# あるアーベル体のイデアル類群に付随する岩澤加群の偶指標部分の高次 Fitting イデアルについて

大下　達也*

京都大学大学院理学研究科　数学・数理解析専攻　数学系　博士後期課程 1 回生

筆者に講演の機会を与えて下さり，本稿を書く機会を与えて下さった，第 18 回整数論サマースクールのオーガナイザーの皆様に，感謝申し上げます．

## 概要

栗原将人氏は，論文 [Ku] において，イデアル類群に付随する岩澤加群の**マイナスパート**の**高次** *Fitting* **イデアル**を決定することで，総実代数体上の岩澤主予想（マイナスパート）の精密化を行うことに成功した．本稿で紹介する筆者の研究は，$\mathbb{Q}(\mu_p)$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に沿ったイデアル類群に付随する岩澤加群の**プラスパート**の高次 Fitting イデアルにおいて，栗原氏の結果の**プラスパート版**の構築を試みたものである（[Oh] 参照）．プラスパートに関しては，高次 Fitting イデアルを完全に決定することまではできていないが，**円単数の** *Euler* **系**を用いて，高次 Fitting イデアルの大きさの評価を与えるような岩澤代数のイデアルを構成して，岩澤主予想（プラスパート）の精密化と見なせる結果を得ることができた．本稿では，この結果の紹介を行いたい．

## 1　主定理

### 1.1　岩澤代数とその加群

主定理を述べるために，本稿で扱う岩澤代数及び加群のセッティングを行いたい．

$p$ を奇素数とし，以下固定する．$\mathcal{F}_m := \mathbb{Q}(\mu_p^{m+1})$ とおく．このとき，

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q}) = \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times (1+p\mathbb{Z}_p)$$

であるから，$\Delta := \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_0/\mathbb{Q})$，$\Gamma_m := \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_0)$（$m \geq 0$）とおくと，

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q}) \simeq \Delta \times \Gamma_0, \quad (\Delta \simeq \mu_{p-1},\ \Gamma_0 \simeq 1+p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p)$$

と直積分解する．

本稿で扱う岩澤代数は，完備群環

$$\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_\infty/\mathbb{Q})]] := \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m/\mathbb{Q})] = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta]$$

である．群 $\Delta$ は位数が $p-1$（特に $p$ と互いに素）の Abel 群であるから，環の直積分解

$$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta] = \prod_{\chi \in \widehat{\Delta}} \Lambda_\chi \quad (\widehat{\Delta} := \mathrm{Hom}(\Delta, \mu_{p-1}))$$

* ohshita@math.kyoto-u.ac.jp

が得られる．ここで，各 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対して，$\Lambda_\chi$ は $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]][\Delta]$ の冪等元

$$\epsilon_\chi := \frac{1}{p-1}\sum_{\sigma\in\Delta}\chi(\sigma)^{-1}\sigma$$

を用いて，$\Lambda_\chi := \epsilon_\chi\Lambda$ で定義される $\Lambda$ 代数である．$\Lambda_\chi$ は，$\mathbb{Z}_p[[\Gamma_0]]$ と同型な環であり，指標 $\chi$ による群 $\Delta$ の作用を持つ．

次に，本稿で扱う加群を定義したい．$A_m$ を $\mathcal{F}_m$ のイデアル類群 $\mathrm{Cl}_{\mathcal{F}_m}$ の $p$-Sylow 部分群とし，ノルム写像による射影系 $\{A_m\}_{m>0}$ の射影極限を $X$ とおく．このとき，$X$ は自然に岩澤代数 $\Lambda$ 上の加群とみなせる．各指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対して，$X_\chi := X \otimes_\Lambda \Lambda_\chi$ とおく．$X_\chi$ は有限生成ねじれ $\Lambda_\chi$ 加群であることが知られている．

本稿の主定理は，非自明な (1 でない) 偶指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ についての，$\Lambda_\chi$ 加群 $X_\chi$ の構造に関する結果である．

## 1.2 主定理

栗原氏は，論文 [Ku] において，（総実代数体上のセッティングで）**奇指標** $\chi \in \widehat{\Delta}$ に関する $X_\chi$ の高次 Fitting イデアルをを次の意味で完全に決定した：

> 「*Stickelberger* **元**」と呼ばれるゼータ関数に由来する Galois 群の群環の元を用いて，「**高次** *Stickelberger* **イデアル**」と呼ばれる $\Lambda_\chi$ のイデアル $\Theta_{i,\chi}$（$i \geq 0$）を構成し，各 $i \geq 0$ に対して，
>
> $$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X_\chi) = \Theta_{i,\chi}$$
>
> であることを証明した．

これは，岩澤主予想の強力な精密化である．（高次 Fitting イデアルの定義に関しては，§ 付録 A 参照.）

概要 (§1) で述べたとおり，本稿の主定理は，この結果の「**プラスパート**」版に関するものである．指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ が偶指標であるときは，奇指標のときには出てこないような技術的な困難が現れるため，$X_\chi$ の高次 Fitting イデアルを完全に決定することまでは，未だ達成できていないが，以下で述べるように，高次 Fitting イデアルの（非自明な）評価を与えるあるイデアルを，円単数を用いて構成することができた．それが本稿の主結果である．

$\chi \in \widehat{\Delta}$ を 1 でない任意の偶指標とする．$X_\chi$ の最大擬零部分 $\Lambda_\chi$ 加群を $X_{\mathrm{fin},\chi}$ と置き，$X'_\chi := X_\chi/X_{\mathrm{fin},\chi}$ と置く．本来の主たる興味は，$X_\chi$ の構造にあるのだが，技術的な問題により，$X$ と同じ擬同型類に属する，より扱い易い加群 $X'_\chi$ の研究を行う．（「擬同型類を記述することが目標である」という立場から研究を行うのであれば，このように $X_\chi$ を $X'_\chi$ に取り換えても問題はない.）

本稿 §2.2 では，各非負整数 $i$ に対して，高次 Stickelberger イデアルのプラスパート版の対応物になるような $\Lambda_\chi$ のイデアル $\mathfrak{C}_{i,\chi}$ を，Stickelberger 元の代わりに**円単数**を用いて構成する．次の定理（本稿の主定理）が主張するように，これらのイデアル $\mathfrak{C}_{i,\chi}$ は，$\{\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi)\}_{i\geq 0}$ の上界を与えるものである．

**定理 1.1.** $\chi$ を 1 でない $\Delta$ の指標とする．$\Lambda_\chi$ 加群 $X_{\mathrm{fin},\chi}$ の零化元（annihilator）全体を $\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})$ とおく．このとき，次が成立する．

(i) $\mathfrak{C}_{0,\chi} \subseteq \mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,0}(X'_\chi)$.
(ii) 任意の $i \geq 0$ に対して，$\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})\,\mathrm{Fitt}_{\Lambda_\chi,i}(X'_\chi) \subseteq \mathfrak{C}_{i,\chi}$.

主定理に関して，いくつか注意を述べておく．

**注意 1.2.** $\mathrm{ann}_{\Lambda_\chi}(X_{\mathrm{fin},\chi})$ は指数有限な $\Lambda_\chi$ のイデアルであるので，この「誤差」は $X_\chi$ の「擬同型類を記述することが目標である」という立場でみれば無視できるものである．マイナスパートでは，$X_{\mathrm{fin},\chi} = 0$ であり，このような「誤差」も現れない．

**注意 1.3.** 定理の $i = 0$ に関する主張は岩澤主予想と同値であるので，定理は岩澤主予想の精密化になっている．

**注意 1.4.** $\chi = 1$ のときは，$X_1 = X_1' = \{0\}$ であることが知られている．

**注意 1.5.** 「$\chi$ が偶指標のとき，必ず $X_\chi = 0$ となるのではないか？」（Vandever 予想）という予想や，「$\chi$ が偶指標のとき，必ず $X_\chi = X_{\mathrm{fin},\chi}$ となるのではないか？」（Greenberg 予想）という予想があり，これらの予想が正しければ，本稿の主定理は自明である．

# 2 イデアル $\mathfrak{C}_i$ の構成

## 2.1 円単数

前節で言及したように，高次 Stickelberger イデアルのプラスパート版の対応物高次円分イデアルは，円単数を用いて構成される．ここでは，高次円分イデアルの定義をするための円単数に関する準備を行う．本分節のゴールは，円単数の *Kolyvagin derivative* と呼ばれる元 $\kappa_{m,N}^n(\xi) \in F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ を定義することである．

整数 $e$ を，$\mathbb{Z}_\ell^\times$ の位相的生成元になるようにとって固定する．正の整数 $N$ に対して，

$$\mathcal{S}_N := \big\{\ell \mid \ell \text{は } e \text{ を割り切らない素数で，} \ell \equiv 1 \pmod{p^N} \text{ を満たすもの}\big\},$$
$$\mathcal{N}_N := \Big\{\prod_{i=1}^{r} \ell_i \mid r > 0,\ \ell_i \in \mathcal{S}_N\ (i = 1, \ldots, r),\ \text{and } \ell_i \neq \ell_j \text{ if } i \neq j\Big\} \cup \{1\},$$

と置く．

**定義 2.1.** $n \in \mathcal{N}_N$ と $\zeta \in \mu_{p^{m+1}n} \backslash \{1\}$ に対して，

$$\mathrm{cyc}(\zeta) := \frac{\zeta^{-e/2} - \zeta^{e/2}}{\zeta^{-1/2} - \zeta^{1/2}} \in F_m(n)$$

とおく．ここで，$\zeta^{1/2}$ は，2 乗して $\zeta$ になる唯一の $\mu_{p^{m+1}n}$ の元（群 $\mu_{p^{m+1}n}$ の位数が奇数であることに注意）であり，$F_m(n)$ は $\mathcal{F}_m = \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}n})$ の最大実部分体である． 特に，$F_m := F_m(1)$ と置く．

任意の非負整数 $m$ と $n = \prod_{i=1}^{r} \ell_i \in \mathcal{N}_N$ に対して，$H_{F_m,n} := \mathrm{Gal}\big(F_m(n)/F_m\big)$ とおく．このとき，次の様な自然な同型がある：

$$H_{F_m,n} := \mathrm{Gal}\big(F_m(n)/F_m\big) \simeq H_{\ell_1} \times \cdots \times H_{\ell_r}.$$

**定義 2.2.** $n \in \mathcal{N}_N$ とし，$n$ は $n = \prod_{i=1}^{r} \ell_i$ と素因数分解されるとする．このとき，各 $\ell_i$ に対して，

$$D_{\ell_i} := \sum_{k=1}^{\ell_i - 2} k\sigma_{\ell_i}^k \in \mathbb{Z}[H_{\ell_i}] \subseteq \mathbb{Z}[H_n]$$

とおき，

$$D_n := \prod_{i=1}^{r} D_{\ell_i} \in \mathbb{Z}[H_n].$$

とおく．

**補題 2.3.** $n \in \mathcal{N}_N$ とする．このとき，自然な準同型

$$F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N} \longrightarrow \big[F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}\big]^{H_n}$$

は同型である．ここで，$\big[F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}\big]^{H_n}$ は，$F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ の $H_n$-不変な元のなす集合である．

**補題 2.4.** $n \in \mathcal{N}_N$ とし，$\ell \in \mathcal{S}_N$ を $n$ の素因子とする．$\xi \in \mu_n$ を 1 の原始 $p^{m+1}n$ 乗根とするとき，$\mathrm{cyc}(\xi)^{D_n}$ の $F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ における像は $H_n$-不変である．

**定義 2.5.** $n \in \mathcal{N}_N$ とし，$\xi \in \mu_{p^{m+1}n}$ を 1 の原始 $p^{m+1}n$ 乗根とする．このとき，補題 2.3 及び補題 2.4 により，$F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N}$ の元で，$F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ における像が，$\mathrm{cyc}(\xi)^{D_n}$ の像と一致するものがただひとつ存在する．この $F_m(n)^\times/(F_m(n)^\times)^{p^N}$ の元を $\kappa^n_{m,N}(\xi)$ とおく．

## 2.2 イデアル $\mathfrak{C}_i$ の定義

まず，$m$ と $N$ を固定して議論する．$R_{m,N} := (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})[\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]$ とおく．

**定義 2.6.** $n \in \mathcal{N}_N$ とする．$\{\kappa_{m,N}(\xi) \mid \xi \in \mu_n\}$ で生成される $F_m^\times/(F_m^\times)^{p^N}$ の部分 $R_{m,N}$ 加群を $W^n_{m,N}$ とおく．

プラスパートの場合は，「Stickelberger 元」に対応するものは，円単数であって，群環 $R_{F_m,N}$ の中の元ではない．今回は，**円単数を準同型で群環 $R_{F_m,N}$ に送った像を *Stickelberger* 元に見立てて**，高次 Stickelberger イデアルに対応するイデアルを構成する．

**定義 2.7.** $\mathcal{N}_N$ の元 $n$ の素因子の個数を $\epsilon(n) := r$ とおく．すなわち，$n$ が $n = \prod_{i=1}^r \ell_i$ と素因数分解されるとき，$\epsilon(n) := r$ とおく．次の集合 $A$ で生成される $R_{m,N}$ のイデアルを $\mathfrak{C}_{i,F_m,N}$ とおく：

$$A := \bigcup_{f,n} f(W^n_{F_m,N}),$$

ここで，$n$ は $\epsilon(n) \leq i$ を満たす $\mathcal{N}_N$ の元全体を走り，$f$ は $R_{F_m,N}$-準同型 $f\colon W^n_{m,N} \longrightarrow R_{m,N}$ 全体を走る．

整数 $m_1, m_2, N_1, N_2$ が $N_1 \geq m_1 + 1,\ N_2 \geq m_2 + 1,\ m_2 \geq m_1$，$N_2 \geq N_1$ を満たしているとする．このとき，自然な準同型 $R_{m_2,N_2} \longrightarrow R_{m_1,N_1}$ により，準同型 $\mathfrak{C}_{i,F_{m_2},N_2} \longrightarrow \mathfrak{C}_{i,F_{m_1},N_1}$ が定まる．これらの準同型により，$\{\mathfrak{C}_{i,F_m,N}\}_{(m,N)}$ は射影系をなす．

**定義 2.8** ($i$ 次円分イデアル)**.** 射影系 $\{\mathfrak{C}_{i,F_m,N}\}_{(m,N)}$ の射影極限 $\mathfrak{C}_i$ は，自然に岩澤代数 $\Lambda = \varprojlim R_{m,N}$ のイデアルとみなせる．本稿では $\mathfrak{C}_i$ を $i$ 次円分イデアルと呼ぶ．

以上で，主定理の主張に現れる「円分イデアル」$\mathfrak{C}_i$ が定義された．

# 付録 A 高次 Fitting イデアル

まず，高次 Fitting イデアルの定義を述べよう．

**定義 付録 A.1** (高次 Fitting イデアル)**.** $R$ を可換環，$M$ を有限表示 $R$ 加群とし，$R$ 加群の完全列

$$R^m \xrightarrow{f} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が与えられているとする．$R$ 加群の準同型 $f$ に対応する $R$ 係数の $n$ 行 $m$ 列の行列を $A$ とおく．このとき任意の 0 以上の整数 $i$ に対して，可換環 $R$ のイデアル $\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を次で定義する．

- $0 \leq i < n$ かつ $m \geq n - i$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を，$A$ の $(n-i)$ 次小行列式全体で生成される $R$ のイデアルとする．
- $0 \leq i < n$ かつ $m < n - i$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) := 0$ とする．
- $i \geq n$ であるとき，$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) := R$ とする．

$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ は完全列の取り方によらない．$R$ のイデアル $\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)$ を $M$ の $i$ 次 Fitting イデアルという．

$M$ を上のような完全列で関係式が与えられた有限表示 $R$ 加群とすると，次のような環 $R$ のイデアルの列が得られる:

$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M) \subseteq \mathrm{Fitt}_{R,1}(M) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Fitt}_{R,n}(M) = \mathrm{Fitt}_{R,n+1}(M) = \cdots = R.$$

**注意 付録 A.2.** $R = \Lambda_\chi \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$ とし，$M$ を有限生成ねじれ $R$ 加群とする．このとき，$M$ の特性イデアル $\mathrm{char}_R(M)$ は，$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M)$ を含むような，$R$ の最小の単項イデアルである．岩澤主予想 [MW]（プラスパート）の主張は以下の通りであった:

> $\chi \in \widehat{\Delta}$ を，偶指標とする．このとき，
>
> $$\mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(X_\chi) = \mathrm{char}_{\Lambda_\chi}(E_{\infty,\chi}/C_{\infty,\chi})$$
>
> である．ここで，$E_\infty$ はノルムに関する射影系 $\{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_m}^\times \otimes \mathbb{Z}_p\}_{m\geq 0}$ の射影極限であり，$C_\infty$ はノルムに関する射影系 $\{C_m \otimes \mathbb{Z}_p\}_{m\geq 0}$ （$C_m$ は円単数全体のなす $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_m}^\times$ の部分群）の射影極限である．

**例 付録 A.3.** $R = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とする．$f \in R$ を $0$ でも可逆元でもない $R$ の元とする．$M_1 = R/f^2R$ とし，$M_2 = (R/f)^2$ とする．このとき

$$\mathrm{char}_R(M_1) = \mathrm{Fitt}_{R,0}(M_1) = f^2R,$$
$$\mathrm{char}_R(M_2) = \mathrm{Fitt}_{R,0}(M_2) = f^2R$$

となって，特性イデアルだけでは $M_1$ と $M_2$ を区別することができないが，1 次の Fitting イデアルをみると，

$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M_1) = R,$$
$$\mathrm{Fitt}_{R,0}(M_2) = fR.$$

となり，両者を明確に区別することができる．このように，特性イデアルだけでなく，高次 Fitting イデアルまで考察することで，加群の構造に関するより深い情報を捉えることが出来る．

**例 付録 A.4.** 再び $R = \mathbb{Z}_p[[T]]$ とし，より一般的に論じよう．$M$ を有限生成ねじれ $R$ 加群とする．$M$ が $R$ 加群 $\bigoplus_{i=1}^n R/f_iR$ と擬同型であるとする．ただし，$0 \leq i \leq r-1$ なる各 $i$ に対して $f_i$ は $f_{i+1}$ を割り切るものとする．このとき，各 $i$ に対して，$I_i$ は $R$ のある指数有限なイデアルが存在して，$M$ の $i$ 次 Fitting イデアルは，

$$\mathrm{Fitt}_{R,i}(M) = \begin{cases} (\prod_{k=1}^{n-i} f_k)I_i & (\text{if } i < n) \\ I_i & (\text{if } i \geq n) \end{cases}$$

と表わされる．特に，$\{\mathrm{Fitt}_{R,i}(M)\}_{i\geq 0}$ によって $M$ の**擬同型類**が決定される．

## 参考文献


[Ku] Kurihara, M., *Refined Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type*, preprint (2008).

[MW] Mazur, B., and Wiles, A., *Class fields of abelian extension of* $\mathbf{Q}$, Invent. math. **76** (1984), 179-330.

[No] Northcott, D. G., *Finite free resolusions*, Cambridge Univ. press (1976).

[Oh] Ohshita, T., *The Euler system of cyclotomic units and higher Fitting ideals*, preprint (2010), arXiv:0912.4854, Number Theory (math.NT).