degree 2 の p 進 Siegel-Eisenstein 級数

京都大学数学教室 D1　竹森　翔*

1　導入

桂田氏と長岡氏は，degree 2, level 1 の Siegel-Eisenstein 級数のある p 進極限が degree 2, level p の genus theta 級数や twist された Eisenstein 級数の線形結合であらわされることを示した ([Kat-Na]).（ここで twist された Eisenstein 級数とは 2 節で定義される Eisenstein 級数に $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ を作用させたものである．）水野氏は，[Kat-Na] に現れる Eisenstein 級数の p 進極限を level p の Siegel-Eisenstein 級数を使って表した．その証明には level p の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式が使われる．level が 1 でないときの Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式は最近までは知られていなかったが，水野氏が [Mi1] で明示公式を得ている．その証明には Jacobi-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式と Maass lift が使われる．また，軍司氏は，level p の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の Euler 因子 (Siegel series) を直接計算した ([Gu]).

degree 2 のとき，指標が任意の原始指標のときに Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数を計算し，桂田氏と長岡氏の結果 (Siegel-Eisenstein 級数の p 進極限が Siegel 保型形式になるという結果) を level や指標が一般の場合に拡張したのでそれを紹介する (定理 5.2). (ただし，weight は 3 より大きいときのときしか考えていない．）また，degree 2 の Siegel-Eisenstein 級数からなる p 進解析的な保型形式の族が存在するということも示した (定理 5.1).

2　Siegel 保型形式

g を正の整数とし，$\mathfrak{H}_g = \left\{ z \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{C}) \bigm| \mathrm{Im}(z) > 0 \right\}$ を degree g の Siegel 上半空間とする．ここで，$x \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{R})$ に対し，$x > 0, x \geq 0$ はそれぞれ，x が正定値，半正定値であるということを意味する．$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ を

$$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}) = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}) \bigm| a, b, c, d \in M_g(\mathbb{Z}),\ {}^t\alpha w \alpha = w \right\},$$

* takemori@math.kyoto-u.ac.jp

(ただし $w = \begin{pmatrix} 0_g & -1_g \\ 1_g & 0_g \end{pmatrix}$) と置き，$N$ を正の整数とするとき，$\mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_0^{(g)}(N)$ を

$$\Gamma_0^{(g)}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \mod N \right\}$$

と置く．ψ を mod N の Dirichlet 指標とするとき degree g, weight k, 指標 ψ の Siegel 保型形式全体のなす空間を $M_k(\Gamma_0^{(g)}(N), \psi)$ と置く．すなわち，$\mathfrak{H}_g$ 上の正則関数 f で次を満たすもの全体のなす空間とする．

$$\text{すべての} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ に対し，} \quad f\left((az+b)(cz+d)^{-1}\right) = \psi(\det(d)) \det(cz+d)^k f(z).$$

ただし $g = 1$ の場合は，さらに cusp 条件も加える．
$M_k(\Gamma_0^{(g)}(N), \psi)$ の任意の元 f は次の様な Fourier 級数展開をもつ．

$$f(z) = \sum_{0 \leq h \in \mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})} a(h, f) \mathbf{e}(hz).$$

ここで，正方行列 X に対し $\exp(2\pi i \mathrm{Tr}(X))$ を $\mathbf{e}(X)$ で表している．また，$\mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})$ は次のように半整数行列の全体がなす集合である．

$$\mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z}) = \left\{ T = (t_{ij}) \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{Q}) \;\middle|\; 2t_{ij} \in \mathbb{Z}, t_{ii} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Γ_∞ を

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c = 0 \right\},$$

と置く．

$k \in \mathbb{Z}$ とし，$\psi(-1) = (-1)^k$ とする，$z = x + iy$, $x, y \in \mathrm{Sym}_g(\mathbb{R})$ とするとき，degree g の Siegel-Eisenstein 級数 $E_{k,\psi}^{(g)}(z)$ を次で定める．

$$E_{k,\psi}^{(g)}(z) = \sum_{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \psi^{-1}(\det(d)) \det(cz+d)^{-k}.$$

右辺は $k > g + 1$ のとき，絶対収束し，$M_k(\Gamma_0^{(g)}(N), \psi)$ の元を定める．

3 degree 2 の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示公式

Siegel-Eisenstein 級数 $E_{k,\psi}^{(g)}(z)$ の Fourier 係数 $a(h, E_{k,\psi}^{(g)}(z))$ は，$N = 1$ で g が一般の場合には，桂田氏によって ([Kat])，N が奇数かつ square-free で，degree が $g = 2$ の場合には，水野氏によって ([Mi1]) によって明示的に計算されている．また，degree 2 のときは，軍司氏によって，$a(h, E_{k,\psi}^{(2)})$ の奇素数 level での Euler 因子 (Siegel series) が明示的に計算されている ([Gu]).

この節では，degree が $g=2$ のときに，一般の level で $E_{k,\psi}^{(2)}$ の Fourier 係数の明示公式について述べる．計算方法は，[Gu] を参考にした．

$h \in \mathrm{Sym}_2^{(*)}(\mathbb{Z})$ かつ rank $h<2$ のとき，$uh{}^tu = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m \geq 0$ となるような $u \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ が存在する．このとき，

$$a(h, E_{k,\psi}^{(2)}) = a(\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{k,\psi}^{(2)}) = a(m, E_{k,\psi}^{(1)})$$

が成立する．１つ目の等号は，保型性から，２つ目の等号は，Siegel operator Φ について，$\Phi E_{k,\psi}^{(2)} = E_{k,\psi}^{(1)}$ であることからわかる．１変数の Eisenstein 級数の Fourier 係数は明示的に知られているので，rank $h=2$ のときの Fourier 係数 $a(h, E_{k,\psi}^{(2)})$ について述べる．

定理 3.1. ψ を mod N の原始指標とし，$0<h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ を正定値半整数対称行列とする．$k>3$ のとき，$a(h, E_{k,\psi}^{(2)})$ について次が成立する．

(1) h が次の条件を満たすとき $a(h, E_{k,\psi}^{(2)})=0$ である．

i. $\mathrm{ord}_2(N)=2$ または，$\mathrm{ord}_2(N)>3$ のとき，

$$h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}).$$

ii. $\mathrm{ord}_2(N)=3$ のとき，$uh{}^tu$ が次のいずれかの行列と等しくなるような $u \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ が存在する．

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad 2^m \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad 2^m \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

ここで，$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^\times$ であり $m \in \{0,1\}$ である．

(2) h が (1) の条件を満たさないとき，$a(h, E_{k,\psi}^{(2)})$ は次のようになる．

$$2\frac{L^{(N)}(2-k, \chi_h\psi)}{L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2)} \prod_{\substack{q:\text{prime} \\ q\nmid N}} F_q(h; \psi(q)q^{k-3}) \prod_{\substack{q:\text{prime} \\ q\mid N}} c_q(h,\psi; q^{k-3}).$$

記号の説明をする．

Dirichlet 指標 χ と自然数 N に対し $L^{(N)}(s,\chi) = \prod_{q\nmid N}(1-\chi(q)q^{-s})^{-1}$ である．$0<h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ に対し, $D(h) = -\det(2h)$ と置くとき $D_0(h)$ を２次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D(h)})$ の判別式とし，$f(h)$ を

$$D(h) = D_0(h) f(h)^2$$

となるような正の整数とする．上の χ_h は２次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D(h)})$ に付随する導手 $|D_0(h)|$ の２次指標である．α_1, α を

$$\alpha_1 = \mathrm{ord}_q\bigl(\varepsilon(h)\bigr), \qquad \alpha = \mathrm{ord}_q\bigl(f(h)\bigr),$$

と定める．$F_q(h;T)$ は次のように定数項 1 で次数が 2α の $\mathbb{Z}$ 係数多項式である．

$$F_q(h;T) = \sum_{i=0}^{\alpha_1}(q^2T)^i\Big\{\sum_{j=0}^{\alpha-i}(q^3T^2)^j - \chi_h(p)(qT)\sum_{j=0}^{\alpha-i-1}(q^3T^2)^j\Big\}. \tag{3.1}$$

また，$c_q(h,\psi;T)$ は次で定められる有理式である．

$$c_q(h,\psi;T) = \begin{cases} 1 & \psi_q^2 \neq 1, \\ 1 + q^{-1}(1-q)\dfrac{1-\chi_h\overline{\psi}(q)q^{-2}T^{-1}}{(1-\overline{\psi}^2(q)q^{-4}T^{-2})(1-\chi_h\psi(q)qT)}(q^3\psi^2(q)T^2)^{\beta_q - n_q + 1} & \psi_q^2 = 1, \end{cases}$$

ここで ψ_q は導手が q の冪の Dirichlet 指標で，$\psi = \prod_{q|N}\psi_q$ となるようなものであり，n_q と $\beta_q = \beta_q(h)$ は次のように定義される．

$$n_q = \mathrm{ord}_q\big(\mathfrak{f}(\psi)\big),$$
$$2\beta_q = 2\beta_q(h) = \mathrm{ord}_q\left(\frac{\mathfrak{f}(\psi)\mathfrak{f}(\psi^2)^2}{\mathfrak{f}(\psi\chi_h)}\right) + \mathrm{ord}_q(\det 2h).$$

ここで $\mathfrak{f}(\chi)$ は Dirichlet 指標 χ の導手を表す．

4 p-stabilization

Eisenstein 級数を使って p 進 Eisenstein 級数が保型形式になることを示すには，p における Euler 因子が 1 であるような Eisenstein 級数を構成する必要がある．この節では，level p の Hecke 作用素 $U(p)$ を使って，$E_{k,\psi}^{(2)}$ の Fourier 係数の p での Euler 因子を除いたものを構成する．

$f \in M_k(\Gamma_0^{(g)}(N),\psi)$ を Siegel 保型形式とし，

$$f(z) = \sum_{0\le h\in \mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})} a(h,f)\mathbf{e}(hz),$$

を f の Fourier 展開とする．level p の Hecke 作用素 $U(p)$ を次で定義する．

$$\big(f \mid U(p)\big)(z) = \sum_{0\le h\in \mathrm{Sym}_g^*(\mathbb{Z})} a(ph,f)\mathbf{e}(hz).$$

定義より次が成立する．

$$f \in \begin{cases} M_k(\Gamma_0^{(g)}(pN),\psi) & p \nmid N, \\ M_k(\Gamma_0^{(g)}(N),\psi) & p \mid N. \end{cases}$$

また，$V(q), W(p)$ を次で定義する．

$$V(q) = \begin{cases} \dfrac{1-\overline{\psi}(q)^2q^{3-2k}U(q)}{1-\overline{\psi}^2(q)q^{3-2k}} & q \neq 2, \\[2ex] \dfrac{U(q)^2-\overline{\psi}(q)^2q^{3-2k}U(q)^3}{1-\overline{\psi}^2(q)q^{3-2k}} & q = 2, \end{cases}$$

$$W(p) = \frac{\big(U(p)-\psi(p)p^{k-1}\big)\big(U(p)-\psi^2(p)p^{2k-3}\big)}{\big(1-\psi(p)p^{k-1}\big)\big(1-\psi^2(p)p^{2k-3}\big)}.$$

定理 3.1 と $V(q), W(p)$ の定義より次の 2 つの命題が証明できる．

命題 4.1. ψ を mod N の原始指標とし，$h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ を半整数，半正定値対称行列とする．また，$k > 3$ を仮定する．

$$E'_{k,\psi} = E^{(2)}_{k,\psi} \mid \prod_{\substack{q \mid N \\ \psi_q^2 \neq 1}} V(q),$$

と置く．$E'_{k,\psi}$ の Fourier 係数 $a(h, E'_{k,\psi})$ について次が成立する．

(1) rank $h < 2$ のとき，

$$a(h, E'_{k,\psi}) = a(h, E^{(2)}_{k,\psi}).$$

(2) rank $h = 2$ のとき，

$$a(h, E'_{k,\psi}) = 2\frac{L^{(N)}(2-k, \chi_h\psi)}{L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2)} \prod_{\substack{q:\mathrm{prime} \\ q \nmid N}} F_q(h; \psi(q)q^{k-3}).$$

命題 4.2. N を正の整数とし，ψ を mod N の Dirichlet 指標とする．$q \mid N$ かつ $q \neq p$ であるような素数 q に対して，ψ_q は原始指標であるとし，$\mathrm{ord}_p N > 1$ ならば ψ_p は原始指標であると仮定する．$G^{(2)}_{k,\psi}$ を

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2)E'_{k,\psi} & \psi_p \text{が原始指標のとき，} \\ \dfrac{1}{2}L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2)E'_{k,\xi} \mid W(p) & \psi_p \text{が mod } p \text{ の自明な指標のとき，} \end{cases}$$

と置く．ここで $\xi = \prod_{\substack{q \mid N \\ q \neq p}} \psi_q$ である．$h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ とし，$k > 3$ であるとする．このとき，$G^{(2)}_{k,\psi}$ の Fourier 係数 $a(h, G^{(2)}_{k,\psi})$ について次が成立する．

(1) rank $h = 0$ のとき，

$$a(h, G^{(2)}_{k,\psi}) = \frac{1}{2}L(1-k,\psi)L^{(N)}(3-2k,\psi^2).$$

(2) rank $h = 1$ のとき，

$$a(h, G^{(2)}_{k,\psi}) = L^{(N)}(3-2k,\psi^2) \prod_{\substack{q:\mathrm{prime} \\ q \nmid N}} F_q^{(1)}(\varepsilon(h); \psi(q)q^{k-2}).$$

ここで $F_q^{(1)}(m;T)$ は $1 + qT + \cdots + (qT)^{\mathrm{ord}_q(m)}$ であり，$\varepsilon(h)$ は次で定義される．

$$\varepsilon(h) = \max\left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; m^{-1}h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z}) \right\}.$$

(3) rank $h = 2$ のとき，

$$a(h, G^{(2)}_{k,\psi}) = L^{(N)}(2-k, \chi_h\psi) \prod_{\substack{q:\mathrm{prime} \\ q \nmid N}} F_q(h; \psi(q)q^{k-3}).$$

注意 4.3. ψ が mod p の自明な指標のとき [Mi-Na] では Jacobi 形式の Hecke 作用素と Maass lift を使って $G^{(2)}_{k,\psi}$ が構成されている．

5　p 進 Siegel-Eisenstein 級数と degree 2 の Siegel-Eisenstein 級数からなる p 進解析的な族

命題 4.2 と p 進 Dirichlet$L$ 関数の性質より，Siege-Eisenstein 級数からなる p 進解析的な族が存在することや，Siegel-Eisenstein 級数の p 進極限が Siegel 保型形式であることが証明できる．

N を正の整数とし，χ を mod N の Dirichlet 指標とする．$N = N_0p^r$ $(r \geq 0,\ (N_0, p) = 1)$ とおく．χ は $\varprojlim_n(\mathbb{Z}/N_0p^n\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/\mathbf{p}N_0\mathbb{Z})^\times \times (1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p)$ の指標とみなせる．ここで $\mathbf{p}$ は

$$\mathbf{p} = \begin{cases} p & p \neq 2, \\ 4 & p = 2, \end{cases} \tag{5.1}$$

である．χ を $\chi = \chi_1\chi_2$ (χ_1, χ_2 はそれぞれ $(\mathbb{Z}/\mathbf{p}N_0\mathbb{Z})^\times$, $(1+\mathbf{p}\mathbb{Z}_p)$ の指標) と分解する．$1+\mathbf{p}\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元 u を一つ固定とするとき，多項式 $P(\chi;T)$ を次で定める．

$$P(\chi;T) = \begin{cases} 1 & \chi_1 \neq 1, \\ 1 - \chi_2(u)u(1+T)^{-1} & \chi_1 = 1. \end{cases}$$

これらの記号の準備の下，次が成立する．

定理 5.1. N を p で割れる正の整数とし, ψ を mod N の原始指標とする．$q \mid N$ かつ $q \neq p$ であるような素数 q に対して, ψ_q は原始指標であるとし, $\mathrm{ord}_p N > 1$ ならば ψ_p は原始指標であると仮定する．半整数半正定値対称行列 $h \in \mathrm{Sym}_2^*(\mathbb{Z})$ に対し, 次の条件を満たす $\mathbf{a}(h, \psi; T) \in \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}_p[\psi][\![T]\!])$ が存在する．
すべての位数が有限の指標 $\varepsilon : 1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}^\times$ と $k \in \mathbb{Z}_{>3}$ に対し,

$$\mathbf{a}(h, \psi; \varepsilon(u)u^k - 1) = a(h, G^{(2)}_{k,\varepsilon\psi\omega^{-k}}).$$

ここで ω は Teichmüller 指標である．$P(\chi;T)$ を上のものとする．$Q(\psi,T)$ を次で定める．

$$Q(\psi;T) = P(\psi;T)P(\psi^2\omega^{-2}; u^{-2}(1+T)^2 - 1)P'(\psi; u^{-1}(1+T) - 1),$$

ここで $P'(\psi;T)$ は

$$P'(\psi;T) = \begin{cases} 1 & \psi_1^2 \neq \omega^2, \\ 1 - \psi_2(u)u(1+T)^{-1} & \psi_1^2 = \omega^2 \text{かつ } p \neq 2, \\ (1 - \psi_2(u)u(1+T)^{-1})(1 + \psi_2(u)u(1+T)^{-1}) & \psi_1^2 = \omega^2 \text{かつ } p = 2. \end{cases}$$

である．このとき $Q(\psi;T)\mathbf{a}(h,\psi;T) \in \mathbb{Z}_p[\psi][\![T]\!]$ が成立する．

Siegel-Eisenstein 級数の p 進極限については次が成立する．

定理 5.2. N を p で割れない正の整数とし，ψ を mod N の原始指標とする．$\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_\psi$ を

$$\mathfrak{X} = \mathbb{Z}/(\varphi(\mathbf{p})) \times \mathbb{Z}_p,$$
$$\mathfrak{X}_\psi = \left\{(a,s) \in \mathfrak{X} \,\middle|\, (-1)^a = \psi(-1)\right\},$$

とおく．ここで $\mathbf{p}$ は (5.1) のものであり, φ は Euler の関数である．$\mathbb{Z} \ni m \to (m \bmod \varphi(\mathbf{p}), m) \in \mathfrak{X}$ によって $\mathbb{Z} \subset \mathfrak{X}$ とみなす．$(a,k) \in \mathfrak{X}_\psi$ とし，$k \in \mathbb{Z}_{>3}$ を仮定する．$\mathbb{R}$ の位相で $\lim_{m\to\infty} l_m = +\infty$ であり p 進位相で $\lim_{m\to\infty} l_m = (a,k) \in \mathfrak{X}_\psi$ となる任意の列 $\{l_m\}_m \subset \mathfrak{X}_\psi$ について $m \to \infty$ のとき $a(h, G^{(2)}_{l_m,\psi})$ は h に一様に $a(h, G^{(2)}_{k,\psi\omega^{a-k}})$ に p 進的に収束する．ただし，$a = k$ のとき，$\psi\omega^0$ は ψ から誘導される mod Np の Dirichlet 指標を表す．つまり，$G^{(2)}_{l_m,\psi}$ は $m \to \infty$ のとき，level $N\mathbf{p}$, weight k, 指標 $\psi\omega^{a-k}$, degree 2 の Siegel 保型形式に p 進的に収束する．

注意 5.3. p を奇素数とし，$N = 1$，$a = k$ または $a = k + (p-1)/2$ とする．定理の最後の主張は，$k \geq 2$ に対し証明されている．([Kat-Na], [Mi-Na])

参考文献

[Gu] K. Gunji, On the Siegel Eisenstein series of degree two for low weights, (preprint).

[Kat] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, American Journal of Mathematics, Vol.121 (1999), pp.415-452.

[Kat-Na] H.Katsurada and S.Nagaoka, On some p-adic properties of Siegel-Eisenstein series, J.Number Theory, Vol.104 (2004), pp.100-117.

[Mi1] Y. Mizuno, An explicit arithmetic formula for the Fourier coefficients of Siegel-Einstein series of degree two and square-free odd levels, Mathematische Zeitschrift, Vol.263 (2009), No.4, pp.837-860.

[Mi2] Y. Mizuno, On p-adic Siegel-Eisenstein series of weight k, Acta Arith, Vol.131 (2008), pp.193-199.

[Mi-Na] Y. Mizuno and S. Nagaoka, Some congruences for Saito-Kurokawa lifts, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, 2009.