安定跡公式入門: $GL(1)$ の捩じれた跡公式を例にとった解説

平賀 郁

Contents

1. 初めに

サマースクールでは GL_1 の捩じれた跡公式と Arthur の安定跡公式について解説を行いました. 本来はサマースクールでの講演にもとづき (simple version でない) 跡公式の安定化について解説を行うべきなのですが, 本概説では GL_1 の捩じれた跡公式を例にとり跡公式の安定化の解説を行うことにしました. その理由としては, Arthur 自身による 260 ページにもなる優れた概説論文 “An introduction to the trace formula” が既に存在しており, これより優れたものを本報告集にまとめるのは著者の能力を超えると思われたことと, GL_1 の捩じれた跡公式は初等的に安定化が行えるため表現論等を必要とせずに跡公式の安定化とはなにかを説明できることがあります.

一般の代数群に対しては, 跡公式の幾何側の主要部分である楕円項の安定化についての今野拓也氏による優れた解説が本報告集にあるのでそちらを読まれることをお薦めします.

本概説はサマースクールの報告集ということもあり日本語で記述しています. 安定跡公式とかエンドスコピーに関する日本語の専門用語は未だ一般に定着していないと思われますので, §A に本概説での日本語訳と元の英語との対照表をつけてあります.

捩じれたエンドスコピーは base change の一般化です. Base change に捩じれた跡公式を使うことは齋藤裕先生の論文 [Sai75] から始まりました.

2. Notations

本概説では F は数体とし, E を F の 2 次拡大体としています. また F の素点を v で表します. 更に次の記号を使います. (ヴェイユ群については [AT68, Chapter Fifteen] を参照してください.)

記号 2.1.

$\mathbb{A}$: F のアデール環
$\mathbb{A}_E$: E のアデール環
σ: $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元
$\overline{F}$: F の代数的閉体
Γ_F: F の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$
Γ_E: E の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$
W_F: F のヴェイユ群
W_E: E のヴェイユ群
W_{F_v}: F_v のヴェイユ群

ノルム写像を

$$N_{E/F} : E^\times \longrightarrow F^\times$$

とします. また $E^1 \subset E^\times$ を $N_{E/F}$ の核とします. つまり $E^1 = \{x \in E^\times \,|\, N_{E/F}x = 1\}$ です. ガロア群の元 σ の作用は $E \otimes_F F_v$ や $\mathbb{A}_E$ に自然に延長され, それも同じ記号 σ で表します. ノルム写像も $(E \otimes_F F_v)^\times$ や $\mathbb{A}_E^\times$ に自然に延長できますから, それらも同じ記号 $N_{E/F}$ で表すことにします.

$$N_{E/F} : (E \otimes_F F_v)^\times \longrightarrow F_v^\times$$
$$N_{E/F} : \mathbb{A}_E^\times \longrightarrow \mathbb{A}^\times$$

いまの場合 E/F は 2 次拡大体なので $E \otimes_F F_v$ は F_v の 2 次拡大体か $F_v \oplus F_v$ となります. 前者の場合 F_v の 2 次拡大体を E_v で表すことにします. 本概説では $E \otimes_F F_v = E_v$ となる素点全体のなす集合を $\mathfrak{P}_I$

で表し, $E \otimes_F F_v = F_v \oplus F_v$ となる素点全体のなす集合を $\mathfrak{P}_{NI}$ と表すことにします. つまり

$$E \otimes_F F_v = \begin{cases} E_v, & v \in \mathfrak{P}_I \\ F_v \oplus F_v, & v \in \mathfrak{P}_{NI} \end{cases}$$

となります.

いま $\mathbb{A}_F^\times / F^\times N_{E/F} \mathbb{A}_E^\times$ は位数 2 の群になりますから, その非自明な指標を ω で表します. また $v \in \mathfrak{P}_I$ の場合にも $F^\times / N_{E/F} E^\times$ は位数 2 の群になりますから, その非自明な指標を ω_v で表します. 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ に対しては $F_v^\times / N_{E/F}(E \otimes_F F_v)^\times$ は自明な群なので ω_v は自明な指標とします. またそれぞれを $\mathbb{A}_F^\times$, $F_v^\times$ の指標とみなします. つまり

$$\omega : F^\times N_{E/F} \mathbb{A}_E^\times \text{ で自明な } \mathbb{A}^\times \text{ の非自明な指標}$$

$$\omega_v : \begin{cases} N_{E/F} E_v^\times \text{ で自明な } F_v^\times \text{ の非自明な指標}, & v \in \mathfrak{P}_I \\ F_v^\times \text{ の自明な指標} & v \in \mathfrak{P}_{NI} \end{cases}$$

とします.

類体論により準同形写像

$$W_F \longrightarrow F^\times \backslash \mathbb{A}^\times$$
$$W_{F_v} \longrightarrow F_v^\times$$

が得られるので, これにより $F^\times$ 上自明な $\mathbb{A}^\times$ の指標と W_F の 1 次元指標を同一視し, $F_v^\times$ の指標と W_{F_v} の 1 次元指標を同一視します.

素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しては σ_v を $\mathrm{Gal}(E_v/F_v)$ の自明でない元とし, 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ に対しては σ_v を自明な $F_v \oplus F_v$ への作用とします (よって σ の $F_v \oplus F_v$ への作用とは異なります). 本概説を通じて W_E に含まれない W_F の元 w_σ を固定し, 素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しても W_{E_v} に含まれない W_{F_v} の元 w_{σ_v} を固定しておきます. また素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ に対しては $w_{\sigma_v} = 1$ としておきます.

Remark 2.2. いま

$$W_F / W_E = \Gamma_F / \Gamma_E = \langle \sigma \rangle$$

なので $w_\sigma^2 \in W_E$ となりますが, w_σ^2 の準同形写像

$$W_E \longrightarrow E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$$

での像は $\mathbb{A}^\times - F^\times N_{E/F} \mathbb{A}_E^\times$ に入ります. よって

$$\omega(w_\sigma^2) = -1$$

です. 同様に $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しては

$$\omega_v(w_{\sigma_v}^2) = -1$$

が成り立ちます.

ユニタリ群は

$$\{\delta \in GL_1(E) |\, \delta\sigma(\delta) = 1\}$$

ですが, F 上定義された代数群を考えたいので, 次のように U_1 を定義します. まず

$$G = \mathrm{Res}_{E/F} GL_1$$

とします. 記号 $\mathrm{Res}_{E/F}$ は Weil restriction of scalars を意味しています. つまり G は F 上定義された代数群で, $\overline{F}$ 上では $GL_1 \times GL_1$ と同形ですがガロア群 Γ_F の作用が

$$\tau(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} (\tau(\delta_1), \tau(\delta_2)), & \tau \in \Gamma_E \\ (\tau(\delta_2), \tau(\delta_1)), & \tau \in \Gamma_F - \Gamma_E \end{cases} \qquad (\delta_1, \delta_2) \in G$$

となるものです. すぐに分かるように G に対しては

$$G(F) = \{(\delta, \sigma(\delta)) |\, \delta \in GL_1(E)\} \simeq GL_1(E) = E^\times$$

が成り立ちます. ここで

$$\overline{(\delta_1, \delta_2)} = (\delta_2, \delta_1), \qquad (\delta_1, \delta_2) \in G$$

とすると $\bar{\cdot}$ は F 上定義された同形写像で, $E^\times$ への σ の作用を $G(F) \simeq E^\times$ により $G(F)$ に引き戻したものになっています. (ガロア群の元としての σ の G への作用とは異なっているので別の記号にしてあります.) 代数群としての U_1 を

$$U_1 = \{\delta \in G |\, \delta\overline{\delta} = 1\}$$

により定めます. 定義から

$$U_1(F) = \{(\delta, \sigma(\delta)) |\, \delta \in E^\times, \delta\sigma(\delta) = 1\}$$

となりますから, これは確かにユニタリ群です.

Remark 2.3. U_1 は E 上定義された写像

$$U_1 \ni (\delta, \delta^{-1}) \mapsto \delta \in GL_1$$

により GL_1 と同形になりますから G は U_1 の base change に対応する代数群です.

素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ では U_1 は E_v/F_v に対応するユニタリ群になります. 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ では G は $GL_1 \times GL_1$ と F_v 上同形になり U_1 は同形写像

$$U_1 \ni (\delta_v, \delta_v^{-1}) \mapsto \delta_v \in GL_1$$

により F_v 上 GL_1 と同形になります.

3. L-群と Langlands 対応

3.1. L-**群.** ここでは L-群について簡単に説明します. いま F 上定義された代数群 T で $\overline{F}$ 上 $GL_1 \times \cdots \times GL_1$ と同形になっているもの (G も U_1 もそうです) について

$$X^*(T) = \mathrm{Hom}(T, GL_1)$$
$$X_*(T) = \mathrm{Hom}(GL_1, T)$$

と定義します. ここで X^* と X_* が入れ替わるものが双対群 $\hat{T}$ です. つまり

$$\hat{T} = X^*(T) \otimes GL_1(\mathbb{C})$$

と定義されます. $X^*(T)$ にはガロア群 Γ_F が作用していますから, $GL_1(\mathbb{C})$ に Γ_F を自明に作用させることにより, $\hat{T}$ への Γ_F の作用が定まります. よって準同形写像 $W_F \longrightarrow \Gamma_F$ を経由してヴェイユ群 W_F が $\hat{T}$ に作用します. T の L-群とは半直積

$${}^L T = \hat{T} \rtimes W_F$$

のことです. G と U_1 に対しては

$$\hat{G} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times, \qquad \tau(g_1, g_2) = \begin{cases} (g_1, g_2), & \tau \in \Gamma_E \\ (g_2, g_1), & \tau \in \Gamma_F - \Gamma_E \end{cases}$$

$$\hat{U}_1 = \mathbb{C}^*, \qquad \tau(h) = \begin{cases} h, & \tau \in \Gamma_E \\ h^{-1} & \tau \in \Gamma_F - \Gamma_E \end{cases}$$

となります. 素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ のときも同様で, $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ のときには $\hat{T}, \hat{G}$ に Γ_{F_v} が自明に作用します.

F 上定義された準同形写像 $T_1 \longrightarrow T_2$ に対して, 自然な準同形写像 $X^*(T_2) \longrightarrow X^*(T_1)$ が存在しますが, これは Γ_F の作用と可換なので Γ_F の作用と可換な双対群の間の準同形写像

$$\hat{T}_2 \longrightarrow \hat{T}_1$$

と L-群の間の自然な準同形写像

$${}^L T_2 \longrightarrow {}^L T_1$$

が定まります.

F 上定義された G の同形写像 θ を

$$\theta(\delta_1, \delta_2) = (\delta_2^{-1}, \delta_1^{-1}), \quad (\delta_1, \delta_2) \in G$$

と定めます. これに対応して双対群 $\hat{G}$ の同形写像

$$\hat{\theta} \colon (g_1, g_2) \mapsto (g_2^{-1}, g_1^{-1}), \quad (g_1, g_2) \in \hat{G}$$

が得られます．いま準同形写像

$$\hat{U}_1 \ni h \mapsto (h, h^{-1}) \in \hat{G}$$

が存在し，その像は $\{g \in \hat{G} | \, \hat{\theta}(g) = g\}$ となります．この準同形写像の双対となる準同形写像は

$$G \ni (\delta_1, \delta_2) \mapsto \delta_1 \delta_2^{-1} \in U_1$$

なので $G(F) \simeq E^\times$ から $U_1(F) \simeq E^1$ への写像としては

$$E^\times \ni \delta \mapsto \delta\sigma(\delta)^{-1} \in E^1$$

となります．

3.2. **Langlands 対応.** 完全列

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & F^\times & \longrightarrow & E^\times & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \delta & \longrightarrow & \delta\sigma(\delta)^{-1} & & \end{array}$$

に対応して代数群の完全列

$$1 \longrightarrow GL_1 \longrightarrow G \longrightarrow U_1 \longrightarrow 1$$

とその双対

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longleftarrow & {}^L GL_1 & \longleftarrow & {}^L G & \xleftarrow{\xi_1} & {}^L U_1 & \longleftarrow & 1 \\ & & & & (h, h^{-1}) \rtimes w & \longleftarrow & h \rtimes w & & \end{array}$$

があります．

定義 3.1. U_1 の L-パラメーターとは連続な準同形写像

$$\phi\colon W_F \longrightarrow {}^L U_1 = \hat{U}_1 \rtimes W_F$$

で第 2 因子への射影が恒等写像となっているもののことです．(G, GL_1 の L-パラメーターも同様です.)

Tate–中山双対により U_1 の L-パラメーターと $U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})$ の 1 次元指標とが対応しています．この対応を以下で説明します．L-パラメーター $\phi\colon W_F \longrightarrow {}^L U_1$ があると，ξ_1 との合成により L-パラメーター

$$\xi_1 \circ \phi\colon W_F \longrightarrow {}^L U_1 \xrightarrow{\xi_1} {}^L G$$

が得られます．$G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \simeq E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$ なので $\xi_1 \circ \phi$ は $E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標を定めるはずですが，それは $\xi_1 \circ \phi$ を W_E に制限して $\hat{G} = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ の第 1 因子への射影をとった準同形写像

$$proj_1 \circ (\xi_1 \circ \phi)|_{W_E} \colon W_E \longrightarrow {}^L G \xrightarrow{proj_1} \mathbb{C}^\times$$

に類体論で対応するものです．この $E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標は $\mathbb{A}^\times$ に制限すると自明になるので

$$\mathbb{A}^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times \simeq U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})$$

の 1 次元指標を定めます. これが L-パラメーター $\phi\colon W_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対応する 1 次元指標です. 素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しても同様にして L-パラメーター $\phi_v : W_{F_v} \longrightarrow {}^L U_1$ と $U_1(F_v) \simeq E_v^1$ の 1 次元指標が対応します. 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ のときには $U_1 \simeq GL_1$ なので L-パラメーターと $U_1(F_v) \simeq F_v^\times$ との対応は局所類体論の定めるものになります.

定義 3.2. L-パラメーター $\phi\colon W_F \longrightarrow {}^L U_1$ に対応する $U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})$ の 1 次元指標を ρ_ϕ と表すことにし, L-パラメーター $\varphi : W_F \longrightarrow {}^L G$ に対応する $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \simeq E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標を π_φ と表すことにします. 局所的な L-パラメーターに関しても同様に表すことにします.

L-パラメーター $\phi\colon W_F \longrightarrow {}^L U_1$ を W_{F_v} へ制限すると, 局所的な L-パラメーター ϕ_v が得られ,

$$\rho_\phi = \otimes_v \rho_{\phi_v}$$

となっています.

以下では説明を分かりやすくする為, $G(F)$ を $E^\times$ と同一視し, $U_1(F)$ を E^1 と同一視します. また $G(\mathbb{A})$ を $\mathbb{A}_E^\times$ と同一視します. 同様に $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しては $G(F_v)$ を $E_v^\times$ と同一視し, $U_1(F_v)$ を E_v^1 と同一視します. また $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ に対しても $G(F_v)$ を $F_v^\times \times F_v^\times$ と同一視し, $U_1(F_v)$ を $F_v^\times$ と同一視します.

$G(\mathbb{A}_F) \simeq \mathbb{A}_E^\times$ により θ を $\mathbb{A}_E^\times$ の同形写像とみると

$$\theta(\delta) = \sigma(\delta)^{-1}, \quad \delta \in \mathbb{A}_E^\times$$

となります. 局所体のときも同様です.

4. G の捩じれた跡公式の安定化

4.1. G **の捩じれたエンドスコピー.** §3.2 の Langlands 対応の記述から

$$\pi_{\xi_1\circ\phi}(\delta) = \rho_\phi(\delta\overline{\delta}^{-1})$$
$$\pi_{\xi_1\circ\phi_v}(\delta_v) = \rho_{\phi_v}(\delta_v\overline{\delta_v}^{-1})$$

となることが分かります. これはエンドスコピーによる移送

$$\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G : \rho_\phi \longrightarrow \pi_{\xi_1\circ\phi}$$

を定めます.

このとき, $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G$ の像は §3.2 の Langlands 対応の記述から

$$\pi|_{E^\times\mathbb{A}_F^\times} \equiv 1$$

をみたす $\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標の全体となります. いま $\delta\theta(\delta)^{-1} \in GL_1$ ($\mathbb{A}_E^\times$ と同一視すると $\delta\theta(\delta)^{-1} = \delta\sigma(\delta) \in \mathbb{A}_F^\times$) なので, このような π は θ-不変です. また次が成り立つこともわかります.

Remark 4.1. π が θ-不変 $\Longleftrightarrow \pi|_{E^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times} \equiv 1$

ですから θ-不変な π には $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G$ の像に入らないものがあります．実は $\xi_1 : {}^LU_1 \longrightarrow {}^LG$ の他にもうひとつ

$$\xi_2 : {}^LU_1 \longrightarrow {}^LG$$

が存在しています．これは $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の指標 μ として $\mathbb{A}_F^\times$ に制限したとき ω となるものをひとつ固定して,

$$\begin{aligned}\xi_2(h \rtimes w) &= (h\mu(w), h\mu(w)) \rtimes w, \quad h \rtimes w \in \hat{U}_1 \rtimes W_E\\ \xi_2(1 \rtimes w_\sigma) &= (1, -1) \rtimes w_\sigma\end{aligned}$$

と定めることにより得られます．準同形写像 ξ_2 による 1 次元指標の間の対応は

$$\pi_{\xi_2\circ\phi}(\delta) = \rho_\phi(\delta\overline{\delta}^{-1})\mu(\delta)$$

により与えられます．この対応を

$$\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_2}^G : \rho_\phi \mapsto \pi_{\xi_2\circ\phi}$$

と表すと, $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_2}^G$ の像は $\mathbb{A}_F^\times$ への制限が ω となる $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標の全体となるので, $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G$ と $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_2}^G$ の像の合併が θ-不変な $E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の 1 次元指標の全体と一致します．

2 個の $(U_1, \xi_1), (U_1, \xi_2)$ ([KS99] の記号で $(U_1, {}^LU_1, 1, \xi_1), (U_1, {}^LU_1, 1, \xi_2)$) が G の θ に対応する捩じれたエンドスコピーの同値類の代表系になります．

素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ に対しても上記と同様のことが成り立ちます． 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ に対しては $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G$ と $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_2}^G$ の像は一致していて両方とも θ-不変な $F_v^\times \times F_v^\times$ の 1 次元の全体となります．

4.2. U_1 **の跡公式.** U_1 の跡公式は Poisson の和公式そのものです．$\mathcal{H}(U_1(\mathbb{A}))$ を $U_1(\mathbb{A})$ 上の滑らかでコンパクトな台をもつ関数全体の集合とします．また $f \in \mathcal{H}(U_1(\mathbb{A}))$ と $\gamma \in U_1(\mathbb{A})$ と $U_1(\mathbb{A})$ の 1 次元指標 ρ に対して

$$\begin{aligned}J(\gamma, f) &= f(\gamma)\\ J(\rho, f) &= \int_{U_1(\mathbb{A})} \rho(x) f(x)\, dx\end{aligned}$$

と定めます．また $U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})$ の 1 次元指標全体の集合を $\Pi(U_1)$ と表すことにします．このとき U_1 の跡公式は

$$\sum_{\gamma\in U_1(F)} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A})) \cdot J(\gamma, f) = \sum_{\rho\in\Pi(U_1)} 1 \cdot J(\rho, f)$$

となります．これは安定跡公式になっています．

記号 4.2. U_1 の跡公式の両辺を $\hat{S}^{U_1}(f)$ と表すことにします．

4.3. G **の捩じれた跡公式.** いま

$$\mathfrak{A}_G = \left\{ (x, x, \ldots, x) \in \prod_{v:\text{ archimedean}} G(F_v) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^\times_{>0} \right\}$$

として, $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ への θ の作用 $I(\theta)$ を

$$(I(\theta)\psi)(x) = \psi(\theta^{-1}(x)), \quad \psi \in L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$$

と定義します. $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ には $G(\mathbb{A})$ が右移動 r で作用します. つまり $\delta \in G(\mathbb{A})$ が $r(\delta) : \psi(x) \mapsto \psi(x\delta)$ により作用しています. これは $G(\mathbb{A})$ の表現です. いま $G(\mathbb{A})$ 上の滑らかでコンパクトな台をもつ関数全体の集合を $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ と表し, $\tilde{f} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$ の $L^2(G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A}))$ への作用を

$$(r(\tilde{f})\psi)(x) = \int_{G(\mathbb{A})} \tilde{f}(y)\psi(xy)\,dy$$

で定義します. $G(\mathbb{A})$ の既約表現 π に対しても同様に作用素 $\pi(\tilde{f})$ を定めます. $G(\mathbb{A})$ の捩じれた跡公式は $r(\tilde{f}) \circ I(\theta)$ の跡についての公式です. $\Pi^\theta(G)$ を r の既約分解に現れる $G(\mathbb{A})$ の表現 π で $\pi(\theta^{-1}(\delta)) = \pi(\delta)$ をみたすもの全体の集合とします. $\pi \in \Pi^\theta(G)$ とするとき π への $I(\theta)$ の制限も同じ記号 $I(\theta)$ で表します. (実際にはこのとき $I(\theta)$ の π への制限は恒等写像です.)

定義 4.3. $\delta, \delta' \in G(F)$ が θ-共役とは

$$\delta' = x^{-1}\delta\theta(x)$$

となる $x \in G(F)$ が存在することです. このとき

$$\delta' \sim_\theta \delta$$

と表すことにします.

Remark 4.4. いま

$$x^{-1}\delta\theta(x) = x^{-1}\theta(x)\delta = N_{E/F}(x^{-1})\delta$$

なので

$$U_1 = \{x \in G \,|\, x^{-1}\delta\theta(x) = \delta\}$$

であり, $G(F) \simeq E^\times$ の θ-共役類は $E^\times/N_{E/F}E^\times$ と同一視されます.

捩じれた軌道積分を

$$J^\theta(\delta, \tilde{f}) = \int_{U_1(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \tilde{f}(x^{-1}\delta\theta(x))\,dx$$

と定義します.

このとき捩じれた跡公式は次のようになります.

命題 4.5.

$$2\cdot \sum_{\delta\in E^\times/N_{E/F}E^\times} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))J^\theta(\delta,\tilde{f}) = \sum_{\pi\in\Pi^\theta(G)} 1\cdot \mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))$$

(左辺は $G(F)\simeq E^\times$ により $\delta\in G(F)$ を $E^\times$ の元とみています.)

Proof.

$$\begin{aligned}(r(\tilde{f})\circ I(\theta)\psi)(x) &= \int_{G(\mathbb{A})} \tilde{f}(y)\psi(\theta^{-1}(xy))\,dy = \int_{G(\mathbb{A})} \tilde{f}(x^{-1}\theta(y))\psi(y)\,dy \\ &= \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in G(F)} \int_{\mathfrak{A}_G} \tilde{f}(x^{-1}\delta\theta(y)a)\psi(y)\,da\,dy\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(r(\tilde{f})\circ I(\theta)) &= \int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in G(F)} \int_{\mathfrak{A}_G} \tilde{f}(x^{-1}\delta\theta(x)a)\,da\,dx \\ &= 2\int_{G(F)\mathfrak{A}_G\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\delta\in G(F)} \int_{\mathfrak{A}_G} \tilde{f}(a^{-1}x^{-1}\delta\theta(xa))\,da\,dx\end{aligned}$$

を変形していくと幾何側がでます. 一方, スペクトル側が

$$\sum_{\pi\in\Pi^\theta(G)} 1\cdot \mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))$$

となることはすぐに分かります. □

4.4. G の安定 θ-共役.

定義 4.6. $\delta,\delta'\in G(F)$ が安定 θ-共役とは

$$\delta' = x^{-1}\delta\theta(x)$$

となる $x\in G(\overline{F})$ が存在することです. このとき

$$\delta' \sim_{st,\theta} \delta$$

と表すことにします. 同様にして $\delta_v,\delta'_v\in G(F_v)$ が安定 θ-共役であるということも定義されます. (F を F_v に書き換えるだけです.)

補題 4.7. $\delta,\delta'\in G(F)$ が θ-共役になる為の必要十分条件は, $G(F)\simeq E^\times$ により $E^\times$ の元とみて

$$\delta'\in\delta N_{E/F}E^\times$$

が成り立つことです. 一方で $\delta,\delta'\in G(F)\simeq E^\times$ が安定 θ-共役になる為の必要十分条件は

$$\delta'\in\delta F^\times$$

が成り立つことです.

Proof. θ-共役については既に示してあるので, 安定 θ-共役について証明します.

$x = (x_1, x_2) \in G(\overline{F})$ とするとき

$$x^{-1}\theta(x) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})(x_2^{-1}, x_1^{-1}) = (x_1^{-1}x_2^{-1}, x_2^{-1}x_1^{-1})$$

です. よって $x \in G(\overline{F})$ に対して $N_{E/F}(x) = x\theta(x)^{-1} = x\overline{x}$ と定めると

$$N_{E/F}G(\overline{F}) = \{(y,y) |\, y \in GL_1(\overline{F})\}$$

なので

$$N_{E/F}G(\overline{F}) \cap G(F) = \{(y,y) |\, y = \sigma(y), y \in GL_1(E)\} \simeq F^\times$$

となり,

$$\delta' \sim_{\theta,st} \delta \Longleftrightarrow \delta' = x^{-1}\theta(x)\delta, \quad {}^{\exists}x \in G(\overline{F})$$

より, 安定 θ-共役の場合が証明されます. □

系 4.8. $\delta, \delta' \in G(F)$ に対して

$$\delta'\theta(\delta') = \delta\theta(\delta) \Longleftrightarrow \delta' \sim_{\theta,st} \delta.$$

Proof. $\delta', \delta \in E^\times$ とみて

$$\delta' \sim_{st,\theta} \delta \Longleftrightarrow \delta' \in \delta F^\times \Longleftrightarrow \delta'\sigma(\delta')^{-1} = \delta\sigma(\delta)^{-1}$$

なので $x \in G$ に対して $\overline{x} = \theta(x)^{-1}$ であることからいえます. ($G(F)$ での $\overline{\cdot}$ の作用は $E^\times$ では σ になっていました.) □

Remark 4.9. 素点 $v \in \mathfrak{P}_I$ でも同様の結果が成り立ちます. 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ では

$$\delta'_v \sim_{st,\theta} \delta_v \Longleftrightarrow \delta'_v \sim_\theta \delta_v \Longleftrightarrow \delta'_v\theta(\delta'_v) = \delta_v\theta(\delta_v)$$

が成り立ちます.

定義 4.10. $\delta', \delta \in G(\mathbb{A})$ が $G(\mathbb{A})$ の下で θ-共役とは $\delta' = x^{-1}\delta\theta(x)$ をみたす $x \in G(\mathbb{A})$ が存在することです. 同様に $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \otimes_F \overline{F}$ として $G(\overline{\mathbb{A}})$ の下での θ-共役も定義されます. それぞれ $\delta' \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta$, $\delta' \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta$ と表すことにします.

補題 4.11. $\delta', \delta \in G(\mathbb{A})$ に対して次が成り立ちます.

$$\begin{aligned} \delta' \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta \quad &\Longleftrightarrow \delta' \in \delta N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times &&\Longleftrightarrow \delta'_v \sim_\theta \delta_v,\ {}^{\forall}v \\ \delta' \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta &\Longleftrightarrow \delta' \in \delta\mathbb{A}^\times &&\Longleftrightarrow \delta'_v \sim_{st,\theta} \delta_v,\ {}^{\forall}v \end{aligned}$$

系 4.12. $\delta', \delta \in G(F)$ に対しては

$$\delta' \sim_\theta \delta \Longleftrightarrow \delta' \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta$$

$$\delta' \sim_{st,\theta} \delta \Longleftrightarrow \delta' \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta$$

も成り立ちます.

Proof. θ-共役については補題 4.7 と補題 4.11 と $(N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \cap E^\times) = N_{E/F}E^\times$ から従います. 安定 θ-共役については補題 4.7 と補題 4.11 と $\mathbb{A}^\times \cap E^\times = F^\times$ から従います. □

定義 4.13. $\delta'_v, \delta_v \in G(F_v)$ が安定 θ-共役になっているとき

$$\mathbf{inv}(\delta'_v, \delta_v) = \delta'_v\delta_v^{-1} \text{ の } F_v^\times/N_{E/F}(E \otimes_F F_v)^\times \text{ での像}$$

と定義します.

定義 4.14. $\delta \in G(\mathbb{A})$ と $\gamma \in U_1(\mathbb{A})$ が

$$\gamma = \delta\theta(\delta)$$

をみたすとき γ は δ のノルムであるといいます. δ を $\mathbb{A}_E^\times$ の元とみると $\delta\theta(\delta)$ は $\delta\sigma(\delta)^{-1}$ となります. (G を U_1 の base change とみたときのノルムです.) 局所体の場合も同様に $\gamma_v = \delta_v\theta(\delta_v)$ によりノルムを定めます.

Remark 4.15. 補題 4.11 から $\delta', \delta \in G(\mathbb{A})$ に対して次がいえます.

$$\delta' \text{ と } \delta \text{ のノルムが等しい} \iff \delta' \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta$$

定義 4.16. 以下, 各 $\gamma \in U_1(F)$ に対して γ が $\delta^\gamma \in G(F)$ のノルムとなるような δ^γ を固定しておきます. また $\delta \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta^\gamma$ となる $\delta \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$\mathbf{obs}(\delta) = \delta(\delta^\gamma)^{-1} \text{ の } \mathbb{A}^\times/F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \text{ での像}$$

と定義します. よって $\mathbf{obs}(\delta)$ は $\prod_v \mathbf{inv}(\delta_v, \delta_v^\gamma)$ の $\mathbb{A}^\times/F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ での像です. (無限積は実際は有限個を除いて 1 です.)

Remark 4.17. 本概説では $\mathbf{obs}$ をノルムが $U_1(F)$ に入る $\delta \in G(\mathbb{A})$ に対して定義しています. 本概説での $\mathbf{inv}, \mathbf{obs}$ は [KS99] のものとは少し異なっています.

補題 4.18. $\mathbf{obs}(\delta)$ は δ^γ の取り方に拠っていません. また次が成り立ちます.

$$\mathbf{obs}(\delta) = 1 \iff \delta \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta' \textit{ for some } \delta' \in G(F)$$

Proof. $\mathbf{obs}(\delta) = 1$ とすると $\delta = \delta^\gamma tx, t \in F^\times, x \in N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ と書かれるので, $\delta' = \delta^\gamma t \in G(F)$ とおくと $\delta \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta'$ となります. 逆に $\delta' \in G(F)$ に対して $\delta \sim_{\mathbb{A},\theta} \delta'$ が成り立つとすると, $\delta' \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta^\gamma$ となることと系 4.12 から $\delta' \in \delta^\gamma F^\times$ が分かります. よって $\delta \in \delta' N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \in \delta^\gamma F^\times N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times$ となります. 最後に右辺の条件は δ^γ の取り方に拠らないので $\mathbf{obs}$ は δ^γ の取り方に拠らないことが分かります. □

4.5. **移送.**

定義 4.19. $\gamma \in U_1(\mathbb{A})$ が $\delta \in G(\mathbb{A})$ のノルムであるとき, 移送因子 Δ_ξ $(\xi = \xi_1, \xi_2)$ を

$$\Delta_{\xi_1}(\gamma, \delta) = 1$$
$$\Delta_{\xi_2}(\gamma, \delta) = \mu(\delta)$$

と定義します. γ が δ のノルムでないときには $\xi = \xi_1, \xi_2$ のどちらに対しても

$$\Delta_\xi(\gamma, \delta) = 0$$

とします. 局所体 F_v の場合も同様に移送因子を定めます.

Remark 4.20. γ が δ のノルムであるとき $x \in \mathbb{A}^\times$ に対して

$$\Delta_{\xi_1}(\gamma, \delta x) = \Delta_{\xi_1}(\gamma, \delta)$$
$$\Delta_{\xi_2}(\gamma, \delta x) = \omega(x)\Delta_{\xi_2}(\gamma, \delta)$$

が成り立ちます. 局所体 F_v の場合も同様です.

補題 4.21. 定義から $\gamma \in U_1(F)$ と $\delta \sim_{st,\mathbb{A},\theta} \delta^\gamma$ をみたす $\delta \in G(\mathbb{A})$ に対して次が成り立つことが分かります.

$$\Delta_\xi(\gamma, \delta) = \begin{cases} 1, & \xi = \xi_1 \\ \omega(\mathbf{obs}(\delta)), & \xi = \xi_2 \end{cases}$$

補題 4.22. $\tilde{f} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}))$, $\xi = \xi_1, \xi_2$ に対して f^ξ を

$$J(\gamma, f^\xi) = f^\xi(\gamma) = \sum_{\delta \in \mathbb{A}_E^\times / N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times} \Delta_\xi(\gamma, \delta) J^\theta(\delta, \tilde{f})$$

により定めると $f^\xi \in \mathcal{H}(U_1(\mathbb{A}))$ となります.

Remark 4.23. 一般の簡約代数群の跡公式を扱うときには, 上記の補題は局所体上の 2 つの定理に分解されます. ひとつは移送の存在定理で, もうひとつは基本補題です.

4.6. **G の捩じれた跡公式の安定化.** まずスペクトル側の安定化を行います. $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi}^G$ の定義と f^ξ の定義から次の補題が成り立つことが分かります.

補題 4.24. $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ の *1* 次元指標 ρ と $\xi = \xi_1, \xi_2$ に対して $\pi^\xi = \mathrm{Tran}_{U_1,\xi}^G(\rho)$ と定めると, $\pi^\xi \in \Pi^\theta(G)$ であり, しかも

$$\mathrm{trace}(\pi^\xi(\tilde{f}) \circ I(\theta)) = \mathrm{trace}(\pi^\xi(\tilde{f})) = J(\rho, f^\xi)$$

が成り立ちます. (いまの場合は $I(\theta)$ は恒等写像です.)

定理 4.25. G の捩じれた跡公式のスペクトル側は下のように安定化されます.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi\in\Pi^\theta(G)} 1\cdot \mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))\\
&=\sum_{\substack{\pi\in\Pi^\theta(G)\\ \pi|_{\mathbb{A}^\times}\equiv 1}} 1\cdot \mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))+\sum_{\substack{\pi\in\Pi^\theta(G)\\ \pi|_{\mathbb{A}^\times}\equiv \omega}} 1\cdot \mathrm{trace}(\pi(\tilde{f})\circ I(\theta))\\
&=\sum_{\rho\in\Pi(U_1)} J(\rho,f^{\xi_1})+\sum_{\rho\in\Pi(U_1)} J(\rho,f^{\xi_2})\\
&=\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_1})+\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_2})
\end{aligned}$$

また, これまで説明してきたことを使うと G の捩じれた跡公式の幾何側は次のようにして安定化されることが分かります.

定理 4.26.

$$\begin{aligned}
&2\cdot\sum_{\delta\in E^\times/N_{E/F}E^\times} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))J^\theta(\delta,\tilde{f})\\
=&2\cdot\sum_{\gamma\in U_1(F)}\sum_{\substack{\delta\in E^\times/N_{E/F}E^\times\\ \delta\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta^\gamma}} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))J^\theta(\delta,\tilde{f})\\
=&2\cdot\sum_{\gamma\in U_1(F)}\sum_{\substack{\delta\in \mathbb{A}_E^\times/N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times\\ \delta\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta^\gamma}} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))\frac{1}{2}(1+\omega(\mathbf{obs}(\delta)))J^\theta(\delta,\tilde{f})\\
=&2\cdot\sum_{\gamma\in U_1(F)}\sum_{\substack{\delta\in \mathbb{A}_E^\times/N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times\\ \delta\sim_{st,\mathbb{A},\theta}\delta^\gamma}} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))\frac{1}{2}(\Delta_{\xi_1}(\gamma,\delta)+\Delta_{\xi_2}(\gamma,\delta))J^\theta(\delta,\tilde{f})\\
=&\sum_{\gamma\in U_1(F)} \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))(J(\gamma,f^{\xi_1})+J(\gamma,f^{\xi_2}))\\
=&\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_1})+\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_2})
\end{aligned}$$

5. パケットと安定跡公式: 変則的な解説

この節では安定跡公式とパケット・重複度公式とがどのように関係しているかについて説明したいと思いますが, 残念ながら G の捩じれた跡公式のスペクトル側はこの節の目的からすると良い例になっていません. しかし, 幾何側とスペクトル側は "双対" と考えられ, G と U_1 の跡公式の幾何側をスペクトル側に見立てると, パケットがどのようなものなのかを大まかに説明することができます. (但し本来のパケットは捩じれていないエンドスコピーにより記述されるので, その意味でも

ここでの説明はあくまでも類似として捉えておいてください.）この節では以後, 幾何側とスペクトル側の役割を入れ替えて, 幾何側をスペクトル側に見立てて説明をしていきたいと思います.

$$\boxed{\text{スペクトル側}} \overset{\text{役割を入れ替えて説明}}{\longleftrightarrow} \boxed{\text{幾何側}}$$

この節の内容は幾何側とスペクトル側, 捩じれたエンドスコピーと捩じれていないエンドスコピーを混同したようなものになっています. ですから, この節の定義や用語等をそのまま信じてはいけません! 必要なときには, 必ずきちんとした文献で定義や用語を確認してください.

5.1. **局所パケットの類似.** §4.5 で定めた対応 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A})) \ni \tilde{f} \mapsto f^{\xi} \in \mathcal{H}(U_1(\mathbb{A}))$ と同様に局所体上でも

$$J(\gamma_v, f_v^{\xi}) = f_v^{\xi}(\gamma_v) = \sum_{\delta_v \in E_v^{\times}/N_{E/F}(E\otimes_F F_v)^{\times}} \Delta_{\xi}(\gamma_v, \delta_v) J^{\theta}(\delta_v, \tilde{f}_v)$$

により $\mathcal{H}(G(F_v)) \ni \tilde{f}_v \mapsto f_v^{\xi} \in \mathcal{H}(U_1(F_v))$ を定めることができます. 但し $\Delta_{\xi}(\delta_v, \gamma_v)$ もアデール上のものと同様に

$$\Delta_{\xi_1}(\gamma_v, \delta_v) = \begin{cases} 1, & \gamma_v \text{ が } \delta_v \text{ のノルム} \\ 0, & \gamma_v \text{ が } \delta_v \text{ のノルムではない} \end{cases}$$

$$\Delta_{\xi_2}(\gamma_v, \delta_v) = \begin{cases} \mu_v(\delta_v), & \gamma_v \text{ が } \delta_v \text{ のノルム} \\ 0, & \gamma_v \text{ が } \delta_v \text{ のノルムではない} \end{cases}$$

定義します. これにより $\mathcal{H}(U_1(F_v))$ 上の線形形式 $l \colon \mathcal{H}(U_1(F_v)) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\mathcal{H}(G(F_v)) \ni \tilde{f} \mapsto f^{\xi} \mapsto l(f^{\xi}) \in \mathbb{C}$$

により $\mathcal{H}(G(F_v))$ 上の線形形式に持ち上げることができます. このようにして得られた $\mathcal{H}(G(F_v))$ 上の線形形式を $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi}^{G}(l)$ と表します. 以下素点としては $v \in \mathfrak{P}_I$ のときだけを説明します. 素点 $v \in \mathfrak{P}_{NI}$ では状況が簡単になるので考えてみてください. いま $\mathrm{Tran}_{U_1,\xi}^{G}$ により線形形式

$$J(\gamma_v) \colon f_v \mapsto J(\gamma_v, f_v), \quad \gamma_v \in U_1(F_v),\ f_v \in \mathcal{H}(U_1(F_v))$$

を持ち上げると, 定義から

$$\begin{aligned} \mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^{G}(J(\gamma_v)) &= J^{\theta}(\delta_v^{\gamma_v}) + J^{\theta}(\delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v) \\ \mathrm{Tran}_{U_1,\xi_2}^{G}(J(\gamma_v)) &= \mu_v(\delta_v^{\gamma_v}) J^{\theta}(\delta_v^{\gamma_v}) - \mu(\delta_v^{\gamma_v}) J^{\theta}(\delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v) \end{aligned}$$

となることが分かります. 但し $\delta_v^{\gamma_v}$ は γ_v が $\delta_v^{\gamma_v}$ のノルムとなるようなものを一つ固定して, ϵ_v も $F_v^{\times} - N_{E/F}E_v^{\times}$ の元をひとつ固定していま

す．このように $J(\gamma_v)$ から $\mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi_1}, \mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi_2}$ によって持ち上げられた線形形式に現れる θ-共役類が局所的な “A-パケット” です．つまり

$$\{\delta_v^{\gamma_v}, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v\}$$

が γ_v と対応する G の局所的な “A-パケット” ということになります.

Remark 5.1. 実際の表現の場合には対応は A-パラメーターを使って表されると予想されています. L-パケットと A-パケットとは一般には別のものです. 齋藤–黒川リフトの場合のように, 一般の L-パケットに対しては上記のような記述は成り立ちません.

定義 5.2. $\xi = \xi_1, \xi_2$ と $\delta_v^{\gamma_v}, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v$ とのペアリングを

$$\begin{aligned}\langle \xi_1, \delta_v^{\gamma_v}\rangle &= 1\\ \langle \xi_2, \delta_v^{\gamma_v}\rangle &= 1\\ \langle \xi_1, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v\rangle &= 1\\ \langle \xi_2, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v\rangle &= -1\end{aligned}$$

と定めます．また γ_v が $\gamma \in U_1(F)$ の局所因子になっているときには $\delta_v^{\gamma_v}$ を δ^γ の局所因子にとります.

Remark 5.3. 定数倍を除いて $\mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi}(J(\gamma_v))$ における $J^\theta(\delta_v^{\gamma_v})$, $J^\theta(\delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v)$ の係数と一致するようにペアリングを定義します．今の場合は $\delta_v^{\gamma_v}$ を決めてそれが 1 になるように定義していますが, 一般に定数倍を除いて定義すると, 定数倍のとりかたによる不定性がでてきます, この不定性は本来の A-パケットの場合にも現れます．簡約代数群が quasi-split の場合には Whittaker functional を用いて定数倍の不定性を扱うことができると予想されています.

S-群を

$$S = \{\xi_1, \xi_2\}$$

と定め, 群構造を

$$\begin{array}{ccc} S = \{\xi_1, \xi_2\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \xi_1 & \longrightarrow & 0 \\ \xi_2 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

により定義します．上記の $\langle\, ,\, \rangle$ は $\delta_v^{\gamma_v}, \delta_v^{\gamma_v}\epsilon_v$ に S の指標を対応させています.

5.2. **重複度公式の類似.** この節では安定跡公式を用いて重複度公式の類似を説明します．ここではスペクトル側ではなく幾何側を類似として扱いますが, 安定跡公式の幾何側は §4.6 で既に安定化されているので, ここでの説明は実際にはトートロジーです.

いま $U_1(F)$ の元がノルムになるような $\delta \in G(\mathbb{A})$ に対して

$$\langle \xi, \delta \rangle = \prod_v \langle \xi, \delta_v \rangle, \qquad \xi = \xi_1, \xi_2$$

と定めると, 有限個の素点を除いて $\langle \xi, \delta_v \rangle$ は 1 となり, しかも定め方から

$$\langle \xi_1, \delta \rangle = 1$$
$$\langle \xi_2, \delta \rangle = \begin{cases} 1, & \delta \text{ は大域的} \\ -1, & \delta \text{ は大域的でない} \end{cases}$$

となります. ここで δ が大域的とはある $G(F)$ の元と $G(\mathbb{A})$ の下で θ-共役であることとします. つまり $\omega(\mathbf{obs}(\delta)) = 1$ となることです.

Remark 5.4. ここでの "大域的" という用語はスペクトル側を扱うときの大域的な保型表現の類似として使用しています.

我々は既に跡公式の幾何側を知っていますが, 説明の都合上それは一旦忘れて

$$\sum_{\delta \in \mathbb{A}_E^\times / N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times} a_\delta J^\theta(\delta, \tilde{f}) = \hat{S}^{U_1}(f^{\xi_1}) + \hat{S}^{U_1}(f^{\xi_2})$$

という形から議論を始めることにします. ここで a_δ は δ に対して決まる数でこれが最終的に知りたいものであると思ってください. (通常はスペクトル側に知りたい情報があり, そちらは幾何側を安定化した段階では分かっていないという想定です. ここでは幾何側をスペクトル側に見立てているので幾何側が分かっていない状態から始めます.)

Remark 5.5. 本来の跡公式ではスペクトル側の係数が重複度と関わっています.

いま $\gamma \in U_1(F)$ に対して

$$\Pi_\gamma(G) = \{\delta \in \mathbb{A}_E^\times / N_{E/F}\mathbb{A}_E^\times \mid \text{全ての素点で } \gamma_v \text{ は } \delta_v \text{ のノルム}\}$$

とおきます.

Remark 5.6. $\Pi_\gamma(G)$ は局所因子が大域的な A-パラメーターの定める局所的な A-パケットに含まれているような表現の集合の類似です.

すると

$$\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_1}^G(J(\gamma))(\tilde{f}) = \sum_{\delta \in \Pi_\gamma(G)} \langle \xi_1, \delta \rangle J^\theta(\delta, \tilde{f})$$
$$\mathrm{Tran}_{U_1,\xi_2}^G(J(\gamma))(\tilde{f}) = \sum_{\delta \in \Pi_\gamma(G)} \langle \xi_2, \delta \rangle J^\theta(\delta, \tilde{f})$$

となるので,

$$a_\gamma = \mathrm{vol}(U_1(F)\backslash U_1(\mathbb{A}))$$

と表すことにすると,

$$\begin{aligned}
\hat{S}^{U_1}(f^{\xi_1}) + \hat{S}^{U_1}(f^{\xi_2}) &= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma J(\gamma, f^{\xi_1}) + \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma J(\gamma, f^{\xi_2}) \\
&= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \left(J(\gamma, f^{\xi_1}) + J(\gamma, f^{\xi_2})\right) \\
&= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \left(\mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi_1}(J(\gamma))(\tilde{f}) + \mathrm{Tran}^G_{U_1,\xi_2}(J(\gamma))(\tilde{f})\right) \\
&= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \left(\sum_{\delta\in\Pi_\gamma(G)} \langle\xi_1,\delta\rangle J^\theta(\delta,\tilde{f}) + \sum_{\delta\in\Pi_\gamma(G)} \langle\xi_2,\delta\rangle J^\theta(\delta,\tilde{f})\right) \\
&= \sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \left(\sum_{\delta\in\Pi_\gamma(G)} \left(\langle\xi_1,\delta\rangle + \langle\xi_2,\delta\rangle\right) J^\theta(\delta,\tilde{f})\right) \\
&= 2\sum_{\gamma\in U_1(F)} a_\gamma \sum_{\delta\in\Pi_\gamma(G)} \left(\frac{1}{2}(\langle\xi_1,\delta\rangle + \langle\xi_2,\delta\rangle)\right) J^\theta(\delta,\tilde{f})
\end{aligned}$$

となります. よって $\Pi_\gamma(G)$ に含まれている δ に対して

$$a_\delta = 2a_\gamma \left(\frac{1}{2}(\langle\xi_1,\delta\rangle + \langle\xi_2,\delta\rangle)\right)$$

が成り立つことになります. このようにして a_δ が S の指標 $\langle\,,\,\rangle$ により表されることになります.

Remark 5.7. 今の場合は捩じれた跡公式なので θ の $\mathfrak{A}_G$ への作用から 2 がついています.

Remark 5.8. スペクトル側であれば a_δ に対応するものが重複度と関係しているので S-群の指標を使って重複度が表せることになります.

Appendix A. 日本語 $\longleftrightarrow$ 英語

跡公式	trace formula
捩じれた跡公式	twisted trace formula
安定跡公式	stable trace formula
θ-共役	θ-conjugate
安定 θ-共役	stably θ-conjugate
跡	trace
安定化	stabilization
楕円項	elliptic terms
幾何側	geometric side
スペクトル側	spectral side
パケット	packet
エンドスコピー	endoscopy
移送	transfer
移送因子	transfer factor
双対群	dual group

Appendix B. 安定跡公式の文献の至極簡単な紹介

現在は Arthur 自身による跡公式の解説 “An introduction to the trace formula” [Art05] があります. 第 1 部で “unrefined trace formula” までが解説され, 第 2 部で “stable trace formula” と古典群への応用が解説されています. 全体で 260 ページの分量がありますが, 第 1 部は基本的なことから解説してありますから読みやすいと思います. 第 2 部は第 1 部に比べると記述が粗い部分が多くなりますが, Arthur の原論文への案内として読まれると良いのではないかと思います.

現在 Arthur の論文は

http://www.claymath.org/cw/arthur/index.php

に集められていますのでここから入手することができます. ちなみに Langlands の論文も

http://publications.ias.edu/rpl/

に集められています.

安定跡公式については “A stable trace formula I, Ⅱ, Ⅲ” [Art02], [Art01], [Art03] が基本的な文献です. 特に “A stable trace formula I” で安定跡公式が定式化されています. 安定跡公式の定式化については, この原論文の方が [Art05] よりも読みやすいのではないかと思います. 続く “A stable trace formula Ⅱ, Ⅲ” で証明が行われています. 安定跡公式の証明は Arthur–Clozel の本 [AC89] での議論を発展させたものですので “A stable trace formula I,Ⅱ, Ⅲ” の前に [AC89] を読んだ方が分かりやすいかもしれません.

跡公式の主要部分である楕円部分の安定化については [Kot84] と [Kot86] が基本文献ですが, 本報告集にも今野拓也氏の優れた解説があります. 安定跡公式を使って古典群の保型表現に関する結果を得ようとするときには捩じれた跡公式の安定化が必要になります. 捩じれた跡公式の楕円部分の安定化に関しては [KS99] が基本的な文献です.

また, ユニタリ群についての古典的な結果としては $U(3)$ の場合を扱った Rogawski による [Rog90] があります. この本には間違いと誤植があり, [Rog92] で訂正されています.

References

[Art05] J. Arthur, An introduction to the trace formula. Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1–263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Art03] J. Arthur, A stable trace formula. III. Proof of the main theorems. Ann. of Math. (2) 158 (2003), no. 3, 769–873.

[Art02] J. Arthur, A stable trace formula. I. General expansions. J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 2, 175–277.

[Art01] J. Arthur, A stable trace formula. II. Global descent. Invent. Math. 143 (2001), no. 1, 157–220.

[Art90] J. Arthur , Unipotent automorphic representations: global motivation. Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I, 1–75, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[AC89] J. Arthur, and L. Clozel, Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula. Annals of Mathematics Studies, 120. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xiv+230 pp.

[AT68] E. Artin, and J. Tate, Class field theory. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1968 xxvi+259 pp

[Kot84] R. E. Kottwitz , Stable trace formula: cuspidal tempered terms. Duke Math. J. 51 (1984), no. 3, 611–650.

[Kot86] R. E. Kottwitz , Stable trace formula: elliptic singular terms. Math. Ann. 275 (1986), no. 3, 365–399.

[KS99] R. E. Kottwitz, and D. Shelstad, Foundations of twisted endoscopy. Astérisque 255 (1999).

[LL79] J.-P. Labesse, and R. P. Langlands, L-indistinguishability for SL(2). Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 726–785.

[LS87] R. P. Langlands, and D. Shelstad, On the definition of transfer factors. Math. Ann. 278 (1987), no. 1-4, 219–271.

[Rog90] J. D. Rogawski, Automorphic representations of unitary groups in three variables. Annals of Mathematics Studies, 123. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990. xii+259 pp.

[Rog92] J. D. Rogawski, The multiplicity formula for A-packets. The zeta functions of Picard modular surfaces, 395–419, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992.

[Sai75] H. Saito, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields. Department of Mathematics, Kyoto University, Lectures in Mathematics, No. 8. Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., Tokyo, 1975. iv+183 pp.