セルバーグ跡公式，
セルバーグゼータ関数

九州大学・数理学研究院　権　寧魯

2011 年 1 月 29 日

はじめに

このノートは２０１０年度整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」において行われた二つの講演「Selberg 跡公式」,「Selberg ゼータ関数」の際に配布された講演資料に加筆，修正を行ったものです．これらのテーマに関心を持たれる方にとって何かのお役に立てば幸いです．世話人の金沢大学の若槻聡さん，京都大学の平賀郁さんには，サマースクールの期間を通して大変お世話になりました．講演の機会を与えてくださった世話人のお二人をはじめ，講演者の皆様，講演中およびそのあとで有益な質問やコメントを下さった方等，サマースクールの参加者皆様に深く感謝します．

目次

1 トレースクラス作用素

以下では H を可分なヒルベルト空間とし，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積，$\| \cdot \|$ でノルムを表すとする．

定義 1.1 (有界作用素，コンパクト作用素)**.** $T \in \mathrm{End}(H)$ とする．

1. $C > 0$ が存在して，任意の $v \in H$ に対して，$\|Tv\| \leq C\|v\|$ となるとき，T は有界作用素であるという．H 上の有界作用素全体を $B(H)$ とおく．
2. 任意の有界部分集合 $S \subset H$ に対し, $T(S)$ が相対コンパクトになるとき, T をコンパクト作用素という．H 上のコンパクト作用素全体を $K(H)$ とおく．

• $K(H) \subset B(H)$ である．

$T \in K(H)$ に対して，$|T| := (TT^*)^{1/2}$ とおく．$|T|$ は正値で対称なコンパクト作用素になる．（T^* は T の随伴作用素で，TT^* が対称なコンパクト作用素だから，そのスペクトル分解を用いて $|T|$ を定義する．）$|T|$ の固有値を大きい順に重複度を込めて $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ とする．

定義 1.2 (p-Schatten class)**.** $p \geq 1$ とする．

$$B_p(H) := \left\{ T \in K(H) \,\middle|\, ||T||_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \Big)^{1/p} < \infty \right\}$$

定義 1.3 (trace class，Hilbert-Schmidt class)**.** $T \in K(H)$ とする．

1. $T \in B_1(H)$ のとき，T は trace class （跡族）であるという．$||T||_1$ を trace norm という．
2. $T \in B_2(H)$ のとき, T は Hilbert-Schmidt class であるという．$||T||_2$ を Hilbert-Schmidt norm という．

定義 1.4 (T の trace)**.** $T \in K(H)$ を trace class とする．$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の正規直交基底とする．T の trace（跡）を以下で定義する．

$$\operatorname{tr} T := \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle. \tag{1.1}$$

- $\operatorname{tr} T$ は絶対収束し，基底 $\{e_n\}$ の取り方によらない．$\operatorname{tr}|T| = ||T||_1$, $||T||_2 \leq ||T||_1$ である．

補題 1.5. *$T, A, B \in K(H)$ とする．A, B が Hilbert-Schmidt class で，$T = AB$ とかけるならば，T は trace class となる．*

定理 1.6 (Hilbert-Schmidt 型積分作用素)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を可測集合とし，$L^2(\Omega)$ 上の積分作用素

$$L\phi(x) = \int_{\Omega} k(x,y)\phi(y)\,dy$$

の積分核について

$$\iint_{\Omega\times\Omega} |k(x,y)|^2\,dxdy < \infty$$

を満たすとする．（このとき，L は *Hilbert-Schmidt* 型積分作用素という．）以下が成り立つ．

1. L は *Hilbert-Schmidt class* となり，$||L||_2^2 = \iint_{\Omega\times\Omega} |k(x,y)|^2\,dxdy$.

2. さらに，L が *trace class* であると仮定する．（一般には成立しない）L の積分核 $k(x,y)$ が連続ならば，

$$\mathrm{tr}(L) = \int_\Omega k(x,x)\,dx. \tag{1.2}$$

• trace class であるような積分作用素 L の "跡公式"(1.2) は積分核が連続な場合は Duflo [9] によって示された．必ずしも連続とは限らない積分核を持つような trace class 積分作用素については [5], [6] を参照のこと．

2　ポアソン和公式

$\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R})\,|\,a,b \in \mathbb{Z},\ a \geq 0$ に対して，$x^a(\frac{d}{dx})^b f$ が有界 $\}$ とおく．

定理 2.1 (ポアソン和公式)**.** $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ とし，f の *Fourier* 変換を

$$\hat{f}(y) := \int_\mathbb{R} f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx$$

とおく．このとき，以下が成り立つ．

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m). \tag{2.1}$$

Proof. $F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ とおき，Fourier 展開すると

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)e^{2\pi imx}$$

となるので，$x=0$ とすればよい．　□

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ とする．f を試験関数とする $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = L^2([0,1))$ に作用する

作用素 $R(f)$ を考える．

$$\begin{aligned}[R(f)\,\phi](x) &:= \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(x+y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y-x)\phi(y)\,dy \\ &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(y+n-x)\,\phi(y)\,dy \\ &= \int_0^1 K_f(x,y)\,\phi(y)\,dy.\end{aligned}$$

ここで，$K_f(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(y+n-x)$ とおいた．$R(f)$ は $K_f(x,y)$ を積分核とする積分作用素となる．$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の正規直交基底として，$\{e_m := e^{2\pi imx} \,|\, m\in\mathbb{Z}\}$ がとれる．$R(f)$ の定義より，

$$R(f)\,e_m = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{2\pi im(x+y)}\,dy = \hat{f}(-m)\,e_m$$

となり，

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \|R(f)\,e_m\| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| < \infty$$

なので，$R(f)$ は trace class 作用素となる． よって，$R(f)$ の trace は以下で与えられる．

$$\mathrm{tr}(R(f)) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle R(f)\,e_m, e_m\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m). \tag{2.2}$$

$R(f)$ が積分作用素であることを用いて，$R(f)$ のトレースの別の表示を求める．$K_f(x,y)$ は $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ 上の連続関数より有界なので，$K_f(x,y) \in L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$ である．積分作用素 $R(f)$ が Hilbert-Schmidt 型になり，$R(f)$ は trace class だったので，定理 1.6 より

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R(f)) &= \int_0^1 K_f(x,x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n-x)\,dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n). \qquad (2.3)\end{aligned}$$

これらの $\mathrm{tr}(R(f))$ のふたつの表示式 (2.2), (2.3) からポアソンの和公式が証明される．局所コンパクトなアーベル群とその離散部分群の組 $(\mathbb{R},\mathbb{Z})$ に対して行った今の手続を，**非可換な位相群**とその離散部分群の組 (G,Γ) に対して行い実行したものが**セルバーグの跡公式**である．

3　ココンパクトな場合のセルバーグ跡公式

G を半単純実リー群で中心の位数が有限とする．G 上のハール測度をひとつ固定し，dg とする．Γ を G の離散部分群で，商空間 $\Gamma\backslash G$ がコンパクトであるとする．$\Gamma\backslash G$ 上の自乗可積分関数のなす空間を考える：

$$L^2(\Gamma\backslash G) := \left\{ \phi\colon G \to \mathbb{C} \text{ 可測関数} \;\middle|\; (i)\,\phi(\gamma g) = \phi(g), \forall(\gamma, g) \in \Gamma \times G, \right.$$
$$\left. (ii)\int_{\Gamma\backslash G} |f(g)|^2\, dg < \infty \right\}.$$

$L^2(\Gamma\backslash G)$ は内積 $\langle f_1, f_2\rangle := \int_{\Gamma\backslash G} f_1(g)\overline{f_2(g)}\, dg$ に関して可分なヒルベルト空間になる．G 上のコンパクト台を持つ滑らかな関数全体の空間を $C_c^\infty(G)$ とおく．$f \in C_c^\infty(G)$ を試験関数とし，$L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用する作用素 $R(f) \in \mathrm{End}(L^2(\Gamma\backslash G))$ を考える．

$$\begin{aligned}
[R(f)\,\phi](x) &:= \int_G f(g)\phi(xg)\, dg \\
&= \int_G f(x^{-1}g)\phi(g)\, dg \\
&= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma g)\,\phi(g)\, dg \\
&= \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x, g)\,\phi(g)\, dg.
\end{aligned}$$

ここで，$K_f(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)$ とおいた．$R(f)$ は $K_f(x,y)$ を積分核とする積分作用素となる．仮定より，$\Gamma\backslash G$ はコンパクトなので，$K_f(x,y)$

は $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$ 上の連続で有界な関数になる．よって，

$$\int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} |K_f(x,y)|^2\, dxdy < \infty$$

が示される．これより，$R(f)$ は Hilbert-Schmidt 型積分作用素になるので，$R(f)$ は Hilbert-Schmidt class 作用素になる．さらに，以下の命題により，$R(f)$ は $L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用する trace class 作用素となる．

命題 3.1 (Dixmier-Malliavin [8])**.** G を半単純リー群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ が与えられたとき，$f_1, f_2 \in C_c^\infty(G)$ が存在して，

$$f = f_1 * f_2$$

が成り立つ．

命題 3.2. Γ をココンパクトな G の離散部分群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ に対して，$R(f)$ は $L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用する *trace class* 作用素となる．

Proof. 命題 3.1 より，$R(f) = R(f_1)\, R(f_2)$ となり，Hilbert-Schmidt class 作用素二つの合成でかける．補題 1.5 より，$R(f)$ は trace class となる． □

補題 3.3. Γ をココンパクトな G の離散部分群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ に対して，$R(f)$ の *trace* は以下で与えられる．

$$\mathrm{tr}(R(f)) = \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,x)\, dx.$$

Proof. $L^2(\Gamma\backslash G)$ の正規直交基底（完全正規直交系）を $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ とすると，$K_f(x,y) \in L^2((\Gamma\backslash G)^2)$ より，$L^2((\Gamma\backslash G)^2)$ の正規直交基底 $\{\phi_m(x)\cdot\overline{\phi_n(y)}\}$ を用いて展開できる：

$$K_f(x,y) = \sum_{m,n} c_{mn}\, \phi_m(x)\, \overline{\phi_n(y)}.$$

再び，$R(f)$ の定義より

$$R(f)\,\phi_n = \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,y)\phi_n(y)\,dy = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn}\,\phi_m.$$

$R(f)$ は trace class だったので，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R(f)) &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle R(f)\phi_n, \phi_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nn}\\ &= \int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,x)\,dx.\end{aligned}$$

□

以下では，$\mathrm{tr}(R(f))$ を二通りに計算する．

- スペクトルサイド （表現の分解）：

R_Γ を $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上の右正則表現とする．すなわち，$g \in G$ に対して，

$$[R_\Gamma(g)\phi](x) := \phi(xg)$$

とおく．作り方から，R_Γ は G のユニタリ表現になる．$\hat{G}$ を G の既約ユニタリ表現の同値類の集合とする．

定理 3.4 (Gel'fand, Graev, Piatetski-Shapiro [13])**.** Γ をココンパクトな G の離散部分群とする．R_Γ は G の既約ユニタリ表現の直和に分解し，各重複度は有限である．$\pi \in \hat{G}$ に対して，$L^2(\Gamma\backslash G)$ における重複度を $m_\Gamma(\pi)$ とおくと，G の表現として

$$R_\Gamma = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi)\,\pi, \quad (m_\Gamma(\pi) < \infty) \tag{3.1}$$

とかける．

定義 3.5. $(\pi, H_\pi) \in \hat{G}$, $f \in C_c^\infty(G)$ に対して，$\pi(f) \in \mathrm{End}(H_\pi)$ を以下で定義する．

$$\pi(f)\,v := \int_G f(g)\pi(g)v\,dg \quad (v \in H_\pi).$$

補題 1.5 を用いると，$\pi(f)$ が trace class であることが示せる．この事実と

$$R(f) = \int_G f(g) R_\Gamma(g)\, dg \in \mathrm{End}(L^2(\Gamma\backslash G))$$

において，定理 3.4 を用いれば，

定理 3.6. Γ をココンパクトな G の離散部分群とする．このとき，

$$\mathrm{tr}(R(f)) = \sum_{\pi \in \hat{G}} m_\Gamma(\pi)\, \mathrm{tr}(\pi(f))$$

が成り立つ．右辺の和は絶対収束する．

- 幾何サイド（$\int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,x)\, dx$ の計算）:

Conj(Γ) を Γ の共役類の集合とする．G_γ, Γ_γ をそれぞれ，γ の G, Γ における中心化群とする．

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash G} K_f(x,x)\, dx &= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)\, dx \\
&= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in \mathrm{Conj}(\Gamma)} \sum_{\delta \in \Gamma_\gamma\backslash\Gamma} f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x)\, dx \\
&= \sum_{\gamma\in \mathrm{Conj}(\Gamma)} \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, dx \\
&= \sum_{\gamma\in \mathrm{Conj}(\Gamma)} \int_{G_\gamma\backslash G} d\dot{x} \int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma} f(x^{-1}y^{-1}\gamma y x)\, d\dot{y} \\
&= \sum_{\gamma\in \mathrm{Conj}(\Gamma)} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma) \int_{G_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, d\dot{x} \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

定義 3.7 (軌道積分)**.**

$$I(\gamma, f) := \int_{G_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, d\dot{x}$$

ここで，$d\dot{x}$ は $G_\gamma\backslash G$ 上の不変測度である．

定理 3.8 (Selberg 跡公式)．G を半単純リー群，Γ を G のココンパクトな離散部分群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ に対して，

$$\sum_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi)\,\mathrm{tr}(\pi(f)) = \sum_{\gamma\in\mathrm{Conj}(\Gamma)} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma) I(\gamma, f) \tag{3.3}$$

が成立する．両辺は絶対収束する．

4 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対するセルバーグ跡公式

$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，$G$ の極大コンパクト部分群 $K = \mathrm{SO}(2)$ とする．G は一次分数変換で上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に作用し，G/K と上半平面 $\mathbb{H}$ が同一視される．

• $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の元の分類. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の中心に属さない元 γ に対して，

1. γ が双曲的 (hyperbolic) $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$
2. γ が楕円的 (elliptic) $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| < 2$
3. γ が放物的 (parabolic) $\Leftrightarrow |\mathrm{tr}(\gamma)| = 2$

この節では，$\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ とする．コンパクトな場合と同様に，$f \in C_c^\infty(G)$ に対し，$L^2(\Gamma\backslash G)$ 上の G の右正則表現 $R(f)$ を考えて，$\mathrm{tr}(R(f))$ を計算したいが，$R(f)$ は **trace class にならない**．実際，ココンパクトのときと同様な積分核 $K_f(x,y)$ で定義される積分作用素を考えて，幾何サイドを計算しようとしても放物元の寄与が発散する．また，$R(f)$ が G の既約ユニタリ表現の離散直和にならず，G の主系列表現の “直積分” が現れる．

• [“跡” を計算する方針] : (1)　$L^2(\Gamma\backslash G)$ の G の表現空間としての離散直和部分への $R(f)$ の制限 $R_d(f)$ を考え，$\mathrm{tr}(R_d(f))$ を考える．

(2)　$L^2(\Gamma\backslash G)$ の直積分部分への $R(f)$ の制限 $R_c(f)$ の “跡” と放物元の幾何サイドへの寄与の双方の発散部分を相殺させる．

$f \in C_c^\infty(G)$ に対し，下記の L^2-空間への右正則表現 $R(f)$ を考える：

$$L^2(\Gamma\backslash G) = L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G) \oplus L^2_{\mathrm{con}}(\Gamma\backslash G)$$

ここで，$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)$ は 離散スペクトルの空間，$L^2_{\mathrm{con}}(\Gamma\backslash G)$ は連続スペクトルの空間であり，それぞれ，R_Γ 不変部分空間になる．$R(f)$ の $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)$ への制限を $R_d(f)$ とおけば，$R_d(f) \in \mathrm{End}(L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G))$ は trace class になることが証明できる．$\mathrm{tr}(R_d(f))$ を以下では計算する．

以降，簡単のため試験関数 f を両側 K-不変とする．

定義 4.1 (class one 表現)**.** π を G の既約ユニタリ表現とする．π の K への制限が K の自明表現 1_K を含むとき，π を class one 表現，または spherical 表現という．つまり，$0 \neq v_0 \in H_\pi$ が存在して，$\forall k \in K$ に対して，$\pi(k)v_0 = v_0$ となるときをいう．

- $\hat{G}_1 := \{\pi \in \hat{G} \,|\, \pi$ は class one 表現 $\}$ とおく．

命題 4.2. *$f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とし，(π, H_π) を G の既約ユニタリ表現とする．π が class one でないならば，$\pi(f) = 0$ となる．*

Proof. $k \in K$, $\alpha, \beta \in H_\pi$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
&\langle \pi(k)\pi(f)\alpha, \beta\rangle = \langle \pi(f)\alpha, \pi(k)^*\beta\rangle \\
&= \int_G f(x)\langle \pi(x)\alpha, \pi(k)^*\beta\rangle\, dx = \int_G f(x)\langle \pi(kx)\alpha, \beta\rangle\, dx \\
&= \int_G f(k^{-1}x)\langle \pi(x)\alpha, \beta\rangle\, dx \int_G f(x)\langle \pi(x)\alpha, \beta\rangle\, dx \\
&= \langle \pi(f)\alpha, \beta\rangle.
\end{aligned}$$

よって，$\pi(k)\pi(f) = \pi(f)$ となり，$\pi(f) \neq 0$ ならば π は class one になる． $\square$

命題 4.3. *$f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とする．$(\pi, H_\pi) \in \hat{G}$ を class one，$v_0 \in H_\pi$*

を K で固定される単位ベクトルとする．このとき，

$$\mathrm{tr}(\pi(f)) = \langle \pi(f)v_0, v_0 \rangle$$

が成り立つ．

$\bullet \pi_{ir} := \mathrm{Ind}_{MAN}^{G}(1_M \otimes a^{\frac{1}{2}+ir} \otimes 1_N)$ を G の spherical なユニタリ主系列表現とする．$(r \in \mathbb{R})$

定義 4.4 (アイゼンスタイン級数)**.** $g \in G$, $s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$E(g,s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\mathrm{Im}(\gamma g.i))^s$$

で定義する．ここで，$\Gamma_\infty = \pm N \cap \Gamma$ である．

$\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様絶対収束し，s に関して解析接続した関数を同じ記号で表す．$z = g.i \in \mathbb{H}$ の関数と見るときは $E(z,s)$ とかく．以下はよく知られている．

命題 4.5 (アイゼンスタイン級数のフーリエ展開)**.**

$$E(z,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y,s)\, e^{2\pi inx}$$

のようにフーリエ展開されて，フーリエ係数は以下で与えられる．

$$a_n(y,s) = \begin{cases} y^s + \phi(s)\, y^{1-s} & n = 0 \\ \frac{2|n|^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{y}\, K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)\, \sigma_{1-2s}(|n|)}{\Lambda(s)} & n \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで，$\phi(s) := \frac{\Lambda(1-s)}{\Lambda(s)}$ であり，$\Lambda(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$ である．また，$\sigma_{1-2s}(n) := \sum_{d|n} d^{1-2s}$，$K_{s-\frac{1}{2}}(z)$ は K-ベッセル関数である．

定理 4.6.

$$K_f^c(g_1,g_2) := \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) E(g_1, \tfrac{1}{2}+ir)\overline{E(g_2, \tfrac{1}{2}+ir)}\, dr$$

とおく．このとき，修正された積分核：

$$K_f^d(g_1,g_2) := K_f(g_1,g_2) - K_f^c(g_1,g_2)$$

で定義される $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)$ 上の積分作用素 $R_d(f)$ は *trace class* になる．

以下では，$R_d(f)$ の作用する空間：

$$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi) H_\pi$$

の K-不変部分空間：

$$L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash \mathbb{H}) := L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G)^K = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}} m_\Gamma(\pi) H_\pi^K$$

を考える．

命題 4.7. $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とする．

$$\mathrm{tr}(R_d(f)) = \mathrm{tr}\big(R_d(f)\big|_{L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\big) = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}_1} m_\Gamma(\pi)\,\mathrm{tr}(\pi(f)).$$

Proof. 命題 4.2，4.3 より従う． □

以降では，$R_d(f)$ の $L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ への制限を同じ記号で表す．

補題 4.8 (Maass-Selberg relation)**.** 十分大きい $Y>0$ に対して，

$$(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y := \{z = x+iy \in \mathbb{H}, |\, |z| \geq 1,\, |x| \leq \tfrac{1}{2},\, y \leq Y\}$$

とおく．（切断された基本領域）このとき，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} |E(z, \tfrac{1}{2}+it)|^2 \frac{dxdy}{y^2} \\
&= 2\log Y - \frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+it) + \frac{1}{2it}\Big\{Y^{2it}\phi(\tfrac{1}{2}-it) - Y^{-2it}\phi(\tfrac{1}{2}+it)\Big\} \\
&\quad +o(1) \quad (Y\to\infty).
\end{aligned}$$

Proof. $h, t \in \mathbb{R}$ $(0 < h \leq 1,\, t \neq 0)$ に対して，$s = \frac{1}{2} + h + it$ とおく．$u(z) = v(z) = \tilde{E}(z,s)$ を "切断された"アイゼンスタイン級数として，以下の積分を 2 通りに計算する．ここで，

$$\tilde{E}(z,s) := \begin{cases} E(z,s) & z \in (\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y \\ E(z,s) - y^s - \phi(s)\, y^{1-s} & z \in (\Gamma\backslash\mathbb{H}) \setminus (\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y \end{cases} \tag{4.2}$$

とおく．$\Delta_0 := -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ を $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ に作用するラプラシアンとする．次の積分を考える：

$$\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} (u\Delta_0\bar{v} - \bar{v}\Delta_0 u)\, \frac{dxdy}{y^2}. \tag{4.3}$$

u, v はともに Δ_0 の固有関数なので，積分 (4.3) は

$$\big\{\bar{s}(1-\bar{s}) - s(1-s)\big\} \int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} u\bar{v}\, \frac{dxdy}{y^2} \tag{4.4}$$

となる．グリーンの定理より，積分 (4.3) は $(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y$ の境界上の線積分でかけて，さらに Γ で同一視される境界上の線積分が打ち消しあうので以下のように計算される．

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} \left(\bar{v}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\right)|dz| = \int_{|x|\leq 1/2,\, y=Y} \left(\bar{v}\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)|dz| \\ &= (y^{\bar{s}} + \phi(\bar{s})y^{1-\bar{s}})\frac{d}{dy}(y^s + \phi(s)y^{1-s})\Big|_{y=Y} \\ &\quad -(y^s + \phi(s)y^{1-s})\frac{d}{dy}(y^{\bar{s}} + \phi(\bar{s})y^{1-\bar{s}})\Big|_{y=Y}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.4), (4.5) より，

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} |\tilde{E}(z,s)|^2 \,\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \frac{Y^{s+\bar{s}-1} - |\phi(s)|^2\, Y^{1-s-\bar{s}}}{s+\bar{s}-1} + \frac{\phi(s)Y^{\bar{s}-s} - \phi(\bar{s})Y^{s-\bar{s}}}{\bar{s}-s} \\
&= \frac{Y^{2h} - |\phi(\frac{1}{2}+h+it)|^2\, Y^{-2h}}{2h} \\
&\quad + \frac{\phi(\frac{1}{2}+h-it)\, Y^{2it} - \phi(\frac{1}{2}+h+it)\, Y^{-2it}}{2it}
\end{aligned}
$$

となるので，あとは $|\phi(\frac{1}{2}+it)| = 1$ に注意して，$h \to 0$ とすればよい． □

命題 4.9 (連続スペクトルの寄与)**.**

$$
\begin{aligned}
E(Y) &:= \int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} K_f^c(z,z)\,\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \frac{\log Y}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\,dr + \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\pi_0(f))\phi(\tfrac{1}{2}) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir)\,dr + o(1) \quad (Y \to \infty).
\end{aligned}
$$

Proof. Maass-Selberg relation を用いると，連続スペクトルの寄与

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\Bigg[2\log Y - \frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir) \\
&\qquad + \frac{Y^{2ir}\phi(\frac{1}{2}-ir) - Y^{-2ir}\phi(\frac{1}{2}+ir)}{2ir}\Bigg]dr + o(1) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\left\{2\log Y - \frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir)\right\}dr \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\left\{\frac{Y^{2ir}\phi(\frac{1}{2}-ir) - Y^{-2ir}\phi(\frac{1}{2}+ir)}{2ir}\right\}dr \\
&\quad + o(1) \quad (Y \to \infty)
\end{aligned}
$$

となる．２行目の積分を評価する．$\phi(\frac{1}{2}) = -1$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f)) \left\{ \frac{Y^{2ir}\phi(\frac{1}{2}-ir) - Y^{-2ir}\phi(\frac{1}{2}+ir)}{2ir} \right\} dr \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f)) \left\{ \frac{\phi(\frac{1}{2}-ir)Y^{2ir} - \phi(\frac{1}{2}) + \phi(\frac{1}{2}) - \phi(\frac{1}{2}+ir)Y^{-2ir}}{2ir} \right\} dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f)) \left\{ \frac{\phi(\frac{1}{2}) - \phi(\frac{1}{2}+ir)Y^{-2ir}}{2ir} \right\} dr
\end{aligned}
$$

となる．$\frac{1}{2} < \beta < 1$ に対して, $\phi(s)$ は $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(s) \leq \beta$ で一様有界だから実軸上の積分を $\operatorname{Im}(r) = \frac{1}{2} - \beta$ まで動かして留数定理を用いると

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi i}\int_{\operatorname{Im}(r)=\frac{1}{2}-\beta} \operatorname{tr}(\pi_{ir}(f)) \left\{ \frac{\phi(\frac{1}{2}) - \phi(\frac{1}{2}+ir)Y^{-2ir}}{r} \right\} dr \\
&= \frac{\phi(\frac{1}{2})}{4\pi i}\int_{\operatorname{Im}(r)=\frac{1}{2}-\beta} \frac{\operatorname{tr}(\pi_{ir}(f))}{r}\, dr + O(Y^{1-\beta}) \\
&= \frac{1}{4}\phi(\tfrac{1}{2}) \operatorname{tr}(\pi_0(f)) + o(1) \quad (Y \to \infty)
\end{aligned}
$$

となる． □

- $(\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H})^Y := \{z \in \mathbb{H}, \mid 0 < x \leq 1,\, 0 < y \leq Y\}$ とおいて，“切断された放物元の寄与”を計算しよう．

命題 4.10 (放物元の寄与)**.** $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対して，跡公式の幾何サイドへの放物元の寄与を以下で定義する．

$$
P(Y) := \int_0^Y \int_0^1 \sum_{n \neq 0} f(a_y^{-1} n_x^{-1} \gamma_n n_x a_y) \frac{dxdy}{y^2} \tag{4.6}
$$

とおく．ここで，$\gamma_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_y = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$ であ

る．このとき，

$$P(Y) = (\log Y + c_E)\int_N f(n)\,dn + \int_N f(n)\log|\log n|\,dn + o(1) \quad (Y\to\infty)$$

となる．C_E はオイラー定数である．また，$n_x = \left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in N$ に対して，$\log n_x = x$ とおいた．

Proof. $a_y^{-1}n_x^{-1}\gamma_n n_x a_y$ を計算して，

$$P(Y) = \sum_{n\neq 0}\int_0^Y\int_0^1 f(\begin{pmatrix}1 & \frac{n}{y}\\ 0 & 1\end{pmatrix})\,\frac{dxdy}{y^2} = \sum_{n\neq 0}\int_0^Y \tilde{f}\left(\frac{n}{y}\right)\frac{dy}{y^2} =: P_+(Y) + P_-(Y)$$

により, $P_+(Y)$, $P_-(Y)$ を定義し, 変数変換すると,

$$P_+(Y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{n/Y}^{\infty}\tilde{f}(u)\,du, \quad P_-(Y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{n/Y}^{\infty}\tilde{f}(-u)\,du.$$

ここで，$\tilde{f}(u) := f(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix})$ とおいた．積分区間を分割して，

$$\begin{aligned}P_+(Y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{n/Y}^{\infty}\tilde{f}(u)\,du = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=n}^{\infty}\int_{m/Y}^{(m+1)/Y}\tilde{f}(u)\,du\\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\int_{m/Y}^{(m+1)/Y}\tilde{f}(u)\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\right)du\\ &= \int_{1/Y}^{\infty}\tilde{f}(u)\left(\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\leq Yu}\frac{1}{n}\right)du.\end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n\leq Yu}\frac{1}{n} = C_E + \log(Yu) + O(\frac{1}{Yu})$$

を用いると，（$C_E = 0.577215665\cdots$ はオイラー定数）

$$P_+(Y) = (C_E + \log Y)\int_{1/Y}^{\infty} \tilde{f}(u)\,du + \int_{1/Y}^{\infty} \tilde{f}(u)\log u\,du + O(\frac{\log Y}{Y}) \quad (Y \to \infty).$$

$\square$

定理 4.11 (SL$(2,\mathbb{Z})$ のセルバーグ跡公式)**.** $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ とする．$f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対し，下記の L^2-空間への右正則表現 $R(f)$ を考える：

$$L^2(\Gamma\backslash G) = L^2_{\mathrm{dis}}(\Gamma\backslash G) \oplus L^2_{\mathrm{con}}(\Gamma\backslash G).$$

$R(f)$ の $L^2_{dis}(\Gamma\backslash G)$ への制限を $R_d(f)$ とおけば，$R_d(f) \in \mathrm{End}(L^2_{dis}(\Gamma\backslash G))$ は *trace class* になり，その跡は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R_d(f)) = &\sum_{\gamma \in Z(\Gamma)\cup\Gamma_{\mathrm{hyp}}\cup\Gamma_{\mathrm{ell}}} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma) I(\gamma, f) \\ &+ c_E \int_N f(n)\,dn + \int_N f(n)\log|\log n|\,dn \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir)\,dr - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\pi_0(f))\phi(\tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

ここで，$Z(\Gamma)$ は Γ の中心，Γ_{hyp} は Γ の双曲共役類の集合，Γ_{ell} は Γ の楕円共役類の集合である．

Proof.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(R_d(f)) &= \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \Big\{K_f(z,z) - K_f(z,z)\Big\}\frac{dxdy}{y^2} \\ &= \lim_{Y\to\infty}\int_{(\Gamma\backslash\mathbb{H})^Y} \Big\{K_f(z,z) - K_f(z,z)\Big\}\frac{dxdy}{y^2} \\ &= \sum_{\gamma \in Z(\Gamma)\cup\Gamma_{\mathrm{hyp}}\cup\Gamma_{\mathrm{ell}}} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma) I(\gamma, f) \\ &\qquad + \lim_{Y\to\infty}\Big\{P(Y) - E(Y)\Big\}.\end{aligned}$$

ここで次節で示す命題 5.3 の証明の最後の式で $t \to 0$ とした式

$$\int_N f(n)\,dn = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\,dr$$

より，命題 4.9，4.10 に現れる $E(Y), P(Y)$ の $\log Y$ の係数が一致するから，

$$\begin{aligned}
&\lim_{Y\to\infty}\Big\{P(Y) - E(Y)\Big\} \\
&= c_E \int_N f(n)\,dn + \int_N f(n)\log|\log n|\,dn \\
&+ \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\frac{\phi'}{\phi}(\tfrac{1}{2}+ir)\,dr - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\pi_0(f))\phi(\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}$$

□

- 次の課題は跡公式の幾何サイドに現れる，軌道積分や（重みつき）ユニポテント軌道積分の Fourier 変換（$\mathrm{tr}(\pi(f))$ で表示する）である．

5 hyperbolic 軌道積分の Fourier 変換

$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，$G$ の極大コンパクト部分群 $K = \mathrm{SO}(2)$ とする．G/K と上半平面 $\mathbb{H}$ を同一視する．Γ を G のココンパクトな離散部分群で楕円元を持たないとする．このとき，単位元と異なる Γ の任意の元 γ は双曲元，（つまり，$|\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$）となる．双曲元は G において以下の元と共役である：

$$\gamma \sim \pm\begin{pmatrix} N(\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(\gamma)^{-1/2}\end{pmatrix} \quad \text{ただし，} N(\gamma) > 1 \text{ とする．}$$

$G = NAK$ を岩澤分解とする．G の部分群 A, N は以下で与えられる．

$$N := \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}, \quad A := \left\{ a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

G 上のハール測度を $g = n_x a_t k$ となるとき，$dg := e^{-t}dxdtdk$ で定義する．（$\int_K dk = 1$ になるように正規化しておく）

定義 5.1. $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ に対して，f のアーベル変換 $F_f(a_t)$ $(t > 0)$ を以下で定義する．

$$F_f(a_t) := e^{-t/2} \int_N f(na_t)\,dn = e^{-t/2} \int_{\mathbb{R}} f(n_x a_t)\,dx.$$

- $\pi_{ir} := \mathrm{Ind}_{MAN}^G(1_M \otimes a^{\frac{1}{2}+ir} \otimes 1_N)$ を G の spherical な主系列表現とする．$r \in \mathbb{R} \cup i[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ とする．

命題 5.2. $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とする．G の *spherical* な主系列表現 π_{ir} に対して，*trace class* 作用素 $\pi_{ir}(f)$ の *trace* は以下で与えられる．

$$\mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) = \int_{\mathbb{R}} F_f(a_t) e^{irt} dt. \tag{5.1}$$

Proof. [20, (11.29), p.395] を見よ． □

命題 5.3. $f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ とする．双曲元 a_t $(t > 0)$ に対して，軌道積分 $I(a_t, f)$ の *Fourier* 変換は以下で与えられる．

$$I(a_t, f) = \frac{1}{(e^{t/2} - e^{-t/2})} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) e^{-itr} dr. \tag{5.2}$$

Proof. アーベル変換の定義より，

$$F_f(a_t) = e^{t/2} \int_N f(a_t n)\,dn = (e^{t/2} - e^{-t/2}) \int_N f(n^{-1} a_t n)\,dn.$$

a_t の G における中心化群は A より，$t > 0$ のとき，

$$I(a_t, f) = \frac{1}{(e^{t/2} - e^{-t/2})} F_f(a_t)$$

この式に，(5.1) の両辺を Fourier 逆変換した式：

$$F_f(a_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f)) e^{-itr} dr$$

を代入すればよい． □

以上より，Γ がココンパクトで楕円元を含まない場合はセルバーグ跡公式（定理 3.8）は以下のように書き直せる．

$$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = L^2(\Gamma\backslash G)^K = \bigoplus_{\pi\in\hat{G}_1} m_\Gamma(\pi)H_\pi^K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} m_\Gamma(\pi_{ir_n})H_{\pi_{ir_n}}^K$$

のように直和分解されているとする． ここで，π_{ir_0} は G の trivial 表現とする．

定理 5.4 (セルバーグ跡公式，Γ：ココンパクト，f：両側 K-不変)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_\Gamma(\pi_{ir_n})\,\mathrm{tr}(\pi_{ir_n}(f)) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\,r\tanh(\pi r)\,dr$$
$$+\sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}}\frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2}-N(\gamma)^{-1/2}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))N(\gamma)^{-ir}\,dr.$$

ここで，Γ_{hyp} は Γ の双曲元の共役類の集合であり，双曲元 γ に対して，中心化群 Γ_γ の生成元を γ_0 とした．

Proof. 単位元の寄与については，Plancherel formula ：

$$f(e) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\,r\tanh(\pi r)\,dr$$

を用いる．（[20, Theorem 11.6, p.401] を参照）次に，$[\gamma]\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}$ とする．

$$\gamma = \begin{pmatrix} N(\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(\gamma)^{-1/2}\end{pmatrix}, \quad N(\gamma) > 1$$

としてよい．このとき，Γ_γ の生成元 γ_0 も対角行列で，$G_\gamma = A$ なので，

$$\mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash \mathrm{G}_\gamma) = \mathrm{vol}(\langle\gamma_0\rangle\backslash \mathrm{A}) = \int_1^{\log N(\gamma_0)}\frac{da}{a} = \log N(\gamma_0)$$

となる．これと命題 5.3 より，双曲共役類の寄与が計算される． □

6　セルバーグゼータ関数

Γ を $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ のココンパクトな離散部分群で楕円元を持たないとする．このとき，商空間 $X := \Gamma\backslash\mathbb{H}$ はコンパクトなリーマン面になりその種数を $g > 2$ とする．（このとき，$\mathrm{vol}(X) = 4\pi(g-1)$ である.）

$\gamma \in \Gamma$ を双曲元，（つまり，$|\operatorname{tr}(\gamma)| > 2$）とする．このとき，$\gamma$ の Γ における中心化群 Γ_γ は無限巡回群となり，γ は G において以下の元と共役である：

$$\gamma \sim \pm\begin{pmatrix} N(\gamma)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(\gamma)^{-1/2} \end{pmatrix} \quad \text{ただし，} N(\gamma) > 1 \text{ とする.}$$

$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の原始的な双曲元の Γ-共役類の集合とする．（原始的とは他の双曲元のべきとならないときをいう）離散部分群 Γ (または リーマン面 X) のセルバーグゼータ関数は，$\mathrm{Re}(s) > 1$ において絶対収束する以下のオイラー積で定義される：

定義 6.1 (セルバーグゼータ関数)**.** $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して，

$$Z_\Gamma(s) := \prod_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \prod_{k=0}^{\infty} \Big(1 - N(p)^{-(k+s)}\Big).$$

セルバーグはこのゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ について以下の定理を証明した：

定理 6.2 (Selberg 1956 [25])**.** *1.* $\mathrm{Re}(s) > 1$ において定義される $Z_\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に正則な関数として解析接続される.

2. $Z_\Gamma(s)$ は $s = -k$ $(k \in \mathbb{N})$ において位数 $(2g-2)(2k+1)$ の零点を，$s = 0$ において 位数 $2g-1$ の零点を， $s = 1$ に一位の零点を持つ. *:* 自明零点

3. $Z_\Gamma(s)$ は $s = \frac{1}{2} \pm ir_n$ において零点をもち，そこでの位数は $m_\Gamma(\pi_{ir_n})$ に一致する．$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ *:* 非自明零点

ここで，π_{ir_n} は $L^2(\Gamma\backslash G)$ に作用する $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の右正則表現 R_Γ を既約分解したときに現れる $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の spherical な既約ユニタリ表現であり，（ユニタリ主系列表現，または補系列表現で G の trivial 表現は除く）その重複度を $m_\Gamma(\pi_{ir_n})$ とおいた．上記の定理はコンパクトリーマン面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ に対するセルバーグ跡公式を用いて証明される．このゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ は以下の関数等式をみたす：

定理 6.3 (関数等式，Selberg 1956 [25])**.**

$$Z_\Gamma(1-s)=Z_\Gamma(s)\exp\Big(-4(g-1)\pi\int_0^{s-\frac{1}{2}} r\,\tan(\pi r)\,dr\Big). \tag{6.1}$$

上記関数等式は二重ガンマ関数 $\Gamma_2(s)$ を用いて対称な形に書くことも出来る．ここで，二重ガンマ関数 $\Gamma_2(z):=\exp(\zeta_2'(0,z))$ で定義される．$\zeta_2(s,z)=\sum_{n,m\geq 0}(n+m+z)^{-s}$ は二重フルビッツゼータ関数である．関数等式 (6.1) に現れる $r\tan(\pi r)$ を含む積分が二重三角関数 $S_2(s):=\Gamma_2(2-s)\Gamma_2(s)^{-1}$ を用いて表示できることに注意すると（[19] 参照）上記関数等式は

$$Z_\Gamma(1-s)=Z_\Gamma(s)\big(S_2(s)^{-1}S_2(s+1)^{-1}\big)^{2g-2}$$

となり，

$$Z_\Gamma(1-s)\big(\Gamma_2(1-s)\Gamma_2(2-s)\big)^{2g-2}=Z_\Gamma(s)\big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\big)^{2g-2}$$

となるので，対称な関数等式

$$\hat{Z}_\Gamma(1-s)=\hat{Z}_\Gamma(s):=Z_\Gamma(s)\big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\big)^{2g-2}. \tag{6.2}$$

を得る．

以下ではセルバーグゼータ関数の解析接続や関数等式など（定理 6.2，定理 6.3）をセルバーグ跡公式を用いて証明しよう．まず，定理 5.4 において，$h(r):=\mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))$ とおき，f の代わりに h を新たに “試験関数” とみなすと，定理 5.4 は次のようになる：

定理 6.4 (セルバーグ跡公式，両側 K-不変，試験関数 h)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r h(r)\tanh(\pi r)\,dr + \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}} \frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2}-N(\gamma)^{-1/2}} g(\log N(\gamma)).$$

ここで，$g(u)$ は $h(r)$ の Fourier 変換で，上記跡公式は下記の条件を満たす $h(r)$ に対して成り立つことが証明できる．

- $h(r)=h(-r)$: 試験関数，$|\,\mathrm{Im}(r)|<\frac{1}{2}+\delta$ において解析的 $(\exists\delta>0)$，$h(r)=O\big((1+|r|)^{-2-\delta}\big)$ $(\mathrm{Re}(r)\to\infty)$.
- $g(u):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)e^{-iru}\,dr$

定理 6.4 を用いて，セルバーグゼータ関数の解析的性質（定理 6.2）や関数等式（定理 6.3）が証明できる．以下ではそれを説明する．実数 $\beta\geq 2$ を固定する．試験関数として，

$$h(r)=\frac{1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{r^2+\beta^2}$$

をとるとこれを試験関数の条件をみたすので，セルバーグ跡公式に適用できる．このとき，

$$g(u)=\frac{1}{2s-1}e^{-(s-\frac{1}{2})|u|}-\frac{1}{2\beta}e^{-\beta\,|u|}$$

になるので，以下の命題を得る．

命題 6.5. $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して，以下が成立する．

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{r_n^2+(s-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{r_n^2+\beta^2}\Big] \\
&\quad = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{s+k}-\frac{1}{\beta+\frac{1}{2}+k}\Big] \\
&\qquad + \frac{1}{2s-1}\frac{Z_\Gamma'(s)}{Z_\Gamma(s)}-\frac{1}{2\beta}\frac{Z_\Gamma'(\frac{1}{2}+\beta)}{Z_\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)}.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Proof. 跡公式の右辺の単位元の寄与を

$$I(s) := \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{r^2+\beta^2}\right]r\tanh(\pi r)\,dr$$

とおく．$\tanh(\pi r) = \frac{1-e^{-2\pi r}}{1+e^{-2\pi r}}$ に注意して，留数定理と部分分数分解の公式

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left[\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right]$$

を用いて計算すれば，

$$I(s) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{s+k}-\frac{1}{\beta+\frac{1}{2}+k}\Big]$$

となる．次に

$$H(s) := \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}}\frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2}-N(\gamma)^{-1/2}}e^{-(s-\frac{1}{2}\log N(\gamma))}$$

とおけば，双曲共役類の寄与は

$$\frac{1}{2s-1}H(s)-\frac{1}{2\beta}H(\beta+\tfrac{1}{2})$$

となる．$H(s)$ を計算する．

$$\begin{aligned}
H(s) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}} \frac{\log N(\gamma_0)}{1-N(\gamma)^{-1}} N(\gamma)^{-s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \frac{\log N(p)}{1-N(p)^{-k}} N(p)^{-ks} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \log N(p)\cdot N(p)^{-k(s+m)} \\
&= \frac{d}{ds} \sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \sum_{m=0}^{\infty} \log\Bigl(1-N(p)^{-(s+m)}\Bigr) \\
&= \frac{d}{ds} \log Z_\Gamma(s)
\end{aligned}$$

となり，示された． □

この命題を用いて，セルバーグゼータ関数の解析接続や零点の位置と位数が導かれる（定理 6.2）．また，(6.3) の左辺は s と $1-s$ を入れ替えても不変なので，(6.3) において s を $1-s$ と置き換えた式との差を取ると

$$\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} + \frac{Z'_\Gamma(1-s)}{Z_\Gamma(1-s)} = -(2s-1)\frac{4\pi(g-1)}{2\pi}\pi\cot(\pi s)$$

が得られる．これから関数等式 (6.1) が得られる（定理 6.3）．

セルバーグゼータ関数は階数 1 の局所対称空間に対しても定義され，調べられている．それらについては [11], [12], [14], [15] 等を参照のこと．

7 実二次体の類数の分布

判別式の集合 $\mathcal{D} := \{d>0 \mid d\equiv 0,1\,(4),\ \text{平方数でない}\}$ とおく．$d\in\mathcal{D}$ に対して，実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の基本単数を $\varepsilon_d>1$，類数を $h(d)$ とおく．以下の漸近公式が知られている．

定理 7.1 (Gauss/Siegel)**.**

$$\sum_{d \le x} h(d) \log \varepsilon_d = \frac{\pi^2}{18\zeta(3)} x^{3/2} + O(x \log x) \quad (x \to \infty).$$

上記とは異なるタイプの "類数 $h(d)$ の和の漸近公式" がセルバーグゼータ関数の数論的表示と素測地線定理を用いて証明される.

命題 7.2 ($Z_\Gamma(s)$ の数論的表示)**.** $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ とする. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対するセルバーグゼータ関数は次の表示を持つ：

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{d \in \mathcal{D}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon_d^{-2(s+k)})^{h(d)}.$$

Proof. [24] を参照. □

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の非零領域を調べることによって，素数定理：

$$\pi(x) := \#\{p : \text{素数} \mid p \le x\} \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \to \infty)$$

が導かれるようにセルバーグゼータ関数の $Z_\Gamma(s)$ の非零領域を調べることによって素測地線定理が導かれる.

定理 7.3 (素測地線定理 [16], [17])**.** Γ を $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の $\mathrm{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H}) < \infty$ なる離散部分群とし，$\pi_\Gamma(x) := \#\{p \in \mathrm{Prim}(\Gamma) \mid N(p) \le x\}$ とおく. $\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ とする. 以下が成り立つ.

$$\pi_\Gamma(x) = \mathrm{li}(x) + \sum_{\frac{3}{4} < t_k < 1} \mathrm{li}(x^{t_k}) + O(x^{3/4} (\log x)^{-1/2}) \quad (x \to \infty).$$

ここで，$\lambda_k = t_k(1 - t_k)$ は $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ に作用するラプラシアン $\Delta := -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有値で $(0, \frac{3}{16}]$ の範囲にある "例外固有値の集合" である.

上の素測地線定理（素双曲共役類定理）とセルバーグゼータ関数の数論的表示（命題 7.2）より以下が示される．

系 **7.4.**

$$\sum_{\varepsilon_d \le x} h(d) = \mathrm{li}(x^2) + O(x^{3/2}(\log x)^{-1/2}) \quad (x \to \infty).$$

参考文献

[1] 織田孝幸，Selberg Trace Formula 入門．

[2] 加藤敏夫，位相解析，共立出版，1957 年．

[3] 権 寧魯，保型形式とゼータ，数理科学，2011 年 1 月号．

[4] 若山正人，$SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ の跡公式とセルバーグゼータ関数，第 9 回整数論サマースクール報告集「ゼータ関数」，2002 年．

[5] C. Brislawn, Kernels of trace class operators. Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), no. 4, 1181-1190.

[6] C. Brislawn, Traceable integral kernels on countably generated measure spaces. Pacific J. Math. **150** (1991), no. 2, 229–240.

[7] A. Deitmar and W. Hoffmann, Asymptotics of class numbers. Invent. Math. **160** (2005), no. 3, 647–675.

[8] J. Dixmier and P. Malliavin, Factorisations de fonctions et de vecteurs indefiniment differentiables. (French) Bull. Sci. Math. (2) **102** (1978), no. 4, 307–330.

[9] M. Duflo, Généralités sur les représentations induites, Représentations des groupes de Lie résolubles, Monographies de la Soc. Math. de France, No. 4. Dunod, Paris, (1972), 93–119.

[10] J. Fischer, An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zeta-function. Lecture Notes in Mathematics, **1253**. Springer-Verlag, Berlin, 1987. iv+184 pp.

[11] R. Gangolli, Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math. **21** (1977), no. 1, 1–41.

[12] R. Gangolli and G. Warner, Zeta functions of Selberg's type for some noncompact quotients of symmetric spaces of rank one. Nagoya Math. J. **78** (1980), 1–44.

[13] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and I. I. Piatetski-Shapiro, Representation theory and automorphic functions. Translated from the Russian by K. A. Hirsch W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa.-London-Toronto, Ont. 1969 xvi+426 pp.

[14] Y. Gon, Gamma factors of Selberg zeta functions and functional equation of Ruelle zeta functions. Math. Ann. **308** (1997), no. 2, 251–278.

[15] Y. Gon and J. Park, The zeta functions of Ruelle and Selberg for hyperbolic manifolds with cusps. Math. Ann. **346** (2010), no. 3, 719–767.

[16] D. A. Hejhal, The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Vol. 1. Lecture Notes in Mathematics, **548**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. vi+516 pp.

[17] D. A. Hejhal, The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Vol. 2. Lecture Notes in Mathematics, **1001**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983. viii+806 pp.

[18] W. Hoffmann, The Fourier transforms of weighted orbital integrals on semisimple groups of real rank one. J. Reine Angew. Math. **489** (1997), 53–97.

[19] N. Kurokawa and S. Koyama, Multiple sine functions. Forum Math. **15** (2003), no. 6, 839–876.

[20] A. W. Knapp, Representation theory of semisimple groups. An

overview based on examples. Princeton Mathematical Series, **36**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. xviii+774.

[21] A. W. Knapp, Theoretical aspects of the trace formula for GL(2). Representation theory and automorphic forms (Edinburgh, 1996), 355–405, Proc. Sympos. Pure Math., 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[22] M. S. Osborne and G. Warner, Multiplicities of the integrable discrete series: the case of a nonuniform lattice in an R-rank one semisimple group. J. Funct. Anal. **30** (1978), no. 3, 287–310.

[23] P. J. Sally and G. Warner, The Fourier transform on semisimple Lie groups of real rank one. Acta Math. **131** (1973), 1–26.

[24] P. Sarnak, Class numbers of indefinite binary quadratic forms. J. Number Theory **15** (1982), no. 2, 229–247.

[25] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87.

[26] A. Selberg, Harmonic analysis. Collected papers. Vol. I. Springer-Verlag, (Berlin, 1989), 626–674.

[27] G. Warner, Selberg's trace formula for nonuniform lattices: The R-rank one case. Adv. Math. Suppl. Stud. **6** (1979), 1–142.

[28] F. Williams, Lectures on the spectrum of $L^2(\Gamma\backslash G)$. Pitman Research Notes in Mathematics Series, **242**. Longman Scientific & Technical, 1991, xiv+348.

Yasuro Gon
Faculty of Mathematics, Kyushu University
744 Motooka, Fukuoka 819-0395, Japan
E-mail: ygon[at]math.kyushu-u.ac.jp