ガロワ表現の円分 p 進ゼータ関数の合同式について

原 隆[*]　(東京大学大学院数理科学研究科)

2010 年 12 月 6 日

本稿は第 18 回整数論サマースクール『アーサー・セルバーグ跡公式入門』の「院生とポスドクの時間」に於ける著者の講演内容を纏めたものです．素晴らしいサマースクールを企画してくださったばかりでなく発表の機会まで設けてくださった世話人の若槻聡さん，平賀郁さんに心から感謝致します．

1　序

2006 年に **深谷太香子** *Takako* FUKAYA と **加藤和也** *Kazuya* KATO は非可換玉河数予想を仮定した上で非可換拡大に付随する p 進ゼータ関数を構成した [FukKat]．しかし，一般に非可換拡大に対する p 進ゼータ関数の構成は難しく，総実代数体の場合に **ユルゲン・リッター** *Jürgen* RITTER, **アルフレッド・ヴァイス** *Alfred* WEISS 及び**マヘシュ・カクデ** *Mahesh* KAKDE に依って構成されたもの [RW2, Kakde] 以外には知られていないのが現状である．そこで，非可換 p 進ゼータ関数の存在を仮定した上でどのようなゼータ値 (或いは可換な拡大に付随する p 進ゼータ関数) の間の合同式が導き出されるかを調べることとした．そのような合同式はゼータ値 (或いはゼータ関数) 達の〈貼り合わせの条件〉として見做せる筈であり，これを示すことで “自然に” ゼータ関数達が〈貼り合って〉非可換 p 進ゼータ関数が得られると (思想的には) 考えられるからである．

本稿では最初にこの様な考察の最初の例であるクンマーの合同式について概観し，その後深谷-加藤の p 進ゼータ関数の存在を仮定した上で同様のクンマー型合同式が導かれることを説明する．最後に次元の異なる表現の間の〈合同関係〉についての若干の考察を行った．

2　クンマーの合同式と p 進 L 関数

古典的な **クンマーの合同式** KUMMER*'s congruence* [Kummer] から考察を始めよう:

定理 1 (クンマーの合同式)**.** p を奇素数とし，$\zeta_{\{p\}}(s) = (1-p^{-s})\zeta(s)$ をリーマン・ゼータ関数から p での局所因子を取り除いたものとする．$p-1$ で割り切れない正の偶数 r, r' に対して或る自然数[*1] a が存在して合同式

(1)
$$r \equiv r' \mod (p-1)p^{a-1}$$

[*] *e-mail*: `thara@ms.u-tokyo.ac.jp`　なお，著者は日本学術振興会より援助を受けております (特別研究員 DC2 21・7079)

[*1] 本稿では自然数は 1 **以上の整数** として定義する．

が成り立つとき，ゼータ値の間の合同式

$$\zeta_{\{p\}}(1-r) \equiv \zeta_{\{p\}}(1-r') \mod p^a$$

が成立する． ♢

この結果を次のように捉え直してみよう; $\kappa\colon \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ を p 進円分指標とする．このとき合同式 (1) から

$$\mathrm{Im}(\kappa^{r-r'}) \subseteq (\mathbb{Z}_p^\times)^{(p-1)p^{a-1}} = (1+p\mathbb{Z}_p)^{(p-1)p^{a-1}} = 1 + p^a\mathbb{Z}_p,$$

即ち指標として

$$\kappa^r \equiv \kappa^{r'} \mod p^a \tag{2}$$

が成立する．つまりクンマーの合同式は

指標同士が p 進的に近ければ，対応するゼータ値も p 進的に近くなる

ということを表していることに他ならず，背後に p 進的にゼータ値を補間する関数の存在を示唆していたのであった (久保田富雄とハインリッヒ-ヴォルフガング・レオポルトがクンマーの結果を用いて実際に p 進ゼータ関数を構成したこと [KL] は周知の通りである．なお，ゼータ値 $\zeta_{\{p\}}(1-r)$, $\zeta_{\{p\}}(1-r')$ は久保田-レオポルトの p 進 L 関数 ξ_{KL} の $\kappa^r, \kappa^{r'}$ での値に他ならないことに注意).

3 深谷-加藤の p 進ゼータ関数とクンマー型合同原理

深谷-加藤の p 進ゼータ関数の存在を仮定すると，クンマーの合同式と同様に

表現同士が p 進的に近ければ，対応するゼータ関数も p 進的に近くなる

という合同原理が導かれる．これを説明しよう．以下，簡単のため $\mathbb{Q}$ 上のモチーフのみを考察することとする．

p を奇素数，K を代数体とする．また有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロワ群を $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ で表すこととする．M_1, M_2 を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の K-係数モチーフで階数 r が等しいものとする．K の p 上の素イデアル $\mathfrak{p}$ を固定し，M_1, M_2 の $\mathfrak{p}$-進実現の $G_{\mathbb{Q}}$-安定な $\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}$-格子 $T_{1,\mathfrak{p}}, T_{2,\mathfrak{p}}$ から得られる $\mathfrak{p}$ 進整ガロワ表現

$$\rho_i\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(T_{i,\mathfrak{p}}) \cong GL_r(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}) \quad i = 1, 2$$

が共に p 進リー群商 G を経由すると仮定する (例えば G として，表現の和

$$\rho_1 \oplus \rho_2\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}(T_{1,\mathfrak{p}} \oplus T_{2,\mathfrak{p}})$$

の核で $G_{\mathbb{Q}}$ を割ったもの等が取れる)．G に対応するガロワ拡大を $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ で表す．ここで，$\mathbb{Q}_\infty$ に対して

- $\mathbb{Q}_\infty$ は総実代数体;
- $\mathbb{Q}_\infty$ は $\mathbb{Q}$ の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}$ を含む;
- $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ の p に於いて不分岐な最大アーベル部分拡大 $\mathbb{Q}_\infty^{\mathrm{ab},p}$ が $\mathbb{Q}$ 上有限次拡大;
- G は p 捩れ元を含まない

を仮定する．$\mathbb{Q}_\infty^{\mathrm{ab},p}$ の p 上の任意の素点での完備化の整数環を $\mathcal{O}$ と書くことにする．

モチーフの接空間を $t_{M_i} = M_{i,\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^0 M_{i,\mathrm{dR}}$ $(i=1,2)$ で定める．モチーフ M_1, M_2 は以下の条件を満たすと仮定する;

- (ドリーニュの臨界条件)
  周期写像が同型
  $$\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} M^+_{i,\mathrm{Betti}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} t_{M_i} \quad i=1,2,$$
  を誘導する ($M^+_{i,\mathrm{Betti}}$ は複素共役の作用に関する固定部分空間);
- モチーフ M_1, M_2 は共に p で通常良還元を持つ;
- $i=1,2$ に対し，$M^+_{i,\mathrm{Betti}}$ は $T_{i,\mathfrak{p}}$ に関して良い基底 $\{\gamma_j^+\}$ を持つ; 即ち $T^+_{i,\mathfrak{p}}$ の $\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$-基底 $\{\tilde{\gamma}_j^+\}$ が存在して，比較同型に関して整合的に振る舞う;
  $$M_{i,\mathrm{Betti}}\otimes K_\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} M_{i,\mathfrak{p}} = T_{i,\mathfrak{p}}\otimes K_\mathfrak{p}\ ;\ \gamma_j^+\otimes 1 \leftrightarrow \tilde{\gamma}_j^+\otimes 1,$$
- $i=1,2$ に対し，t_{M_i} は $T_{i,\mathfrak{p}}$ に関して良い基底 $\{\delta_j\}$ を持つ ($M^+_{i,\mathrm{Betti}}$ と同様の条件，詳細は [FukKat, 4.2.24 (3)] 参照).

$\Lambda_{\mathcal{O}}(G) = \mathcal{O}[[G]]$ を G の $\mathcal{O}$ 上の岩澤代数 (完備群環) とし，
$$S = \{f\in\Lambda_{\mathcal{O}}(G) \mid \Lambda_{\mathcal{O}}(G)/\Lambda_{\mathcal{O}}(G)f \text{ が左 } \Lambda_{\mathcal{O}}(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}))\text{-加群として有限生成}\},$$
$$S^* = \bigcup_{n\geq 0} p^n S$$
とおく (標準オーレ集合 [CFKSV])．以上の設定の下で，深谷-加藤は $K_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)_{S^*})$ の元 ξ で G のアルティン表現に関するアルティン L 関数の特殊値を補間するようなもの [FukKat, Theorem 4.2.26] を非可換玉河数予想の仮定の下で構成した (深谷-加藤の記号では $\zeta_{\beta_{\gamma,\delta}}(\mathbb{Q}(-1),\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ と書かれているもの)．さらに，非可換玉河数予想が満たすとされている底変換に関する整合性 [FukKat, Conjecture 2.3.2, Conjecture 3.4.3] から，
$$\Lambda_{\mathcal{O}}(G)\to M_r(\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}})\otimes_{\mathbb{Z}_p}\Lambda_{\mathcal{O}}(\Gamma)\ ;\ g\mapsto \rho_i(g)\otimes\bar{g}$$
(但し $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q})$，$\bar{g}$ は g の Γ での像) により誘導される写像
$$K_1(\Lambda_{\mathcal{O}}(G)_{S^*})\to K_1(\mathrm{Frac}(\Lambda_{\mathcal{O}'}(\Gamma))) = \mathrm{Frac}(\Lambda_{\mathcal{O}'}(\Gamma))^\times \quad i=1,2$$
により ξ はモチーフ $M_i(-1)$ に付随する円分 p 進 L 関数 ξ_{M_i} [CPR] にうつることが導かれる ($\mathcal{O}'$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環で $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}$ を含むもの).

定理 2 (クンマー型合同原理)．以上の設定の下で，或る自然数 a に対し
$$\rho_1\equiv\rho_2 \bmod \mathfrak{p}^a$$
が成り立つならば，$\mu(\xi_{M_1}) = \mu(\xi_{M_2})$ $(=\mu$ とおく$)$ が成り立ち，さらに合同式
$$\frac{\xi_{M_1}}{\mathfrak{p}^\mu}\equiv\frac{\xi_{M_2}}{\mathfrak{p}^\mu} \bmod \mathfrak{p}^a$$
が成り立つ． ◊

証明のスケッチ. $\xi\in K_1(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)_S)$ のとき ($\mu=0$ の場合に相当する)，合同式条件より
$$\rho_1 \bmod \mathfrak{p}^a = \rho_2 \bmod \mathfrak{p}^a \colon K_1(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)_S/\mathfrak{p}^a)\to(\Lambda_{\mathcal{O}'}(\Gamma)_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^a)^\times$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}\xi_{M_1} \bmod \mathfrak{p}^a &= \rho_1 \bmod \mathfrak{p}^a(\xi \bmod \mathfrak{p}^a) \\ &= \rho_2 \bmod \mathfrak{p}^a(\xi \bmod \mathfrak{p}^a) = \xi_{M_2} \bmod \mathfrak{p}^a\end{aligned}$$

が従う．

一般の場合は，直和分解

$$K_1(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)_{S^*}) \cong K_1(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)_S) \oplus K_0(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)/\mathfrak{p})$$

が存在して，$K_0(\Lambda_{\mathcal{O}'}(G)/\mathfrak{p})$-成分 から μ-不変量が復元出来ること (バーンズ-ヴェンヤコブの一般化 μ-不変量の理論 [BV, Proposition 3.4]) から，先程と同様の関手的な議論に依って μ-不変量が一致することが確認できる[*2]． □

同じ階数の表現に関する合同原理の例としては，例えばヴィニヤク・ヴァトサルによる

保型形式の合同から付随する p 進 L 関数の間の合同関係が従う

という結果 [Vatsal] 等が挙げられよう．このように 定理 2 は非可換 p 進ゼータ関数の存在から従うと期待される独特の現象と言うよりは，寧ろ古典的に扱われている合同原理を非可換 p 進ゼータ関数を用いて洗練された形で整理したものと言う印象が強い．

4 展望—《非可換》合同式に向けて

最後に p 進ゼータ関数の〈貼り合わせ〉の条件として期待される《非可換》合同式とでも称すべき合同式に関して考察しよう．リッター-ヴァイスは次の合同式を非可換 p 進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ の構成に用いた;

命題 3 (リッター-ヴァイス, [RW1])**.** F_∞/F を総実代数体 F の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 F_{cyc} の総実な有限次 p 拡大で，F の有限個の素点でのみ分岐しているものとする．また，p 次部分拡大 F' で F_∞/F' がアーベル拡大となるようなものが存在しているとする．さらに F_∞^{ab} を拡大 F_∞/F の最大アーベル部分拡大とする．このとき $\mathrm{Gal}(F_\infty/F')$ の指標 χ で $\mathrm{Gal}(F'/F) = \langle\sigma\rangle$ の作用 $\chi^\sigma(x) \mapsto \chi(\tilde{\sigma}^{-1}x\tilde{\sigma})$ に関して不変なもの ($\tilde{\sigma}$ は σ の $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ への持ち上げ) に対して

$$\chi(\xi_{F_\infty/F'}) \equiv \chi(\mathrm{Ver}(\xi_{F_\infty^{\mathrm{ab}}/F})) \mod p \tag{3}$$

が成り立つ．但し $\xi_{F_\infty/F'} \in \mathrm{Frac}(\Lambda(\mathrm{Gal}(F_\infty/F')))^\times$, $\xi_{F_\infty^{\mathrm{ab}}/F} \in \mathrm{Frac}(\Lambda(\mathrm{Gal}(F_\infty^{\mathrm{ab}}/F)))^\times$ はそれぞれアーベル拡大 F_∞/F', F_∞^{ab}/F に関する p 進ゼータ関数で

$$\mathrm{Ver}\colon \mathrm{Frac}(\Lambda(\mathrm{Gal}(F_\infty^{\mathrm{ab}}/F)))^\times \to \mathrm{Frac}(\Lambda(\mathrm{Gal}(F_\infty/F')))^\times$$

は群の移送写像より誘導される射を表す． ◊

さて，p 進ゼータ関数のノルム関係式によりノルム写像は非可換 p 進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ を $\xi_{F_\infty/F'}$ にうつす．p 進ゼータ関数のノルムをとる操作は表現論的には誘導表現をとる操作に相当するので，合同式 (3) をクンマー型合同原理〈風〉に解釈しようとするならば

[*2] μ-不変量の一致はより弱い合同式 $\rho_1 \equiv \rho_2 \bmod \mathfrak{p}$ から従う．

p 次表現 $\mathrm{Ind}_F^{F'}(\chi)$ と 1 次表現 $\chi \circ \mathrm{Ver}$ が **（何らかの意味で）**p **進的に《近い》**

ということを示唆しているように思われる．このように次元の異なる表現に対しても p 進的に《近い》という解釈が可能であり，その結果として p 進ゼータ関数の合同関係を解釈することが可能であるならば非常に興味深いことであり，非可換拡大にまつわる p 進ゼータ関数達の合同関係についてより理解が深まりそうな予感がするというものである．しかし，実際には次元の異なる表現に対する合同関係の結果はリッター-ヴァイスの例のように

誘導表現と移送写像

のタイプのものしか得られておらず，その裏に隠れている (かもしれない) 合同原理は未だに殆ど明らかにされていないのが現状である．

参考文献

[BV] David Burns and Otmar Venjakob, *On descent theory and main conjectures in non-commutative Iwasawa theory*, to appear in J. Inst. Math. Jessieu.

[CFKSV] John Coates, Takako Fukaya, Kazuya Kato, Ramdorai Sujatha and Otmar Venjakob, *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **101** (2005) 163–208.

[CPR] John Coates and Berdenette Perrin-Riou, *On p-adic L-functions attached to Motives over $\mathbb{Q}$*, in: *Algebraic Number Theory—in honor of K. Iwasawa*, Adv. Stud. Pure Math. **17** (1989) 23–54.

[FukKat] Takako Fukaya and Kazuya Kato, *A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory*, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. XII, 1–85, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006).

[Kakde] Mahesh Kakde, *The main conjecture of Iwasawa theory for totally real fields*, preprint, `arXiv:1008.0142v1[math.NT]` (2010).

[KL] Tomio Kubota and Heinrich-Wolfgang Leopoldt, *Eine p-adische Theorie der Zetawerte* (*Teil I*: *Einfuhrung der p-adischen Dirichletschen L-FUnktionen*), J. Reine Angew. Math., **213** (1964) 328–339.

[Kummer] Ernst Eduard Kummer, *Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungscoefficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen*, J. Reine Angew. Math., **41** (1851) 368–372.

[RW1] Jürgen Ritter and Alfred Weiss,

[RW2] Jürgen Ritter and Alfred Weiss, *On the 'main conjecture' of equivariant Iwasawa theory*, preprint, `arXiv:1004.2578v2[math.2010]` (2010).

[Vatsal] Viniak Vatsal, *Canonical Periods and congruence formulae*, Duke Math. J., **98** (1999) 397–419.