保型形式の空間と Hecke 作用素[1]

大阪大学理学研究科数学専攻
森山知則 (Tomonori Moriyama)

はじめに. 本稿の主な目的は, 複素上半空間上の正則保型形式を, 半単純 Lie 群 $SL(2,\mathbf{R})$ およびアデール群 $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式とみなす方法について解説することである. 正則保型形式が離散系列表現 (やその極限) と呼ばれる $SL(2,\mathbf{R})$ の無限次元表現を生成することや, アデール群上の保型形式に対して Hecke 作用素がどのように定義されるかについても説明する. ここで述べた内容を多変数の保型形式 (高階の半単純 Lie 群, 代数群上の保型形式) についてもある程度平行的に述べることができるが, 記号等の煩雑さを避けるため一変数の場合に絞って説明した.

目次

$\boxed{1}$ 半単純 Lie 群上の解析の基本的な手法

この節では, $G = SL(2,\mathbf{R})$ を例にとって, 半単純 Lie 群上の解析の基本的な言語と道具について次節以降で必要になる事柄を中心にまとめる. Lie 群論のごく基礎的な部分は既知とする.

(1.1) Lie 環による右微分. G の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ は

$$\mathfrak{g} := \{X \in M(2,\mathbf{R}) \mid \exp(tX) \in G \quad (\forall t \in \mathbf{R})\}$$

で与えられる. X の Jordan 標準形を考えればすぐにわかるように, $\det(\exp(tX)) = e^{\mathrm{tr}(tX)}$ となるので, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) := \{X \in M(2,\mathbf{R}) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$ である. G 上の複素数値 C^∞ 級関数の全体を $C^\infty(G)$ であらわす. G の $C^\infty(G)$ 上への線形表現 R を右移動

$$[R(g)\phi](g') = \phi(g'g), \qquad \phi \in C^\infty(G), \quad g, g' \in G$$

で定める. これの微分表現として, $R : \mathfrak{g} \ni X \mapsto R(X) \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ を

$$\begin{aligned}[R(X)\phi](g) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}[R(\exp(tX))\phi](g) \\ &= \frac{d}{dt}_{|t=0}\phi(g\exp(tX)), \quad g \in G, X \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

で定める. G 上の左不変ベクトル場 $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(G)$ で $\widetilde{X}_{g=e} = X$ を満たすものを $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(G)$ と書くと, $R(X)\phi = \widetilde{X}\phi$ であることに注意する.

[1] 『ss2010 Arthur-Selberg trace formulae』Sept. 6th, 2010 10:20-12:40

命題１. $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ において等式

$$R(X)\circ R(Y)-R(Y)\circ R(X)=R([X,Y])$$

が任意の $X,Y\in\mathfrak{g}$ に対して成立する.

Proof. $GL(n,\mathbf{R})$ において, 同様の等式が成立することを示せば, $SL(2,\mathbf{R})$ は $GL(2,\mathbf{R})$ の部分リー群であることから命題は従う ([Ma, p196-198]). 行列単位 $E_{i,j}\in M(n,\mathbf{R})$ に対応する $GL(n,\mathbf{R})$ 上の左不変ベクトル場 $\widetilde{E_{i,j}}$ が

$$\widetilde{E_{i,j}}=\sum_{k=1}^{n}x_{k,i}\frac{\partial}{x_{k,j}}$$

で与えられることに注意して,

$$[\widetilde{E_{a,b}},\widetilde{E_{c,d}}]=\delta_{b,c}\widetilde{E_{a,d}}-\delta_{d,a}\widetilde{E_{c,b}}$$

を直接計算で確かめれば良い. □

右移動と同様にして, 左移動 $L:G\times C^\infty(G)\to C^\infty(G)$ が

$$[L(g)\phi](g')=\phi(g^{-1}g'),\phi\in C^\infty(G),\quad g,g'\in G$$

で定義される. その微分表現は

$$[L(X)\phi](g)=\frac{d}{dt}_{|t=0}\phi(\exp(-tX)g),\quad g\in G,X\in\mathfrak{g}$$

で与えられる.

(1.2) 普遍展開環. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}:=\mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化とする. $R:\mathfrak{g}\ni X\mapsto R(X)\in\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ を $\mathbf{C}$-線型に拡張した写像も $R:\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ で表す. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ のテンソル代数 $T\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{\otimes n}$ を, $\{X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]\mid X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\}$ で生成される両側イデアルで割って得られる結合的 $\mathbf{C}$-代数を $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ と記す：

$$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})=T(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})/\langle X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]\in T(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mid X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\rangle.$$

$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の普遍展開環ないしは普遍包絡環 (unuiversal enveloping algebra) と呼ぶ (注: 実簡約群の表現論では, $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を単に $U(\mathfrak{g})$ と書く文献も多い). 次は比較的容易に示される（対称テンソルの場合とほぼ同様であるので, 各自試みよ).

命題２.(Poincare-Birkoff-Witt の定理, 略して P-B-W) $\{X_i\mid i=1,2,3\}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の任意の $\mathbf{C}$-基底とするとき, $\mathbf{C}$-線型空間として

$$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})=\bigoplus_{k_1,k_2,k_3\geq 0}\mathbf{C}X_1^{k_1}\cdot X_2^{k_2}\cdot X_3^{k_3}$$

が成立する.

特に, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ は自然に $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の部分線型空間と思える. 先の命題１によって $R:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(C^\infty(G))$ は $\mathbf{C}$-algebra の準同型 $R:U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\to\mathrm{End}(C^\infty(G))$ に拡張することができる.

(1.3) Casimir element $\Omega_{\mathfrak{g}}$. 普遍展開環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ の中心を $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ で表す. $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ に属する Casimir element と呼ばれる元 $\Omega_{\mathfrak{g}}$ を構成しよう. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の随伴表現 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を $\mathrm{ad}(X)(Y):=[X,Y]$ で定める.

問. これが確かに Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の表現になっていること, すなわち

$$\mathrm{ad}([X,Y]) = \mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y) - \mathrm{ad}(Y)\circ\mathrm{ad}(X), \qquad X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$$

であることを確かめよ.

$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ 上の対称形式 $B_{\mathfrak{g}}:\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\times\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\to\mathbf{C}$ を

$$B_{\mathfrak{g}}(X,Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y)), \qquad X,Y\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$$

で定める. $B_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の Killing 形式という. 対称形式 $B_{\mathfrak{g}}$ は非退化であることが容易にわかる (一般に, 非退化な Killing 形式を持つ Lie 環を半単純 Lie 環 (semi-simple Lie algebra) という). $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の基底 $\{X_i \mid 1\le i\le 3\}$ を一つ取り, $\{X^i \mid 1\le i\le 3\}$ を条件 $B_{\mathfrak{g}}(X_i, X^j) = \delta_{i,j}$ で定める $(1\le i,j\le 3)$.

定義-命題 3. $\Omega_{\mathfrak{g}} := \sum_{i=1}^{3} X_i\otimes X^i \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ と置く.
(i) $\Omega_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の基底 $\{X_i \mid 1\le i\le 3\}$ の取り方によらない. $\Omega_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Casimir element と呼ぶ.

(ii) $\Omega_{\mathfrak{g}}\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ である.

(iii) $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は $\Omega_{\mathfrak{g}}$ で生成される一変数多項式環である. すなわち, $\mathbf{C}[X]\ni f\mapsto f(\Omega_{\mathfrak{g}})\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は $\mathbf{C}$-algebra の同型を与える.

<u>略証</u> (i) 非退化対称形式 $B_{\mathfrak{g}}$ によって, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ との双対空間を同一視する. すると,

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\otimes\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \cong \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}\otimes\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}^{*} \cong \mathrm{End}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$$

を通じて, $\sum_{i=1}^{3} X_i\otimes X^i$ と $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}$ が同一視されるので, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ が基底 $\{X_i \mid 1\le i\le 3\}$ の取り方によらないことがわかる.
(ii) 直接計算でも容易に確かめられるが, 次のようにしてもよい. 上の同型において, 左辺への $\mathrm{Ad}\otimes\mathrm{Ad}$ の作用は右辺において, $F\mapsto \mathrm{Ad}(g)\circ F\circ\mathrm{Ad}(g^{-1})$ $(F\in\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ に対応するから, $\Omega_{\mathfrak{g}}$ は G-不変である. それを微分してやれば, $X\cdot\Omega_{\mathfrak{g}} = \Omega_{\mathfrak{g}}\cdot X$ $(X\in\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ を得る.
(iii) は上記 P-B-W を用いて地道にやればできるであろうが, 下の注意に述べる Harish-Chandra 同型の特別な場合と思ってもよい. □

注意. 一般の半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ でも Casimir element が上と同じように定義されて, (i), (ii) と同様のことが成立する. 一方, 一般の複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ について, $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は Casimir element のみで生成されるとは限らないが, 有限生成 $\mathbf{C}$-代数であることが知られている. その構造は, Harish-Chandra 同型で記述される ([Wallach, 3.2.3] を参照).

$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ の基底とし

$$h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

を取る. すると

$$[e,f] = h, \quad [h,e] = 2e, \quad [h,f] = -2f$$

が成立する.

問. $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = 4\mathrm{tr}(XY)$ であることを確かめよ.

問. $8\Omega_{\mathfrak{g}} = h^2 + 2(e\cdot f + f\cdot e) = h^2 - 2h + 4e\cdot f$ を確かめよ.

(1.4) Iwasawa 分解と積分公式. G の 3 つの部分群 N, A, K を次で定義する:

$$N = \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | x \in \mathbf{R} \right\}, \qquad A = \left\{ a(y) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} | y > 0 \right\},$$

$$K = \left\{ r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} | \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

このとき次が成立する.

命題 4 . (Iwasawa 分解, NAK 分解) 次の掛算写像

$$N \times A \times K \ni (n, a, k) \mapsto nak \in G.$$

は微分同相写像である:

Proof. $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を複素上半平面とする. G を $\mathbf{H}$ に一次分数変換

$$g\langle z\rangle := \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \in \mathbf{H}$$

で作用させる. $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbf{H}$ に対して, $g_z = n(x)a(y) \in G$ と置けば $g_z\langle\sqrt{-1}\rangle = z$ が成立するのでこの作用は推移的である. また, $\mathrm{Stab}_G(\sqrt{-1}) = K$ なので, 自然な全単射 $G/K \cong \mathbf{H}$ を得る. したがって, 命題の掛算写像が全単射を与えることがわかる. これが微分同相であることを見るには, 各点 (n, a, k) における微分写像が単射であることを確かめればよい. より直接に, 命題の掛算写像の逆写像を書いてみて, それが C^∞ 写像であることを確かめても良い. □

次に G 上の Haar 測度を, Iwasawa 分解に応じて変数分離して表そう.

命題 5 . (1) G は unimodular である, すなわち G の左 Haar 測度 dg は右不変でもある.
(2) 次を満たす正の数 $C > 0$ が存在する：

$$\int_G \phi(g)dg = C \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\, \phi(n(x)a(y)r(\theta))y^{-1}, \qquad \phi \in C_c^\infty(G).$$

略証 (Haar 測度について基本的なことは岩波数学辞典を参照). (1) G 上の左 Haar 測度 dg にたいして, G 上の測度 d_rg を

$$\int_G f(g)d_rg = \int f(g^{-1})dg, \qquad f(g) \in C_c^\infty(G)$$

で定めると, これは G 上の右 Haar 測度となる. $dg = \Delta_G(g)d_rg$ によって G の modular function を定めると, $\Delta_G : G \to \mathbf{R}_+^\times$ は準同型写像である. $\mathbf{R}_+^\times$ はアーベル群なので Δ_G は交換子群 $[G, G]$ 上で自明である. 一方で, $[G, G] = G$ であるので, $\Delta_G \equiv 1$ となって, G は unimodular であることがわかる.

(2) まず, 関数 $\rho : G \to \mathbf{R}_+^\times$ を

$$\int_G \phi(g)dg = \int_N dn \int_A da \int_K dk\, \phi(nak)\rho(nak), \qquad \phi(g) \in C_c^\infty(G)$$

で定める．ここで，dn，da，dk はそれぞれアーベル群 N，A，K 上の Haar 測度を表す．$\int_G \phi(g)dg = \int_G \phi(ngk)dg$ が任意の $(n,k) \in N \times K$ に対して成立するので，$\rho(nak) = \rho(a)$，$(n,a,k) \in N \times A \times K$ となる．一方，

$$\begin{aligned}\int_G \phi(a(y)g)dg &= \int_N dn \int_A da \int_K dk\, \phi(a(y)na(y)^{-1}a(y)ak)\rho(a) \\ &= \int_N dn \int_A da \int_K dk\, \phi(a(y)na(y)^{-1}ak)\rho(a(y)^{-1}a) \\ &= \int_N dn \int_A da \int_K dk\, \phi(nak)y^{-1}\rho(a(y)^{-1}a)\end{aligned}$$

より $y^{-1}\rho(a(y)^{-1}a) = \rho(a)$ がわかる．ここで，$a = a(y)$ とすれば定理の公式を得る． □

系 6． G/K 上の商測度を $d\dot{g}$ で表すと，

$$\int_{G/K} \phi(gK)d\dot{g} = \int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \int_{-\infty}^\infty dx\ \phi(x + \sqrt{-1}y), \qquad \forall \phi(z) = \phi(gK) \in L^1(G/K)$$

が成立する．

(1.5) Casimir 作用素． 次に Casimir 元 $\Omega_{\mathfrak{g}}$ の $C^\infty(G/K)$ への作用を計算しよう．その前に，G の随伴表現 (Adjoint 表現) について思い出しておこう．$g \in G$ および $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)X = \frac{d}{dt}_{|t=0} g e^{tX} g^{-1}$$

によって定義される群準同型 $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を G の随伴表現 (Adjoint 表現) と呼ぶ．Ad の微分表現が，ad であること，すなわち

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathrm{Ad}(e^{tX})(Y) = [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

であることに注意する．$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ を G の $\mathbf{C}$ 上の線型表現 $G \to GL(U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ に延長したものも同じ記号 Ad で表そう．

命題 7． 微分作用素 $R(\Omega_{\mathfrak{g}}) : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ は部分空間 $C^\infty(G/K)$ を保つ．また，自然な同一視 $C^\infty(G/K) \cong C^\infty(\mathbf{H})$ の下で

$$8R(\Omega_{\mathfrak{g}})\phi(z) = 4y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\phi(z), \qquad \phi(z) \in C^\infty(\mathbf{H})$$

が成立する．

Proof. $B_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ad}(g)X_i, \mathrm{Ad}(g)X^j) = \delta_{i,j}$ $(g \in G)$ より，

$$\mathrm{Ad}(g)(\Omega_{\mathfrak{g}}) = \sum_{i=1}^3 \mathrm{Ad}(g)(X_i) \cdot \mathrm{Ad}(g)(X^i) = \Omega_{\mathfrak{g}}, \qquad \forall g \in G$$

が成立する．したがって

$$R(g) \circ R(\Omega_{\mathfrak{g}}) = R(\mathrm{Ad}(g)(\Omega_{\mathfrak{g}})) \circ R(g) = R(\Omega_{\mathfrak{g}}) \circ R(g), \quad \forall g \in G$$

なので, 特に $g \in K$ のときを考えれば前半が従う. $R(\Omega_{\mathfrak{g}})$ の表示を求めるために, Casimir element $\Omega_{\mathfrak{g}}$ を次の形に表しておく：

$$8\Omega_{\mathfrak{g}} = H^2 + 2(X_+ \cdot X_- + X_- \cdot X_+) = H^2 - 2H + 4X_+X_-.$$

ここで,

$$H := \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad X_\pm := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{-1} \\ \pm\sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix}$$

と置いた. 各整数 $m \in \mathbf{Z}$ に対して,

$$C^\infty(G/K;m) := \{\phi \in C^\infty(G) \mid \phi(gr(\theta)) = e^{\sqrt{-1}m\theta}\phi(g), \quad \forall(g, r(\theta)) \in G \times K\}$$

と置く. $C^\infty(G/K) = C^\infty(G/K;0)$ に注意する. $H, X_\pm \in \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の $C^\infty(G/K;m)$ への作用を計算しよう. まず,

$$[R(H)\phi](g) = m\phi(g), \quad \phi \in C^\infty(G/K;m)$$

は $C^\infty(G/K;m)$ の定義から容易に出る. 次に, X_+ を岩澤分解して計算してやると

(1)
$$\begin{aligned}
&[R(X_+)\phi](g_z) \\
=&[R(\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix})\phi](g_z) + \sqrt{-1}[R(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})\phi](g_z) + \frac{1}{2}[R(H)\phi](g_z) \\
=&\frac{d}{dt}_{|t=0}\phi(n(x)a(ye^t)) + \sqrt{-1}\frac{d}{dt}_{|t=0}\phi(n(x+ty)a(y)) + \frac{m}{2}\phi(g_z) \\
=&\Big(y\frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m}{2}\Big)\phi(g_z), \quad \forall\phi \in C^\infty(G/K;m), \forall z \in \mathbf{H}
\end{aligned}$$

を得る. 同様にして

$$[R(X_-)\phi](g_z) = \Big(y\frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x} - \frac{m}{2}\Big)\phi(g_z), \quad \forall\phi \in C^\infty(G/K;m), \forall z \in \mathbf{H}$$

であることがわかる.

(2)
$$R(X_\pm)\phi \in C^\infty(G/K;m\pm 2), \qquad \forall\phi \in C^\infty(G/K;m)$$

に注意すれば

(3)
$$\begin{aligned}
8[R(\Omega_{\mathfrak{g}})\phi](g_z) =&4\Big(y\frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x} - 1\Big)\Big(y\frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{-1}y\frac{\partial}{\partial x}\Big)\phi(g_z) \\
=&4y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) \qquad \forall\phi \in C^\infty(G/K)
\end{aligned}$$

となって, 所望の結果を得る. □

2 半単純 Lie 群 $G = SL(2, \mathbf{R})$ 上の保型形式

この節では, Harish-Chandra([Harish-Chandra]) による保型形式の空間の定義を $SL(2,\mathbf{R})$ の場合に述べ, それが上半平面上の保型形式を拡張したものであることを説明する. さらに, $SL(2,\mathbf{R})$ の表現論から必要事項を準備した後, 『正則保型形式が $SL(2,\mathbf{R})$ の反正則離

散系列表現を生成する』という Gel'fand, Graev, Piatetski-Shapiro の reciprocity を解説する.

(2.1) 保型形式の空間. 正整数 $N \geq 1$ に対して,

$$\Gamma(N) := \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z}) \mid \gamma \equiv I_2 \pmod{N} \right\}$$

で定義される G の離散部分群 $\Gamma(N)$ をレベル N の主合同部分群という. 適当な正整数 N に対して, $\Gamma(N) \subset \Gamma \subset \Gamma(1) = SL(2, \mathbf{Z})$ を満たす離散部分群 Γ を $SL(2, \mathbf{Z})$ の合同部分群という.

定義 8. $\Gamma \subset SL(2, \mathbf{Z})$ を合同部分群とする.
(1) G 上の C^∞-関数 $\varphi : G \to \mathbf{C}$ が次の (i)-(iv) を満たすとき, φ を G 上の Γ に関する保型形式 (automorphic form) である呼び, その全体を $\mathcal{A}(\Gamma \backslash G)$ で表す.

(i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g), \quad \forall (\gamma, g) \in \Gamma \times G;$
(ii) φ は右 K-有限, すなわち, $\mathbf{C}\text{-span}\{R(k)\varphi \mid k \in K\}$ は有限次元 $\mathbf{C}$-線形空間である;
(iii) φ は $Z(\mathfrak{g})$-有限, すなわち,

$$\{R(\xi)\varphi \mid \xi \in Z(\mathfrak{g})\} = \mathbf{C}\text{-span}\{R(\Omega_{\mathfrak{g}}^m)\varphi \mid m \geq 0\};$$

は有限次元 $\mathbf{C}$-線形空間である;
(iv) φ は緩増大である, すなわち, 次の不等式を満たす様な $C > 0$, $M > 0$ が存在する

$$|\varphi(g)| \leq C ||g||^M, \qquad g \in G.$$

ここで, $|| \cdot || : G \to \mathbf{R}_+^\times$ は $|| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} || := \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$ で定義される高さ関数である.

(2) $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma \backslash G)$ が, 条件を

$$\int_{N \cap \delta^{-1}\Gamma\delta \backslash N} \varphi(\delta n g) dn = 0, \qquad \forall \delta \in \Gamma(1)$$

を満たすとき, φ を G 上の Γ に関する尖点形式 (カスプ形式) と呼び, その全体を $\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma \backslash G)$ で表す.

注意. $\mathcal{A}(\Gamma \backslash G)$ および $\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma \backslash G)$ は G の右移動 R に関して閉じていない (右 K 有限性が保たれない). しかし, リー環 $\mathfrak{g}$ および極大コンパクト部分群 K の作用では安定であり

$$R(k) \circ R(X) \circ R(k^{-1}) = R(\mathrm{Ad}(k)X), \qquad k \in K, X \in \mathfrak{g}$$

が成立する. このようなものを $(\mathfrak{g}, K)$-加群という（正確な定義は, [Wallach] 等を参照).

次に, 上半平面 $\mathbf{H}$ 上の正則保型形式および正則尖点形式の空間を導入し, それが上記の G 上の保型形式の空間およびカスプ形式の空間の部分空間とみなせることを説明する. ま

ず, $GL(2,\mathbf{R})^+ := \{g \in GL(2,\mathbf{R}) \mid \det(g) > 0\}$ と置いて, 保型因子 (automorphic factor) $j : GL(2,\mathbf{R})^+ \times \mathbf{H} \to \mathbf{C}^\times$ を

$$j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) = cz + d$$

で定義する. 整数 $k \in \mathbf{Z}$ に対して, $C^\infty(\mathbf{H})$ への $GL(2,\mathbf{R})^+$ の右作用を

$$f|_k g(z) := \det(g)^{k/2} j(g,z)^{-k} f(g\langle z\rangle), \quad f \in C^\infty(\mathbf{H}), g \in GL(2,\mathbf{R})^+$$

で定める.

定義 9. $\Gamma \subset SL(2,\mathbf{Z})$ を $SL(2,\mathbf{Z})$ の合同部分群とする.
(1) 正則関数 $f : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ が次の 2 条件を満たすとき, f を $\mathbf{H}$ 上の Γ に関する正則保型形式と呼び, その全体を $M_k(\Gamma)$ で表す.

(i) $f|_k\gamma = f \qquad \forall\gamma \in \Gamma;$

(ii) 任意の $\delta \in \Gamma(1)$ に対して $h_\delta > 0$ が存在して

$$f|_k\delta(z) = \sum_{n \geq 0} a_f(n;\delta) \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}nz}{h_\delta}\right)$$

という形に書ける.

(2) $f \in M_k(\Gamma)$ がさらに次の条件

$$a_f(0;\delta) = 0, \quad \forall\delta \in \Gamma(1)$$

を満たすとき, f を尖点形式 (あるいは, カスプ形式) と呼び, その全体を $S_k(\Gamma)$ で表す.

上の定義の (ii) において $n < 0$ の項が現れないことも, 条件の一部であることに注意しよう. 定義 8 と定義 9 の関係は次の定理で与えられる.

定理 10. (1) $f \in M_k(\Gamma)$ に対して, G 上の関数 $\varphi_f : G \to \mathbf{C}$ を

$$\varphi_f(g) := f|_k g(\sqrt{-1}) = j(g,\sqrt{-1})^{-k} f(g\langle\sqrt{-1}\rangle)$$

で定めると, $\varphi_f \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ である.
(2) $f \in M_k(\Gamma)$ に対して, $f \in S_k(\Gamma)$ であることと $\varphi_f \in \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)$ である事とは同値である.

Proof. (1) φ_f が定義における条件 (i)-(iv) を満たすことを確かめれば良い.

$$\varphi_f(\gamma g) = f|_k\gamma g(\sqrt{-1}) = f|_k\gamma|_k g(\sqrt{-1}) = f|_k g(\sqrt{-1}) = \varphi_f(g), \quad (\gamma, g) \in \Gamma \times G$$

であるので, (i) は満たされる. また,

$$\varphi_f(gr(\theta)) = e^{\sqrt{-1}k\theta}\varphi_f(g), \quad \forall g \in G, \forall r(\theta) \in K,$$

より, φ_f は右 K-有限である. 次に (iii) を確かめよう. 鍵となるのは, $f \in C^\infty(\mathbf{H})$ に対して, φ_f を定理にあるように定めるとき,

$$(\sharp): \qquad R(X_-)\varphi_f = 0 \Leftrightarrow f \text{ は正則関数}$$

であることである．これは，$\varphi_f(g_z) = y^{k/2}f(z)$ および $\varphi_f \in C^\infty(G/K;k)$ に注意すれば，(2) より

$$[R(X_-)\varphi_f](g_z) = -2\sqrt{-1}y^{k/2+1}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$$

となることから分かる．したがって，

$$R(\Omega_{\mathfrak{g}})\varphi_f = R(H^2 - 2H + 4X_+X_-)\varphi = R(H^2 - 2H)\varphi = (k^2 - 2k)\varphi$$

と計算され，φ_f が Casimir 作用素 $R(\Omega_{\mathfrak{g}})$ の固有関数であることがわかる．最後に (iv) を確かめる．良く知られているように $\forall g \in G$ は

$$g = \delta g_z r(\theta), \qquad \delta \in \Gamma(1), |\mathrm{Re}(z)| \leq 1/2, |z| \geq 1, r(\theta) \in K$$

と表すことができる．このとき

$$\varphi_f(g) = e^{\sqrt{-1}k\theta}y^{k/2}\sum_{n\geq 0} a_f(n;\delta)\exp(2\pi\sqrt{-1}nz/h_\delta)$$

となるが，　$C > 0$, $r > 0$ が存在して $y < C||g||^r$ となるので，φ_f は緩増大であることが分かる．

(2) $\delta \in \Gamma(1)$ に対して，$N \cap \delta^{-1}\Gamma\delta$ の生成元を $n(h_\delta)$ とするとき，

$$\int_{N\cap\delta^{-1}\Gamma\delta\backslash N} \varphi_f(\delta n(x)a(y)r(\theta))dx = h_\delta \times a_f(0;\delta) \times e^{\sqrt{-1}k\theta}$$

が成立することから従う． □

注意. $f_1(z), f_2(z) \in M_k(\Gamma)$ の Petersson 内積を

$$\langle f_1, f_2\rangle := \int_{\Gamma\backslash G} \varphi_{f_1}(g)\overline{\varphi_{f_2}(g)}dg = \int_{\Gamma\backslash \mathbf{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dxdy}{y^{k+2}}$$

で定義する．f_1 または f_2 の少なくとも一方は $S_k(\Gamma)$ に属するとき，これは絶対収束することがわかる．

(2.2) $SL(2,\mathbf{R})$ の表現論. 次節の準備として，$G = SL(2,\mathbf{R})$ の表現論から基礎的な部分をまとめておく．まず主系列表現を定義して，その可約点における部分加群として (反) 正則離散系列表現を導入する．G の Borel 部分群を $B = \{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G\}$ で定義する．指標 $\sigma : \{\pm 1\} \to \mathbf{C}^\times$ および $\nu \in \mathbf{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} &I(\sigma,\nu) \\ :=&\Big\{\phi \in C^\infty(G) \mid \phi(\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} g) = \sigma(a/|a|)|a|^{\nu+1}\phi(g), \quad \forall \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in B, \forall g \in G\Big\} \end{aligned}$$

と置く．$I(\sigma,\nu)$ は，G の右移動による作用 R によって安定で，$I(\sigma,\nu)$ の自然な Fréchet 位相を与えると，連続表現となる．この表現を $\pi_{\sigma,\nu}$ であらわし，G の主系列表現 (principal series representaion) と呼ぶ．$I(\sigma,\nu)$ に計量

$$(\phi_1, \phi_2) := \int_K \phi_1(k)\overline{\phi_2(k)}dk, \qquad \phi_1, \phi_2 \in I(\sigma,\nu)$$

を導入しこれに関して完備化した Hilbert 空間を L^2-$I(\sigma,\nu)$ であらわす. G の $I(\sigma,\nu)$ への作用は, L^2-$I(\sigma,\nu)$ 上への連続な作用として延長される ([Wallach, 1.5.3 (1)]). また, $\nu \in \sqrt{-1}\mathbf{R}$ のとき, これは G のユニタリ表現となる ([Wallach, 1.5.3 (2)]). $m \in \mathbf{Z}$ に対して $\phi_m^{(\nu)} \in C^\infty(G/K;m)$ を

$$\phi_m^{(\nu)}(n(x)a(y)r(\theta)) = e^{\sqrt{-1}m\theta}y^{(\nu+1)/2},$$

で定める. $I(\sigma,\nu)$ の右 K-有限部分を

$$I(\sigma,\nu)_K := \{\phi \in I(\sigma,\nu) \mid \phi \text{ は右 } K\text{-有限}\}$$

で表すと,

$$I(\sigma,\nu)_K = \bigoplus_{\sigma(-1)=(-1)^m} \mathbf{C}\phi_m^{(\nu)} \subset I(\sigma,\nu) \subset L^2\text{-}I(\sigma,\nu)$$

となっている. $I(\sigma,\nu)_K$ には G は作用しないが $(\mathfrak{g},K)$ 加群であり, $I(\sigma,\nu)$ および L^2-$I(\sigma,\nu)$ の中で稠密である. K-有限部分 $I(\sigma,\nu)_K$ は, G の連続表現 $I(\sigma,\nu)$ や L^2-$I(\sigma,\nu)$ の, いわば「骨格」のみ取り出したものであると言ってもよいだろう. さて, $I(\sigma,\nu)_K$ の可約性に関しては次の命題が成立する. $F_k := \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^2)$, $(k \geq 0)$ を, G の自然な 2 次元表現 (tautological representation) $\mathbf{C}^2$ の k 次対称テンソル表現とする. F_k は G の唯一の $(k+1)$-次元既約表現である.

命題 11. (1) $\nu = k-1$, $\sigma = \mathrm{sgn}^k$ $(k \geq 2, k \in \mathbf{Z})$ のとき,

$$D_k^+ := \bigoplus_{m \geq k,\, m \equiv k \pmod 2} \mathbf{C}\phi_m^{(k-1)}, \quad D_k^- := \bigoplus_{m \leq -k,\, m \equiv k \pmod 2} \mathbf{C}\phi_m^{(k-1)},$$

と置くと, これらは $I(\sigma,k-1)_K$ の既約な $(\mathfrak{g},K)$-部分加群である. また, 商 $(\mathfrak{g},K)$-加群 $I(\sigma,k-1)_K/D_k^+ \oplus D_k^-$ は既約な $(\mathfrak{g},K)$-加群であり, F_{k-2} に同型である.

(2) $\nu = 1-k$, $\sigma(-1) = (-1)^k$ $(k \geq 2, k \in \mathbf{Z})$ のとき, $\bigoplus_{|m| \leq k-2,\, m \equiv k \pmod 2} \mathbf{C}\phi_m$ は F_{k-2} に同型な $(\mathfrak{g},K)$-部分加群であり, 商 $(\mathfrak{g},K)$-加群 $I(\sigma,\nu)/F_{k-2}$ は $D_k^+ \oplus D_k^-$ に同型である.

(3) $\nu = 0$, $\sigma = \mathrm{sgn}$ (i.e. $\sigma(-1) = (-1)$) のとき,

$$D_1^+ := \bigoplus_{m \geq 1,\, m \equiv 1 \pmod 2} \mathbf{C}\phi_m^{(0)}, \quad D_1^- := \bigoplus_{m \leq -1,\, m \equiv 1 \pmod 2} \mathbf{C}\phi_m^{(0)},$$

と置けば, これらは $I(\sigma,k-1)_K$ の既約な $(\mathfrak{g},K)$-部分加群であり, 次の直和分解がある: $I(\mathrm{sgn},0) = D_1^+ \oplus D_1^-$.

(4) 上記 3 つの場合以外では, $I(\sigma,\nu)_K$ は既約な $(\mathfrak{g},K)$-加群である.

注意. (i) 上の命題の (1), (2) は次の完全列として書ける：

$$0 \to D_k^+ \oplus D_k^- \to I(\mathrm{sgn}^k, k-1) \to F_{k-2} \to 0;$$

$$0 \to F_{k-2} \to I(\mathrm{sgn}^k, 1-k) \to D_k^+ \oplus D_k^- \to 0.$$

(ii) D_k^+ (resp. D_k^-) $(k \geq 2)$ は Blattner parameter k (resp. $-k$) の離散系列表現と呼ばれる. D_1^+(resp. D_1^-) は離散系列表現の極限と呼ばれる. D_1^+ および D_1^- はすでに導入した計量によって完備化すれば G の既約ユニタリ表現を与える. また $k \geq 2$ のときにも, D_k^+ および D_k^- は別の計量によって完備化することで G の既約ユニタリ表現となる.

(iii) $SL(2,\mathbf{R})$ の既約認容表現の $(\mathfrak{g},K)$-加群レベルでの分類, $SL(2,\mathbf{R})$ の既約ユニタリ表現の分類は, [Wallach, 5.6] を参照せよ. 拙著 [Mo] およびそこに引いてある文献も参照.

Proof. $\phi_m^{(\nu)}$ への $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の基底の作用を書くと,

$$\pi_{\sigma,\nu}(H)\phi_m^{(\nu)} = m\phi_m^{(\nu)}, \quad \pi_{\sigma,\nu}(X_\pm)\phi_m^{(\nu)} = \frac{\nu+1\pm m}{2}\phi_{m\pm2}^{(\nu)}$$

である. 実際,

$$\pi_{\sigma,\nu}(H)\phi_m^{(\nu)}(r(\theta)) = -\sqrt{-1}\frac{d}{dt}_{|t=0}\phi_m^{(\nu)}(r(\theta+t)) = m\phi_m(r(\theta))$$

より始めの式が成り立つ. 次に, (3) より適当な複素数 $c_\pm(\nu)$ を用いて

$$\pi_{\sigma,\nu}(X_\pm)\phi_m^{(\nu)} = c_\pm(\nu)\phi_{m\pm2}^{(\nu)}$$

となることが分かる. $c_\pm(\nu)$ は (1), (2) より

$$c_\pm(\nu) = [\pi_{\sigma,\nu}(X_\pm)\phi_m^{(\nu)}](I_2) = \frac{1}{2}(\nu+1\pm m)$$

と計算される. 命題は, これよりすぐにわかる. □

D_k^+ $(k\geq 1)$ と Verma 加群との関係を見ておく. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ の subalgebra $\bar{\mathfrak{b}}$ を $\bar{\mathfrak{b}} := \mathbf{C}H \oplus \mathbf{C}X_-$ で定義する. $\mu \in \mathbf{C}$ を任意に取り, 1 次元数ベクトル空間 $\mathbf{C}$ に $\bar{\mathfrak{b}}$ を $H\cdot 1 = \mu$, $X_-\cdot 1 = 0$ で作用させて $\bar{\mathfrak{b}}$-加群とみたものを $\mathbf{C}_\mu$ で表す. 係数拡大により $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-加群 $V(\mu) := U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\bar{\mathfrak{b}})}\mathbf{C}_\mu$ が得られるが, これを Verma 加群と呼ぶ.

補題 12. $k\geq 1$ とするとき, 写像 $V(k) \ni \xi\otimes 1 \mapsto \xi\cdot\phi_k \in D_k^+$ は $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$-加群としての同型を与える. 特に, $V(k)$ は既約である.

Proof. 写像が well-defined なことをいえば, あとは容易である. □

注意. 斜交群 $Sp(n,\mathbf{R})$ やユニタリ群 $U(m,n)$ に対しても, 正則離散系列表現が定義される. それらは（少なくともパラメータが十分に regular であるという条件下で）generalized Verma 加群と同型となる. Casimir 作用素の固有値に着目した巧みな証明を [Garrett] に見ることができる ([Garrett] では, 正則離散系列表現を含む少し広いクラスの表現を扱っているが, ちょっとした言葉の誤用で, それらすべてを正則離散系列表現と呼んでいる).

(2.3) G-G-PS の reciprocity

定理 13. $\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G) := \{\varphi_f \mid f \in M_k(\Gamma)\}$ と置く. $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(D_k^+, \mathcal{A}(\Gamma\backslash G))$ に対して, $\Psi(\phi_k) \in \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)$ である. この対応は, 次の同型写像を定める:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(D_k^+, \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)) \cong \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)(\cong M_k(\Gamma))$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(D_k^+, \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)) \cong \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)\cap\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)(\cong S_k(\Gamma))$$

Proof. まず, 定理 10 の証明からわかるように

$$\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G) = \{\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G) | R(r(\theta))\varphi = e^{\sqrt{-1}k\theta}\varphi, R(X_-)\varphi = 0\}$$

であることに注意する．Ψ に対して，$\varphi(g) \equiv \varphi_\Psi(g) := \Psi(\phi_k)(g) \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ と置くと，

$$\varphi(gr(\theta)) = [R(r(\theta))\Psi(\phi_k)](g) = \Psi(D_k^+(r(\theta))\phi_k)(g) = \Psi(e^{\sqrt{-1}k\theta}\phi_k)(g) = e^{\sqrt{-1}k\theta}\varphi(g)$$
$$[R(X_-)\varphi](g) = 0$$

より，φ は $\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)$ に属することがわかる．逆に，$\varphi_f \in \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G)(\cong M_k(\Gamma))$ を取り，$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\varphi_f \subset \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ を考える．すると，テンソル積の普遍性から $V(k)$ から $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\varphi_f$ へ全射が存在する．ところが補題12より $V(k)$ は既約なのでこれは同型 $D_k^+ \cong V(k) \cong U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\varphi_f$ を与える．□

定理13は，$\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ (resp. $\mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G)$) は，$\dim_{\mathbf{C}} M_k(\Gamma)$ 個 (resp. $\dim_{\mathbf{C}} S_k(\Gamma)$ 個) の D_k^+ の直和を部分表現 (部分 $(\mathfrak{g}, K)$-加群) として含み，各直和因子の最低ウエイトベクトルの集合が $M_k(\Gamma)$(resp. $S_k(\Gamma)$) の一つの基底を与える，ということを主張している．これは Gel'fand-Graev-Patetski-Shapiro の相互律 (あるいは双対性) と呼ばれる．この見方によって，半単純 Lie 群の（無限次元）表現の手法を用いることができ，仮に正則保型形式 $f \in M_k(\Gamma)$ に考察対象を限ったとしても，さまざまな点で話の見通しがよくなることがある．その実例はこの報告集の中にも多く見出されるであろう．

注意. (2.1) の末尾で注意したように， $f \in M_k(\Gamma)$ はカスプ形式ならば φ_f は $L^2(\Gamma\backslash G)$ に属するが，実はその逆も成立する．すなわち，$\mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G) \cap L^2(\Gamma\backslash G) = \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma\backslash G) \cap \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma\backslash G) \cong S_k(\Gamma)$ が成立する (証明は久保田富雄「数論論説」第５章に書いてある．あるいはより一般的な結果 [Wallach-2] からも従う)．したがって

$$\mathrm{Hom}_G(D_k^+, L^2(\Gamma\backslash G)) \cong S_k(\Gamma)$$

が成り立つ．

(2.4) ($\sharp$) **の別証明.** 上では計算によって示したが，任意の有界対称領域 (=Hermite 対称空間) に対して適用出来る方法も説明しておこう．なお，Hermite 対称空間については，[Helgason1, Ch. 8] を参照．

準備１：単位円盤モデル (有界対称領域) への移行：

$GL(2, \mathbf{C})$ の射影直線 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への一次分数変換による作用を

$$GL(2, \mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \ni (g, z) \mapsto g\langle z\rangle \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$$

で表す．命題４の証明中に定義した G の $\mathbf{H}$ への作用は，勿論これの制限となっている．

$$G' := SU(1,1) = c_G G c_G^{-1} = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1\} \subset G_{\mathbf{C}} = SL(2, \mathbf{C}),$$

$$c_G := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{C})$$

とおき，その部分群 K' を $K' = c_G K c_G^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \mid |\alpha| = 1\right\}$ で定める．$\mathfrak{g}'_{\mathbf{C}}$ の $\mathbf{C}$ 上の基底として

$$X'_+ := \mathrm{Ad}(c_G)X_+ \quad X'_- := \mathrm{Ad}(c_G)X_+, \quad H' := \mathrm{Ad}(c_G)H$$

が取れる. G' は $\Delta := \{w \in \mathbf{C} \mid |w| < 1\}$ に推移的に作用して, $G'/K' \cong \Delta$ となる. $j : GL(2,C) \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を

$$j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) = cz + d$$

と拡張しておく. C^∞-関数 $f : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ に対して, $F = F_f : \Delta \to \mathbf{C}$ を

$$F_f(w) := j(c_G^{-1}, w)^{-k} f(c_G^{-1}\langle w \rangle)$$

で定め, さらに $\phi_F : G' \to \mathbf{C}$ を,

$$\phi_F(g') := j(g', 0)^{-k} F(g'\langle 0 \rangle)$$

で定義する. すると, $\varphi_f : G \to \mathbf{C}$ を定理 10 のように定めるとき

$$j(c_G, \sqrt{-1})^k \varphi_f(g) = \phi_F(c_G g c_G^{-1}), \qquad g \in G$$

が成立する. したがって, ($\sharp$) を示すためには, $F \in C^\infty(\Delta)$ に対して

$$(\bigstar) : \qquad F \text{ は正則関数} \Leftrightarrow R(X'_-)\phi_F = 0$$

を証明すれば良い.

<u>準備２：Borel 埋め込みと保型因子</u>

複素リー群 $G_{\mathbf{C}}$ の部分群 P'_+, $K'_{\mathbf{C}}$, P'_- を

$$P'_+ := \exp(\mathbf{C}X'_-) = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{C}\}, \qquad K'_{\mathbf{C}} := \exp(\mathbf{C}H') = \{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbf{C}\},$$

$$P'_- := \exp(\mathbf{C}X'_-) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{C}\},$$

で定める. 次は容易に確かめられる：

補題 14. (i) 掛算写像 $P'_+ \times K'_{\mathbf{C}} \times P'_- \to G_{\mathbf{C}}$ はその像 $P'_+K'_{\mathbf{C}}P'_-$ への双正則写像である. また, $P'_+K'_{\mathbf{C}}P'_- = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_{\mathbf{C}} \mid \delta \neq 0\right\}$ は $G_{\mathbf{C}}$ の開部分集合である.
(ii) $G' \subset P'_+K'_{\mathbf{C}}P'_+$.
(iii) $G' \cap K'_{\mathbf{C}}P'_- = K'$.

この補題により,

$$G'/K' \hookrightarrow P'_+ \cong P'_+K'_{\mathbf{C}}P'_-/K'_{\mathbf{C}}P'_- \hookrightarrow G_{\mathbf{C}}/K'_{\mathbf{C}}P'_- \cong \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$$

なる写像が引き起こされる (Borel 埋め込み). これによって G'/K' に自然に複素構造が導入される. また, 分解

$$g' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g'\langle 0 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(g',0)^{-1} & 0 \\ 0 & j(g',0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta} & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

によって保型因子が自然に現れることに注意しよう (保型因子の値 $j(g', w)$ ($g' \in G, w \in \Delta$) は, その性質から $j(g', 0)$ だけで決まることに注意). ここで, ２つ補題を準備する.

補題 15. $g'K \in G'/K'$ における複素化された接空間 $T_{g'K}(G'/K') \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ においてその反

正則部分は $\mathbf{C}L_{g*}X'_-$ で与えられる.

Proof. G' の G'/K' への作用は双正則なので, $g=e$ のときに示せば良いが, それは G'/K' への複素構造の入れ方を考えれば自明である. □

補題 16. 写像 $\widetilde{j}: P'_+K'_{\mathbf{C}}P'_- \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\widetilde{j}(g') := j(g', 0) = \delta, \qquad g' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, $\widetilde{j}$ は右 P'_- 不変な正則関数である.

Proof. これは (4) の分解より自明である. □

<u>(★) の証明</u> 以上の準備の下で, (★) を証明しよう. 定義にしたがって計算してやれば

$$\begin{aligned}
&[R(X'_-)\phi_F](g') \\
=&\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big\{\phi_F(g'\exp(t\mathrm{Re}(X'_-))) + \sqrt{-1}\phi_F(g'\exp(t\mathrm{Im}(X'_-)))\Big\} \\
=&\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big\{\widetilde{j}(g'\exp(t\mathrm{Re}(X'_-))^{-k} + \sqrt{-1}\,\widetilde{j}(\exp(t\mathrm{Im}(X'_-))^{-k}\Big\}F(g'\langle 0\rangle) \\
&+\widetilde{j}(g')^{-k}\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big\{F(g'\exp(t\mathrm{Re}(X'_-)\langle 0\rangle)) + \sqrt{-1}F(g'\exp(t\mathrm{Im}(X'_-)\langle 0\rangle))\Big\} \\
=&\frac{d}{dt}_{|t=0}\Big\{\widetilde{j}(g'\exp(tX'_-))^{-k}\Big\}F(g'\langle 0\rangle) + \widetilde{j}(g')^{-k}R(X'_-)\Big[G' \ni g' \mapsto F(g'\langle 0\rangle) \in \mathbf{C}\Big]
\end{aligned}$$

となる. 最後の等式で $\widetilde{j}$ が正則関数であることを用いた. 補題 16 より $\widetilde{j}(g'\exp(tX'_-))$ は $t\in\mathbf{R}$ によらず一定なので, 結局

$$[R(X'_-)\phi_F](g') = \widetilde{j}(g')^{-k}R(X'_-)\Big[G' \ni g' \mapsto F(g'\langle 0\rangle) \in \mathbf{C}\Big]$$

を得る. ところが, 補題 15 に注意すればこれは, (★) (したがって (♯)) を示している.

注意. K' の一次元表現 $\mathbf{C}_k$ を $K' \ni \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \alpha^k \in \mathbf{C}^{(1)}$ で定める. これの反傾表現を $\mathbf{C}_k^\vee (\cong \mathbf{C}_{-k})$ 書くとき, Borel 埋め込みによって $\mathbf{L}_k := G' \times_{K'} \mathbf{C}_k^\vee \to G'/K'$ には正則直線束の構造が入る. 上記の証明は, $\mathbf{L}_k$ を保型因子を通じてを自明化することにより, $\mathbf{L}_k$ の正則切断の空間が G'/K' 上の正則関数の空間と同一視できることを言っている. この見方は, 離散系列表現 D_k^- の $G/K(\cong G'/K')$ 上の正則関数の空間の部分空間への実現 ([Knapp, Chapter II]) を理解する上でも大切である.

3 $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式と Hecke 作用素

アデール群 $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式を定義し, 上半平面上の保型形式における Hecke 作用素が $GL(2,\mathbf{Q}_p)$ の Hecke 環の作用として書けることを説明する. また, 後の講演の準備を兼ねて, Eisenstein 級数を定義して, それが Hecek-eigen form であることを解説する.

(3.1) アデール群 $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式の空間. 有理数体 $\mathbf{Q}$ の素点 v に対して, $GL(2,\mathbf{Q}_v)$

は $M(2,\mathbf{Q}_v)$ からの誘導位相を与えると局所コンパクト群になる．$GL(2,\mathbf{Q}_v)$ の部分群 K_v を

$$K_\infty := O(2), \qquad K_p := GL(2,\mathbf{Z}_p), \quad (v = p < \infty)$$

で定める． K_v は $GL(2,\mathbf{Q}_v)$ の（共役を除いてただ一つの）極大コンパクト部分群である．$GL(2,\mathbf{A})$ にも $M(2,\mathbf{A})$ からの誘導位相を与えると局所コンパクト群となるが, これは $GL(2,\mathbf{Q}_v)$ たちの部分群の族 $\{K_v\}$ に関する制限直積群 $\prod'_v GL(2,\mathbf{Q}_v)$ と位相群として同型である．また $\mathbf{K} := \prod_v K_v$, $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}} := \prod_{v<\infty} K_v$ と置くと, これは $GL(2,\mathbf{A})$ の（共役を除いてただ一つの）極大コンパクト部分群である．$GL(2,\mathbf{A})$ の中心は $Z(\mathbf{A}) := \{\begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbf{A}^\times\}$ で与えられる．しばしば $\mathbf{A}^\times \ni z \mapsto \begin{pmatrix} z & \\ & z \end{pmatrix} \in Z(\mathbf{A})$ を通じて, $\mathbf{A}^\times$ と $Z(\mathbf{A})$ を同一視する．単射準同型 $\mathbf{R}_+^\times \hookrightarrow \mathbf{A}^\times$ により, $\mathbf{R}_+^\times$ を $\mathbf{A}$ や $Z(\mathbf{A})$ の部分群と見做すことにする．$GL(2,\mathbf{A})$ 上の関数 $\varphi : GL(2,\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ が, smooth(あるいは C^∞) であるとは, $g_{\mathrm{fin}} \in GL(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$ を固定するごとに

$$GL(2,\mathbf{R}) \ni g_\infty \mapsto \varphi(g_\infty g_{\mathrm{fin}}) \in C$$

が C^∞-級関数であり, $g_\infty \in GL(2,\mathbf{R})$ を固定するごとに $GL(2,\mathbf{R}) \ni g_\infty \mapsto \varphi(g_\infty g_{\mathrm{fin}}) \in \mathbf{C}$ は局所定数関数であることとする．

定義 17. (1) Hecke 指標 $\omega : \mathbf{Q}^\times \mathbf{R}_+^\times \backslash \mathbf{A}^\times \to \mathbf{C}^{(1)}$ を固定する．smooth な関数 $\varphi : GL(2,\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ が, 次の条件 (i)-(iv) を満たすとき, φ を $GL(2,\mathbf{A})$ 上の中心指標 ω を持つ保型形式と呼び, その全体を $\mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\omega)$ で表す.

(i) $\varphi(\gamma z g) = \omega(z)\varphi(g), \quad \forall(\gamma, z, g) \in GL(2,\mathbf{Q}) \times Z(\mathbf{A}) \times GL(2,\mathbf{A})$;

(ii) φ は右 $\mathbf{K}$-有限である;

(iii) φ は, $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-有限である;

(iv) φ は緩増大である, すなわち, 次の不等式を満たす様な $C > 0$, $M > 0$ が存在する:

$$|\varphi(g)| \le C||g||^M, \qquad g \in GL(2,\mathbf{A}).$$

但し, 局所的な高さ関数 $||\cdot||_v : GL(2,\mathbf{Q}_v) \to \mathbf{R}_+^\times$ を

$$||\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}||_v := \max\{|a|_v, |b|_v, |c|_v, |d|_v, 1/|ad-bc|_v\}$$

で定め, $GL(2,\mathbf{A})$ 上の高さ関数を $||g|| := \prod_v ||g_v||_v$ $(g = (g_v) \in GL(2,\mathbf{A}))$ で定義する.

(2) $\varphi \in \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\omega)$ が条件

$$\int_{\mathbf{Q}\backslash\mathbf{A}} \varphi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) dx = 0, \quad \forall g \in GL(2,\mathbf{A})$$

を満足するとき, φ を $GL(2,\mathbf{A})$ 上の中心指標 ω を持つカスプ形式 (尖点形式）と呼び, その全体を $\mathcal{A}^{cusp}(GL(2,\mathbf{A});\omega)$ で表す.

(3.2) $SL(2,\mathbf{R})$ 上の保型形式との関係. §2 で導入した $SL(2,\mathbf{R})$ 上の合同部分群に関する保型形式は, 上で定義した $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式とみなすことができる．それを説明す

るためにまず次を証明する.

補題 18. $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ を $\det(\mathbf{K}') = \widehat{\mathbf{Z}}^\times$ を満たすような $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ の開コンパクト部分群とする. このとき, $SL(2, \mathbf{R})$ の部分群 Γ' を

$$GL(2, \mathbf{Q}) \cap (SL(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{K}')$$

の $SL(2, \mathbf{Q}) \hookrightarrow GL(2, \mathbf{A})$ による引き戻しで定義する. このとき, Γ' は $SL(2, \mathbf{R})$ の合同部分群である. また $\Gamma' g_\infty \in \Gamma' \backslash SL(2, \mathbf{R})$ に対して,

$$[g_\infty] := \mathbf{R}_+^\times GL(2, \mathbf{Q}) g_\infty \mathbf{K}' \in \mathbf{R}_+^\times GL(2, \mathbf{Q}) \backslash GL(2, \mathbf{A}) / \mathbf{K}'$$

を対応させることにより全単射

$$\Gamma' \backslash G \cong \mathbf{R}_+^\times GL(2, \mathbf{Q}) \backslash GL(2, \mathbf{A}) / \mathbf{K}'$$

が得られる.

Proof. Γ' が合同部分群であることを見るには, $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ の単位元の基本近傍系として

$$\{\mathbf{K}(N)\}_{N \geq 1} \qquad \mathbf{K}(N) := \{k \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} \mid k \equiv I_2 \pmod N\}$$

がとれることに注意すればよい. また, 補題の写像が定義可能 (well-defined) であること及び単射であることは Γ' の定義から従う. 全射性を示そう. $g \in GL(2, \mathbf{A})$ を一つ取ると, 直積分解 $\mathbf{A}^\times = \mathbf{Q}^\times \times \mathbf{R}_+^\times \times \hat{\mathbf{Z}}^\times$ より,

$$\det(g) = \lambda t_\infty u_{\mathrm{fin}}, \qquad (\lambda, t_\infty, t_{\mathrm{fin}}) \in \mathbf{Q}^\times \times \mathbf{R}_+^\times \times \hat{\mathbf{Z}}^\times$$

と書くことができる. $\mathbf{K}'$ に関する仮定より, $\det(u_{\mathrm{fin}}) = t_{\mathrm{fin}}$ となるような $u_{\mathrm{fin}} \in \mathbf{K}'$ が取れる. $g_1 \in SL(2, \mathbf{A})$ を

$$g = \begin{pmatrix} t_\infty^{1/2} & \\ & t_\infty^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix} g_1 u_{\mathrm{fin}}$$

によって定める. ところで, $SL(2)$ は単連結な半単純代数群なので $SL(2, \mathbf{Q})$ は $SL(2, \mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$ において稠密である (強近似定理). したがって,

$$SL(2, \mathbf{A}_{\mathrm{fin}}) = SL(2, \mathbf{Q})(\mathbf{K}' \cap SL(2, \mathbf{A}_{\mathrm{fin}}))$$

が成立する. そこで, g_1 を

$$g_1 = \gamma_1 g_{1,\infty} u_{1,\mathrm{fin}} u_{\mathrm{fin}}, \qquad (\gamma_1, g_{1,\infty}, u_{1,\mathrm{fin}}) \in SL(2, \mathbf{Q}) \times G \times (\mathbf{K}' \cap SL(2, \mathbf{A}_{\mathrm{fin}}))$$

と書くことができる. 以上を合わせて

$$g = \begin{pmatrix} t_\infty^{1/2} & \\ & t_\infty^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix} \gamma_1 g_{1,\infty} u_{1,\mathrm{fin}} u_{\mathrm{fin}}$$

と書けるから

$$\Gamma' g_{1,\infty} \mapsto [g] \in \mathbf{R}_+^\times GL(2, \mathbf{Q}) \backslash GL(2, \mathbf{A}) / \mathbf{K}'$$

となって全射性も示された. □

例. (i) $\mathbf{K}'$ として $\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$, $\mathbf{K}_0(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} \mid c \in N\widehat{\mathbf{Z}}\}$, または $\mathbf{K}' = \mathbf{K}_1(N) :=$

$\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} \mid c, d-1 \in N\widehat{\mathbf{Z}}\}$ を取ると, これらは補題の仮定を満たし, それぞれの場合の応じて $\Gamma' = SL(2,\mathbf{Z})$, $\Gamma' = \Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod N\}$, または $\Gamma' = \Gamma_1(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{Z}) \mid c, d-1 \equiv 0 \pmod N\}$ となる.

命題 19. 補題 18 の全単射を通じて, $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma'\backslash G)$ を自然に $\mathbf{R}_+^\times GL(2,\mathbf{Q})\backslash GL(2,\mathbf{A})/\mathbf{K}'$ 上の関数とみなしたものを $\widetilde{\varphi}$ と記す. すると, $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ は単射

$$M_k(\Gamma_0(N)) \cong \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma_0(N)\backslash G) \hookrightarrow \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A}); \mathbf{1})$$

$$S_k(\Gamma_0(N)) \cong \mathcal{A}_k^{holo}(\Gamma_0(N)\backslash G) \cap \mathcal{A}^{cusp}(\Gamma_0(N)\backslash G) \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(GL(2,\mathbf{A}); \mathbf{1})$$

を与える.

Proof. 1 つ目の単射は, $\widetilde{\varphi}$ が緩増大であることを確かめれば良い. 2 つ目の単射については, 尖点条件が対応することを見れば良い. □

同様に, $\chi : (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \to \mathbf{C}^\times$ を Dirichlet 指標とし,

$$M_k(\Gamma_0(N), \chi) := \left\{ f \in M_k(\Gamma_1(N)) \mid f|_k\gamma = \chi(d)f \quad \forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \right\}$$

と置くとき,

$$M_k(\Gamma_0(N), \chi) \hookrightarrow \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A}); \omega_\chi^{-1})$$

なる自然な単射が得られる. ここで, $\omega_\chi : \mathbf{A}^\times/\mathbf{Q}^\times\mathbf{R}_+^\times \cong \widehat{\mathbf{Z}}^\times \to (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \xrightarrow{\chi} \mathbf{C}^\times$ と置いた.

(3.3) Hecke 作用素. 有限素点 $p < \infty$ を一つ固定し,

$$\mathcal{H}_p := \left\{ \Phi : GL(2,\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{C} \mid \begin{array}{l} \bullet\ \Phi(kgk') = \Phi(g), \quad \forall k, k' \in K_p, \forall g \in GL(2,\mathbf{Q}_p), \\ \bullet\ \mathrm{supp}(\Phi)\ \text{はコンパクト} \end{array} \right\}$$

と置く. unimodular 群 $GL(2,\mathbf{Q}_p)$ 上の Haar 測度を $\mathrm{vol}(K_p) = 1$ となるように正規化し, $\mathcal{H}_p$ に合成積

$$(\Phi * \Phi')(x) = \int_{GL(2,\mathbf{Q}_p)} \Phi(xy^{-1})\Phi'(y)dy, \qquad \Phi, \Phi' \in \mathcal{H}_p$$

によって積演算を入れると ch_{K_p} を単位元とする結合的 $\mathbf{C}$-algebra となる. $\mathcal{H}_p$ を Hecke 環 (Hecke algebra) と呼ぶ. $\mathcal{H}_p$ は次の空間

$$\left\{ \Phi : GL^+(2,\mathbf{Z}[\tfrac{1}{p}]) \to \mathbf{C} \mid \begin{array}{l} \bullet\ \Phi(\gamma\delta\gamma') = \Phi(g), \quad \forall\gamma, \gamma' \in \Gamma(1), \forall\delta \in GL^+(2,\mathbf{Z}[\tfrac{1}{p}]); \\ \bullet\ \exists\delta_i \text{ s.t. } \{\delta \mid \Phi(\delta) \neq 0\} \subset \cup_{i=1}^{\ell}\Gamma(1)\delta_i\Gamma(1) \end{array} \right\}$$

と制限写像を通じて同一視される. $p \nmid N$ のときに $M_k(\Gamma_0(N))$ への $\mathcal{H}_p$ の作用を定義しよう. $\delta \in GL^+(2,\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$ に対して $\Phi_\delta \in \mathcal{H}_p$ を $\Gamma(1)\delta\Gamma(1)$ の定義関数とする. $\Gamma(1)\delta\Gamma(1) = \sqcup_j \Gamma(1)\alpha_j$ とするとき

$$f * \Phi_\delta = \sum_j f|_k\alpha_j$$

と定義し, これを $\mathbf{C}$-線形に拡張する. また, $\varphi \in \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\mathbf{1})$ および $\Phi \in \mathcal{H}_p$ に対して,

$$[\varphi * \Phi](x) := \int_{GL(2,\mathbf{Q}_p)} \varphi(xg_p^{-1})\Phi(g_p)dg_p$$

によって定義する. このとき,

$$\widetilde{\varphi}_{f*\Phi} = \widetilde{\varphi_f} * \Phi, \qquad f \in M_k(\Gamma_0(N)), \quad \Phi \in \mathcal{H}_p$$

が成立する.

問. 上の等式を確かめよ.

(3.4) Eisenstein 級数. 後の講演（原稿）の準備を兼ねて, $GL(2,\mathbf{A})$ 上の保型形式の例として, Eisenstein 級数を最も簡単な場合に導入しておこう. $GL(2,\mathbf{A})$ の主系列表現の空間を

$$I(s) := \Big\{\phi : GL(2,\mathbf{A}) \to \mathbf{C} \mid \phi(\begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} g) = |\frac{b_1}{b_2}|^{(s+1)/2}\phi(g)\Big\}$$

で定義する. $I(s)$ に属す関数のうち右 $\mathbf{K}$ 有限な関数の全体を $I(s)_{\mathbf{K}}$ で表す. このとき, $E : I(s)_{\mathbf{K}} \to \mathcal{A}(GL(2,\mathbf{A});\mathbf{1})$ を

$$E(\phi;g) := \sum_{\gamma \in B(\mathbf{Q})\backslash GL(2,\mathbf{Q})} \phi(\gamma g)$$

で定義すると, これは $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し, $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times GL(2,\mathbf{A}_{\mathrm{fin}})$-加群としての絡作用素を与える. ここで, $B(\mathbf{Q}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbf{Q})\}$ は $GL(2,\mathbf{Q})$ の Borel 部分群である. さらに, 関数族 $\phi^{(s)} \in I(s)_{\mathbf{K}}$ $(s \in \mathbf{C})$ の $\mathbf{K}$ への制限が s によらないとき, $E(\phi^{(s)};g)$ は全 s-平面に有理型に解析接続されることが示される. $\phi^{(s)}$ として, $\mathbf{K}$-不変ベクトル $\phi^{\circ,(s)}(k) = 1$ $(\forall k \in \mathbf{K})$ をとると

$$E(\phi^{\circ,(s)}, g_z) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)\in\mathbf{Z}^2, (c,d)=1} \Big(\frac{y}{|cz+d|^2}\Big)^{(s+1)/2}$$

となって, 重さ 0 の実解析的 Eisenstein 級数を得る. $C^\infty(G/K)$ 上のラプラス作用素を

$$\Delta = -y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) = -2R(\Omega_{\mathfrak{g}})$$

で定義する. E が $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-準同型であることを使って計算すれば

$$\Delta E(\phi^{\circ,(s)}, g_z) = 2(1-s^2)E(\phi^{\circ,(s)}, g_z)$$

を得る. 同じく $\phi^{\circ,(s)}(k) = 1$ $(\forall k \in \mathbf{K})$ が Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ たちの同時固有関数であることに注意すれば, E が $GL(2,\mathbf{Q}_p)$-準同型であることから $E(\phi^{\circ,(s)}, g)$ も Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ たちの同時固有関数であることがわかる.

文献案内

1. 半単純 Lie 群上の解析の基本的な手法. Lie 群の基礎事項に関しては [Helgason1](あるいは [Helgason2]) の Ch. 2（約 60 ページ） が勧められる（一部で，Ch. 1 の微分幾何の定理を援用している個所もあるが，Ch. 2 からでも読み進めることも可能). 他にも，[小林-大島], [Warner], [松嶋 1], [松木] などがあるが, これらから一冊読めば十分であろう. 上記と平行して [佐武] を読まれるのも全体像をつかむのに役立つ. Lie 環論については [Serre] はいくつか基本的な定理 (Lie の定理, Engel の定理) の証明は略されているが，それらを法として self-contained に書かれており，読みやすい. そのほか [Helgason1, Ch. 3] もよくまとまっている. [松嶋 2], [Humphreys] も昔からよく読まれているようである.

2. 半単純 Lie 群 $G = SL(2, \mathbf{R})$ 上の保型形式の空間. [Harish-Chandra] およびその解説として [Borel], [Bump, Ch.2], [Borel-Jacquet] など. Lie 群の表現論に関しては, [Knapp], [Wallach] が標準的な教科書である. 特に後者は, 保型形式の研究者にとってなじみやすいように思う.

3. アデール群上の保型形式の空間と Hecke 作用素 ($GL(2)$ の場合). 全般的な解説としては, [Bump, Chapter 3], [Gelbart-Shahidi], [Cogdell] 等がある. 関連する p-進代数群の表現に関しては, [Bernstein-Zelvinski], [Bump, Ch.4], [Cartier], [高橋], [Satake] をまず見るとよい. L-関数については, まったく触れなかった. これについては, [Jacquet-Langalands] に加えて, [Cogdell], [今野] などにも詳しい解説がある. 代数群に関しては，[Platonov-Rapinchuk] が便利な文献.

References

[Borel] Borel, A., *Automorphic forms on* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, Cambridge Tracts in Mathematics, 130. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

[Bernstein-Zelvinski] , Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field, Russian Math Suveys **3** (1976) 1–68.

[Borel-Jacquet] Borel, A. and Jacquet, H, Automorphic forms and automorphic representations., With a supplement “On the notion of an automorphic representation” by R. P. Langlands. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, pp. 189–207, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Bump] Bump, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, (1997).

[Cartier] Cartier, P, Representations of p-adic groups: a survey. Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977, Part 1, pp. 111–155, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Cogdell] Cogdell, J., L-functions and converse theorems for GL_n, In; Automorphic forms and applications, AMS (2007).

[Garrett] Garrett, P., Universality of holomorphic discrete series. Available from http://www.math.umn.edu/˜garrett

[Gelbart-Shahidi] Gelbart, S and Shahidi, F., *Analytic properties of automorphic L-functions*, Perspectives in Math. (1988). Academic Press.

[Harish-Chandra] Harish-Chandra., *Automorphic forms on semisimple Lie groups*, Lecture notes in Math. **62** (1968), Springer.

[Helgason1] Helgason, S., *Differential geometry and symmetric spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XII. Academic Press, New York-London 1962 xiv+486 pp.

[Helgason2] Helgason, S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, 34. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xxvi+641 pp. (Academic Press version もある).

[Humphreys] Humphreys, J. E, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* (GTM 9), (1978) Springer.

[Jacquet-Langlands] Jacquet, H. and Langlands, R.P., *Automorphic forms on $GL(2)$.*, Nocture notes in Mathematics 114, (1970) Springer Verlag.

[Knapp] Knapp, A.W., Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples. Princeton Mathematical Series, 36. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986.

[小林-大島] 小林俊行　大島利雄, Lie 群と表現論 (「Lie 群と Lie 環 1,2」(1999) を改題), 岩波書店 (2005).

[今野] 今野拓也, 「GL_2 上の保型形式とその標準 L 函数」, 第 16 回整数論サマースクール「保型 L 関数」報告集　(2009), p37-136.

[松木] 松木敏彦, リー群入門 (日評数学選書), 日本評論社 (2005).

[松嶋 1] Matsushima, Y., 多様体入門, 裳華房 (1965).

[松嶋 2] Matsushima, Y., Lie 環論, 共立出版 (1956).

[Mo] Moriyama, T., Representations of $GSp(4,\mathbf{R})$ with emphasis on discrete series 第 9 回整数論オータムワークショップ 報告集 (2007), page 199-211.

[Platonov-Rapinchuk] Platonov. V and Rapinchuk. A., Algebraic groups and number theory., Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen. Pure and Applied Mathematics, 139. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994. xii+614 pp.Academic Press.

[佐武] Satake, I., Lie 群の話., 日本評論社　(1982).

[Satake] Satake, I., Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 18 (1963) 5–69.

[Serre] Serre, J. P., Complex seimsimple Lie algebras., Translated from the French by G. A. Jones. Springer-Verlag, New York, (1987). x+74 pp. Springer.

[高橋] 高橋哲也, p 進体上の簡約代数群の admissible 表現論入門 Rokko Lectures in Mathematics vol.4 (1998).

[Wallach] Wallach, N., Real reductive groups I, Academic Press.

[Wallach-2] Wallach, N., On the constant term of an L2-automorphic form, Operator Algebras and Group Representations.II (Momog. Stud. Math., Vol. 18), Pittman, London, 1984, 227-237.

[Warner] Warner, F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.*, Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. ix+272 pp.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka UniversityMachikaneyama-cho 1-1, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan

E-mail address: `moriyama[at]math.sci.osaka-u.ac.jp`