GL(3) の跡公式

若槻 聡

このノートの目的は GL(3) のアーサー跡公式の粗い展開と細かい展開を解説することである．アーサー跡公式は一般の $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群で定式化されているので, GL(3) のみを説明するよりも一般論の枠組みで説明した方が全体像が分かりやすい．そこで, 一般論について簡潔に説明した後に, 連結簡約代数群が GL(3) である場合に具体的な例をいくつか与える形で跡公式を説明することにした．一般論に関しては全く証明を与えないが, 具体的に記述するために必要な知識に関しては出来る限り言及した. GL(3) の具体的な例を通じて, 群の階数が上がった場合の難しさや定式化の雰囲気を感じ取ってもらえると嬉しい.

もしアーサー跡公式を本格的に学ぶのであれば, 現在は Arthur の「An introduction to the trace formula」[A1] を読むことがベストだと思う．このノートの内容の一般論の部分は, その [A1] を参考に書かれている．そして, [A1] に書かれている図や例を演習問題だと思うと, このノートの GL(3) に関する解説はそれらの解答例だと思うことができる．このノートがアーサー跡公式の勉強のお役に立てば幸いである.

目 次

1 代数群とルート系について

このセクションでは, $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群に関する放物型部分群や Levi 部分群について説明する．このノートの内容は $\mathbb{Q}$ へのスカラーの制限により任意の代数体上の連結簡約代数群に適用できることに注意する．**有理数体やアデール等の基本的な記号に関しては $F=\mathbb{Q}$ とした場合の [TW] の記号と同様とする．** 代数群の基礎的な事柄に関しては, 例えば [Bor] や [PR] を参照されたい．ただし, このノートでは線型代数群のことを略して代数群と言っている．

1.1 一般の場合

1.1.1 基本的な設定と記号

G を $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群とする．A_G を G の maximal $\mathbb{Q}$-split central torus とし, そして $A_G(\mathbb{R})^0$ を $A_G(\mathbb{R})$ の 1 の連結成分とする．$X(G)_\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義された G から GL(1) への有理準同型の加法群とする．ある $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ について A_G は $\mathrm{GL}(1)^k$ と $\mathbb{Q}$ 上同型となる．このとき, $X(G)_\mathbb{Q}$ は階数 k の自由アーベル群である．そして, k 次元実ベクトル空間 $\mathfrak{a}_G=\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X(G)_\mathbb{Q},\mathbb{R})$ を得る．また $\mathfrak{a}_G^*=X(G)_\mathbb{Q}\otimes\mathbb{R}$ は $\mathfrak{a}_G$ の双対空間となる．以下, $a\in\mathfrak{a}_G$, $a^*\in\mathfrak{a}_G$ について, $\langle a,a^*\rangle=a(a^*)$ と記号を定める．全射 $H_G: G(\mathbb{A})\to\mathfrak{a}_G$ を

$$\langle H_G(x),\chi\rangle=\log|\chi(x)|,\quad x\in G(\mathbb{A}),\ \chi\in X(G)_\mathbb{Q}$$

によって定義する. $G(\mathbb{A})$ の正規部分群 $G(\mathbb{A})^1$ を

$$G(\mathbb{A})^1 = \{x \in G(\mathbb{A}) \mid H_G(x) = 0\}$$

と定める. このとき, $G(\mathbb{A}) \cong G(\mathbb{A})^1 \times A_G(\mathbb{R})^0$ を得る.

M が G の $\mathbb{Q}$ 上の Levi 部分群であるとは, G のある $\mathbb{Q}$ 上の放物型部分群 P について M が P の Levi 部分群になることを言う. M を G の $\mathbb{Q}$ 上の Levi 部分群とする. M は $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群であることに注意する. $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}^G(M)$ を M を含む G の $\mathbb{Q}$ 上の Levi 部分群全体の集合とする. $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}^G(M)$ を M を含む G の $\mathbb{Q}$ 上の放物型部分群全体の集合とする. $P \in \mathcal{F}(M)$ の Levi 分解を $P = M_P N_P$, ($M_P \in \mathcal{L}(M)$, N_P は unipotent radical) として定める. M_P は一意的に定まることに注意する. 最後に $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}^G(M) = \{P \in \mathcal{F}(M) \,|\, M_P = M\}$ とおく. $\mathcal{L}(M)$, $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{P}(M)$ はすべて有限集合である.

G の $\mathbb{Q}$ 上の極小 Levi 部分群 M_0 を固定する. $\mathcal{L} = \mathcal{L}^G = \mathcal{L}(M_0)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^G = \mathcal{F}(M_0)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^G = \mathcal{P}(M_0)$ と置く. 各素点 v に対して $\mathbf{K}_v \subset G(\mathbb{Q}_v)$ を [A6, p.9] で定義された "admissible relative to M_0" と呼ばれる極大コンパクト群の一つとする. そして, $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト群 $\mathbf{K}$ を

$$\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$$

と固定する. この $\mathbf{K}$ も "admissible relative to M_0" と呼ばれる. このとき任意の $P \in \mathcal{P}$ について $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})\mathbf{K}$ が成り立つ. さらに任意の $M \in \mathcal{L}$ についても, $\mathbf{K} \cap M(\mathbb{A})$ は $M(\mathbb{A})$ における "admissible relative to M_0" となる. $P \in \mathcal{F}$ に対して, $A_P = A_{M_P}$, $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$ と置く. 各 $P \in \mathcal{F}$ について, $G(\mathbb{A})$ から $\mathfrak{a}_P$ への全射 H_P を

$$H_P(nmk) = H_{M_P}(m), \quad n \in N_P(\mathbb{A}),\ m \in M_P(\mathbb{A}),\ k \in \mathbf{K}$$

によって定義する.

1.1.2 $\mathfrak{a}_M$ と $\mathfrak{a}_M^*$ の直和分解

$M \in \mathcal{L}$ について, 制限 $X(M)_\mathbb{Q} \to X(A_M)_\mathbb{Q}$ は単射なので, 線型同型

$$\mathfrak{a}_M^* = X(M)_\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R} \to X(A_M)_\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R} = \mathfrak{a}_{A_M}^* \tag{1.1}$$

を得る. 次に M_1, $M_2 \in \mathcal{L}$, $M_1 \subset M_2$ について考える. このとき次のような $\mathbb{Q}$ 上の埋め込みが成り立つ.

$$A_{M_2} \subset A_{M_1} \subset M_1 \subset M_2.$$

制限 $X(M_2)_\mathbb{Q} \to X(M_1)_\mathbb{Q}$ は単射なので, 線型単射 $\mathfrak{a}_{M_2}^* \to \mathfrak{a}_{M_1}^*$ が得られ, この単射から線型全射 $\mathfrak{a}_{M_1} \to \mathfrak{a}_{M_2}$ を得る. また, この線型単射により $\mathfrak{a}_{M_2}^*$ は $\mathfrak{a}_{M_1}^*$ の部分空間となる. 制限 $X(A_{M_1})_\mathbb{Q} \to X(A_{M_2})_\mathbb{Q}$ は全射なので, 全射 $\mathfrak{a}_{A_{M_1}}^* \to \mathfrak{a}_{A_{M_2}}^*$ がその拡張から得られる. よって (1.1) より線型全射 $\mathfrak{a}_{M_1}^* \to \mathfrak{a}_{M_2}^*$ が得られ, この全射から線型単射 $\mathfrak{a}_{M_2} \to \mathfrak{a}_{M_1}$ を

得る．この線型単射により $\mathfrak{a}_{M_2}$ は $\mathfrak{a}_{M_1}$ の部分空間となる．$\mathfrak{a}_{M_1}$ の部分空間 $\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2}$ を上述の線型全射 $\mathfrak{a}_{M_1} \to \mathfrak{a}_{M_2}$ の核として定める．つまり

$$\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2} = \{a_1 \in \mathfrak{a}_{M_1} \mid \langle a_1, a_2^* \rangle = 0,\ {}^\forall a_2^* \in \mathfrak{a}_{M_2}^*\}$$

と定める．定義より $\mathfrak{a}_{M_2} \cap \mathfrak{a}_{M_1}^{M_2} = \{0\}$ と $\mathfrak{a}_{M_1} = \mathfrak{a}_{M_2} + \mathfrak{a}_{M_1}^{M_2}$ が成り立つので, $\mathfrak{a}_{M_1}$ の直和分解

$$\mathfrak{a}_{M_1} = \mathfrak{a}_{M_2} \oplus \mathfrak{a}_{M_1}^{M_2}$$

を得る．さらに,

$$(\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2})^* = \{a_1^* \in \mathfrak{a}_{M_1}^* \mid \langle a_2, a_1^* \rangle = 0,\ {}^\forall a_2 \in \mathfrak{a}_{M_2}\}$$

と $\mathfrak{a}_{M_1}^*$ の部分空間 $(\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2})^*$ を定める．$(\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2})^*$ は $\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2}$ の自然な双対である．同様に $\mathfrak{a}_{M_1}^*$ の直和分解

$$\mathfrak{a}_{M_1}^* = \mathfrak{a}_{M_2}^* \oplus (\mathfrak{a}_{M_1}^{M_2})^*$$

を得る．

$\mathfrak{a}_{M_2}$ と $\mathfrak{a}_{M_2}^*$ についての $\langle\ ,\ \rangle$ は, それぞれ部分空間としての $\mathfrak{a}_{M_1}$ と $\mathfrak{a}_{M_1}^*$ についての $\langle\ ,\ \rangle$ と一致することに注意しよう．線型単射 $\mathfrak{a}_{M_2}^* \to \mathfrak{a}_{M_1}^*$ は $\chi \otimes x \mapsto \chi|_{M_1} \otimes x$, $(\chi \in X(M_2)_{\mathbb{Q}},\ x \in \mathbb{R})$ で与えられる．ς を上で述べた $\mathfrak{a}_{M_1}^* \to \mathfrak{a}_{M_2}^*$ への線型全射とすると, $\varsigma(\sum_l \sigma_l \otimes x_l) = \sum_{l'} \sigma'_{l'} \otimes x'_{l'}$, $(\sigma_l \in X(M_1)_{\mathbb{Q}},\ \sigma'_{l'} \in X(M_2)_{\mathbb{Q}},\ x_l, x'_{l'} \in \mathbb{R})$ は $\sum_l \sigma_l|_{A_{M_2}} \otimes x_l = \sum_{l'} \sigma'_{l'}|_{A_{M_2}} \otimes x'_{l'}$ で定められる．線型単射 $\mathfrak{a}_{M_2} \to \mathfrak{a}_{M_1}$ は $a_2 \mapsto a_2 \circ \varsigma$, $(a_2 \in \mathfrak{a}_{M_2})$ で与えられる．したがって, 任意の $\chi \in X(M_2)_{\mathbb{Q}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathfrak{a}_{M_2}$ について

$$\langle a_2 \circ \varsigma\, ,\, \chi|_{M_1} \otimes x \rangle = a_2(\varsigma(\chi|_{M_1} \otimes x)) = \langle a_2\, ,\, \chi \otimes x \rangle$$

が成り立つので, 上述の注意が正しいことがわかる．

1.1.3 ルート系と標準放物型部分群

放物型部分群とルートについて考えよう．$\mathfrak{g}$ を G のリー代数とし, $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を随伴表現とする．つまり, $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$, $(g \in G,\ X \in \mathfrak{g})$ と作用する．$P \in \mathcal{F}$ とする．P について, $\mathfrak{a}_P^* = \mathfrak{a}_{M_P}^*$, $\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2} = \mathfrak{a}_{M_{P_1}}^{M_{P_2}}$, $(\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})^* = (\mathfrak{a}_{M_{P_1}}^{M_{P_2}})^*$ と置く．$\mathfrak{n}_P$ を N_P のリー代数とする．$\alpha \in X(A_P)_{\mathbb{Q}}$ について, $\mathfrak{n}_P$ の $\mathbb{Q}$ 上定義された部分空間 $\mathfrak{n}_\alpha$ を

$$\mathfrak{n}_\alpha = \{X \in \mathfrak{n}_P \mid \mathrm{Ad}(a)X = \alpha(a)X,\ {}^\forall a \in A_P\}$$

と定める．そして,

$$\Phi_P = \{\alpha \in X(A_P)_{\mathbb{Q}} \mid \alpha \neq 0,\ \mathfrak{n}_\alpha \neq \{0\}\}$$

とする．特に Φ_P は $X(A_P)_{\mathbb{Q}}$ の零でない元の有限集合である．このとき, $\mathfrak{n}_P$ は次の様に分解される．

$$\mathfrak{n}_P = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_P} \mathfrak{n}_\alpha.$$

自然な埋め込み

$$\Phi_P \subset X(A_P)_{\mathbb{Q}} \subset X(A_P)_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R} = \mathfrak{a}_P^*$$

により, Φ_P は $\mathfrak{a}_P^*$ の部分集合となる. また定義より明らかに, 任意の $H \in \mathfrak{a}_G$ について $\alpha(H) = 0$, $(\alpha \in \Phi_P)$ なので, Φ_P は $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ に含まれる. $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ の元 ρ_P を

$$\rho_P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_P} (\dim \mathfrak{n}_\alpha)\, \alpha$$

と定める. 特に $e^{2\rho_P(H_P(x))}$, $(x \in P(\mathbb{A}))$ は P の module となる.

これより, **極小放物型部分群 $P_0 \in \mathcal{P}$ を一つ固定する.** そして, 集合 Φ_{P_0} について考えよう. $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$, $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_{M_0}^*$, $\mathfrak{a}_0^P = \mathfrak{a}_0^{M_P} = \mathfrak{a}_{M_0}^{M_P}$, $(\mathfrak{a}_0^P)^* = (\mathfrak{a}_0^{M_P})^* = (\mathfrak{a}_{M_0}^{M_P})^*$, $\Phi_0 = \Phi_{P_0}$ と置く. $\Phi_0 \cup (-\Phi_0)$ は $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ のルート系になる. 以下, しばらく [Ser, Chapter V] を参考にルート系を簡単に復習する. ベクトル空間 V の部分集合 R が以下の条件を満たすとき, R は V のルート系であると言う.

(1) R は有限であり, V を生成する. そして, 0 を含まない.

(2) 各 $\alpha \in R$ について, R を保存する α についての対称 s_α が存在する.
(注. (1) より s_α は唯一定まる.)

(3) 各 $\alpha, \beta \in R$ について, $s_\alpha(\beta) - \beta$ は α のスカラー倍である.

ただし, 対称 s_α とは, $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ を満たし, かつ, s_α で固定される V の元の集合が V の超平面となる, V の自己同型写像のことを言う. これより, R を V のルート系とする. R の元をルートと呼ぶ. そして, $\alpha \in R$ について H_α を s_α で固定される V の超平面とする. $\alpha \in R$ に対して, s_α は位数 2 であり, H_α は V における $\mathbb{R}\alpha$ の補空間である. そして $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R$ となることも分かる. $V^\vee$ を V の双対空間とする. $\alpha \in R$ のコルート $\alpha^\vee \in V^\vee$ は, $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$ かつ $\alpha^\vee(x) = 0$ $({}^\forall x \in H_\alpha)$ を満たす唯一の元として定められる. よって,

$$s_\alpha(x) = x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha, \quad x \in V$$

が成り立つ. また W の作用で不変な V 上の正値対称双一次形式 $(\ ,\ )$ が存在することが知られている. この $(\ ,\ )$ で V から $V^\vee$ への同型写像が与えられる. この同型で V と $V^\vee$ を同一視したとき,

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}, \quad s_\alpha(x) = x - 2\frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

が成り立つ. $R^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ と置くと, $R^\vee$ は $V^\vee$ のルート系となる. そして,

$$s_{\alpha^\vee}(y) = y - \langle y, \alpha \rangle \alpha^\vee, \quad y \in V^\vee$$

が成り立つ. 特に $\alpha, \beta \in R$, $x \in V$, $y \in V^\vee$ について $\langle s_{\alpha^\vee}(y), s_\alpha(x) \rangle = \langle y, x \rangle$ と $(s_\alpha(\beta))^\vee = s_{\alpha^\vee}(\beta^\vee)$ が成り立つ. R のワイル群 W は s_α, $(\alpha \in R)$ によって生成される群

のことを言う．対応 $s_\alpha \mapsto s_{\alpha^\vee}$ により W は $V^\vee$ にも作用する．次の条件を満たすとき，R の部分集合 Δ は R の基本ルート系であるという．

(1) Δ は V の基底である．

(2) 各 $\beta \in R$ は，$\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} m_\alpha \alpha$ と書くことができる．
ただし，$^\forall\alpha \in \Delta$ について，$m_\alpha \in \mathbb{Z}$ はすべて 0 以上もしくは 0 以下とする．

ルート系 R に対して基本ルート系 Δ は必ず存在する．これより Δ を R の基本ルート系とする．Δ の元を単純ルートと言う．$\beta \in R$ について上の (2) の記述で $\mathfrak{m}_\alpha$ がすべて 0 以上になる場合，β を正ルートと呼ぶ．ここでルート系の復習は終わりにして，もとの Φ_0 の話に戻ろう．$V = (\mathfrak{a}_0^G)^*$, $R = \Phi_0 \cup (-\Phi_0)$ と置くと，R は V のルート系になる．$W_0 = W_0^G$ を R のワイル群とする．Φ_0 のすべての元が正ルートになるような基本ルート系 Δ_0 が一つ定まる．コルートの集合

$$\Delta_0^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0^G \,|\, \alpha \in \Delta_0\}$$

は $R^\vee$ の基本ルート系であり，その元は単純コルートと呼ばれる．次に $\varpi_\alpha \in (\mathfrak{a}_0^G)^*$, $\varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0^G$, $(\alpha \in \Delta_0)$ を $\beta \in \Delta_0$ に対して

$$\langle \beta^\vee, \varpi_\alpha \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta = \alpha\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}, \quad \langle \varpi_\alpha^\vee, \beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta = \alpha\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta \neq \alpha \end{cases}$$

と定める．ϖ_α を単純ウェイト，$\varpi_\alpha^\vee$ を単純コウェイトと呼ぶ．

$$\widehat{\Delta}_0 = \{\varpi_\alpha \in (\mathfrak{a}_0^G)^* \,|\, \alpha \in \Delta_0\}, \quad \widehat{\Delta}_0^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_0^G \,|\, \alpha \in \Delta_0\}$$

と置く．$\widehat{\Delta}_0$ は $\Delta_0^\vee$ に双対である $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ の基底であり，$\widehat{\Delta}_0^\vee$ は Δ_0 に双対である $\mathfrak{a}_0^G$ の基底である．

固定した極小放物型部分群 P_0 を含むような $\mathbb{Q}$ 上の放物型部分群のことを標準という．標準放物型部分群 P に関連したルートについて考えよう．$P_0 \subset P$ なので明らかに $P \in \mathcal{F}$ である．Δ_0 の部分集合 Δ_0^P を

$$\mathfrak{a}_P = \{a \in \mathfrak{a}_0 \mid \langle a, \alpha \rangle = 0, \ ^\forall\alpha \in \Delta_0^P\}$$

によって定める．Δ_0^P は $(\mathfrak{a}_0^P)^*$ の基底となる．対応 $P \mapsto \Delta_0^P$ によって，標準放物型部分群の集合と Δ_0 の部分集合との間に一対一対応が与えられる．

$$\Delta_P = \{\alpha|_{\mathfrak{a}_P} \in (\mathfrak{a}_P^G)^* \mid \alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P\}$$

とする．ただし，$\alpha|_{\mathfrak{a}_P}$ は α の $\mathfrak{a}_P$ への制限とする．Δ_P は $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ の基底であり，Φ_P の任意のルートを Δ_P の元の非負整数の一次結合で一意的に表すことができる．続いて，

$$\widehat{\Delta}_P = \{\varpi_\alpha \in (\mathfrak{a}_P^G)^* \mid \alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P\}$$

とする. $\widehat{\Delta}_P$ も $(\mathfrak{a}_P^G)^*$ の基底となる. 次に $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G$, $(\alpha \in \Delta_P)$ を, $\beta \in \Delta_0 - \Delta_0^P$ によって

$$\langle \alpha^\vee, \varpi_\beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta|_{\mathfrak{a}_P} = \alpha\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta|_{\mathfrak{a}_P} \neq \alpha \end{cases}$$

と定める. 同様に $\varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G$, $(\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P)$ を, $\beta \in \Delta_P$ によって

$$\langle \varpi_\alpha^\vee, \beta \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \beta = \alpha|_{\mathfrak{a}_P}\,, \\ 0 & \text{if} \quad \beta \neq \alpha|_{\mathfrak{a}_P} \end{cases}$$

と定める.

$$\Delta_P^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G \mid \alpha \in \Delta_P\}, \quad \widehat{\Delta}_P^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G \mid \alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^P\}.$$

と置く. $\Delta_P^\vee$ は $\widehat{\Delta}_P$ と双対である $\mathfrak{a}_P^G$ の基底となり, $\widehat{\Delta}_P^\vee$ は Δ_P と双対である $\mathfrak{a}_P^G$ の基底となる. $\alpha^\vee \in \Delta_P^\vee$ について次のことに注意する. $\beta \in \Delta_0 - \Delta_0^P$ について $\alpha = \beta|_{\mathfrak{a}_P} \in \Delta_P$ とすると, $\alpha^\vee$ は直和 $\mathfrak{a}_0^G = \mathfrak{a}_P^G \oplus \mathfrak{a}_0^P$ によるコルート $\beta^\vee \in \Delta_0^\vee$ の $\mathfrak{a}_P^G$ への射影となる.

P_1, $P_2 \in \mathcal{F}$, $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ について考える.

$$\Delta_{P_1}^{P_2} = \{\alpha|_{\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}} \in (\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})^* \mid \alpha \in \Delta_0^{P_2} - \Delta_0^{P_1}\}, \quad \widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2} = \{\varpi|_{\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}} \in (\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})^* \mid \varpi \in \widehat{\Delta}_{P_1} - \widehat{\Delta}_{P_2}\}$$

と定義する. $\Delta_{P_1}^{P_2}$ と $\widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2}$ は $(\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})^*$ の基底となる. $(\Delta_{P_1}^{P_2})^\vee$ と $(\widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2})^\vee$ も上述と同じように定義する. つまり, $(\Delta_{P_1}^{P_2})^\vee$ は $\widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2}$ と双対である $\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}$ の基底とし, $(\widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2})^\vee$ は $\Delta_{P_1}^{P_2}$ と双対である $\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}$ の基底とする. ここで $P_0 \cap M_{P_2}$, $P_1 \cap M_{P_2} \in \mathcal{F}^{M_{P_2}}$ と, $P_0 \cap M_{P_2}$ は M_{P_2} の極小放物部分群になることに注意する. 定義より, $\mathfrak{a}_{P_1 \cap M_{P_2}} = \mathfrak{a}_{P_1}$, そして $\mathfrak{a}_{P_1 \cap M_{P_2}}^{M_{P_2}} = \mathfrak{a}_{P_1}^{P_2}$ となるので,

$$\Delta_{P_1 \cap M_{P_2}} = \Delta_{P_1}^{P_2}, \quad \widehat{\Delta}_{P_1 \cap M_{P_2}} = \widehat{\Delta}_{P_1}^{P_2}$$

を得る.

1.1.4 ワイル群と放物型部分群とルート

標準放物型部分群全体と $\mathcal{F}$ の元全体との関係を W_0 の作用で記述しよう. $A_0 = A_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$ と置く. $s \in W_0$ に対して w_s を $G(\mathbb{Q})$ における s の代表元とする. つまり, $w_s A_0 w_s^{-1} = A_0$ を満たし, かつ $(s\alpha)(w_s a w_s^{-1}) = \alpha(a)$, $({}^\forall a \in A_0,\ {}^\forall \alpha \in \Phi_0 \cup (-\Phi_0))$ が成り立つ. 代表元 w_s は modulo $M_0(\mathbb{Q})$ で定まる. また $w_s M_0 w_s^{-1} = M_0$ にも注意する. $s \in W_0$ と $P \in \mathcal{F}$ について, $sP = w_s P w_s^{-1}$ と定義する. 任意の $Q \in \mathcal{F}$ に対して, ある唯一つの標準放物型部分群 P が存在して, ある $s \in W_0$ について $Q = sP$ が成り立つことが知られている. ゆえに, $\{P \in \mathcal{F} \mid P_0 \subset P\} \times W_0$ から $\mathcal{F}$ への写像 Υ を

$$\Upsilon(P, s) = sP$$

によって定義すると, Υ は全射となる. 各 $M\in\mathcal{L}$ について,

$$W_0^M=\{s\in W_0^G \mid w_s\in M(\mathbb{Q})\}$$

と置く. このとき, $Q\in\mathcal{F}$ について, ある標準放物型部分群 P とある $s'\in W_0$ が存在して, その逆像が

$$\Upsilon^{-1}(Q)=\{(P,s)\mid s\in W_0^{M_Q}s'\}$$

と与えられる. そして, 位数について $|\Upsilon^{-1}(Q)|=|W_0^{M_Q}|$ が成り立つ. 特に極小放物型部分群に関してのみ考えると, W_0 から $\mathcal{P}$ への写像 $s\mapsto sP_0$ を考えることになり, その写像は全単射である. ルートについても考えよう. 定義より, $a\in A_0$, $n\in\mathfrak{n}_\alpha$ について

$$\mathrm{Ad}(w_saw_s^{-1})w_snw_s^{-1}=w_s(\mathrm{Ad}(a)n)w_s^{-1}=\alpha(a)\,w_snw_s^{-1}=(s\alpha)(w_saw_s^{-1})\,w_snw_s^{-1}$$

なのだから, $s\in W_0$ について

$$\Phi_{sP_0}=s\Phi_0,\quad \Delta_{sP_0}=s\Delta_0,\quad \Delta_{sP_0}^\vee=s\Delta_0^\vee,\quad \widehat{\Delta}_{sP_0}=s\widehat{\Delta}_0,\quad \widehat{\Delta}_{sP_0}^\vee=s\widehat{\Delta}_0^\vee$$

が成り立つ. 各 $Q\in\mathcal{F}$ に対しては, ある $s\in W_0$ によって $sP_0\subset Q$ となるので, Δ_Q が上と同様の議論で定義される. その s は modulo $W_0^{M_Q}$ で定まるのだから, Δ_Q は s の選択に依存しないことが分かる. 他の $\widehat{\Delta}_Q$ や $\Delta_{Q_1}^{Q_2}$ についても同様に定めることができる.

$M\in\mathcal{L}$ とする. 最後に $\mathcal{P}(M)$ と $\mathcal{L}(M)$ と $\mathcal{F}(M)$ のそれぞれの元を実ベクトル空間 $\mathfrak{a}_M$ の部分集合と対応させよう. $\alpha\in\Phi_0$, $\alpha|_{\mathfrak{a}_M}\neq 0$ について, $\mathfrak{a}_M$ の超平面 $Y_{\mathfrak{a}_M,\alpha}$ を

$$Y_{\mathfrak{a}_M,\alpha}=\{a\in\mathfrak{a}_M\mid \langle a,\alpha|_{\mathfrak{a}_M}\rangle=0\}$$

と定義する. 各 $P\in\mathcal{P}(M)$ について

$$\mathfrak{a}_P^+=\{a\in\mathfrak{a}_M\mid \langle a,\alpha\rangle>0,\ {}^\forall\alpha\in\Delta_P\}$$

と置く. このとき, 対応 $P\mapsto\mathfrak{a}_P^+$ は, $\mathcal{P}(M)$ と $\mathfrak{a}_M$ における $\cup_{\alpha\in\Phi_0,\,\alpha|_{\mathfrak{a}_M}\neq0}Y_{\mathfrak{a}_M,\alpha}$ の補集合の連結成分の集合との間に一対一対応を与える. 先に述べたように各 $L\in\mathcal{L}(M)$ に対して, $\mathfrak{a}_L$ は $\mathfrak{a}_M$ の部分空間になる. 対応 $L\mapsto\mathfrak{a}_L$ は, $\mathcal{L}(M)$ と $\{Y_{\mathfrak{a}_M,\alpha}\}_{\alpha\in\Phi_0}$ の元たちの共通部分から成る集合との間に一対一対応を与える. さらに, $\mathcal{F}=\cup_{L\in\mathcal{L}(M)}\mathcal{P}(L)$ (disjoint union) であるため, 対応 $Q\mapsto\mathfrak{a}_Q^+$ は, $\mathcal{F}(M)$ と各 $L\in\mathcal{L}(M)$ についての $\mathfrak{a}_L$ における $\cup_{\alpha\in\Phi_0,\,\alpha|_{\mathfrak{a}_L}\neq0}Y_{\mathfrak{a}_L,\alpha}$ の補集合の連結成分から成る集合との間に一対一対応を与える.

1.2 GL(3) の場合

1.2.1 基本的な設定

$\mathrm{GL}(n)$ を代数群としての通常の n 次一般線型群とする (cf. [Bor, p.49]). $\mathrm{GL}(n)$ は $\mathbb{Q}$ 上定義された連結簡約代数群であることが知られている. 環 R について $M(n,R)$ を R 上の n 次の全行列環とする. $R^\times$ を R の単元群とすると, $\mathrm{GL}(n)$ の R-点全体は

$$\mathrm{GL}(n,R)=\{x\in M(n,R)\mid \det x\in R^\times\}$$

と与えられる．以下，「GL(3) の場合」というサブセクションにおいては，

$$G = \mathrm{GL}(3)$$

とする．

この $G = \mathrm{GL}(3)$ に対して上述で説明した Levi 部分群やルート系を具体的に記述していこう．良く知られているように正則な上三角行列全体からなる部分群は，G の $\mathbb{Q}$ 上の極小放物型部分群 (Borel 部分群) となる．そして，極小 Levi 部分群として正則な対角行列全体からなる部分群をとる．よって，

$$M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

と置く．さらに，

$$\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v, \quad \mathbf{K}_\infty = O(3) = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I_3\}, \ \mathbf{K}_v = G(\mathbb{Z}_v) \ (v < \infty)$$

とすると，$\mathbf{K}$ は求められた条件を満たす $G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群である．

1.2.2 $\mathfrak{a}_0$ と $\mathfrak{a}_0^G$

GL(n) から GL(1) への $\mathbb{Q}$ 上定義された任意の準同型は，ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して，

$$x \mapsto \det(x)^k, \quad x \in \mathrm{GL}(n)$$

と与えられる．よって

$$\chi_j(\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}) = a_j, \quad 1 \le j \le 3$$

と $\chi_j \in X(M_0)_{\mathbb{Q}}$ を定めると，

$$X(M_0)_{\mathbb{Q}} = \{\chi_1^{k_1}\chi_2^{k_2}\chi_3^{k_3} \mid k_1, \, k_2, \, k_3 \in \mathbb{Z}\}$$

となる．$\xi_j \in \mathfrak{a}_0$ を

$$\xi_j(\chi_1^{k_1}\chi_2^{k_2}\chi_3^{k_3}) = k_j$$

で定める．このとき，

$$\mathfrak{a}_0 = \mathbb{R}\xi_1 \oplus \mathbb{R}\xi_2 \oplus \mathbb{R}\xi_3$$

を得る．次に

$$\eta_j = \chi_j \otimes 1$$

と置くと,
$$\mathfrak{a}_0^* = \mathbb{R}\eta_1 \oplus \mathbb{R}\eta_2 \oplus \mathbb{R}\eta_3$$
を得る. 特に, クロネッカーのデルタ δ_{jk} について,
$$\langle \xi_j\,,\,\eta_k \rangle = \delta_{jk}$$
となっている. 次に $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトルとして
$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$$
と置く. 以後, $\mathfrak{a}_0$ から $\mathbb{R}^3$ への線型同型写像
$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 \mapsto a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3\,, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$
によって, $\mathfrak{a}_0$ と $\mathbb{R}^3$ を同一視する. 同様に, $\mathfrak{a}_0^*$ から $\mathbb{R}^3$ への線型同型写像
$$b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3 \mapsto b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3\,, \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$
によって, $\mathfrak{a}_0^*$ と $\mathbb{R}^3$ も同一視する. $\mathbb{R}^3$ 上のユークリッド内積 $(\,,\,)$ によって $\mathbb{R}^3$ とその双対空間を同一視する. これらの同一視のもとで, $\mathbb{R}^3$ 上のユークリッド内積 $(\,,\,)$ と $\mathfrak{a}_0$ と $\mathfrak{a}_0^*$ の $\langle\,,\,\rangle$ は一致する. つまり,
$$\langle \sum_{j=1}^3 a_j\xi_j, \sum_{k=1}^3 b_k\eta_k \rangle = (\sum_{j=1}^3 a_je_j, \sum_{k=1}^3 b_ke_k) = \sum_{j=1}^3 a_jb_j$$
となる. 定義より,
$$H_0(m) = \sum_{j=1}^3 \log|m_j|\, e_j \,\in \mathfrak{a}_0\,, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \in M_0(\mathbb{A})$$
がすぐに分かる.

M_0 と同じようにして,
$$\mathfrak{a}_G^* = \mathbb{R}\det\otimes 1, \quad \mathfrak{a}_G = \mathbb{R}\xi, \quad \xi(\det^k) = k$$
を得る. $\mathfrak{a}_G^*$ から $\mathfrak{a}_0^*$ への線型単射は
$$\det\otimes 1 \;\mapsto\; \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$$
で与えられる. したがって,
$$\mathfrak{a}_G^* = \mathbb{R}(e_1 + e_2 + e_3)$$
となる. サブサブセクション 1.1.2 の線型全射 $\varsigma : \mathfrak{a}_0^* \to \mathfrak{a}_G^*$ について,
$$\varsigma(\chi_j \otimes 1) = \frac{1}{3}\det\otimes 1$$

となるのだから, $\mathfrak{a}_G$ から $\mathfrak{a}_0$ への線型単射は

$$\xi \;\mapsto\; \frac{1}{3}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$$

で与えられる. よって,

$$\mathfrak{a}_G=\mathbb{R}(e_1+e_2+e_3)$$

を得る. 定義より, $\mathbb{R}^3$ の部分空間として $\mathfrak{a}_0^G$ と $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ を考えると,

$$\mathfrak{a}_0^G=(\mathfrak{a}_0^G)^*=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\}$$

となる. また定義より,

$$H_G(m)=\frac{\log|\det(m)|}{3}\,(e_1+e_2+e_3)\in\mathfrak{a}_0,\quad m\in G(\mathbb{A})$$

を得る.

1.2.3 P_0 とルート系

$1\le j<k\le 3$ について

$$\alpha_{jk}=e_j-e_k=\chi_j\chi_k^{-1}\in\mathfrak{a}_0^*$$

と置くと, 明らかに

$$\mathfrak{n}_{P_0}=\mathfrak{n}_{\alpha_{12}}\oplus\mathfrak{n}_{\alpha_{13}}\oplus\mathfrak{n}_{\alpha_{23}}\,,\quad \Phi_0=\{\,\alpha_{12},\,\alpha_{13},\,\alpha_{23}\,\}$$

が成り立つ. 良く知られているように, $\Phi_0\cup(-\Phi_0)$ は $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ のルート系となる. (jk) を j と k の互換とする. $\sigma=(jk)$ と置いて, α_{jk} について,

$$s_{\alpha_{jk}}(x_1,x_2,x_3)=(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}),\quad (x_1,x_2,x_3)\in(\mathfrak{a}_0^G)^* \tag{1.2}$$

によって α_{jk} の対称 $s_{\alpha_{jk}}$ が得られる. もちろん, $-\alpha_{jk}$ に対しては, $s_{-\alpha_{jk}}=s_{\alpha_{jk}}$ である. **以下, ワイル群 W_0 と 3 次対称群を同一視する.** そして, ユークリッド内積 $(\,,\,)$ は W_0 不変な $(\mathfrak{a}_0^G)^*$ 上の正値対称双一次形式なので, 上述の $\mathbb{R}^3$ とその双対空間の同一視とルート系は両立する. ワイル群 W_0 は (1.2) と同様に $\mathfrak{a}_0^G$ にも作用する. α_{jk} に対するコルート $\alpha_{jk}^\vee$ は

$$\alpha_{jk}^\vee=e_j-e_k\in\mathfrak{a}_0^G$$

となる. すぐに分かるように,

$$\Delta_0=\{\alpha_{12}\,,\,\alpha_{23}\},\quad \Delta_0^\vee=\{\alpha_{12}^\vee\,,\,\alpha_{23}^\vee\}$$

となる. さらに, 定義より

$$\varpi_{\alpha_{12}}=\varpi_{\alpha_{12}}^\vee=\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}(e_2+e_3),\quad \varpi_{\alpha_{23}}=\varpi_{\alpha_{23}}^\vee=\frac{1}{3}(e_1+e_2)-\frac{2}{3}e_3$$

となり,

$$\widehat{\Delta}_0=\{\varpi_{\alpha_{12}},\varpi_{\alpha_{23}}\},\quad \widehat{\Delta}_0^\vee=\{\varpi_{\alpha_{12}}^\vee,\varpi_{\alpha_{23}}^\vee\}$$

を得る.

1.2.4 標準放物型部分群

P_0 の標準放物型部分群について考える．標準放物型部分群は P_0 を含む部分群なので，

$$\{P \in \mathcal{F} \mid P_0 \subset P\} = \{P_0,\, P_1,\, P_2,\, G\},$$

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

が簡単な計算で得られる．

P_1 について考えよう．サブサブセクション 1.2.2 とほぼ同様の議論により，$\mathfrak{a}_{P_1}$ と $\mathfrak{a}_{P_1}^*$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間として，

$$\mathfrak{a}_{P_1} = \mathfrak{a}_{P_1}^* = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \alpha_{12}) = 0\}$$

となる．そして，$m_1 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$, $m_2 \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$ について

$$H_{M_{P_1}}(\begin{pmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{pmatrix}) = \frac{\log|\det(m_1)|}{2}(e_1 + e_2) + \log|m_2|e_3$$

となる．さらに計算を進めて，

$$\mathfrak{a}_{P_1}^G = (\mathfrak{a}_{P_1}^G)^* = \{(x, x, -2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\varpi_{\alpha_{23}},$$

$$\mathfrak{a}_0^{P_1} = (\mathfrak{a}_0^{P_1})^* = \{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\alpha_{12}$$

を得る．定義と $\Delta_0 - \Delta_0^{P_1} = \{\alpha_{23}\}$ より Δ_{P_1} の唯一の元は $\alpha_{23}|_{\mathfrak{a}_{P_1}}$ となる．$\mathfrak{a}_{P_1}$ に制限することと直和分解 $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_{P_1}^* \oplus (\mathfrak{a}_0^{P_1})^*$ の $\mathfrak{a}_{P_1}^*$-成分をとることは同一であることに注意しよう．これにより，

$$\Delta_{P_1} = \Delta_{P_1}^\vee = \{\frac{3}{2}\varpi_{\alpha_{23}}\}, \quad \widehat{\Delta}_{P_1} = \widehat{\Delta}_{P_1}^\vee = \{\varpi_{\alpha_{23}}\}$$

となる．さらに，

$$\Delta_0^{P_1} = (\Delta_0^{P_1})^\vee = \{\alpha_{12}\}, \quad \widehat{\Delta}_0^{P_1} = (\widehat{\Delta}_0^{P_1})^\vee = \{\frac{1}{2}\alpha_{12}\}$$

も得る．

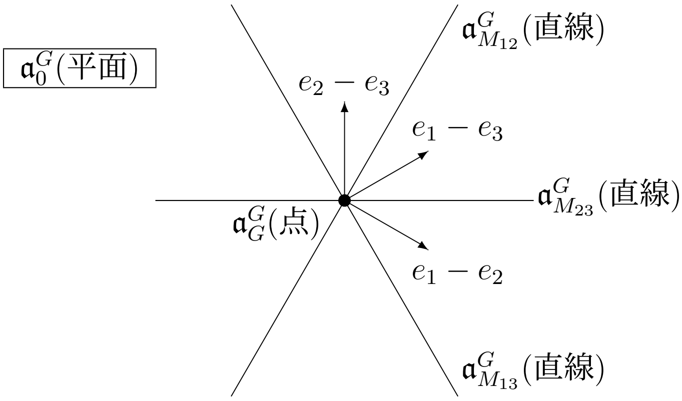
P_2 についても P_1 と同じ議論で以下を得る．

$$\mathfrak{a}_{P_2} = \mathfrak{a}_{P_2}^* = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x, \alpha_{23}) = 0\},$$

であり，$m_1 \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$, $m_2 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ について

$$H_{M_{P_2}}(\begin{pmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{pmatrix}) = \log|m_1|e_1 + \frac{\log|\det(m_2)|}{2}(e_2 + e_3)$$

図 1: Levi 部分群



となる. さらに,

$$\mathfrak{a}_{P_2}^G = (\mathfrak{a}_{P_2}^G)^* = \{(-2x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\varpi_{\alpha_{12}},$$

$$\mathfrak{a}_0^{P_2} = (\mathfrak{a}_0^{P_2})^* = \{(0, x, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\alpha_{23},$$

$$\Delta_{P_2} = \Delta_{P_2}^\vee = \{\frac{3}{2}\varpi_{\alpha_{12}}\}, \quad \widehat{\Delta}_{P_2} = \widehat{\Delta}_{P_2}^\vee = \{\varpi_{\alpha_{12}}\},$$

$$\Delta_0^{P_2} = (\Delta_0^{P_2})^\vee = \{\alpha_{23}\}, \quad \widehat{\Delta}_0^{P_2} = (\widehat{\Delta}_0^{P_2})^\vee = \{\frac{1}{2}\alpha_{23}\}$$

となる.

1.2.5 Levi 部分群と放物型部分群

まず次のように Levi 部分群たちを定義する.

$$M_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, M_{13} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, M_{23} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in G \right\}.$$

このとき明らかに,

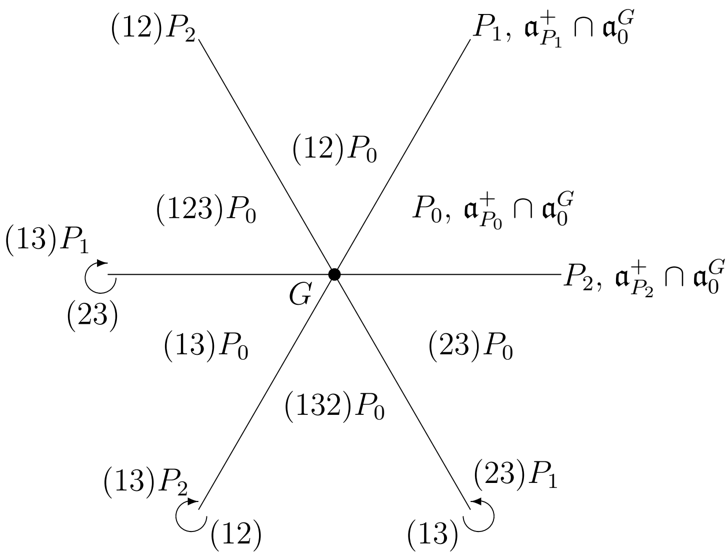
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(M_0) = \{M_0,\ M_{12},\ M_{13},\ M_{23},\ G\},$$

$$\mathcal{L}(M_{12}) = \{M_{12},\ G\},\ \mathcal{L}(M_{13}) = \{M_{13},\ G\},\ \mathcal{L}(M_{23}) = \{M_{23},\ G\},\ \mathcal{L}(G) = \{G\}$$

となる.

$$M_{P_1} = M_{12}, \quad M_{P_2} = M_{23}$$

図 2: 放物型部分群



となっているので、$\mathfrak{a}_{M_{12}}$ などに関しては, すでに前のサブサブセクションで記述されている. M_{13} に関しても $(23) \in W_0$ の M_{12} への作用を考えれば明らかで,

$$\mathfrak{a}_{M_{13}} = \{x \in \mathfrak{a}_0 \,|\, (x, \alpha_{13}) = 0\}, \quad \mathfrak{a}_{M_{13}}^G = \mathbb{R}\,(23)\varpi_{\alpha_{23}}, \quad \mathfrak{a}_0^{M_{13}} = \mathbb{R}\alpha_{13},$$

$$(23)\varpi_{\alpha_{23}} = \frac{1}{3}(e_1 + e_3) - \frac{2}{3}e_2 = \varpi_{\alpha_{12}} - \varpi_{\alpha_{23}},$$

$$H_{M_{13}}(\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{33} \end{pmatrix}) = \frac{\log|m_{11}m_{33} - m_{31}m_{13}|}{2}(e_1 + e_3) + \log|m_{22}|e_2$$

を得る. $\mathfrak{a}_0^G$ 平面の上に $\mathfrak{a}_M^G$ に対応する超平面を描くと図 1 のようになる.

ワイル群の作用により放物型部分群の集合 $\mathcal{P}(M)$ は次のように記述できる.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(M_0) = \{sP_0 \mid s \in W_0\}, \quad \mathcal{P}(G) = \{G\},$$

$$\mathcal{P}(M_{12}) = \{P_1,\ (13)P_2\},\ \mathcal{P}(M_{13}) = \{(23)P_1,\ (12)P_2\},\ \mathcal{P}(M_{23}) = \{(13)P_1,\ P_2\}.$$

そして,

$$\mathcal{F}(M) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}(M)} \mathcal{P}(L)$$

となる. $s \in W_0$ について $\Delta_{sP} = s\Delta_P$ と $\Delta_{sP}^{sQ} = s\Delta_P^Q$ が成り立つのだから, 任意の P, $Q \in \mathcal{F}$ についての Δ_P や Δ_P^Q は簡単に求めることができる. $\mathfrak{a}_0^G$ 平面の上に $\mathfrak{a}_P^+$ に対応する図形を描くと図 2 のようになる. 図形における (jkl) は巡回置換 $\begin{pmatrix} j & k & l \\ k & l & j \end{pmatrix}$ を意味する (例えば $(13)(12) = (123)$).

2 粗い展開

これより跡公式についての解説を始める．アーサー跡公式の第一段階として, Modified kernel の $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上の積分に幾何サイドとスペクトルサイドの 2 つの粗い展開を与える．このセクションでは主に [A1, Part I] もしくは [A3, A4] の内容に相当することを説明する．

2.1 Modified kernel

このセクションでは P を標準放物型部分群とする.

まず選択される測度について述べよう．N_{P_0} の任意の $\mathbb{Q}$ 上定義された連結部分群 V に対して, $V(\mathbb{A})$ 上のハール測度を $V(\mathbb{Q})\backslash V(\mathbb{A})$ の測度が 1 となるように正規化する．その一つとして $\mathrm{d}n$ を $N_P(\mathbb{A})$ のハール測度とする．同様に $\mathbf{K}$ 上のハール測度 $\mathrm{d}k$ についても, その測度を 1 と正規化する．$\mathfrak{a}_P$ 上のハール測度 $\mathrm{d}H$ を一つ固定する．そのとき, $A_P(\mathbb{R})^0$ 上のハール測度 $\mathrm{d}a$ が同型 $H_P : A_P(\mathbb{R})^0 \cong \mathfrak{a}_P$ により定まる．$i=\sqrt{-1}$ とする．$i\mathfrak{a}_P^*$ 上のハール測度 $\mathrm{d}\lambda$ を $\mathrm{d}H$ と双対な測度とする．つまり, 任意の $h \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_P)$ について

$$\int_{i\mathfrak{a}_P^*}\int_{\mathfrak{a}_P} h(H)e^{-\lambda(H)}\mathrm{d}H\mathrm{d}\lambda = h(0)$$

が成り立つ．最後に $G(\mathbb{A})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}x$ を一つ固定する．このとき, 次が成り立つような $M_P(\mathbb{A})^1$ 上の測度 $\mathrm{d}m$ が唯一存在する．任意の $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ について,

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(x)\mathrm{d}x = \int_{N_P(\mathbb{A})}\int_{M_P(\mathbb{A})^1}\int_{A_P(\mathbb{R})^0}\int_{\mathbf{K}} f(nmak)e^{-2\rho_P(H_P(a))}\mathrm{d}n\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}k$$

が成り立つ．

$\widehat{\tau}_P$ を $\mathfrak{a}_P$ の部分集合

$$\{H \in \mathfrak{a}_P \mid \varpi(H) > 0,\ {}^\forall\varpi \in \widehat{\Delta}_P\}$$

の特性関数とする．テスト関数 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ について, $L^2(N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ 上の核関数 $K_P(x,y)$ を

$$K_P(x,y) = \int_{N_P(\mathbb{A})}\sum_{\gamma\in M_P(\mathbb{Q})} f(x^{-1}\gamma ny)\mathrm{d}n$$

と定義する．$\mathfrak{a}_0^+ = \mathfrak{a}_{P_0}^+$ と置く．パラメーター $T \in \mathfrak{a}_0^+$ に関する $G(\mathbb{A})$ 上の関数 $k^T(x,f)$ を

$$k^T(x,f) = \sum_{P\supset P_0}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_P^G}\sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} K_P(\delta x,\delta x)\,\widehat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T)$$

と定義する．T は直和分解 $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_P \oplus \mathfrak{a}_0^P$ の射影によって $\mathfrak{a}_P$ の点とも思えることに注意しよう．テスト関数 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ とパラメーター $T \in \mathfrak{a}_0^+$ に関する積分 $J^T(f)$ を

$$J^T(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k^T(x,f)\mathrm{d}x$$

と定義する. $T \in \mathfrak{a}_0^+$ が十分に正則であるとは, 任意の $\alpha \in \Delta_0$ に対して $\alpha(T)$ が十分に大きいことを意味する.

定理 2.1. $T \in \mathfrak{a}_0^+$ は十分正則とする. そのとき,

$$\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} |k^T(x,f)| \mathrm{d}x < +\infty$$

が成り立つ. ただし T の大きさは f のサポートにのみ依存する.

この定理より積分 $J^T(f)$ は値を持つことが分かる. この後, 十分正則な T について積分 $J^T(f)$ を幾何サイドとスペクトルサイドに展開していく.

2.2 幾何サイド

$G(\mathbb{Q})$ の元 γ に対して, $\gamma = \gamma_s\gamma_u = \gamma_u\gamma_s$, 元 $\gamma_s \in G(\mathbb{Q})$ は半単純, 元 $\gamma_u \in G(\mathbb{Q})$ はユニポテントと γ のジョルダン分解を定める. $G(\mathbb{Q})$ の元 γ と γ' が $\mathcal{O}$-同値であるとは, γ_s と γ_u が $G(\mathbb{Q})$-共役であることを意味する. $\mathcal{O} = \mathcal{O}^G$ を $G(\mathbb{Q})$ の $\mathcal{O}$-同値類の集合とする. $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, $T \in \mathfrak{a}_0^+$, $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ について,

$$K_{P,\mathfrak{o}}(x,y) = \int_{N_P(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in M_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} f(x^{-1}\gamma n y)\mathrm{d}n,$$

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x,f) = \sum_{P\supset P_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x, \delta x)\,\widehat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T),$$

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)\mathrm{d}x$$

と置く.

定理 2.2. $T \in \mathfrak{a}_0^+$ は十分正則とする. そのとき,

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} |k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)|\mathrm{d}x < +\infty$$

が成り立つ. ただし T の大きさは f のサポートにのみ依存する.

したがって, この定理より

$$J^T(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f)$$

と幾何サイドの粗い展開を得る.

2.3 スペクトルサイド

関数 $\phi \in L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ がカスピダルであるとは, 任意の標準放物型部分群 $P \neq G$ とほとんどすべての $x \in G(\mathbb{A})^1$ について

$$\int_{N_P(\mathbb{A})} \phi(nx)\mathrm{d}n = 0$$

が成り立つことを意味する. $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ を $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ のカスピダルである関数全体から成る部分空間とする. $G(\mathbb{A})^1$ は右正則表現により $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ 上に作用している. そして, $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は $G(\mathbb{A})^1$ の作用について不変である. 空間 $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は $G(\mathbb{A})^1$ の作用の下で, 有限重複度の既約表現の離散和となることが知られている. つまり,

$$L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1) \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{G(\mathbb{A})^1}} m_{\mathrm{cusp}}(\pi) \cdot \pi$$

と書くことができる. ただし, $m_{\mathrm{cusp}}(\pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は π の重複度であり, 位相群 H に対して $\widehat{H}$ は H の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の集合とする. $L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ を $G(\mathbb{A})^1$-不変な閉既約部分空間によって張られる $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の部分空間とする. $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ は $L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$ の部分空間となる.

P と P' を標準放物型部分群とする. そして, σ を $M_P(\mathbb{A})^1$ の既約ユニタリ表現とし, σ' を $M_{P'}(\mathbb{A})^1$ の既約ユニタリ表現とする. $W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ を W_0 の元を制限することで得られる $\mathfrak{a}_P$ から $\mathfrak{a}_{P'}$ への異なる線型同型の集合とする. 二つのペア (P, σ) と (P', σ') が同値であるとは,

$$\sigma \cong s^{-1}\sigma'(m) = \sigma'(w_s m w_s^{-1}), \quad m \in M_P(\mathbb{A})^1$$

となるような $s \in W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})$ が存在することを意味する. 上述の $L^2_{\mathrm{cusp}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$ の既約分解の成分に既約ユニタリ表現 σ が現れるとき ($m_{\mathrm{cusp}}(\sigma) \neq 0$), 同値類 $\chi = \{(P, \sigma)\}$ をカスピダルデータといい, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^G$ をその同値類の集合とする.

$\mathcal{H}_P$ を次の条件 (i) と (ii) を満たす $N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{Q})A_P(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{A})$ 上の $\mathbb{C}$ 値可測関数 ϕ からなる空間とする. (i) 任意の $x \in G(\mathbb{A})$ について, $\phi_x(m) = \phi(mx)$ によって定まる $M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1$ 上の関数 ϕ_x は

$$\phi_x \in L^2_{\mathrm{disc}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$$

を満たす. (ii) 関数 ϕ は

$$||\phi||^2 = \int_{\mathbf{K}} \int_{M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1} |\phi(mk)|^2 \mathrm{d}m\, \mathrm{d}k < +\infty$$

を満たす.

$\mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^* = \mathfrak{a}_P^* \otimes \mathbb{C}$ と記号を定める．$\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ とする．空間 $\mathcal{H}_P$ 上に作用する $G(\mathbb{A})$ の表現 $\mathcal{I}_P(\lambda)$ を $\phi \in \mathcal{H}_P$ に対して

$$(\mathcal{I}_P(\lambda, y)\phi)(x) = \phi(xy)\, e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(xy))}\, e^{-(\lambda+\rho_P)(H_P(x))}, \quad y \in G(\mathbb{A})$$

と定義する．$\mathcal{H}_P^0$ を $\mathbf{K}$-有限な元からなる $\mathcal{H}_P$ の部分空間とする．ほとんどすべての $x \in G(\mathbb{A})$ について $\phi_x \in L^2_{\mathrm{cusp}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$ となるような $\phi \in \mathcal{H}_P^0$ からなる空間を $\mathcal{H}_{P,\mathrm{cusp}}^0$ とする．さらに，$\sigma \in \widehat{M_P(\mathbb{A})}^1$ について，$\phi_x \in \sigma^{\oplus m_{\mathrm{cusp}}(\sigma)}$ となるような $\phi \in \mathcal{H}_{P,\mathrm{cusp}}^0$ からなる空間を $\mathcal{H}_{P,\mathrm{cusp},\sigma}^0$ とする．

$\chi = \{(P,\sigma)\} \in \mathfrak{X}$ とする．$\Psi(\lambda)$ を Paley-Wiener type の $\lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*$ について整関数とし，$x \in G(\mathbb{A})$ について $\Psi(\lambda, x) \in \mathcal{H}_{P,\mathrm{cusp},\sigma}^0$ が成り立つとする．このとき，$\Psi(\lambda, x)$ は，ある $\mathfrak{a}_P$ 上の滑らかなコンパクト台をもつ関数の λ に関するフーリエ変換で与えられる．任意の $\Lambda \in \mathfrak{a}_P^*$ について，$N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ 上の関数 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \int_{\Lambda+i\mathfrak{a}_P^*} e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(x))}\Psi(\lambda, x) d\lambda$$

で定義する．$\psi(x)$ は $H_P(x) \in \mathfrak{a}_P$ についてコンパクト台をもつ．この ψ により擬アイゼンシュタイン級数 $E\psi(x)$ が

$$E\psi(x) = \sum_{\delta \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \psi(\delta x), \quad x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$$

と与えられる．$E\psi \in L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ が成り立つ．$L^2_\chi(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ を上述の $\Psi(\lambda, x)$ と $\Lambda \in \mathfrak{a}_P^*$ についての $E\psi$ によって張られる空間の閉包とする．$L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ の閉部分空間 $L^2_\chi(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ は $G(\mathbb{A})$-不変である．さらに直和分解

$$L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1) \cong \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}} L^2_\chi(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)$$

を得る．

P_1 を P に含まれる標準放物型部分群とする．このとき，$M_{P_1} \subset M_P$ に注意する．$\mathfrak{X}^{M_P}$ から $\mathfrak{X}^G$ への写像 Ω が，$\sigma_1 \in \widehat{M_{P_1}(\mathbb{A})}^1$ に関するカスピダルデータ $(P_1 \cap M_P\,, \sigma_1)$ に対して (P_1, σ_1) を対応させることで与えられる．カスピダルデータ $\chi \in \mathfrak{X}^G$ に対して

$$L^2_{\mathrm{disc},\chi}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1) = \bigoplus_{\chi_P \in \Omega^{-1}(\chi)} L^2_{\mathrm{disc}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1) \cap L^2_{\chi_P}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$$

とおくと，$\mathfrak{X}^G$ による直和分解

$$L^2_{\mathrm{disc}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1) = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}^G} L^2_{\mathrm{disc},\chi}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$$

を得る．ほとんどすべての $x \in G(\mathbb{A})$ について $\phi_x \in L^2_{\mathrm{disc},\chi}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)$ となる $\phi \in \mathcal{H}_P$ 全体からなる空間を $\mathcal{H}_{P,\chi}$ とする．このとき, 直交直和

$$\mathcal{H}_P = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}} \mathcal{H}_{P,\chi}$$

を得る. $\mathcal{I}_P(\lambda)$ を $\mathcal{H}_P$ の不変部分空間 $\mathcal{H}_{P,\chi}$ へ制限することで得られる表現を $\mathcal{I}_{P,\chi}(\lambda)$ と書く. そして,

$$\mathcal{B}_P = \bigcup_{\chi\in\mathfrak{X}} \mathcal{B}_{P,\chi} \ \ \text{(disjoint union)}, \quad \mathcal{B}_{P,\chi} = \mathcal{B}_P \cap \mathcal{H}_{P,\chi} \cap \mathcal{H}_P^0$$

をみたす $\mathcal{H}_P$ の正規直交基底 $\mathcal{B}_P$ が存在する.

$P \subset Q$, $x \in G(\mathbb{A})$, $\phi \in \mathcal{H}_P$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{P,\mathbb{C}}$ についてアイゼンシュタイン級数 $E_P^Q(x,\phi,\lambda)$ を

$$E_P^Q(x,\phi,\lambda) = \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash Q(\mathbb{Q})} \phi(\delta x)\, e^{(\lambda+\rho_P)(H_P(\delta x))}$$

と定める. そして,

$$n_P = n_P^G = \sum_{P'\supset P_0} |W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_{P'})|$$

と置く． また, $n_P^Q = n_{P\cap M_Q}^{M_Q} (= n_{P\cap M_Q})$ と置く． このとき, $\chi \in \mathfrak{X}$ に対する核関数 $K_{P,\chi}(x,y)$ が

$$K_{P,\chi}(x,y) = \sum_{P_0\subset P_1\subset P} (n_{P_1}^P)^{-1} \int_{i\mathfrak{a}_P^*} \sum_{\phi\in\mathcal{B}_{P,\chi}} E_{P_1}^P(x, \mathcal{I}_{P,\chi}(\lambda,f)\phi,\lambda)\, \overline{E_{P_1}^P(y,\phi,\lambda)}\, \mathrm{d}\lambda$$

と与えられる. これより

$$k_\chi^T(x,f) = \sum_{P\supset P_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} K_{P,\chi}(\delta x, \delta x)\, \widehat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T),$$

$$J_\chi^T(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k_\chi^T(x,f)\, \mathrm{d}x$$

とおく.

定理 2.3. $T \in \mathfrak{a}_0^+$ は十分正則とする. そのとき,

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}} \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} |k_\chi^T(x,f)| \mathrm{d}x < +\infty$$

が成り立つ. ただし T の大きさは f のサポートにのみ依存する.

したがって, この定理より

$$J^T(f) = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}} J_\chi^T(f)$$

とスペクトルサイドの粗い展開を得る.

2.4 まとめ

T に対する $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ の性質を考える.

定理 2.4. 任意に $f \in C_0^\infty(G(\mathbb{A}))$ について, 十分正則な $T \in \mathfrak{a}_0^+$ に対して定義される関数 $T \mapsto J^T(f)$ は T に関する高々 $\dim \mathfrak{a}_0^G$ 次の多項式となる. $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$ と $J^T_{\chi}(f)$ についても同様である.

この定理により $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ を T の多項式と見ることで, 任意の $T \in \mathfrak{a}_0^+$ に対して値を持つ. 特に多項式の各係数は $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ 上の distribution となる. このセクションのこれまでの議論は, 極小放物型部分群 $P_0 \in \mathcal{P}$ の選択に依存してきたが, 適当な点 $T = T_0 \in \mathfrak{a}_0^+$ を取ることで, $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ は P_0 の選択に依存しない値になることが知られている. そのような点 T_0 は存在して,

$$H_{P_0}(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0, \quad {}^\forall w \in W_0$$

を満たす点として唯一に定められる. これより, 点 $T = T_0 \in \mathfrak{a}_0^+$ での多項式 $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ の値をそれぞれ $J(f)$, $J_{\mathfrak{o}}(f)$, $J_{\chi}(f)$ とおく. これらの値は P_0 の選択によらないが, まだ M_0 の選択には依存していることに注意しよう.

最後にテスト関数 f の適用範囲について考える. $J^T(f)$, $J^T_{\mathfrak{o}}(f)$, $J^T_{\chi}(f)$ の定義から明らかなように, これらの値は f の $G(\mathbb{A})^1$ 上の値にのみ依存している. そこで, $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ を $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ の関数を $G(\mathbb{A})^1$ へ制限した関数から成る空間とすると, これまでの定理は $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ 上の任意の関数に対して適用可能である.

以上をまとめると, 定理 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 より, P_0 の選択には依存していない, 次の粗い展開による等式を得る。

定理 2.5. 任意の $f \in C_0^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ について, 等式

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}} J_{\chi}(f)$$

が成り立つ.

2.5 GL(3) の場合

$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ がココンパクトな場合は核関数 $K_G(x,x)$ を $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上積分すれば跡公式が得られたが, 一般的には $\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} K_G(x,x)\mathrm{d}x$ は収束しないので, modified kernel $k^T(x,f)$ を考える必要があった. GL(3) を例にして, modified kernel の意味を考えよう。そのままでは積分 $\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} K_G(x,x)\mathrm{d}x$ が収束しない理由は, $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ がコンパクトでない, つまり基本領域がカスプを持つことにある. 収束させるためにカスプの周辺において核関数 $K_G(x,y)$ に修正を加えてできたのが, modified kernel $k^T(x,f)$ である. GL(2) の場合 (cf. [TW]) ではカスプは点のみなので一つの放物型部分群に対

図 3: Siegel set

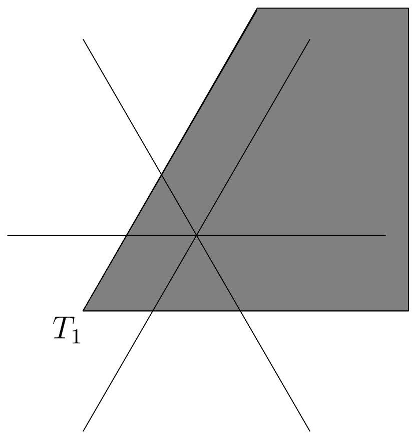


図 4: $\widehat{\tau}_P(H_P(a) - T)$ のサポート

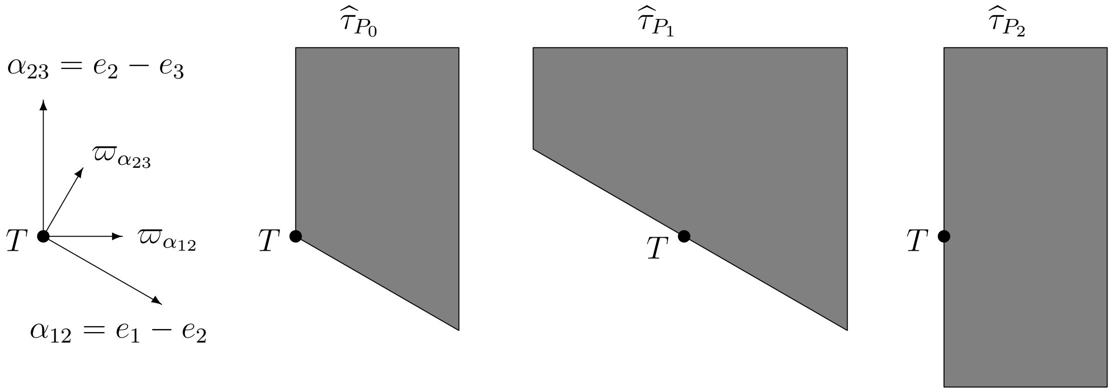
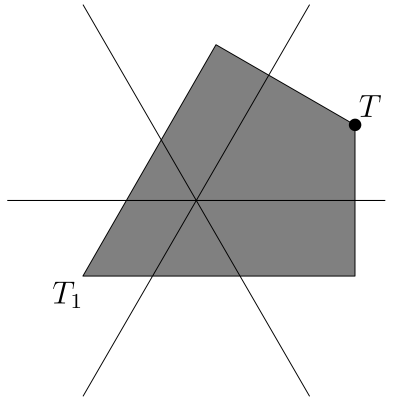


図 5: 切り取られた領域



して修正を施してやればよかった．しかし, 一般の場合は放物型部分群が多いので, パラメーターも増え, 修正の過程も複雑になる．この修正の雰囲気は, 基本領域のカスプの周辺を切り取って積分の範囲をコンパクトな領域にしている, と思ってもらいたい. もちろん雰囲気なので正確ではないが, $\mathfrak{o}$-同値類によっては実際に T を十分に大きくすれば $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ の積分の範囲はその切り取られて出来た領域になる (cf. [TW], 双曲元と $F^G(g,T)$)．ここでの切り取られて出来た領域と言うのは, $x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ についての基本領域上における関数

$$\sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G}\, \widehat{\tau}_P(H_P(x)-T)$$

のサポートのことである．$H_0(a) \in \mathfrak{a}_0^G$ に関するサポートの形を $G=\mathrm{GL}(3)$ の場合に詳しく見てみよう．

まず $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ の基本領域は, ある $T_1 \in \mathfrak{a}_0^G$ と $N_{P_0}(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ のあるコンパクト部分集合 ω についての Siegel set

$$\{\, x = pak \,|\, p \in \omega\,,\ a \in A_0(\mathbb{R})^0\,,\ k \in \mathbf{K}\,,\ H_G(a)=0\,,\ \beta(H_0(a)-T_1) > 0\ {}^\forall\beta \in \Delta_0\}$$

に含まれる．基本領域の元 $x=pak$ の p と k はコンパクトな領域を動くのだからカスプとの距離は a にのみ依存している．$H_0(x)=H_0(a) \in \mathfrak{a}_0^G$ であり, Siegel set 上 $H_0(a)$ は図 3 の影の範囲を動く．基本領域の元 $x=pak$ は $H_0(a)$ が T_1 から離れるほどカスプに近づく．続いて $\widehat{\tau}_P(H_P(a)-T)$ を $H_0(a) \in \mathfrak{a}_0^G$ についての関数とみて, そのサポートを図 4 の影で表した．最後に $(-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G}$ に注意すると, 切り取られた領域は図 5 の影のようになる．図より切り取られた領域がコンパクトになっていることが明らかに分かる。つまり修正の雰囲気は $x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ の基本領域上で動く範囲が図 5 のコンパクトな領域に含まれていると思うことができる．

3 (G,M)-family

このセクションでは [A1, §.17] や [A2, A5, A6, A7] の中で述べられている (G,M)-family について説明する．定理 2.5 の等式をより詳しく知るためには, $J_{\mathfrak{o}}(f)$ と $J_\chi(f)$ を細かく展開する必要がある．細かく展開するためにも, また展開したときに現れる重み付き軌道積分と重み付き指標の性質を理解するためにも, (G,M)-family の概念が重要となる．

3.1 $c_P(\lambda)$ と $c_M(\lambda)$ と $c'_P(\lambda)$

まず $M \in \mathcal{L}$ を一つ固定する．$P \in \mathcal{P}(M)$ について,

$$(\mathfrak{a}_M^*)_P^+ = \{a \in \mathfrak{a}_P^* \mid \langle \alpha^\vee\,,\, a\rangle > 0,\ {}^\forall\alpha^\vee \in \Delta_P^\vee\}$$

と置く. $P,\, P' \in \mathcal{P}(M)$ が adjacent であるとは, $\mathfrak{a}_P^+$ と $\mathfrak{a}_{P'}^+$ が余次元 1 の共通の wall を持つことをいう. 各 $P \in \mathcal{P}(M)$ に対して $c_P(\lambda)$ を $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ についての滑らかな関数とする. そのような関数の集まり

$$\{\, c_P(\lambda) \mid P \in \mathcal{P}(M)\,\}$$

が (G, M)-family であるとは, P と P' が adjacent であるような任意のペア $P,\, P' \in \mathcal{P}(M)$ について

$$c_P(\lambda) = c_{P'}(\lambda)\,, \quad {}^\forall\lambda \in (i(\mathfrak{a}_M^*)_P^+ \text{と}\ i(\mathfrak{a}_M^*)_{P'}^+ \text{の wall のなす超平面})$$

が成り立つことを意味する. **以下, $\{c_P(\lambda) \,|\, P \in \mathcal{P}(M)\}$ を (G, M)-family と仮定する.**

サブサブセクション 2.1 において $\mathfrak{a}_G$, $\mathfrak{a}_M$, $\mathfrak{a}_G^*$, $\mathfrak{a}_M^*$ 上のハール測度を固定したので, $\mathfrak{a}_M^G$ と $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ 上のハール測度もすでに固定されていることに気をつけよう. $\mathbb{Z}(\Delta_P^\vee)$ を $\Delta_P^\vee$ で生成される $\mathfrak{a}_M^G$ の格子とする. 次に,

$$\theta_P(\lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_M^G/\mathbb{Z}(\Delta_P^\vee))^{-1} \prod_{\alpha\in\Delta_P} \lambda(\alpha^\vee)\,, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$$

と λ の斉次多項式 $\theta_P(\lambda)$ を定める. そして,

$$c_M(\lambda) = \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \frac{c_P(\lambda)}{\theta_P(\lambda)}$$

と置く.

補題 3.1. 関数 $c_M(\lambda)$ は $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の滑らかな関数に拡張される.

後で $c_M(\lambda)$ の $\lambda = 0$ での値に注目することになる. そのため, $c_M(\lambda)$ の $\lambda = 0$ での値を c_M と書く. つまり, $c_M = c_M(0)$ と置く.

$P \in \mathcal{P}(M)$ と $P \subset Q$ となる $Q \in \mathcal{F}(M)$ とについて

$$\widehat{\theta}_P^Q(\lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}((\widehat{\Delta}_P^Q)^\vee))^{-1} \prod_{\varpi\in\widehat{\Delta}_P^Q} \lambda(\varpi^\vee)\,, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$$

と置く. 当然 $\widehat{\theta}_P^Q(\lambda)$ は λ に関する多項式である. 直和分解 $\mathfrak{a}_M^* = (\mathfrak{a}_P^Q)^* \oplus \mathfrak{a}_Q^*$ による $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ の $i\mathfrak{a}_Q^*$ への射影の像を λ_Q とする. 関数 c_P の $i\mathfrak{a}_Q^*$ への制限を c_Q とする. つまり $c_Q = c_P|_{i\mathfrak{a}_Q^*}$ と置いた. そして,

$$c_P'(\lambda) = \sum_{\mathbb{Q}\supset P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^Q}\, c_Q(\lambda_Q)\, \widehat{\theta}_P^Q(\lambda)^{-1}\, \theta_Q(\lambda_Q)^{-1}$$

と置く.

補題 3.2. 関数 $c_P'(\lambda)$ は $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の滑らかな関数に拡張される.

この場合も $c_P'(\lambda)$ の $\lambda = 0$ での値を c_P' と書く. つまり, $c_P' = c_P'(0)$ と置く.

3.2　(G, M)-family の例

$x \in G(\mathbb{A})$ と $P \in \mathcal{P}(M)$ について, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の関数 $v_P(\lambda, x)$ を

$$v_P(\lambda, x) = e^{-\lambda(H_P(x))}$$

によって定める. $-H_P(x) \in \mathfrak{a}_M^G$ に注意する.

補題 3.3. 固定した $x \in G(\mathbb{A})$ について, $\{v_P(\lambda, x) \,|\, P \in \mathcal{P}(M)\}$ は (G, M)-*family* となる.

そのため,

$$v_M(\lambda, x) = \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \frac{v_P(\lambda, x)}{\theta_P(\lambda)}$$

と置くと, 関数 $v_M(\lambda, x)$ は $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の滑らかな関数となり, 極限

$$v_M(x) = \lim_{\lambda \to 0} v_M(\lambda, x)$$

は値を持つ. 特に $v_M(x)$ は $\mathfrak{a}_M^G$ 上の点 $-H_P(x)$, $P \in \mathcal{P}(M)$ を結ぶことで得られる convex hull の体積と一致することが知られている. そして, 幾何サイドの重み付き軌道積分の重み因子として現れる.

H, $X \in \mathfrak{a}_0^G$ についての関数 $\Gamma'_P(H, X)$ を等式

$$\widehat{\tau}_P(H - X) = \sum_{Q \supset P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^G}\, \widehat{\tau}_P^Q(H)\, \Gamma'_Q(H, X)$$

を用いて $\dim \mathfrak{a}_P^G$ に関して帰納的に定義する. もちろん, $\Gamma'_P(H, X)$ は H と X の $\mathfrak{a}_P^G$ への射影にのみ依存している.

補題 3.4. 任意に固定した X と P について関数 $H \mapsto \Gamma'_P(H, X)$ は $H \in \mathfrak{a}_P^G$ に関してコンパクトサポートを持つ. そして, 関数

$$X \;\mapsto \int_{\mathfrak{a}_P^G} \Gamma'_P(H, X) \mathrm{d}H, \quad X \in \mathfrak{a}_P^G$$

は X に関する $\dim \mathfrak{a}_P^G$ 次の斉次多項式となる.

関数 $\Gamma'_P(H, X)$ はテスト関数への $G(\mathbb{A})$ の共役の作用を考えたときに, 跡公式に自然に現れる. ここで

$$v'_P(\lambda, x) = \sum_{Q \supset P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^Q}\, v_Q(\lambda_Q, x)\, \widehat{\theta}_P^Q(\lambda)^{-1}\, \theta_Q(\lambda_Q)^{-1}$$

と置くと,

$$v'_P(\lambda, x) = \int_{\mathfrak{a}_P^G} \Gamma'_P(H, -H_P(x))\, e^{\lambda(H)} \mathrm{d}H$$

が成り立つことが知られている.

3.3 (G,M)-family に関する公式

(G,M)-family $\{c_P(\lambda)\,|\,P\in\mathcal{P}(M)\}$ から別の family を作ろう．任意に $Q\in\mathcal{F}(M)$ を一つ固定する．M_Q の放物型部分群 $R\in\mathcal{P}^{M_Q}(M)$ に対して, $Q(R)\subset Q$ かつ $Q(R)\cap M_Q=R$ を満たす唯一の $Q(R)\in\mathcal{P}(M)$ が存在する．これより, $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の関数 $c_R^Q(\lambda)$ を

$$c_R^Q(\lambda)=c_{Q(R)}(\lambda)$$

によって定義する．そして, このとき $\{c_R^Q(\lambda)\,|\,R\in\mathcal{P}^{M_Q}(M)\}$ は (M_Q,M)-family となる．次に任意に $L\in\mathcal{L}(M)$ を一つ固定する．$Q\in\mathcal{P}(L)$ に対して, $\lambda\in i\mathfrak{a}_L^*$ 上の関数 $c_Q(\lambda)$ を, $P\subset Q$ となる $P\in\mathcal{P}(M)$ を使って

$$c_Q(\lambda)=c_P(\lambda)$$

と定義する．この値は P の選択に依存しない．このとき, $\{c_Q(\lambda)\,|\,Q\in\mathcal{P}(L)\}$ は (G,L)-family となる．最後に, $\{d_P(\lambda)\,|\,P\in\mathcal{P}(M)\}$ も (G,M)-family として, $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の関数 $(cd)_P(\lambda)$ を

$$(cd)_P(\lambda)=c_P(\lambda)\,d_P(\lambda)$$

と定義する．このとき, $\{(cd)_P(\lambda)\,|\,P\in\mathcal{P}(M)\}$ も (G,M)-family である．

補題 3.5. $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ について

$$(cd)_M(\lambda)=\sum_{Q\in\mathcal{F}(M)}c_M^Q(\lambda)\,d_Q'(\lambda_Q)$$

が成り立つ．特に

$$(cd)_M=\sum_{Q\in\mathcal{F}(M)}c_M^Q\,d_Q'$$

を得る．

k_1 を $\mathbb{Q}$ の拡大体とする．$k_1=\mathbb{Q}$ でも良い．M は G の k_1 上の Levi 部分群 M_1 を含むと仮定する．k_1 上定義される M_1 上の指標 $X(M_1)_{k_1}$ を考えれば, $\mathfrak{a}_{M_1}$ 等が同様に定義できることが分かる．そして, $\mathfrak{a}_M$ は $\mathfrak{a}_{M_1}$ の部分空間となる．$\{c_{P_1}(\lambda)\,|\,P_1\in\mathcal{P}(M_1)\}$ を (G,M_1)-family と仮定する．さらに, $P\in\mathcal{P}(M)$ に関して, $\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ 上の関数 $c_P(\lambda)$ を, $P_1\subset P$ となる $P_1\in\mathcal{P}(M_1)$ を使って

$$c_P(\lambda)=c_{P_1}(\lambda)$$

と定義する．この値は P_1 の選択に依存しない．そして, $\{c_P(\lambda)\,|\,P\in\mathcal{P}(M)\}$ は (G,M)-family となる．各 $L_1\in\mathcal{L}(M_1)$ について $\mathfrak{a}_{M_1}^{L_1}$ 上のハール測度を固定する．各 $L_1\in\mathcal{L}(M_1)$ に対する正の実数 $d_{M_1}^G(M,L_1)$ を次のように定義する．まず自然な写像

$$\mathfrak{a}_{M_1}^M\oplus\mathfrak{a}_{M_1}^{L_1}\to\mathfrak{a}_{M_1}^G$$

が同型でないならば, $d^G_{M_1}(M, L_1) = 0$ と定める. もしその写像が同型ならば,

$$(\mathfrak{a}^G_{M_1}\text{上のハール測度}) = d^G_{M_1}(M, L_1) \times (\mathfrak{a}^M_{M_1} \oplus \mathfrak{a}^{L_1}_{M_1}\text{上のハール測度})$$

によって $d^G_{M_1}(M, L_1)$ を定める. さらに $\mathfrak{a}^M_{M_1}$ 上に一つの小さいベクトル ξ を固定する. もし $L_1 \in \mathcal{L}(M_1)$ かつ $d^G_{M_1}(M, L_1) \neq 0$ であるなら, $\xi + \mathfrak{a}^G_M$ と $\mathfrak{a}^G_{L_1}$ は一つの点で交わる. ある唯一の $Q_1 \in \mathcal{P}(L_1)$ が存在して, その点が $\mathfrak{a}^+_{Q_1}$ に属する. つまり, ベクトル ξ によって, $L_1 \in \mathcal{L}(M_1)$, $d^G_{M_1}(M, L_1) \neq 0$ に対して $Q_1 \in \mathcal{P}(L_1)$ を一つ定めることができる.

補題 3.6. $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_M$ について

$$c_M(\lambda) = \sum_{L_1 \in \mathcal{L}(M_1)} d^G_{M_1}(M, L_1)\, c^{Q_1}_{M_1}(\lambda)$$

が成り立つ. 特に

$$c_M = \sum_{L_1 \in \mathcal{L}(M_1)} d^G_{M_1}(M, L_1)\, c^{Q_1}_{M_1}$$

が成り立つ.

この補題の $k_1 = \mathbb{Q}$, $\mathcal{G} = G \times G$, $M_1 = \mathcal{M} = M \times M$ の場合を考えよう. $\mathcal{M} = M \times M$ に M を対角に埋め込んで, $M \subset \mathcal{M}$ とする. このとき, $\mathfrak{a}_M$ も $\mathfrak{a}_{\mathcal{M}} = \mathfrak{a}_M \oplus \mathfrak{a}_M$ への対角の埋め込みにより, $\mathfrak{a}_M$ を $\mathfrak{a}_{\mathcal{M}}$ の部分空間となる. そして, $\mathcal{G}$ の $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ に属する Levi 部分群はペア $L = (L_1, L_2)$, L_1, $L_2 \in \mathcal{L}(M)$ によって与えられる. さらに

$$d^{\mathcal{G}}_{\mathcal{M}}(M, L) = 2^{\frac{1}{2}\dim \mathfrak{a}^G_M}\, d^G_M(L_1, L_2)$$

が成り立つ. 一方で, $P = (Q, Q) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Q \in \mathcal{P}(M)$ と $\lambda \in \mathfrak{a}^*_M$ について

$$\theta_P(\lambda) = 2^{\frac{1}{2}\dim \mathfrak{a}^G_M} \theta_Q(\lambda)$$

となることにも注意したい. これより下の補題で $2^{\frac{1}{2}\dim \mathfrak{a}^G_M}$ が現れない. 小さいベクトル $\xi \in \mathfrak{a}^M_{\mathcal{M}}$ を一つ固定する. この ξ によりペア $(L_1, L_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, L_1, $L_2 \in \mathcal{L}(M)$, $d^G_M(L_1, L_2) \neq 0$ からペア $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Q_1 \in \mathcal{P}(L_1)$, $Q_2 \in \mathcal{P}(L_2)$ への対応を得る.

$$\mathfrak{a}^M_{\mathcal{M}} = \{(H, -H) \mid H \in \mathfrak{a}_M\}$$

であり, $\mathfrak{a}^{L_1}_M \oplus \mathfrak{a}^{L_2}_M = \mathfrak{a}^G_M$ なので,

$$\xi = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2, \quad \xi_1 \in \mathfrak{a}^{L_1}_M, \quad \xi_2 \in \mathfrak{a}^{L_2}_M$$

と書くことができ,

$$\xi_1 \in \mathfrak{a}^+_{Q_1} \quad \text{and} \quad \xi_2 \in \mathfrak{a}^+_{Q_2}$$

が成り立つ.

補題 3.7. $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ について

$$(cd)_M(\lambda) = \sum_{L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2)\, c_M^{Q_1}(\lambda)\, d_M^{Q_2}(\lambda)$$

が成り立つ．特に

$$(cd)_M = \sum_{L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2)\, c_M^{Q_1}\, d_M^{Q_2}$$

が成り立つ．

3.4 GL(3) の場合

まず $x \in G(\mathbb{A})^1$ を一つ固定する．$s \in W_0$ に対して

$$Y_s = -H_{sP_0}(x) \in \mathfrak{a}_0^G$$

と置く．この Y_s を具体的に計算することで，跡公式の幾何サイドに関連する (G, M)-family の例

$$\{\, v_{sP_0}(\lambda, x) = e^{\lambda(Y_s)} \mid s \in W_0\}$$

の雰囲気を説明したい．$(s\alpha)(w_s a w_s^{-1}) = \alpha(a)$, $\alpha \in \mathfrak{a}_0^*$, $a \in A_0$ を思い出せば

$$\langle s^{-1} H_{sP_0}(w_s x w_s^{-1}), \alpha\rangle = \langle H_0(x), \alpha\rangle$$

が示せるので，

$$H_{sP_0}(x) = sH_0(w_s^{-1}x) \tag{3.1}$$

が成り立つことに注意しよう．

$$x = mnk \in G(\mathbb{A})^1\,, \quad m \in M_0(\mathbb{A})\,,\ n = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} \\ 0 & 1 & n_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_{P_0}(\mathbb{A})\,,\ k \in \mathbf{K}$$

と記号を定める．Y_s の計算を始める前に次の補題を与えておく．

補題 3.8. $n \in \mathbb{C}$ について

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+|n|^2)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (1+|n|^2)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(1+|n|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{n} \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．F を標数 0 の非アルキメデス的局所体とし，$\mathcal{O}$ をその整環，π を素元とする．e が 0 より大きい整数のとき，$n \in \pi^{-e}\mathcal{O}^\times$ について

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^e & 0 \\ 0 & \pi^{-e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \pi^{-2e}\, n^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\pi^{-e}\, n^{-1} \\ \pi^e\, n & \pi^e \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

どちらも直接計算で簡単に証明できる. Iwasawa 分解になっていることに気をつけよう. $n=(n_v)\in\mathbb{A}$ に対して

$$\psi(n)=\sum_v \psi_v(n_v)\,,\ \psi_\infty(n_\infty)=\log(1+n_\infty^2)^{1/2}\,,\ \psi_v(n_v)=\max\{\log|n_v|_v\,,\,0\}\text{ if }v<\infty$$

と $\mathbb{A}$ 上の関数 ψ を定める. ただし, $v<\infty$ について $\psi_v(0)=0$ とする.

まず (12) について考えよう. $m\in M_0(\mathbb{A})$ について $H_{sP_0}(m)=H_0(m)$ なのだから, (3.1) より

$$Y_{(12)}-Y_e=-(12)H_0(\begin{pmatrix}1&0&n_{23}\\ n_{12}&1&n_{13}\\ 0&0&1\end{pmatrix})=-(12)H_0(\begin{pmatrix}1&0&0\\ n_{12}&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix})$$

を得る. よって補題 3.8 より

$$Y_{(12)}=-\psi(n_{12})(e_1-e_2)+Y_e$$

が得られた. これにより Y_e と $Y_{(12)}$ の位置関係が分かる. 特に (12) で固定される直線 $\mathfrak{a}_{M_{12}}^G$ と点 Y_e と点 $Y_{(12)}$ を結ぶ直線が垂直に交わることが分かる. 他の場合も同様に補題 3.8 より計算できる. $n_1=(n_{1,v})$, $n_2=(n_{2,v})\in\mathbb{A}$ に対して

$$\begin{aligned}&\psi(n_1,n_2)=\sum_v\psi_v(n_{1,v},n_{2,v})\,,\quad \psi_\infty(n_{1,\infty},n_{2,\infty})=\log(1+n_{1,\infty}^2+n_{2,\infty}^2)^{1/2}\,,\\ &\psi_v(n_{1,v},n_{2,v})=\max\{\log|n_{1,v}|_v\,,\,\log|n_{2,v}|_v\,,\,0\}\text{ if }v<\infty\end{aligned}$$

と $\mathbb{A}$ 上の関数 ψ を定める. このとき, 以下のようになる.

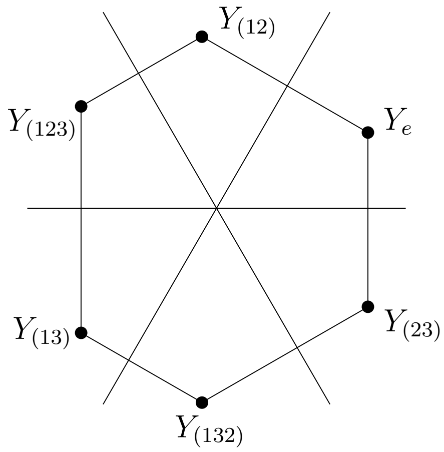
$$\begin{aligned}Y_{(12)}-Y_e=&-\psi(n_{12})(e_1-e_2)\,,\\ Y_{(23)}-Y_e=&-\psi(n_{23})(e_2-e_3)\,,\\ Y_{(123)}-Y_e=&\,\psi(n_{12})(e_2-e_3)-\psi(n_{12},n_{13})(e_1-e_3)\,,\\ Y_{(132)}-Y_e=&\,\psi(n_{23})(e_1-e_2)-\psi(n_{13}-n_{12}n_{23},n_{23})(e_1-e_3)\,,\\ Y_{(13)}-Y_e=&-\psi(n_{12},n_{13})(e_1-e_2)-\psi(n_{13}-n_{12}n_{23},n_{23})(e_2-e_3)\,.\end{aligned}$$

図の記述を簡単にするため $\alpha_{12}(-H_0(x))>0$ かつ $\alpha_{23}(-H_0(x))>0$ を仮定すると, 上の計算結果から Convex hull の図 6 が得られる. これらの結果や図からも分かるように, $P=sP_0\in\mathcal{P}$ に対して, $\alpha\in\Phi_P$ と adjacent なペア $s_\alpha P$ と P について, 非負整数 r_α が存在して,

$$Y_s-Y_{s_\alpha s}=r_\alpha\,\alpha^\vee$$

が成り立つことが分かる (cf. [A2]). 先に述べたように, この Convex hull の内部の体積と $v_{M_0}(x)$ の値が一致することが知られている.

図 6: Convex hull



次に $\Gamma'_P(H,X)$ を $P=P_0$, P_1, P_2, G に対して計算しよう (他の場合も同様に計算できる).

$$
\begin{aligned}
H =& H_1(e_1-e_2)+H_2(e_2-e_3)\in\mathfrak{a}_0^G \\
X =& X_1(e_1-e_2)+X_2(e_2-e_3)\in\mathfrak{a}_0^G
\end{aligned}
$$

と記号を定める. 明らかに任意の H, $X\in\mathfrak{a}_0^G$ について

$$\Gamma'_G(H,X)=1$$

である. 続いて定義から

$$\widehat{\tau}_{P_1}(H-X)=\widehat{\tau}_{P_1}(H)\,\Gamma'_G(H,X)-\widehat{\tau}_{M_{P_1}}(H)\,\Gamma'_{P_1}(H,X)$$

であり,

$$\widehat{\tau}_{P_1}(H)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad H_2>0\,, \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\,, \quad \widehat{\tau}_{M_{P_1}}(H)=1$$

なので

$$\Gamma'_{P_1}(H,X)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad 0<H_2\leq X_2\,, \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

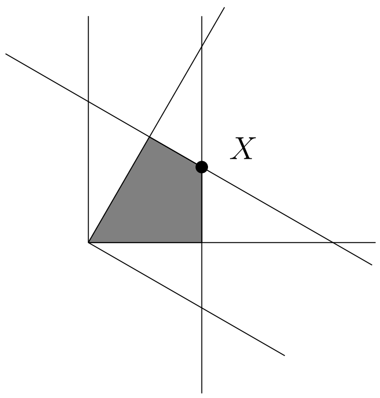
を得る. 同様に

$$\Gamma'_{P_2}(H,X)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad 0<H_1\leq X_1\,, \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

が示せる. 定義より

$$
\begin{aligned}
\widehat{\tau}_{P_0}(H-X) =& \widehat{\tau}_{P_0}(H)\,\Gamma'_G(H,X)-\widehat{\tau}^{M_{P_1}}_{M_{P_1}\cap P_0}(H)\,\Gamma'_{P_1}(H,X) \\
&-\widehat{\tau}^{M_{P_2}}_{M_{P_2}\cap P_0}(H)\,\Gamma'_{P_2}(H,X)+\widehat{\tau}_{M_{P_0}}(H)\,\Gamma'_{P_0}(H,X)
\end{aligned}
$$

図 7: $\Gamma'_{P_0}(H,X)$ のサポート



であり,

$$\widehat{\tau}_{P_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad H_1 > 0 \text{ and } H_2 > 0\,, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\,, \quad \widehat{\tau}_{M_{P_0}}(H) = 1\,,$$

$$\widehat{\tau}^{M_{P_2}}_{M_{P_1}\cap P_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad H_1 - \frac{1}{2}H_2 > 0\,, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\,, \quad \widehat{\tau}^{M_{P_2}}_{M_{P_2}\cap P_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad -\frac{1}{2}H_1 + H_2 > 0\,, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ. そのため,

$$\Gamma'_{P_0}(H,X) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 0 < H_1 \le X_1\,,\ 0 < H_2 \le X_2\,,\ H_2 < 2H_1\,,\ \text{and } H_1 < 2H_2\,, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ. よって, X を固定して $\Gamma'_{P_0}(H,X)$ を $H \in \mathfrak{a}_0^G$ に関する関数とみると, そのサポートは図 7 の影のようになることが分かる. 特に図 6 の convex hull の図を見れば, $X = Y_e$ としたとき, その Y_e から出ている直線と $\mathfrak{a}_{P_1}^G$ と $\mathfrak{a}_{P_2}^G$ で囲まれた図形と一致することが分かると思う.

補題 3.5 の二つ目の公式を図で見てみよう. 元 x とは異なるもう一つの元 $x' \in G(\mathbb{A})^1$ を一つ固定する. 同様に $s \in W_0$ に対して

$$Z_s = -H_{sP_0}(x') \in \mathfrak{a}_0^G$$

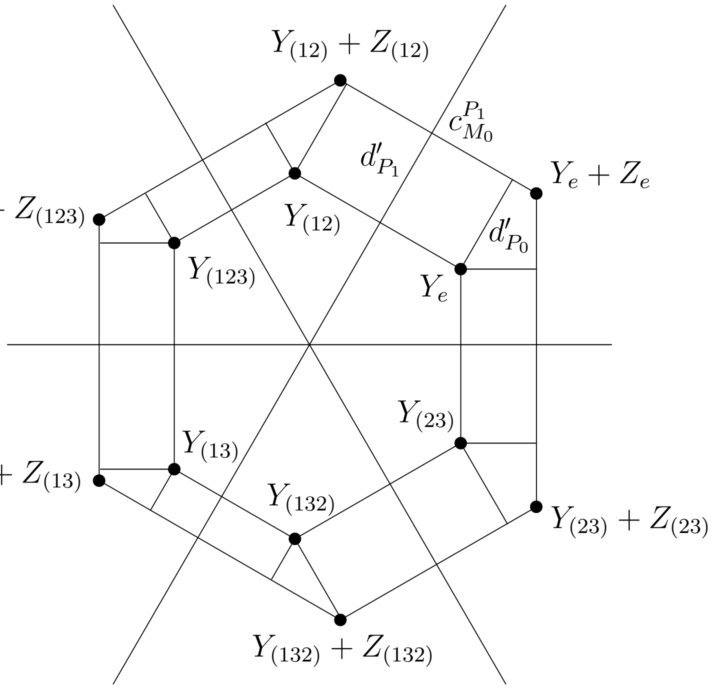
と置く.

$$c_{sP_0}(\lambda) = e^{\lambda(Y_s)}\,, \quad d_{sP_0}(\lambda) = e^{\lambda(Z_s)}$$

とすると, 二つの (G,M)-family $\{c_P(\lambda) \mid P \in \mathcal{P}\}$, $\{d_P(\lambda) \mid P \in \mathcal{P}\}$ が得られる. そして, それらの積から得られる (G,M)-family $\{(cd)_P(\lambda) \mid P \in \mathcal{P}\}$ が

$$(cd)_{sP_0}(\lambda) = e^{\lambda(Y_s + Z_s)}$$

図 8: Convex hull II



で定められる. Y_s と $Y_s + Z_s$ から得られる convex hull を図 8 に描いた. 補題 3.5 より,

$$\begin{aligned}(cd)_{M_0} =& c_{M_0}^{G} + c_{M_0}^{P_1} d'_{P_1} + c_{M_0}^{(13)P_1} d'_{(13)P_1} + c_{M_0}^{(23)P_1} d'_{(23)P_1} \\ &+ c_{M_0}^{P_2} d'_{P_2} + c_{M_0}^{(12)P_2} d'_{(12)P_2} + c_{M_0}^{(13)P_2} d'_{(13)P_2} + \sum_{s \in W_0} d'_{sP_0}\end{aligned}$$

となる. もちろん $(cd)_{M_0}$ は $Y_s + Z_s$ の convex hull の内部の体積になる. 図 8 を見れば, この公式が図における $Y_s + Z_s$ の convex hull の分割に対応していることは明らかだと思う.

補題 3.6 と 3.7 の公式に関しても同様に図を使って考えることができる. この原稿には書かないが, 読者の方で興味のある方はぜひ図を描いてみてほしい.

4 細かい展開

このセクションでは [A1, §.18, 19, 20, 21] において説明されている $J_{\mathfrak{o}}(f)$ と $J_{\chi}(f)$ の細かい展開について述べる. これらの結果に関するアーサーの論文に関しては [A1] を参照されたい.

4.1 幾何サイド

$J_{\mathfrak{o}}(f)$ を重み付き軌道積分の和に細かく展開しよう．まずは記号を定めていく．

S を素点の有限集合とし, $\infty \in S$ とする．そして,

$$G(\mathbb{Q}_S) = \prod_{v \in S} G(\mathbb{Q}_v)$$

と置く．$G(\mathbb{Q}_S)^1 = G(\mathbb{Q}_S) \cap G(\mathbb{A})^1$ とし, $C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ は $G_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S))$ の関数を $G(\mathbb{Q}_S)^1$ へ制限して得られる関数から成る空間とする．χ_v を $\mathbf{K}_v$ の特性関数とし, $\chi^S = \prod_{v \notin S} \chi_v$ と置く．このとき, $C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ から $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ への単射が $f \to f\chi^S$ で与えられる．そこで, $C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ とこの単射の像を同一視する．

元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ について, $G_{\gamma,+}$ を $\mathbb{Q}$ 上定義される γ の G における中心化群とする．そして, G_γ を 1 を含む $G_{\gamma,+}$ の連結成分とする．

元 $\gamma = (\gamma_v) \in M(\mathbb{Q})$ を一つ固定する．σ_v を γ_v の Jordan 分解の semisimple part とする．まず $G_\gamma \subset M$ となる場合には, $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S))$ について,

$$J_M(\gamma, f) = \Big| \prod_{v \in S} \det(1 - \mathrm{Ad}(\sigma_v))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\sigma_v}} \Big|^{1/2} \int_{G_\gamma(\mathbb{Q}_S) \backslash G(\mathbb{Q}_S)} f(x^{-1}\gamma x)\, v_M(x)\, \mathrm{d}x$$

と $J_M(\gamma, f)$ を定義する．次に $G_\gamma \not\subset M$ の場合には, ある標準的な関数 $r_M^L(\gamma, a)$, $L \in \mathcal{L}(M)$, $a \in A_M(\mathbb{Q}_S)$ が存在して, a は $G_{a\gamma} \subset M \subset L$ を満たしながら動くようにしすることで上の場合に定義された $J_L(a\gamma, f)$ よって,

$$J_M(\gamma, f) = \lim_{a \to 1} \sum_{L \in \mathcal{L}(M)} r_M^L(\gamma, a)\, J_L(a\gamma, f)$$

と $J_M(\gamma, f)$ が定義される．

$S = S_1 \cup S_2$ (disjoint union) と二つの集合に分け,

$$f = f_1\, f_2\,, \quad f_1 \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_{S_1}))\,,\ f_2 \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_{S_2}))\,,$$

$$\gamma = \gamma_1\, \gamma_2\,, \quad \gamma_1 \in G(\mathbb{Q}_{S_1}))\,,\ \gamma_2 \in G(\mathbb{Q}_{S_2})$$

と仮定する．このとき, $G_\gamma \subset M$ の場合には, $J_M(\gamma, f)$ の定義と補題 3.7 より

$$J_M(\gamma, f) = \sum_{L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M)} d_M^G(L_1, L_2)\, J_M^{L_1}(\gamma_1, f_{Q_1})\, J_M^{L_2}(\gamma_2, f_{Q_2})$$

が成り立つ．ただし, (L_1, L_2) に (Q_1, Q_2) が対応しており, $r = 1$ or 2 について, $\mathbf{K}_{S_r} = \prod_{v \in S_r} \mathbf{K}_v$ とし,

$$f_{r,Q_r}(m) = \delta_Q(m)^{1/2} \int_{\mathbf{K}_{S_r}} \int_{N_{Q_r}(\mathbb{Q}_{S_r})} f_r(k^{-1} mnk)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}k\,,\ m \in M_{Q_r}(\mathbb{Q}_{S_r})\,,$$

と置いた．この公式を帰納的に使えば各素点上の積分の積に分解できることが分かる．

元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ を一つ固定する．σ を γ の Jordan 分解における semi-simple part とする．γ と γ' が (G, S)-同値であるとは, 次の条件 (i) と (ii) が成り立つことを意味する．

(i) σ と $\delta^{-1}\gamma'\delta$ の semi-simple part が一致するような $\delta \in G(\mathbb{Q})$ が存在する.

(ii) ユニポテント $\sigma^{-1}\gamma$ と $\sigma^{-1}\delta^{-1}\gamma'\delta$ は $G_\sigma(\mathbb{Q}_S)$ において共役である.

$(\mathcal{U}_{G_\sigma}(\mathbb{Q}))_{G_\sigma,S}$ を $G_\sigma(\mathbb{Q})$ のユニポテント元全体における (G_σ, S)-同値類の集合とする. $(\mathcal{U}_{G_\sigma}(\mathbb{Q}))_{G_\sigma,S}$ は有限集合であることに注意する.

定理 4.1. $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}$ を $G(\mathbb{Q})$ のユニポテント元全体の集合とする. 無限素点 ∞ を含む任意の素点の有限集合 S について, G, S, $u \in (\mathcal{U}_G(\mathbb{Q}))_{G,S}$ によって唯一に定まる定数 $a^G(S,u)$ が存在して, 任意の $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ について

$$J_{\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}}(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}} |W_0^M|\,|W_0^G|^{-1} \sum_{u\in(\mathcal{U}_M(\mathbb{Q}))_{M,S}} a^M(S,u)\, J_M(u,f)$$

が成り立つ. さらに任意の S に対して

$$a^M(S,1) = \mathrm{vol}(M(\mathbb{Q})\backslash M(\mathbb{A})^1)$$

が成り立つ.

さらにこの定理をすべての $\mathcal{O}$-同値類に対して拡張した結果を紹介しよう. 次のように記号を定める.

$$\varepsilon^G(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad A_{G_\sigma} = A_G\,, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\iota^G(\sigma) = G_{\sigma,+}(\mathbb{Q})/G_\sigma(\mathbb{Q})\,.$$

そして,

$$a^G(S,\gamma) = \varepsilon^G(\sigma)\,|\iota^G(\sigma)|^{-1} \sum_{u\in(\mathcal{U}_{G_\sigma}(\mathbb{Q}))_{G_\sigma,S}/\sim} a^{G_\sigma}(S,u)$$

と置く. 特に γ が semi-simple ならば

$$a^G(S,\gamma) = \varepsilon^G(\sigma)\,|\iota^G(\sigma)|^{-1}\,\mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{A})^1)$$

となる. $(M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o})_{M,S}$ を $M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}$ における (M,S)-同値類の有限集合とする.

定理 4.2. 任意の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ に対して, 無限素点 ∞ を含むある素点の有限集合 $S_\mathfrak{o}$ が存在して, 任意の $S \supset S_\mathfrak{o}$ と任意の $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_S)^1)$ について

$$J_\mathfrak{o}(f) = \sum_{M\in\mathcal{L}} |W_0^M|\,|W_0^G|^{-1} \sum_{\gamma\in(M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o})_{M,S}} a^M(S,\gamma)\, J_M(\gamma,f)$$

が成り立つ.

4.2 スペクトルサイド

$L^2_{\mathrm{disc}}(M_P(\mathbb{Q})\backslash M_P(\mathbb{A})^1)=\oplus_{\pi\in\widehat{M(\mathbb{A})^1}}m_{\mathrm{disc}}(\pi)\cdot\pi$ とする．ただし，$m_{\mathrm{disc}}(\pi)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は π の重複度とする．$\pi\in\widehat{M_P(\mathbb{A})}^1$ について，$\mathcal{H}_{P,\pi}$ を $\phi\in\mathcal{H}_P$ で $\phi_x\in m_{\mathrm{disc}}(\pi)\cdot\pi$ となるもの全体の空間とする．そして，$\mathcal{H}_{P,\chi,\pi}=\mathcal{H}_{P,\chi}\cap\mathcal{H}_{P,\pi}$ と置く．このとき，

$$\mathcal{H}_{P,\chi}=\bigoplus_{\pi\in\widehat{M_P(\mathbb{A})}^1}\mathcal{H}_{P,\chi,\pi}$$

と直和分解する．$\mathcal{I}_{P,\chi}(\lambda)$ の $\mathcal{H}_{P,\chi,\pi}$ への制限を $\mathcal{I}_{P,\chi,\pi}$ と書く．次に $W(M)=W^G(M)=W(\mathfrak{a}_M,\mathfrak{a}_M)$ とする．例えば $G=\mathrm{GL}(3)$ の場合，

$$W^{M_{12}}(M)=\begin{cases}\{e\,,\,(12)\} & \text{if } M=M_0,\\ \{e\} & \text{if } M=M_{12}\end{cases}$$

となる．$s\in W(M)$ で固定される部分空間を $\mathfrak{a}_M^s=\{H\in\mathfrak{a}_M\,|\,t(H)=H\}$ と置く．有限群 $W^L(M)$ の正則元から成る部分集合 $W^L(M)_{\mathrm{reg}}$ が

$$W^L(M)_{\mathrm{reg}}=\{t\in W^L(M)\,|\,\mathfrak{a}_M^t=\mathfrak{a}_L\}$$

と定義される． スペクトルサイドの細かい展開の記述のために，最後に intertwing operator の記号を定めよう． $P,\ Q\in\mathcal{P}(M)$，$s\in W(M)$，$\lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ に対して，ユニタリ表現 $(\mathcal{I}_P(\lambda),\mathcal{H}_P)$ と $(\mathcal{I}_Q(s\lambda),\mathcal{H}_Q)$ に対して，ある unitary intertwing operator $M_{Q|P}(s,\lambda)\,:\,\mathcal{H}_P\to\mathcal{H}_Q$ が存在する．$M_{Q|P}(\lambda)=M_{Q|P}(1,\lambda)$，$M_P(s,0)=M_{P|P}(s,\lambda)$ と置く．$M_{P|P}(s,\lambda)$ は λ から独立していることに注意する．

$$M_Q(\Lambda,\lambda,P)=M_{Q|P}(\lambda)^{-1}M_{Q|P}(\lambda+\Lambda)\,,\quad \Lambda\in i\mathfrak{a}_M^*\,,\ Q\in\mathcal{P}(M)$$

と置くと，

$$\{M_Q(\Lambda,\lambda,P)\,|\,Q\in\mathcal{P}(M)\}$$

は $\Lambda\in i\mathfrak{a}_M^*$ についての (G,M)-family となり，

$$M_L(\lambda,P)=\lim_{\Lambda\to 0}\sum_{Q\in\mathcal{P}(L)}M_Q(\Lambda,\lambda,P)\,\theta_Q(\Lambda)^{-1}$$

が定義される．

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)=\{f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)\,|\,f\text{ は }\mathbf{K}\text{-有限 }\}$$

とする．次の公式が $J_\chi(f)$ の細かい展開である．

定理 4.3. 任意の $f\in\mathcal{H}(G(\mathbb{A})^1)$ について

$$J_\chi(f)=\sum_{M\in\mathcal{L}(M_0)}\sum_{L\in\mathcal{L}(M)}\sum_{\pi\in\widehat{M(\mathbb{A})^1}}\sum_{s\in W^L(M)_{\mathrm{reg}}}|W_0^M|\,|W_0|^{-1}\,|\det(s-1)_{\mathfrak{a}_M^G}|^{-1}$$
$$\times\int_{i\mathfrak{a}_L^*/i\mathfrak{a}_G^*}\mathrm{tr}(M_L(\lambda,P)\,M_P(s,0)\,\mathcal{I}_{P,\chi,\pi}(\lambda,f))\mathrm{d}\lambda$$

が成り立つ．

4.3 GL(3) の場合

GL(3) の $J_{\mathfrak{o}}(f)$ について具体例を与える.

$$\gamma=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}\in M_0(\mathbb{Q})\,,\quad a_1\neq a_2\,,\ a_1\neq a_3\,,\ a_2\neq a_3$$

とする. 明らかに $G_\gamma=M_0$ となる. γ の属する $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ は γ の $G(\mathbb{Q})$-共役類である. S を $S_{\mathfrak{o}}$ を含む十分大きい素点の有限集合とする. 定義より

$$J_{M_0}(\gamma,f)=D_S(a_1,a_2,a_3)\int_{M_0(\mathbb{Q}_S)\backslash G(\mathbb{Q}_S)} f(x^{-1}\gamma x)\,v_{M_0}(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$D_S(a_1,a_2,a_3)=\prod_{v\in S}|a_1^{-1}a_3(1-a_1a_2^{-1})(1-a_2a_3^{-1})(1-a_1a_3^{-1})|_v$$

となる. サブセクション 3.4 を見れば, $v_{M_0}(x)$ の値が分かる. $M\in\mathcal{L}$, $M\neq M_0$ について, $M(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}$ の元 σ は $A_{M_\sigma}=A_M$ を満たさないことに気をつければ, 定理 4.2 より

$$J_{\mathfrak{o}}(f)=\mathrm{vol}(G_\gamma(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{A})^1)\,J_{M_0}(\gamma,f)$$

を得る. このような $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ に関しては $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ を直接に計算することでも上の等式は得られる (cf. [A1, §.11]).

次に $J_{\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}}(f)$ を定理 4.2 に従って書き下してみよう.

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{o}_{\mathrm{unip}}}(f)=&\frac{1}{6}\,\mathrm{vol}(M_0(\mathbb{Q})\backslash M_0(\mathbb{A})^1)\,J_{M_0}(1,f)\\ &+\frac{1}{3}\Big\{\mathrm{vol}(M_{12}(\mathbb{Q})\backslash M_{12}(\mathbb{A})^1)\,J_{M_{12}}(1,f)+a^{M_{12}}(S,u_{12})\,J_{M_{12}}(u_{12},f)\Big\}\\ &+\frac{1}{3}\Big\{\mathrm{vol}(M_{13}(\mathbb{Q})\backslash M_{13}(\mathbb{A})^1)\,J_{M_{13}}(1,f)+a^{M_{13}}(S,u_{13})\,J_{M_{13}}(u_{13},f)\Big\}\\ &+\frac{1}{3}\Big\{\mathrm{vol}(M_{23}(\mathbb{Q})\backslash M_{23}(\mathbb{A})^1)\,J_{M_{23}}(1,f)+a^{M_{23}}(S,u_{23})\,J_{M_{23}}(u_{23},f)\Big\}\\ &+\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1)\,J_G(1,f)+a^G(S,u_1)\,J_G(u_1,f)++a^G(S,u_2)\,J_G(u_2,f), \end{aligned}$$

$$u_{12}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,\ u_{13}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,\ u_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,\ u_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と展開される.

参考文献

[A1] J. Arthur, An introduction to the trace formula, Clay Mathematics Proceedings 4 (2005), 1–263.

[A2] J. Arthur, The characters of discrete series as orbital integrals, Inv. Math. **32** (1976), 205–261.

[A3] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(Q)$, Duke Math. J. **45** (1978), no. 4, 911–952.

[A4] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. II. Applications of a truncation operator, Compositio Math. **40** (1980), no. 1, 87–121.

[A5] J. Arthur, The local behaviour of weighted orbital integrals, Duke Math. J. **56** (1988), 223–293.

[A6] J. Arthur, The trace formula in invariant form, Ann. of Math. (2) **114** (1981), 1–74.

[A7] J. Arthur, The invariant trace formula. I. Local theory, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 2, 323–383.

[A8] J. Arthur, The invariant trace formula. II. Global theory, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 3, 501–554.

[Bor] A. Borel, Linear algebraic groups, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[PR] V. P. Platonov, A. S. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen, Pure and Applied Mathematics **139**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[Ser] J.-P. Serre, Complex Semisimple Lie Algebras, Springer, New York, 1987.

[TW] 都築 正男, 若槻 聡, GL(2) の跡公式, 本報告集.

Satoshi Wakatsuki

Faculty of Mathematics and Physics, Institute of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakumamachi, Kanazawa, Ishikawa, 920-1192, Japan

E-mail address: `wakatuki[at]kenroku.kanazawa-u.ac.jp`

索 引