq v}\mathrm{tr}(\pi_{0,v'}(f_{v'})|_{\mathbf{H}_{\mu_{v'}}})\,\mu_{v'}(m)^{-1}\Big\}\mathrm{d}\mu\\ =&\sum_{v\in S}\int_{\mathfrak{X}_v^M}\mathrm{tr}(R(\mu_v,0)^{-1}R'(\mu_v,0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mu_v(m)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_v\,\prod_{v'\neq v}f_{v'}^P(m)\end{aligned}$$

を得る。ここでフーリエ逆変換を使ったことに注意する。f_v^P は $C_c^\infty(M(F_v))$ に属し、ほとんどすべての素点において $M(\mathfrak{O}_v)$ の特性関数となっている。また

$$\int_{\mathfrak{X}_v^M}\mathrm{tr}(R(\mu_v,0)^{-1}R'(\mu_v,0)\pi_{0,v}(f_v)|_{\mathbf{H}_{\mu_v}})\,\mu_v(m)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_v$$

は $m\in M(F_v)$ 上の関数として明らかに smooth である。さらに固定した素点 v について C_v を $\prod_{v'\neq v}F_{v'}^\times$ の任意のコンパクト部分集合とすると、共通部分 $\mathbb{A}^1\cap(F_v^\times\times C_v)$ は $\mathbb{A}^1$ におけるコンパクト部分集合になる。その結果、$\phi_M^\vee(f)$ は $C_c^\infty(M(\mathbb{A})^1)$ に属することが分かった。よって $\mathbb{A}^1$ の跡公式 (2.2) より

$$\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\sum_{m\in M(F)}\phi_M^\vee(f;m)=\sum_{\mu\in\mathfrak{X}^M}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(R(\mu,is)^{-1}R'(\mu,is)\pi_{is}(f)|_{\mathbf{H}_\mu})\,\mathrm{d}s$$

が成り立つ。これから等式 (7.2) が従う。

次に等式 (7.3) を証明しよう。$I_\chi(f^g)=I_\chi(f)$ は定義より明らか。$\mathfrak{o}$ の代表元が楕円元である場合も、定義より $I_\mathfrak{o}(f^g)=I_\mathfrak{o}(f)$ は明らか。そこで、$\mathfrak{o}$ の代表元は双曲元もしくはユニポテント元とする。そして、$I_\mathfrak{o}(f^g)=I_\mathfrak{o}(f)$ を示そう。$g\in G(\mathbb{A})$ について

$$f^{P,g}(m)=\delta_P(m)^{1/2}\int_{\mathbf{K}}\int_{N(\mathbb{A})}f(k^{-1}mnk)\,\{-H(kg)\}\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k\,,\quad m\in M(\mathbb{A})$$

と $C_c^\infty(M(\mathbb{A}))$ に属する関数 $f^{P,g}$ を定義する。$J_\mathfrak{o}^T(f)$ の定義と変数変換より、

$$J_\mathfrak{o}^T(f^g)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}\big\{K_{G,\mathfrak{o}}(h,h)-\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)}K_{P,\mathfrak{o}}(\delta h,\delta h)\,\widehat{\tau}_P(H(\delta hg)-T)\big\}\,\mathrm{d}^1h$$

を得る。そして、これから

$$\begin{aligned}(7.5)\qquad J_\mathfrak{o}^T(f^g)-J_\mathfrak{o}^T(f)=&\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1}K_{P,\mathfrak{o}}(h,h)\,\{-\widehat{\tau}_P(H(hg)-T)+\widehat{\tau}_P(H(h)-T)\}\,\mathrm{d}^1h\\ =&\mathrm{vol}_M\sum_{\gamma\in M(F)\cap\mathfrak{o}}f^{P,g}(\gamma)\end{aligned}$$

が得られる。同様にして $\chi=(P,[\mu])\in\mathfrak{X}^G$ に対して

$$(7.6)\qquad \begin{aligned} J^T_\chi(f^g)-J^T_\chi(f)=&\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} K_{P,\chi}(h,h)\left\{-\widehat{\tau}_P(H(hg)-T)+\widehat{\tau}_P(H(h)-T)\right\}\mathrm{d}^1h\\ =&\frac{1}{4\pi}\sum_{\xi\in[\mu]}\int_{M(\mathbb{A})^1} f^{P,g}(m)\,\xi(m)\,\mathrm{d}^1m \end{aligned}$$

を得る。等式 (7.6) と $M(\mathbb{A})^1$ 上のフーリエ逆変換と $\phi^\vee_M(f)$ の定義と命題 89 と 90 より、

$$\frac{\mathrm{vol}_M}{4\pi}\left\{\phi^\vee_M(f^g;m)-\phi^\vee_M(f;m)\right\}=-\mathrm{vol}_M\sum_{\gamma\in M(F)\cap\mathfrak{o}} f^{P,g}(\gamma)$$

が成り立つ。したがって、等式 (7.5) とこの $\phi^\vee_M(f)$ の等式から $I_\mathfrak{o}(f^g)=I_\mathfrak{o}(f)$ が従う。よって等式 (7.3) が示せた。 □

7.2.2. 離散系列表現と明示的公式. $F=\mathbb{Q}$ の場合、正則カスプ形式の空間上に作用するヘッケ作用素の跡は π の実素点の表現が離散系列表現である $\chi=(G,\pi)\in\mathfrak{X}^G$ に関する $I_\chi(f)$ の和と等しい。F が総実体の場合にも類似の公式が不変跡公式を用いて得られる。しかし、GL(2) の跡公式だと、通常考えられるカスプ形式の複数の空間上の跡の和になってしまうため、面白い公式とは思えない。そこで、記述の簡略化のため、公式については $F=\mathbb{Q}$ の場合に限定して説明する。**これ以降、$F=\mathbb{Q}$ を仮定する。** $F_\infty=\mathbb{R}$ となることに注意する。以下、∞ は実素点を意味するものとする。

まずは $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 上のハール測度を定めておく。$M'(\mathbb{R})=M(\mathbb{R})\cap\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathbf{K}'_\infty=\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ と置く。$\mathbf{K}'_\infty$ 上のハール測度を $\mathrm{d}k'$ とし、$\int_{\mathbf{K}'_\infty}\mathrm{d}k'=1$ と正規化する。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}g'$ を

$$\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\phi(g')\mathrm{d}g'=2\int_{\mathbb{R}^\times}\int_{N(\mathbb{R})}\int_{\mathbf{K}'_\infty}\phi(\begin{pmatrix}x&0\\0&x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}k')\,\mathrm{d}^\times x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}k'\,,\ \phi\in C_0^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$$

によって定める。このように定めると、$f_\infty\in C_0^\infty(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}))$ に対して、

$$\int_{G(\mathbb{R})}f_\infty(g_\infty)\mathrm{d}g_\infty=\int_{Z_\infty^+}\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}f_\infty(zg')\,\mathrm{d}g'\,\mathrm{d}^\times z+\int_{Z_\infty^+}\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}f_\infty(z\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}g')\,\mathrm{d}g'\,\mathrm{d}^\times z$$

が成り立つことに注意しよう。

$G(\mathbb{R})^1=G(\mathbb{R})\cap G(\mathbb{A})^1$ と置く。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現 D_k^+ と D_k^- を森山 [33] と同様に定める。そして、$G(\mathbb{R})^1$ の離散系列表現 σ_k, $(k\in\mathbb{Z},\ k>1)$ を、その $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ への制限 $\sigma_k|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ が $\sigma_k|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}\cong D_k^+\oplus D_k^-$ を満たすものとして定める。$A_G(\mathbb{R})^0$ についての σ_k の作用は自明だと思うと、σ_k は $G(\mathbb{R})$ 上の表現でもある。次に $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現に対する擬係数を使って必要なテスト関数を導入しよう。擬係数と呼ばれる $C_c^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ の元 ψ_k^+ は次の性質を満たすことが知られている。

(i) $\mathrm{tr}\,D_l^+(\psi_k^+)=\begin{cases}1 & \text{if } l=k\,,\\ 0 & \text{if } l\neq k\end{cases}$ が成り立つ。

(ii) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の自明な表現 $\mathrm{triv}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ について、$\mathrm{tr}\,\mathrm{triv}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}(\psi_k^+)=\begin{cases}-1 & \text{if } k=2\,,\\ 0 & \text{if } k>0\end{cases}$ が成り立つ。

(iii) D_k^+ でも $\mathrm{triv}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ でもない $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の任意のユニタリ表現 π に対して、$\mathrm{tr}\,\pi(\psi_k^+)=0$ が成り立つ。

擬係数に関しては織田 [34] を参照されたい。関数 $r_\infty \in C_c^\infty((\mathbb{R}^\times)^0)$ を一つ取って、$g_\infty \in G(\mathbb{R})$ について

$$f_{\infty,k}(g_\infty) = \begin{cases} r_\infty(|\det g_\infty|^{1/2})\,\psi_k^+(|\det g_\infty|^{-1/2}\,g_\infty) & \text{if} \quad \det g_\infty > 0\,, \\ 0 & \text{if} \quad \det g_\infty < 0 \end{cases}$$

とおいて、関数 $f_{\infty,k} \in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ を定める。

補題 96. 関数 $f_{\infty,k} \in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ は次の性質を満たす。

(1) $f_{\infty,k}$ はカスピダルである。

(2) $\mathrm{tr}\,\sigma_l(f_{\infty,k}) = \begin{cases} 1 & \textit{if } l = k\,, \\ 0 & \textit{if } l \neq k \end{cases}$ が成り立つ。

(3) $G(\mathbb{R})^1$ の自明な表現 $\mathrm{triv}_{G(\mathbb{R})^1}$ について、$\mathrm{tr}\,\mathrm{triv}_{G(\mathbb{R})^1}(f_{\infty,k}) = \begin{cases} -1 & \textit{if } k = 2\,, \\ 0 & \textit{if } k > 0 \end{cases}$ が成り立つ。

(4) 離散系列表現でも自明な表現でもない $G(\mathbb{R})^1$ の任意のユニタリ表現 π_∞ に対して、$\mathrm{tr}\,\pi_\infty(f_{\infty,k}) = 0$ が成り立つ。

Proof. 性質 (i)(ii)(iii) より (2)(3)(4) が従う。カスピダルの定義は誘導表現の指標が消えることなので (1) は (2)(3)(4) より従う。 □

重さ k の正則カスプ形式の空間上のヘッケ作用素との関係を考えよう。自然数 N を一つ固定する。素数 p_k と自然数 e_k で、$N = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_l^{e_l}$ と素因数分解を与える。有限素点 $v = p_k$ に対して、

$$K_{N,v} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Z}_v) \;\middle|\; c \in v^{e_k}\mathbb{Z}_v \right\}$$

とする。有限素点 $v \nmid N$ に関しては、$K_{N,v} = G(\mathbb{Z}_v)$ とする。そして、$K_N = \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} K_{N,v}$ と置く。$G(\mathbb{R})^+ = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ とする。こうすると、K_N に対応する $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の離散群 $\Gamma_0(N)$ が等式

$$\Gamma_0(N) = G(\mathbb{Q}) \cap (G(\mathbb{R})^+\,K_N)$$

によって定められる。以下、

$$\Gamma = \Gamma_0(N)$$

として話を進めていく。[33] と同様に $S_k(\Gamma)$ を Γ に関する重さ k の正則カスプ形式の空間とする。そして、元 $\alpha \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{Z})$ を任意に一つ固定し、$n = \det\alpha$ と置く。自然数 n は $n > 0$ と $(N, n) = 1$ を満たすとする。$S_k(\Gamma)$ 上には両側剰余類 $\Gamma\alpha\Gamma$ により定められるヘッケ作用素 $[\Gamma\alpha\Gamma]$ が作用する。ヘッケ作用素の定義についても [33] を参照されたい。

仮定 97. 各有限素点 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について、f_v を

$$f_v(g_v) = \mathrm{vol}(K_{N,v})^{-1} \times \begin{cases} 1 & \textit{if } g_v \in K_{N,v}\alpha K_{N,v}\,, \\ 0 & \textit{if } g_v \notin K_{N,v}\alpha K_{N,v} \end{cases} \tag{7.7}$$

と定める。そして、$f_\infty = f_{\infty,k}$ かつ $r_\infty(n^{1/2}) = 1$ とし、k は偶数と仮定する。

もし k が奇数ならば $S_k(\Gamma) = \{0\}$ になることに気をつけよう。これら条件の下で次の補題が従う。

補題 98. 仮定 *97*を仮定する。このとき、カスピダルデータ $\chi = (P, [\mu]) \in \mathfrak{X}^G$, $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ について、$k > 2$ のとき $I_\chi(f) = 0$ であり、$k = 2$ のとき

$$I_\chi(f) = \begin{cases} -\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} \int_{G(\mathbb{Q}_v)} f_v(g_v)\,\mu_{1,v}(\det g_v)\,\mathrm{d}g_v & \textit{if } \mu_1 = \mu_2\,, \\ 0 & \textit{if } \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. 命題 89 と 90 と補題 96 より、この補題が従う。シューアの補題より $R_v(\mu_v,0)$ は $\mathbf{H}_{\mu_v}$ 上に定数倍で作用することと、$\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v(g_v)\neq 0$ ならば $\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}}|\det g_v| = n^{-1}$ に注意する。そして、$\mu=(\mu_v)\in\mathfrak{X}^M$ について

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_{G(\mathbb{R})} f_\infty(g_\infty)\,\mu_\infty(\det g_\infty)\,e^{\pi it\log|\det g_\infty|}\,\mathrm{d}g_\infty\,e^{-\pi it\log n}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{G(\mathbb{R})^1} f_\infty(g_\infty)\mathrm{d}g_\infty\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty r_\infty(a)\,\mu_\infty(a^2)\,e^{2\pi it\log a}\,\mathrm{d}^\times a\,e^{-\pi it\log n}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{G(\mathbb{R})^1} f_\infty(g_\infty)\mathrm{d}g_\infty\times\mu_\infty(n)
\end{aligned}$$

かつ $\mu_\infty^2=1$ であることに注意すれば明らか。 □

命題 99. 仮定 *97*を仮定する。このとき、等式

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} I_\chi(f)=\mathrm{tr}([\Gamma\alpha\Gamma]|_{S_k(\Gamma)})\times n^{-\frac{k}{2}+1}-\begin{cases}0 & \textit{if}\ \ k>2\,,\\ \displaystyle\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}\,,\,v|n}\mathrm{vol}(\mathbf{K}_v\alpha\mathbf{K}_v) & \textit{if}\ \ k=2\end{cases}$$

が成り立つ。特に $\alpha=I_2$ のとき、

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}^G} I_\chi(f)=\dim_{\mathbb{C}} S_k(\Gamma)-\begin{cases}0 & \textit{if}\ \ k>2\,,\\ 1 & \textit{if}\ \ k=2\end{cases}$$

となる。

Proof. 任意の有限素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ について $K_{N,v}\cap Z(\mathbb{Q}_v)=Z(\mathbb{Z}_v)$ かつ $\det K_{N,v}=\mathbb{Z}_v^\times$ になることと、

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Gamma\alpha\Gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\Gamma\alpha\Gamma$$

に注意すれば、補題 98 と [33] の内容より、この命題が得られる。 □

この命題により、スペクトルサイドと正則カスプ形式の空間上のヘッケ作用素の跡との関係が明らかになった。

これより幾何サイドを計算可能な形にもっていこう。$m=\begin{pmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{pmatrix}\in M(\mathbb{R})-Z(\mathbb{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
I_M(m,f_\infty)=&\delta_P(m)\,|1-m_1^{-1}m_2|\int_{\mathbf{K}_\infty}\int_{N(\mathbb{R})} f_\infty(k^{-1}n^{-1}mnk)\,\log(1+x^2)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k\\
&+2\int_{\mathfrak{X}_\infty^M}\mathrm{tr}(R(\mu_\infty,0)^{-1}R'(\mu_\infty,0)\pi_{0,\infty}(f_\infty)|_{\mathbf{H}_{\mu_\infty}})\,\mu_\infty(m)^{-1}\mathrm{d}\mu_\infty
\end{aligned}$$

と定義する。ただし、$n=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}$ と置いた。そして、$z\in Z(\mathbb{R})$ に対して、

$$\begin{aligned}
I_M(z,f_\infty)=&\int_{\mathbf{K}_\infty}\int_{N(\mathbb{R})} f_\infty(k^{-1}znk)\,(2\,\log|x|)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k\\
&+2\int_{\mathfrak{X}_\infty^M}\mathrm{tr}(R(\mu_\infty,0)^{-1}R'(\mu_\infty,0)\pi_{0,\infty}(f_\infty)|_{\mathbf{H}_{\mu_\infty}})\,\mu_\infty(z)^{-1}\mathrm{d}\mu_\infty
\end{aligned}$$

と定義する。

補題 100. $f_\infty = f_{\infty,k}$ とする。元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ を双曲元として、その $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})}$ について

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}_M \sum_{\delta \in M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} I_M(\delta, f_\infty) \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v^P(\delta)$$

が成り立つ。また $z \in Z(\mathbb{Q})$ について、その $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{z\} \cup \{z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{G(\mathbb{Q})}$ について

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \mathrm{vol}_G\, I_G(z, f_\infty) \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v(z) + \frac{1}{2}\mathrm{vol}_M\, I_M(z, f_\infty) \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v^P(z)$$

が成り立つ。ただし、$I_G(z, f_\infty) = f_\infty(z)$ と置いた。

Proof. 命題 85 と 86 と等式 (7.4) と補題 91 と 92 と補題 96 の (1) を用いれば、すぐに得られる。 □

任意の $g_\infty \in G(\mathbb{R})$ について $f_\infty^{g_\infty}(h) = f_\infty(g_\infty h g_\infty^{-1})$ とすると、 $I_M(m, f_\infty^{g_\infty}) = I_M(m, f_\infty)$ が成り立つ。つまり $G(\mathbb{R})$-不変であることに注意する。

元 $\gamma \in G(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$-楕円であるとは、ある $|\det(\gamma)|^{1/2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \pi\mathbb{Z}$ と γ が $G(\mathbb{R})$-共役であることを意味する。元 $\gamma \in G(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$-双曲であるとは、γ の固有値が二つの異なる実数からなることを言う。$\mathbb{Q}$-楕円元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ は、$\mathbb{R}$-楕円もしくは $\mathbb{R}$-双曲である。$\mathbb{R}$-楕円元 γ に対して

$$I_G(\gamma, f_\infty) = \int_{G(\mathbb{R})^1} f_\infty(g_\infty^{-1}\gamma\, g_\infty)\, \mathrm{d}^1 g_\infty$$

と定義する。$\mathbb{R}$-双曲元 $\gamma \in M(\mathbb{R})$ に対して

$$I_G(\gamma, f_\infty) = \int_{\mathbf{K}_\infty}\int_{N(\mathbb{R})} f(k_\infty^{-1} n_\infty^{-1} \gamma n_\infty k_\infty)\, \mathrm{d}n_\infty\, \mathrm{d}k_\infty$$

$\mathbb{R}$-双曲元 γ が $\gamma \notin M(\mathbb{R})$ である場合は、$G(\mathbb{R})$ 共役により $g_\infty^{-1}\gamma g \in M(\mathbb{R})$, $g_\infty \in G(\mathbb{R})$ として、$I_G(\gamma, f_\infty) = I_G(g_\infty^{-1}\gamma g_\infty,\, f_\infty^{g_\infty})$ により $I_G(\gamma, f_\infty)$ を定義する。元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ に対して、$\{\gamma\}_\Gamma$ を γ の Γ-共役類とする。つまり、$\{\gamma\}_\Gamma = \{\delta^{-1}\gamma\delta \,|\, \delta \in \Gamma\}$ となる。そして、$\Gamma_\gamma = \{h \in \Gamma \,|\, h\gamma = \gamma h\}$ と γ の中心化群 Γ_γ を定める。γ が $\mathbb{R}$-楕円ならば Γ_γ は有限群であり、$\sharp(\Gamma_\gamma)$ をその位数とする。γ が $\mathbb{R}$-双曲ならば、$G(\mathbb{R})_\gamma \cong M(\mathbb{R})$ なので、この同型により $G(\mathbb{R})_\gamma$ 上へハール測度を移送する。$\Gamma_1 = G(\mathbb{Q}) \cap (G(\mathbb{R})K_N)$ と置き、$\{\gamma\}_{\Gamma_1}$ は γ の Γ_1-共役類とする。

補題 101. 仮定 *97* を仮定する。$\mathbb{Q}$-楕円元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o} = \{\gamma\}_{G(\mathbb{Q})}$ を考える。$\det\gamma > 0$ を仮定する。もし γ が $\mathbb{R}$-楕円ならば

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\{\delta\}_\Gamma \subset \Gamma\alpha\Gamma\cap\mathfrak{o}} \frac{1}{2\,\sharp(\Gamma_\delta)} I_G(\delta, f_\infty)$$

が成り立つ。そして、もし γ が $\mathbb{R}$-双曲ならば、

$$I_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\{\delta\}_{\Gamma_1} \subset \Gamma\alpha\Gamma\cap\mathfrak{o}} \mathrm{vol}((\Gamma_1)_\delta \backslash G(\mathbb{R})^1_\delta)\, I_G(\delta, f_\infty)$$

が成り立つ。ただし、和は $\Gamma\alpha\Gamma \cap \mathfrak{o}$ に含まれるような Γ-共役類全体を走る。

Proof.

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1 = (\Gamma_1 \backslash G(\mathbb{R})^1)\, K_N$$

が成り立つことに注意する。定義からスタートして

$$\begin{aligned}
I_{\mathfrak{o}}(f) &= \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\delta\in\mathfrak{o}} f(g^{-1}\delta g)\,\mathrm{d}^1 g \\
&= \int_{\Gamma_1\backslash G(\mathbb{R})^1} \int_{K_N} \sum_{\delta\in\mathfrak{o}} f_\infty(g_\infty^{-1}\delta g_\infty) \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} f_v(g_v^{-1}\delta g_v)\,\mathrm{d}^1 g_\infty \prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}} \mathrm{d}g_v \\
&= \int_{\Gamma_1\backslash G(\mathbb{R})^1} \sum_{\delta\in\mathfrak{o}\cap\Gamma_1\alpha\Gamma_1} f_\infty(g_\infty^{-1}\delta g_\infty)\,\mathrm{d}^1 g_\infty = \sum_{\{\delta\}_{\Gamma_1}\subset\mathfrak{o}\cap\Gamma_1\alpha\Gamma_1} \int_{(\Gamma_1)_\delta\backslash G(\mathbb{R})^1} f_\infty(g_\infty^{-1}\delta g_\infty)\,\mathrm{d}^1 g_\infty
\end{aligned}$$

となる。$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と置く。$\Gamma_1 = \Gamma \cup \sigma\Gamma$ が成り立つので、$\{\delta\}_{\Gamma_1} = \{\delta\}_\Gamma \cup \{\sigma\delta\sigma\}_\Gamma$ となる。そして、$\sigma\Gamma\sigma = \Gamma$ であり、$\sigma\Gamma\alpha\Gamma\sigma = \Gamma\alpha\Gamma$ が成り立つので、$\Gamma_1\alpha\Gamma_1 = (\Gamma\alpha\Gamma)\cup(\Gamma\alpha\sigma\Gamma)$ である。$\det(\Gamma\alpha\sigma\Gamma) < 0$ より γ が $\mathbb{R}$-双曲である場合の等式は示された。

γ が $\mathbb{R}$-楕円である場合、$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-共役でないので、$\delta$ と $\sigma^{-1}\delta\sigma$ は Γ-共役に成りえない。そして、$\sigma\Gamma$ の任意の元は Γ_γ に属さない。よって補題の等式が成り立つ。 □

補題 100 と 101 により、幾何サイドの目標の公式を得るために必要なことは $I_M(\gamma, f_{\infty,k})$ と $I_G(\gamma, f_{\infty,k})$ を計算することである。これらはユニタリ表現の指標によって展開されることが知られており、そのフーリエ展開によって計算される。証明に関しては $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の場合への帰結のさせ方のみ説明する。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の軌道積分のフーリエ変換の計算に関しては、[34] を参照されたい。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の重み付き軌道積分のフーリエ変換の計算に関しては、[7] や [19] や Arthur のフーリエ変換に関する論文を参照されたい。

補題 102. $f_\infty = f_{\infty,k}$ とする。正の実数 β を一つ固定する。そして、$r_\infty(\beta) = 1$ とし、k は偶数と仮定する。$m = \beta\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in M(\mathbb{R})$, $\det m > 0$ について、

$$I_M(m, f_\infty) = -\frac{1}{2}\min\{|\lambda|,\,|\lambda|^{-1}\}^{k-1}$$

が成り立つ。中心元 $\beta I_2 \in Z(\mathbb{R})$ について、

$$I_G(\beta I_2, f_\infty) = \frac{1}{8\pi}(k-1)$$

である。$m \in M(\mathbb{R})$, $\det m < 0$ については $I_M(m, f_\infty) = 0$ である。$\mathbb{R}$-楕円元 $\gamma \in G(\mathbb{R})$ について、γ が $\beta\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $G(\mathbb{R})$-共役ならば

$$I_G(\gamma, f_\infty) = -\frac{e^{-i(k-1)\theta} - e^{i(k-1)\theta}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}$$

となる。$\mathbb{R}$-双曲元 $\gamma \in G(\mathbb{R})$ については、$I_G(\gamma, f_\infty) = 0$ である。

Proof. $\widehat{M'(\mathbb{R})}$ を $M'(\mathbb{R})$ のポントリャーギャン双対群とする。そして、$\mathrm{d}\mu'_\infty$ を $\widehat{M'(\mathbb{R})}$ 上のハール測度とする。次の計算では r_∞ への仮定と $\mathbf{K}_\infty = \mathbf{K}'_\infty \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{K}'_\infty$ と $\int_{\mathbf{K}_\infty}\mathrm{d}k = 1$ に気をつける。$m \in M(\mathbb{R})$, $\det m > 0$ とする。$m \notin Z(\mathbb{R})$ の場合、適切に $\mathrm{d}\mu'_\infty$ を正規化すると、

$n=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ について

$$
\begin{aligned}
I_M(m,f_\infty)=&\delta_P(m)\,|1-m_1^{-1}m_2|\int_{\mathbf{K}'_\infty}\int_{N(\mathbb{R})}\psi_\infty^+(k'^{-1}n^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}nk')\,\log(1+x^2)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}k'\\
&+\int_{\widehat{M'(\mathbb{R})}}\mathrm{tr}(R(\mu'_\infty,0)^{-1}R'(\mu'_\infty,0)\pi_{0,\infty}|_{SL(2,\mathbb{R})}(\psi_\infty)|_{\mathbf{H}_{\mu'_\infty}})\,\mu'_\infty(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix})^{-1}\mathrm{d}\mu'_\infty
\end{aligned}
$$

を得る。その結果、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の重み付き軌道積分のフーリエ変換に関する諸結果に帰結される。$m\in Z(\mathbb{R})$ の場合は極限公式から導かれる。他の場合も同様の議論で $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の軌道積分に帰結できる。 □

系 52 より $\mathrm{vol}_G=\pi/3$ なので、もし $z\in\Gamma\alpha\Gamma\cap Z(\mathbb{Q})$ ならば

$$
\mathrm{vol}_G\prod_{v\in\Sigma_v}f_v(z)=\frac{\pi}{3}\,[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma]=\frac{\pi}{3}\,N\prod_{p|N}(1+p^{-1})
$$

となる。ただし、積における p は素数のみ走る。あとは $\mathrm{vol}_M=1$ であることに気をつければ、補題 100 と 101 と 102 を合わせて次の命題を得る。

命題 103. 仮定 *97* を仮定する。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}}I_{\mathfrak{o}}(f)=&\frac{k-1}{24}\,[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma]\,\sharp(\Gamma\alpha\Gamma\cap Z(\mathbb{Q}))\\
&-\sum_{\{\gamma\}_\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma}\frac{1}{2\,\sharp(\Gamma_\gamma)}\frac{e^{-i(k-1)\theta}-e^{i(k-1)\theta}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}} \qquad (7.8)\\
&-\sum_{\gamma\in M(\mathbb{Q})\,,\,\det\gamma>0}\frac{1}{4}\,\min\{|\lambda_\gamma|,\,|\lambda_\gamma|^{-1}\}^{k-1}\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}}f_v^P(\gamma) \qquad (7.9)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ただし、*(7.8)* の和は $\Gamma\alpha\Gamma$ に含まれる固有値 $n^{1/2}e^{i\theta}$, $n^{1/2}e^{-i\theta}$ を持つ楕円元 γ の Γ-共役類全体を走るとする、そして、*(7.9)* における λ_γ は $\gamma=n^{1/2}\begin{pmatrix}\lambda_\gamma & 0\\ 0 & \lambda_\gamma^{-1}\end{pmatrix}$ により定められる。

定理 95 と命題 99, 103 を合わせれば、次の $\mathrm{tr}([\Gamma\alpha\Gamma]|_{S_k(\Gamma)})$ についての明示的公式を得る。

定理 104. N と n を互いに素な正の整数とする。$\Gamma=\Gamma_0(N)$ とし、$\alpha\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{Z})$, $\det\alpha=n$ を任意に一つ取る。k を 2 以上の偶数としたとき、$S_k(\Gamma)$ 上に作用するヘッケ作用素 $[\Gamma\alpha\Gamma]$ の跡 $\mathrm{tr}([\Gamma\alpha\Gamma]|_{S_k(\Gamma)})$ について

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}([\Gamma\alpha\Gamma]|_{S_k(\Gamma)})=&n^{\frac{k}{2}-1}\,\frac{k-1}{24}\,[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma]\,\sharp(\Gamma\alpha\Gamma\cap Z(\mathbb{Q}))\\
&-n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{\{\gamma\}_\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma}\frac{1}{2\,\sharp(\Gamma_\gamma)}\frac{e^{-i(k-1)\theta}-e^{i(k-1)\theta}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}} \qquad (7.10)\\
&-n^{\frac{k}{2}-1}\sum_{\gamma\in M(\mathbb{Q})\,,\,\det\gamma>0}\frac{1}{4}\,\min\{|\lambda_\gamma|,\,|\lambda_\gamma|^{-1}\}^{k-1}\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}}f_v^P(\gamma) \qquad (7.11)\\
&+\begin{cases}0 & \textit{if}\ \ k>2\,,\\ \displaystyle\prod_{v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}\,,\,v|n}\mathrm{vol}(\mathbf{K}_v\alpha\mathbf{K}_v) & \textit{if}\ \ k=2\end{cases}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ただし、*(7.10)* の和は $\Gamma\alpha\Gamma$ に含まれる固有値 $n^{1/2}e^{i\theta}$, $n^{1/2}e^{-i\theta}$ を持つ楕円元 γ の Γ-共役類全体を走るとする、そして、*(7.11)* における λ_γ は $\gamma = n^{1/2}\begin{pmatrix}\lambda_\gamma & 0 \\ 0 & \lambda_\gamma^{-1}\end{pmatrix}$ により定められる。関数 f_v は *(7.7)* において定めた。

最後に定理 104 の等式の項 (7.11) を離散群 Γ の言葉に翻訳しておこう。証明に関しては補題 101 の証明と同じ議論で出来るので割愛する。計算上のメリットはあまりないと思われる。しかし、[20] での二元二次形式の話と関係するし、良く知られた本 [31] では離散群の言葉で記述されているため言及しておきたい。

命題 105. 等式

$$(7.11) = -\, n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\{\gamma\}_\Gamma \subset \Gamma\alpha\Gamma} \frac{1}{2}\frac{|\lambda|^{-k+1}}{|\lambda-\lambda^{-1}|} - n^{\frac{k}{2}-1}\lim_{s\to+0}\frac{s}{8}\sum_{\{\gamma\}_\Gamma \subset \Gamma\alpha\Gamma}\frac{1}{|m(\gamma)|^{s+1}}$$

が成り立つ。ただし、第一項の $\{\gamma\}_\Gamma$ の代表元 γ は $n^{1/2}\begin{pmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$, $|\lambda| > 1$ と $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})$-共役である、第二項の $\{\gamma\}_\Gamma$ の代表元 γ には $^\exists\xi \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})$ が存在して $\xi\gamma\xi^{-1} = n^{1/2}\begin{pmatrix}1 & h(\gamma) \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $h(\gamma) \in \mathbb{Q}^\times$ と $\Gamma_\gamma = \xi^{-1}\{\begin{pmatrix}1 & th \\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}\}\xi$, $h \in \mathbb{Q}^\times$ が成り立つ、そして $m(\gamma) = h(\gamma)/h$ と定める。

定理 104 と命題 105 の公式は明示的だと言っても、まだ計算可能な公式とは言い難い。跡の具体的な数値が計算可能な公式になるためには、離散集合 $\Gamma\alpha\Gamma$ もしくはそれらの和集合の Γ-共役類に関する大域的な値を明らかにする必要がある。計算の続きに関しては [20] もしくは [31] を参照されたい。

References

[1] Arthur, J., *The Selberg trace formula for groups of F-rank one*, Ann. of Math. (2) **100** No.2, 326–385 (1974).

[2] Arthur, J., *A trace formula for reductive groups. I.*, Duke Math. J. **45**, 911–952 (1978).

[3] Arthur, J., *A trace formula for reductive groups. II: Applications of a truncation operator*, Compositio Math. **40**, 87–121 (1980).

[4] Arthur, J., *The invariant trace formula I. Local theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** 323–383 (1988).

[5] Arthur, J., *The invariant trace formula I. Global theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** 501–554 (1988).

[6] Arthur, J., *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula and Shimura varieties, Clay Mathematics Proceedings **4**, 1–263 (2005).

[7] Arthur, J., Herb, A., Sally, J., *The Fourier transform of weighted orbital integrals on* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, The Selberg trace formula and related topics, Proc. AMS-IMS-SIAM Joint Summer Res. Conf., Brunswick/Maine 1984, Contemp. Math. 53, 17-37 (1986).

[8] Borel,. A.,*Automorphic forms on $SL_2(\mathbb{R})$*, Cambridge tactics in Mathematics, Cambridge University Press (1997).

[9] Duflo, P. M., Labesse, J,-P.,*Sur la formle des traces de Selberg*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4 serie, **4**, 193–284 (1971)

[10] Flath, D., *Decomposition of representations into tensor products*, Proceedings of Symp. Pure Math. **33** part 1, 179–183 (1979).

[11] Gelbart, Stephen S., *Automorphic forms on adele grous*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1975).

[12] Gelbart, Stephen S., *Lectures on Arthur Selberg trace formula,* University Lecture Series, Amer. Math. Soc., (1995).

[13] Gelbart, S., Jacquet, H., *Forms of $GL(2)$ from the analytic point of view*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematrics Vol. 33 (1979), part 1, 213–251.

[14] Godement, R., *Introduction à la théorie de Langlands*, Bourbaki Seminar Exposé 321, 115–144 (1967).

[15] Godement,R., Jacquet, H., *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics 260, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972
[16] 権寧魯「セルバーグ跡公式，セルバーグゼータ関数」, 本報告集.
[17] Harish-Chandra, *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Lecture Notes in Mathematics, 62, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg NewYork, 1968.
[18] Harish-Chandra, *Discrete series for semi-simple Lie groups II*, Acta Math. **116** (1966), 1-111.
[19] Hoffmann, W., *The Fourier transforms of weighted orbital integrals on semisimple groups of real rank one*, J. Reine Angew. Math. 489, 53-97 (1997).
[20] 伊吹山知義, 「$SL_2(\mathbb{Z})$ の共役類と跡公式」, 本報告集.
[21] Iwaniec, H., *Spectral methods of automorphic forms* (second edition), Graduate Studies in Mathematics 53, American Mathematical Society Providence, Rhode Islamd (2002).
[22] Jacquet, H., Langlands, L.P.,*Automorphic forms on* $GL(2)$, Lecture Notes in Mathematics, **114**, Springer-Verlag, Berline, Heiderberg, New York (1970).
[23] Knapp, A.W., *Theoretical aspects of the trace formula for* GL(2), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **61**, 355–405 (1997).
[24] Knapp, A.W., *Representation theory of semisimple groups, An over view based on examples*, Princeton University Press, Rrinceton New Jersey, (1986).
[25] 今野拓也, 「GL_2 上の保型形式と標準 L 函数」, (第１６回整数論サマースクール報告集「保型 L 関数」)
[26] Lai, K.F., *On the Tamagawa numbers of reductive algebraic groups*, Comp. Math. **41**, 153–188 (1980).
[27] Langlands, R. P., *Euler products*, Yale University Press (1971).
[28] Langlands, R. P., *On the functional equation satisfied by Eisenstin series*, Lecture Notes in Mathematics, **544**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
[29] Langlands, R. P., *Les débuts d'une formule des traces stables,* Publ. Math. Univ. Paris VII **13**, (1983).
[30] Langlands, R. P., *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Eis Märchen*, in Automorphic Forms, Representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 33, part 2, Amer. Math. Soc., 205–246 (1979).
[31] Miyake, T., *Modular forms*, Translated from the Japanese by Yoshitaka Maeda. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[32] Moeglin, C., Waldspurger, J.-L., *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*, Vol.113 Progress in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.
[33] 森山知則, 「保型形式の空間と HECKE 作用素」, 本報告集.
[34] 織田孝幸, Selberg Trace Formula 入門. http://wakatsuki.w3.kanazawa-u.ac.jp/files/selberg
[35] Ramakrishnan, D., Valenza, R.J., *Fourier analysis on number fields*, Graduate Texts in Mathematics vol. 186, Springer (1998).
[36] Selberg, A. *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with application to Dirichlet series,* J. Indian Math. Soc. **20**, 47–87 (1956).
[37] Tate, J. *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Algebraic Number Theory, Academic Press (1990), 305–347.
[38] 都築 正男 「Eisenstein 級数の定数項（Langlands-Shahidi 理論への導入）」(第１６回整数論サマースクール報告集「保型 L 関数」)
[39] 都築 正男 「Jacquet-Langlands 対応」、本報告集.
[40] Yoshida, K., *Functional analysis*, 6th edition, Springer-Verlag, Berlin Heiderberg New York, 1980
[41] Weil, A., *Basic number theory*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 144, Springer-Verlag New York Heiderberg Berlin, 1974.

Index