$SL_2(\mathbb{Z})$-共役類の分類と跡公式

伊吹山知義（大阪大学大学院理学研究科）

1　序文

跡公式の表示にはいろいろな段階があるわけで、たとえば核関数を与えて積分表示した段階で、これを公式と称したらいけないということはないであろう。これをもっと細かく、軌道積分、体積その他を用いて書くともっと公式らしくなるであろう。しかし保型形式の次元や保型形式の古典的な意味でのヘッケ作用素の跡は、少なくとも整数であるから数値が決まっているわけで、これを実際に計算できる公式を与えよ、といわれるともっと細かいことをやらなくてはならなくなる。その最初が、共役類の分類であろう。たとえば Gottschling は $Sp(2,\mathbb{Z})$ の基本領域を精密に求めて、その境界での挙動から $Sp(2,\mathbb{Z})$ の共役類の分類を行っており、これは代数幾何の人たちが使ったりしていた。しかし、共役類の分類は、普通は体上の分類を局所的にやっておいて、さらに整数環上の分類を行い、Hasse の原理などで大域的にまとめなおすのが効率がよい。実際、そういうやり方をすれば基本領域を求める必要などは全くなく (たとえば $Sp(2,\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$-form の場合は Hashimoto and Ibukiyama [3] など), いきなり大域的に考えるのは、一般には、いかにも効率が悪い。ところが、$SL_2(\mathbb{Z})$ では、実は大域的な考察もまことに綺麗におこなえるし、このような大域的な考察は $Sp(2)$ の半単純でない元の分類にも役に立つ。あいにく、この非常に綺麗な手法は Miyake [9] などでは解説されていない。よってここでは最初に、敢えてまず大域的な手法を用いて説明し、後に一般の local-global の手法について少しだけ解説したい。

2　Global conjugacy class of $SL_2(\mathbb{Z})$

まず、記号を少し定めておく。自然数（１以上の整数）n に対して、

$$T(n) = \{g \in M_2(\mathbb{Z}); \det(g) = n\}$$

とおく。これは $SL_2(\mathbb{Z})$-double coset とみなせば、普通の意味でのヘッケ作用素である。$T(n)$ の元のうち、跡公式で必要なものの $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類の分類が目標である。ちなみに $T(n)$ の元は整数行列であるから、その固有値はもちろん代数的整数である。

$P_0(\mathbb{Q})$ を有理数体上の正則な 2 次上三角行列全体のなす群とする。また、S を $GL_2(\mathbb{Q})$ の部分集合で $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役で不変なものとするとき、$S//SL_2(\mathbb{Z})$ で、S の $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類の集合を表すことにする。

3 Parabolic elements

$g \in T(n)$ が半単純（＝対角化可能）でないとすると、固有方程式は重根を持つ。このような $T(n)$ の元 g （つまり固有方程式が重根を持ち半単純では無い元）を parabolic と呼ぼう。このような $T(n)$ の元の集合を $T(n)^{para}$ と書こう。ここで、固有多項式は整数係数だから、重根はもちろん有理整数である。よって、g は $\mathbb{Q}^2$ 内で固有ベクトルを持つので、$GL_2(\mathbb{Q})$ 共役で上三角化される。$GL_2(\mathbb{Q}) = SL_2(\mathbb{Z})P_0(\mathbb{Q}) = P_0(\mathbb{Q})SL_2(\mathbb{Z})$ は良く知られているし、証明も易しい。（$SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプの同値類がただひとつということと同じ。）よって、$x \in GL_2(\mathbb{Q})$ に対して、$x = \gamma p$ $(p \in P_0(\mathbb{Q}), \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}))$ とすれば、$x^{-1}gx \in P_0(\mathbb{Q})$ のとき、$\gamma^{-1}g\gamma \in pP_0(\mathbb{Q})p^{-1} = P_0(\mathbb{Q})$ となる。つまり g は $SL_2(\mathbb{Z})$ の元で上三角化できる。この上三角化された行列も $T(n)$ の元である。よって最初から g は上三角として、上三角なもの同志で分類すればよい。よって、

$$g = \begin{pmatrix} m & l \\ 0 & m \end{pmatrix} \in T(n)$$

$(l \in \mathbb{Z},\ l \neq 0)$ とする。もちろん $n = m^2 \neq 0$ である。m は当然正のものと負のものと両方ある。実は、$\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ で $\gamma^{-1}g\gamma \in P_0(\mathbb{Q})$ とすると、γ も上三角である。これは次のようにして簡単にわかる。

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。$\gamma^{-1}g\gamma$ の固有値はもとのと同じだから、ある $l' \in \mathbb{Z}, l' \neq 0$ に対して、

$$\gamma^{-1}g\gamma = \begin{pmatrix} m & l' \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

と書ける。

$$\begin{pmatrix} m & l \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & l' \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

より、$(1,1)$ 成分を比較して $am = am + cl$, よって $l \neq 0$ より、$c = 0.$　しかし $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ より $ad = 1$, a, $d \in \mathbb{Z}$ だから、$a = d = \pm 1$ である。ゆえに $\gamma = \pm\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ という格好になる。これは g と交換可能になるので、g はこの共役では不変で、$l = l'$ である。言い換えると、n が平方数のときは、

$$T(n)^{para}//SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} m & l \\ 0 & m \end{pmatrix}; m^2 = n, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0 \right\}$$

なのである。n が平方数でないときは、$T(n)^{para}$ は空集合である。これで parabolic 共役類の分類はおしまいである。まことにあっけない。

4 Hyperbolic elements

$g \in T(n)$ が異なる実の固有値を持つとき、g を hyperbolic という。この固有値が有理数でないなら、跡公式に寄与しないことが知られている。よって、固有値は異なる有理整数と仮定する。g の 2 つの固有値を $\eta \neq \zeta \in \mathbb{Z}$ とする。また $\eta < \zeta$ としておく。これらが有理数であることより g は $GL_2(\mathbb{Q})$ により対角化可能である。よって、適当な $x \in GL_2(\mathbb{Q})$ について、

$$x^{-1}gx = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$$

としてよい。前と同様 $x = \gamma p$ $(\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}),\, p \in P_0(\mathbb{Q}))$ として、

$$\gamma^{-1}g\gamma = p \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} p^{-1}.$$

ここで右辺の対角成分はかわらないから、結局 g は $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役で

$$\begin{pmatrix} \eta & l \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$$

$(l \in \mathbb{Z})$ という形になる。よって、やはり最初から g をこの形としておいても良く、また (1,1) 成分が (2,2) 成分よりも小さいとしておいて良いのである。今 $l, l' \in \mathbb{Z}$、$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ として、

$$x \begin{pmatrix} \eta & l \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta & l' \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} x$$

ならば、(2,1) 成分を比較して、$c\eta = c\zeta$, よって、$c = 0$ である。このとき $a = d = \pm 1$ であり、$al + b\zeta = b\eta + l'd$, つまり $l' = l \pm b(\zeta - \eta)$. よって、$l$ は modulo $\zeta - \eta$ で取り替えてよい。つまり、固有値が異なる有理数となる $T(n)$ の元全体を $T(n)^h$ と書くと、その代表は

$$T(n)^h//SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \eta & l \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}; \eta, \zeta \in \mathbb{Z},\ \eta < \zeta,\ \eta\zeta = n,\ l \bmod \zeta - \eta \right\}.$$

となる。

5 Hyperbolic element (2)

元 $g \in T(n)$ の固有値が実数だが有理数でないときは、前に述べたように、$SL_2(\mathbb{Z})$ の跡公式に寄与はないので、前節では省略したが、このような元の共役類を分類することもできる。これについては次節以降で述べる elliptic elements の分類とあまりかわらないことだけは注意しておく。（これは $Sp(2,\mathbb{Z})$ と通約的な群での共役類の分類などで必要になることがある。）

6 Elliptic elements

6.1 ２元２次形式と２次の整数環

対称行列 $\begin{pmatrix} x & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix}$ は、x, y, $z \in \mathbb{Z}$ のとき、半整数対称行列という。半整数対称行列全体を L_2^* と書くことにする。また L_2^* の正定値な元全体のなす部分集合を $L_{2,+}^*$ と書く。$SL_2(\mathbb{Z})$ の跡公式では $L_{2,+}^*$ の場合のみが必要になるが、不定値でもたいしてかわらないし、実際にジーゲル保型形式の跡公式などには必要になるので、若干一般的に述べておこう。従って、今 D を正または負の整数とし（つまりゼロは除く）、更に、D は平方数ではないとする。L_2^* の元 S のうち、$\det(2S) = -D$ となるもののなす部分集合を $L_2^*(D)$ と書くことにする。$S \in L_2^*$ ならば必ず $-\det(2S) \equiv 0 \text{ or } 1 \bmod 4$ となるので、D はこのような整数と仮定する。H. Weber の Algebra III [14] にならえば、このような数のことを判別式というのである。次のように定義しよう。

Definition 6.1 平方数でない整数 D について、$D \equiv 0$ *or* $1 \bmod 4$ となるものを判別式という。判別式 D のうちで、$l^{-2}D$ がまた判別式となる自然数 l は 1 に限るとき D を基本判別式という。

実は Weber では D が平方数である場合も含めているのだが、とりあえず我々には必要ないので、平方数の場合は除外しておく。Weber の本では、もともとはこのような定義は Kronecker によるものだと断ってある。

基本判別式とは、すなわち２次体の判別式にほかならない。従って、D が判別式ならば、$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の基本判別式を D_K と書けば、$D = f^2 D_K$ となる整数 $f > 0$ が存在する。（D が平方数ならば $D_K = 1$ ととることになる。しかしここでは D が平方数の場合は扱っていない。）また容易にわかるように、整数 D が判別式ということと $D = s^2 - 4n$ となる整数 s, n が存在することとは同値である。また任意に判別式 D を与えるとき、$b^2 - 4ac = D$ かつ $gcd(a,b,c) = 1$ となる自然数 a, b, c は存在する。

特に $S = \begin{pmatrix} x & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix} \in L_2^*$ に対して、$gcd(x,y,z)$ を S の content ということがある。$gcd(x,y,z) = 1$ となる S を原始的 (primitive) と呼ぶ。原

始的な S のなす $L_2^*(D)$ の部分集合を $L_2^{*,\ prim}(D)$ と書くことにする。今、$D = f^2 D_K$ とすれば

$$L_2^*(D) = \bigsqcup_{m|f} m L_2^{*,\ prim}(D/m^2) \quad \text{(disjoint)}$$

である。ただし $mL_2^{*,\ prim}(D/m^2)$ は $L_2^{*,\ prim}(D/m^2)$ の元それぞれに m をかけた集合を表す。

さて、$L_2^*(D)$ の元 S_1, S_2 について、ある $P \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して、${}^tPS_1P = S_2$ となるとき、S_1 と S_2 は properly equivalent という。$GL_2(\mathbb{Z}) = \{g \in M_2(\mathbb{Z}); \det(g) = \pm 1\}$ とおくと、$GL_2(\mathbb{Z})$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ を index 2 で含む。上の関係が $P \in GL_2(\mathbb{Z})$ で成立するとき、improperly equivalent と言うことがある。しかし、我々の目的のためには、むしろ次のように定義するほうが都合が良い。

$$S_1 \approx S_2 \longleftrightarrow {}^tPS_1P = \det(P)S_2 \quad (P \in GL_2(\mathbb{Z})).$$

特に $D < 0$ ならば、$\det(P) = -1$ のとき、この同値関係で負定値なものは、必ず正定値なものと同値になる。正定値なもの同志は、この同値関係で $\det(P) = -1$ により同値になることはありえないから、同値類は実際は正定値なものを $SL_2(\mathbb{Z})$ で分類したものと同じになる。$D < 0$ のとき、$L_2^*(D)$ の元のうちで正定値なものの集合を $L_{2,+}^*(D)$ と書き、$L_{2,+}^{*,\ prim} = L_2^{*,\ prim}(D) \cap L_{2,+}^*$ と書くことにする。L_2^* の適当な部分集合 X の $SL_2(\mathbb{Z})$ または $GL_2(\mathbb{Z})$ による同値類を $X//SL_2(\mathbb{Z})$ または $X//GL_2(\mathbb{Z})$ と書くことにしよう。この記号に従えば、今述べたことは、$D < 0$ ならば

$$L_2^*(D)//GL_2(\mathbb{Z}) = L_{2,+}^*(D)//SL_2(\mathbb{Z})$$

と言うことである。

一方で、判別式が D の整数環というのを定義する。$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ を考えると、今 D は平方数ではないと仮定しているから、これは 2 次体である。K の基本判別式を D_K と書くと、$D = f^2 D_K$ となる正整数 f が存在する。($D \equiv 0$ or $1 \bmod 4$ という仮定が利いている。）K の整数環 $\mathcal{O}$ というのは、K の整数からなる環で、$\mathbb{Z}$ 上のランクが 2 のものである。K の元 ω を

$$\omega = (D_K + \sqrt{D_k})/2$$

で定義すると、ある正の整数 f があって、$\mathcal{O} = \mathbb{Z} + f\omega\mathbb{Z}$ となることが知られている。これを $\mathcal{O}_f$ と書く。$\mathcal{O}_f$ を判別式 D の整数環、または導手 f の整数環という。$\mathcal{O}_f$ の (普通の環論の意味での）イデアル $\mathfrak{a} \neq 0$ について

$$\{\alpha \in K; \alpha\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}\}$$

は一般に $\mathcal{O}_f$ を含む環であるが、これが $\mathcal{O}_f$ に一致するとき、$\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}_f$ の固有イデアル (proper ideal) と呼ぶ。$\mathcal{O}_f$ の 2 つの固有イデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ について、

ある $\alpha \in K^{\times}$ について、$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\alpha$ となるとき、広義の意味で同値という。また、ある $\alpha \in K, \alpha >> 0$（総正、つまり α の共役がすべて正）に対して同じ関係が成り立つとき、狭義の意味で同値であるという。今の場合、$\mathfrak{b} = (-1)\mathfrak{b}$ であるから、狭義の同値は、ある $\alpha \in K^{\times}$, $N(\alpha) > 0$ について、$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\alpha$ と言っても同じことである。($N(\alpha)$ は α のノルム、つまり共役との積)。

Theorem 6.2 $D = f^2 D_K$ としておく。
(1) $\mathcal{O}_f$ の固有イデアルの広義の同値類は $L_2^{*,prim}(D)//GL_2(\mathbb{Z})$ と１対１である。
(2) $\mathcal{O}_f$ の固有イデアルの狭義の同値類は $D > 0$ ならば $L_2^{*,prim}(D)//SL_2(\mathbb{Z})$ と、また $D < 0$ ならば $L_{2,+}^{*,prim}(D)//SL_2(\mathbb{Z})$ と１対１である。

もちろん $D < 0$ では任意の $\alpha \in K^{\times}$ について $N(\alpha) > 0$ なので、イデアルの狭義同値と広義同値は同じ意味であるが、上の (1), (2) で対応する２次形式の同値類も同じ集合であるのは前に注意した。この定理の証明は、狭義の同値については [1] に詳しい。広義の同値については、あいにく [1] には書いてない。書いてない理由は、あの本を書いたときにはこの事実を良く知らなかったからである。ここを良く考えなかったことを少し後悔している。広義についての証明の材料はほとんど [1] にでている。これをもとに証明のスケッチを描いておこう。

まずイデアル類との対応のさせ方から復習する。$S = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ が原始的半整数対称行列とする。ここで原始的というのは $gcd(a,b,c) = 1$ ということであった。$D = b^2 - 4ac$ として、これが平方数ではないと仮定する。このとき、ある２次体 K があって、$D = f^2 D_K$ と書けるのは容易に分かる。ただし、ここで D_K は２次体の基本判別式である。S が負定値ならば $-S$ と議論が並行的にできるから、S は負定値ではないと仮定する。すると $D_K < 0$ のときは正定値になるが、このときは $a > 0$ である。$D_K > 0$ とすると、S と $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値な行列で $a > 0$ になるものがある。（この証明は少し工夫がいるが、たとえば [1] p. 89 を見よ。）よって、以下、(1,1) 成分が正の対称行列だけを考えることにする。S に対し、K 内の lattice

$$\mathfrak{a} = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}\frac{b + \sqrt{D}}{2}$$

を対応させる。次の事実は定義どおりに計算してみれば容易に確かめられる。

Fact: これは $\mathcal{O}_f = \mathbb{Z} + f\omega\mathbb{Z}$ の固有イデアルである。

一方、$\mathcal{O}_f$ の固有イデアルはすべて上の $\mathfrak{a}$ のように書ける訳ではない。たとえば、このようなイデアルの整数倍はやはり固有イデアルだからである。$\mathcal{O}_f$ の固有イデアル $\mathfrak{a}$ について、$\mathfrak{a}/l$, $l \in Z_{>}0$ が固有イデアルならば $l = 1$ で

あるとする。このようなイデアルを原始的と呼ぶことにしよう。すると $\mathcal{O}_f$ の原始的なイデアルは、かならず上のように書ける。なぜなら、$b^{'}+fd\omega\in\mathfrak{a}$ ($b^{'}, d\in\mathbb{Z}$) となる最小の正の整数 d をとり、$a\in\mathfrak{a}$ となる最小の正の整数 a をとると、$\mathfrak{a}=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}(b^{'}+df\omega)$ となることが容易にわかるが、$\mathcal{O}_f$ のイデアルであることより $af\omega\in\mathfrak{a}$ で、よって $d|a$ となり、更には $N(b^{'}+fd\omega)\in a\mathbb{Z}$ より、$d|b^{'}$ もわかり、よって原始的という仮定から $d=1$ となるからである。また、イデアルという仮定から、$b^2-f^2D_K=4ac$ となる整数 c の存在もわかり、このイデアルは２次形式の像とみなせることもわかる。

しかし、当然ながら２次形式と固有イデアルが１対１に対応しているわけではない。たとえば b は a の偶数倍変えても同じイデアルである。固有イデアルと対称行列との関係はあくまで同値類の間の関係である。これを次に見る。

$\mathcal{O}_f$ の２つの固有イデアル

$$\mathfrak{a}=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}\frac{b+\sqrt{D}}{2} \qquad\qquad \mathfrak{a}'=\mathbb{Z}a'+\mathbb{Z}\frac{b'+\sqrt{D}}{2}$$

を考える。ここで $a,\ a^{'}$ は正と仮定しておいてよい。今 $D=b^2-4ac=b'^2-4a'c'$ と c, c' を定め、

$$S=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \qquad\qquad S'=\begin{pmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{pmatrix}$$

とおく。

Lemma 6.3 次の (1), (2) は同値である。

(1) ある $\alpha\in K^\times$ に対して、

$$\mathfrak{a}\alpha=\mathfrak{a}'$$

となる。

(2) ある $U\in GL_2(\mathbb{Z})$ について、${}^tUS'U=\det(U)S$ となる。

もっと詳しく言えば、*(1)* で $N(\alpha)>0$ のとき $\det(U)=1$ ととれ、$N(\alpha)<0$ のとき $\det(U)=-1$ と取れる。逆も正しい。

証明：まず (1) から (2) を示す。lattice の基底の変換を考えて、ある行列 $U\in GL_2(\mathbb{Z})$ で

$$(a\alpha, \frac{(b+\sqrt{D})\alpha}{2})=(a', \frac{b'+\sqrt{D}}{2})U$$

となるものが存在する。$K/\mathbb{Q}$ の共役をとって並べれば、$Gal(K/\mathbb{Q})=\{id,\sigma\}$ として、

$$\begin{pmatrix} a & (b+\sqrt{D})/2 \\ a & (b-\sqrt{D})/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^\sigma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' & (b'+\sqrt{D})/2 \\ a' & (b'-\sqrt{D})/2 \end{pmatrix}U$$

となる。両辺の行列式をとって、

$$-a\sqrt{D}N(\alpha) = -a'\sqrt{D}\det(U),$$

よって $aN(\alpha) = a'\det(U)$ となる。よって $\det(U) = \pm 1$, $aN(\alpha) = \pm a'$ （復号同順)、つまり $N(\alpha) > 0$ か否かによって、$\det(U) = 1$ か -1 かが決まっている。さて、x, y を変数として

$$(a, (b+\sqrt{D})/2)\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a', (b'+\sqrt{D})/2)U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となるが、両辺のノルムをとって

$$aN(\alpha)(ax^2 + bxy + cy^2) = a'(a'X^2 + b'XY + c'Y^2)$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

しかし、$aN(\alpha) = a'\det(U)$ であったから、これは ${}^tUS'U = S$ を意味している。次に (2) から (1) を示す。ある $U = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ について ${}^tUS'U = \det(U)S$ とする。

$$a\alpha = \det(U)(a'x + \frac{b'+\sqrt{D}}{2}z)$$

という式で $\alpha \in K$ を定義する。一方

$$\frac{(a'y + (b'+\sqrt{D})w/2}{(a'x + (b'+\sqrt{D})z/2)} = \frac{a'(a'xy + (xw+yz)b'/2 + c'wz) + \det(U)a'\sqrt{D}/2}{a'(a'x^2 + b'xz + c'z^2)}$$

が分かるが、これは ${}^tUS'U = \det(U)S$ の関係を用いて右辺を計算すると $(b+\sqrt{D})/2a$ に等しいことがわかる。よって、

$$a'y + \frac{b'+\sqrt{D}}{2}w = \frac{b+\sqrt{D}}{2a} \times \frac{a\alpha}{\det(U)} = \frac{(b+\sqrt{D})\alpha}{2\det(U)}.$$

つまり、$\mathfrak{a}\alpha = \mathfrak{a}'$ がわかる。q.e.d.

念のため、全整数環の類数と導手 f の類数公式の比較を書いておく。証明は [14], [8], [1] などにある。（なお、$\mathcal{O}_f$ はデデキント環ではないから、素イデアル分解の一意性はなりたたない。この部分が [8] では間違っているというのは金子昌信氏が昔から指摘している。）一般に $h(D)$ で広義類数を表すことにする。$\mathcal{O}_{max}$ で全整数環 $\mathcal{O}_1$ を表す。

Theorem 6.4 $D = f^2 D_K$ のとき、

$$h(D) = \frac{h(D_K)}{[\mathcal{O}_{max}^\times : \mathcal{O}_f^\times]} \times f \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{p}\left(\frac{-D_K}{p}\right)\right)$$

K が実２次体のときは、狭義類数は、$\mathcal{O}_f$ にノルムマイナス１の単数があるか否かで広義類数に等しいか、またはその２倍になる。虚２次体のときは、いつでも狭義と広義は同じ意味である。狭義類数の公式は、上の公式で $h(D)$, $h(D_K)$ を狭義の類数 $h^+(D)$, $h^+(D_K)$ に置き換えて、分母で $\mathcal{O}_{max}^\times$, $\mathcal{O}_f^\times$ を総正な単数群に置き換えればよい。たとえば、$\mathcal{O}_{max}$ にノルム -1 の単数があり、$\mathcal{O}_f$ にノルム -1 の単数がないのならば、$h^+(D_K) = h(D_K)$, $h^+(D) = 2h(D)$, $[\mathcal{O}_{max}^\times ; \mathcal{O}_f^\times] = 2[\mathcal{O}_{max}^{\times +} : \mathcal{O}_f^{\times +}]$ などとなり、うまくつりあっている。

6.2　２次体を生成する共役類と２元２次形式

元 $g \in T(n)$ で $K = \mathbb{Q}(g)$ が $\mathbb{Q}$ 上の２次体になっている場合を考えよう。このとき、固有値は有理数ではない。固有値が実数でないとき、つまり $\mathbb{Q}(g)$ が虚２次体のとき、g を elliptic という。固有値が実数、つまり $\mathbb{Q}(g)$ が実２次体ならば hyperbolic という。実は代数的な性質は両方ともあまりかわらない。これらはもちろん半単純である。これらについて、$GL_2(\mathbb{Z})$ 共役類も $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類も分類できる。これを説明する。

共役なもの同志は固有多項式が等しいはずだから、分類する際に $Tr(g) = s$ は固定して考えても良い。よって g の固有多項式 $X^2 - sX + n$ を固定しておく。このとき、$g - (s/2)1_2$ のトレースはゼロ、よって

$$g = \begin{pmatrix} s/2 & 0 \\ 0 & s/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y/2 & -z \\ x & y/2 \end{pmatrix}$$

$(s,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{Z})$ と書ける。ただしここで $s \equiv y \bmod 2$ である。このとき $(g - (s/2)1_2)^2 = (n - s^2/4)1_2$ である。つまり $4xz - y^2 = s^2 - 4n$ となる。$s^2 - 4n = D$ とおく。固有値が有理数でないという仮定から D は平方数ではなく $D \equiv 0 \text{ or } 1 \bmod 4$ であるから D は、ある order の判別式である。

ここで次のような $M_2(\mathbb{Q})$ の部分集合を考える。

$$L(D) = \{h \in M_2(\mathbb{Q}); h^2 = -D/4,\ g \text{ の対角成分は半整数、他の成分は整数}\}.$$

$h \in L(D)$ ならばもちろん $Tr(h) = 0$ である。この記号下で、$g \in T(n)$ の固有多項式が $X^2 - sX + n$ で $s^2 - 4n = D$ ということと、ある $h \in L(D)$ があって、$g = (s/2)1_2 + h$ とかけることは同値である。$g_i = (s/2)1_2 + h_i$ $(i = 1, 2)$ とすると $\gamma^{-1} g_1 \gamma = g_2$ for $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ or $GL_2(\mathbb{Z})$ というのは、$\gamma^{-1} h_1 \gamma = h_2$ というのと同値であるから、実際には $L(D)$ の共役類を分類すればよいのである。ここで $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

Lemma 6.5 *(1)* $h \to Jh$ は $L(D)$ から $L_2^*(D)$ への全単射である。
(2) $L(D)$ の $GL_2(\mathbb{Z})$ 共役類は $L_2^*(D)$ の広義の同値類と 1 対 1 に対応する。
(3) $L(D)$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類は $L_2^*(D)$ の狭義の同値類と 1 対 1 に対応する。

ここで、$D<0$ ならば $L_2^*(D)$ は正定値のものと負定値なもの両方からなり、これらは狭義の意味では同値でない点は、間違えないように注意すべきである。

Lemma の証明。(1) は

$$Jh = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y/2 & -z \\ x & y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix}$$

で、$4xz-y^2=-D$ よりあきらか。(2), (3) は $g \in GL_2$ のとき、良く知られているように（あるいは計算ですぐわかるように）${}^t gJg = \det(g)J$ である。よって、$\gamma^{-1}h_1\gamma = h_2$ ならば $J\gamma^{-1}J^{-1}Jh_1\gamma = Jh_2$ つまり $\det(\gamma)^{-1}({}^t\gamma)h_1\gamma = Jh_2$ つまり ${}^t\gamma h_1\gamma = \det(\gamma)h_2$. これは可逆な変形だから、証明できた。

Corollary 6.6 整数 s と $n>0$ について、$D=s^2-4n=f^2D_K$ が平方数ではないとする。固有多項式が X^2-sX+n となる $T(n)$ の元について、
(1) $GL_2(\mathbb{Z})$ 共役類の個数は、$\sum_{m|f} h(m^2D_K)$ に等しい。
(2) $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類の個数は、$D>0$ ならば $\sum_{m|f} h^+(m^2D_K)$ に等しい。$D<0$ ならば $2\sum_{m|f} h(m^2D_K)$ に等しい。

全整数環でない整数環の類数公式については、前節または [1] を見よ。

7 Subgroups of $SL_2(\mathbb{Z})$

群が $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群、たとえば $\Gamma_0(N)$ のときは、もっと複雑になる。たとえば、古典的には

$$\Delta_{0,N}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}; (a,N)=1, ad-Nbc=n \right\}$$

とおいて、$\Delta_{0,N}(n)$ の中で double coset を考える。この場合、$\Gamma_0(N)$ 共役類と

$$\begin{pmatrix} Nx & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix}$$

の 2 次形式としての $\Gamma_0(N)$ 同値類を考えることは同等である。今、$M_2(\mathbb{Q})$ の lattice

$$L_N^* = \left\{ \begin{pmatrix} Nx & y/2 \\ y/2 & z \end{pmatrix}; x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$$

を不変にする $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群は $\Gamma_0(N)$ である。よって、これに属する 2 次形式全体を $\Gamma_0(N)$ で分類すればよいことになる。今はこれ以上、立ち入らない。

8 Trace formula for $T(n)$

若槻氏の講演からの結果を抜粋し、それを $SL_2(\mathbb{Z})$ に適用する。さて、ちょっと注意だが **具体的な跡公式は非常に多くの文献にミスプリントがあるようだ。** たとえば Eichler の論文はいろいろなところに間違っている部分があったはず。きちんと公式を書くのは、一番簡単な $SL_2(\mathbb{Z})$ のときでさえ、相当間違いやすいので、検算が欠かせないと思う。

以下でウェイト k はすべて $k > 2$ となる整数と仮定する。

8.1 一般公式の復習

T を $M_2(\mathbb{Z}) \cap GL_2^+(\mathbb{Q})$ 内の $SL_2(\mathbb{Z})$-double cosets の和集合とする。以下では $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ とかく。

$$
\begin{aligned}
Tr(T) &= \sum_{\alpha \in T \cap Z(\mathbb{Q})} \det(\alpha)^{(k-2)/2} \frac{k-1}{8\pi} \mathrm{vol}(\Gamma \backslash H) \#(T \cap Z(\mathbb{Q})) \\
&\quad - \sum_{\substack{\{\gamma\}_\Gamma \subset T \\ \gamma:\text{elliptic}}} \frac{\det(\gamma)^{(k-2)/2}}{2\#(\Gamma_\gamma)} \times \frac{e^{i(k-1)\theta} - e^{-i(k-1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \\
&\quad - \sum_{\substack{\{\gamma\}_\Gamma \subset T \\ \gamma \sim_{SL_2(\mathbb{Q})} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \\ a, b \in \mathbb{Q},\ |a| > |b|}} \det(\gamma)^{(k-2)/2} \frac{1}{2} \frac{|a^{-1}b|^{k/2}}{|1 - a^{-1}b|} \\
&\quad - \frac{1}{8} \times \det(\gamma)^{(k-2)/2} \lim_{s \to 0} \sum_{\substack{\{\gamma\}_\Gamma \subset T \\ \gamma:\text{parabolic}}} s|m(\gamma)|^{-s-1}
\end{aligned}
$$

ただしここで、$\{\gamma\}_\Gamma$ は γ の Γ 共役類、$\sim_{SL_2(\mathbb{Q})}$ は $SL_2(\mathbb{Q})$ 共役という意味である。また、$\mathrm{vol}(\Gamma \backslash H)$（割ったものの体積）は測度 $y^{-2} dx\, dy$ で測る。$Z(\mathbb{Q})$ は $GL_2(\mathbb{Q})$ の中心である。従って、T の元に $\det$ が有理数の自乗の元がなければ、中心の寄与はゼロである。elliptic の寄与において、$\sqrt{n} e^{\pm i\theta}$ は γ の固

有値である。parabolic の寄与において、$m(\gamma)$ は次で定まる量である。

$$\begin{aligned}\gamma &= \det(\gamma)\xi^{-1}\begin{pmatrix}1 & h(\gamma)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\xi\\ \Gamma_\gamma &= \xi^{-1}\left\{\begin{pmatrix}1 & \alpha h\\ 0 & 1\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{Z}\right\}\xi\\ m(\gamma) &= \frac{h(\gamma)}{h}\end{aligned}$$

ここで γ はいろいろ動いているが Γ_γ はたとえば γ を γ のべきに取り替えても同じなのに注意。以下順次結果を述べる。以下、一般の double coset ではなく、

$$T(n)=\{g\in M_2(\mathbb{Z});\det(g)=n\}$$

だけについて考える。

8.2 中心

n が整数の自乗でなければ寄与はない。$n=m^2$ のとき、$T(n)\cap Z(\mathbb{Q})=\{\pm m1_2\}$ であるから、$\#(T(n)\cap Z(\mathbb{Q}))=2.$

よく知られているように

$$\begin{aligned}\int_{SL_2(\mathbb{Z})\backslash H}\frac{dxdy}{y^2} &= \int_{|x|\le 1/2,y\ge\sqrt{1-x^2}}\frac{dxdy}{y^2}\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{dxdy}{y^2}\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\left[-\frac{1}{y}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}dx\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= [Arcsin(x)]_{-1/2}^{1/2}=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

よって、n が square かどうかに応じて $\chi(\sqrt{n})=1$ or 0 とおくと、寄与は

$$\chi(\sqrt{n})\times\frac{n^{(k-2)/2}(k-1)}{8\pi}\times\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{k-1}{12}n^{(k-2)/2}\chi(\sqrt{n})$$

である。

8.3 parabolic

$n = m^2$ （m は正または負）で、

$$\gamma = \begin{pmatrix} m & l \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$(l \in \mathbb{Z},\, l \neq 0)$ のみ寄与がある。

$$\Gamma_\gamma = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

で $h = 1$. $h(\gamma) = l/m$. よって前の公式は次のように計算される。

$$-n^{(k-2)/2} \lim_{s\to 0} \frac{s}{8} |m|^{s+1} \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\neq 0} \frac{1}{|l|^{s+1}} = -n^{(k-2)/2} \sqrt{n} \lim_{s|\to 0} \frac{s}{4} \zeta(s+1) = -\frac{n^{(k-1)/2}}{4}.$$

$m^2 = n$ なる m は 2 つあるので結局、寄与は

$$-\frac{n^{(k-1)/2}}{2}$$

となる。（注意：たとえば Miyake [9] p. 265 の最終公式とは 1/2 分ちがうが、Miyake は $\Gamma_0(pq^\nu)$ を書いており、レベル 1 はそのページには含まれていない。$\Gamma_0(p)$ はカスプが 2 つあるので、Miyake p. 265 では上の 2 倍になっている。Miyake と比較したければ p. 263 の一般公式で比較するしかない。）

8.4 hyperbolic

n に対して、$ab = n$ (a, b は $|a| > |b|$ となる正または負の整数）とする。寄与のある hyperbolic elements はこの分解に応じて定まる

$$\begin{pmatrix} a & l \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(l は $\mathrm{mod}(a-b)$ の代表を渉る）である。つまり同じ a, b のものが $|a-b|$ 個ある。それぞれの寄与は

$$-\frac{1}{2} n^{(k-2)/2} \frac{|a^{-1}b|^{k/2}}{|1-a^{-1}b|} = -\frac{1}{2} |ab|^{-1} \frac{|aba^{-1}b|^{k/2}}{|1-a^{-1}b|} = -\frac{1}{2} \frac{|b|^{k-1}}{|a-b|}.$$

であるから、個数の $|a-b|$ をかけて、寄与は

$$-\frac{1}{2} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}, ab=n, |a|>|b|} |b|^{k-1}$$

である。しかし $ab = n$ となる整数はひとつの $|a|$, $|b|$ に対して、(a, b), $(-a, -b)$ の 2 つあるから、結局寄与は

$$-\sum_{dd'=n, d'>d>0} d^{k-1}$$

となる。または

$$-\frac{1}{2}\sum_{dd'=n, d, d'>0, d\neq d'} min(d, d^{'})^{k-1}$$

と書いても同じである。

8.5 parabolic と hyperbolic をまとめた表示

両方まとめると

$$-\frac{1}{2}\sum_{dd'=n, d, d'>0} min(d, d^{'})^{k-1}$$

である。やや人工的な表示だが、$(d, d^{'})$, $(d^{'}, d)$ $(d \neq d^{'})$ と 2 通りが有る場合が hyperbolic で $d = d^{'} = \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ の一通りのときが parabolic である。スマートなまとめ方である。このまとめかたは Zagier にならっている。

8.6 elliptic

elliptic な元 $\gamma \in T(n)$ について、その中心化群の構造を求めよう。今の設定では、elliptic というのは $\mathbb{Q}(\gamma)$ が虚 2 次体ということに他ならない。共役類の分類は以前にやったが、もう一度最初から考えてみる。γ の固有方程式を $x^2 - sx + n = 0$ とする。

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると $a + d = s$ であるから、

$$\gamma = \frac{s}{2}1_2 + \begin{pmatrix} a - s/2 & b \\ c & d - s/2 \end{pmatrix} = \frac{s}{2}1_2 + \begin{pmatrix} -y/2 & -z \\ x & y/2 \end{pmatrix}$$

とかける。$\gamma^2 - s\gamma + n1_2 = 0$ であるから、$(g - (s/2)1_2)^2 = (y^2 - 4xz)1_2/4 = (s^2 - 4n)1_2/4$. ここで $e = gcd(x, y, z)$ として、

$$\delta = e^{-1}\begin{pmatrix} -y/2 & -z \\ x & y/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0/2 & -z_0 \\ x_0 & y_0/2 \end{pmatrix}$$

とおく。もちろん $gcd(x_0, y_0, z_0) = 1$ である。また、

$$\mathbb{Z} \ni -\det(2\delta) = y_0^2 - 4x_0z_0 = (s^2 - 4n)/e^2$$

である。ここで、$\mathbb{Q}(\gamma) = \mathbb{Q}(\delta)$ と可換な $M_2(\mathbb{Q})$ の元の集合は、Skolem-Noether の定理により $\mathbb{Q}(\delta)$ 自身である。$R = \mathbb{Q}(\delta) \cap M_2(\mathbb{Z})$ とおくと、R は $\mathbb{Q}(\delta) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{s^2-4n})$ の整数環 (maximal とは限らない order) である。今、$\Gamma_\gamma \subset \mathbb{Q}(\gamma) \cap M_2(\mathbb{Z}) = R$ なので、R が何であるかを知りたい。$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\alpha 1_2 + \beta\delta \in M_2(\mathbb{Z})$$

と仮定すると、$\alpha \pm \beta y_0/2 \in \mathbb{Z}$ であるから、$2\alpha \in \mathbb{Z}$ である。よって $\beta y_0/2 \in 2^{-1}\mathbb{Z}$, 故に $\beta y_0 \in \mathbb{Z}$. また $\beta z_0, \beta x_0 \in \mathbb{Z}$ でもあるから、$gcd(x_0, y_0, z_0) = 1$ より $\beta \in \mathbb{Z}$ である。ここで $\alpha = \alpha_0/2$ ($\alpha_0 \in \mathbb{Z}$) と書くと、$\alpha_0 + \beta y_0 \in 2\mathbb{Z}$. ここでもし $y_0 \equiv 0 \bmod 2$ ならば $\alpha_0 \in 2\mathbb{Z}$ で $\alpha \in \mathbb{Z}$. また $y_0 \equiv 1 \bmod 2$ ならば $\alpha_0 \equiv \beta \bmod 2$. つまり

$$R = \mathbb{Q}(\delta) \cap M_2(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\delta & \text{if } y_0 \equiv 0 \bmod 2 \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\begin{pmatrix} (1-y_0)/2 & -z_0 \\ x_0 & (1+y_0)/2 \end{pmatrix} & \text{if } y_0 \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

ここで $-\det(\delta) = (4x_0z_0 - y_0^2)/4$ であり、$y_0^2 - 4x_0z_0 = f^2 D_K$ ($f > 0$, D_K は $K = \mathbb{Q}(\sqrt{s^2-4n})$ の基本判別式) とかけるので、R は conductor が f の K の整数環である。R の $\det = 1$ の元は、すなわち R のノルム 1 の元であり、これは R の単数に他ならない。すなわち

$$\Gamma_\gamma = R^\times.$$

さて、s, n を固定しても e, f は一意的には決まらないので、このあたりの事情を正確に見る必要がある。前の設定と記号のもとで、γ の $SL_2(\mathbb{Z})$ 共役類を分類するということは δ の共役類を分類することと同じであって、e が異なれば、もちろんこれらは違う共役類に属する。ひとつの e に対し、f はいろいろありうるし、またひとつの f に対しても共役類はいろいろある。しかし、同じ f に対しては、どの γ でも $\#(\Gamma_\gamma)$ は同じであるから、結局寄与は次のように考えればよい。

n を固定し、s は固定しないとき、γ の Γ 共役類は本質的に δ の共役類の分類で記述できる。ここで本質的にはというのは、s の符号の choice は δ では決められないからである。よって、$s^2 < n$ となる $s \in \mathbb{Z}$ をひとつ固定し、$(s^2-4n)/e^2$ が判別式になるような e も固定して、(従って、ある虚 2 次体の判別式 D_K に対して $(s^2-4n)/e^2 = f^2 D_K$ となるわけだが) それらに対して、$h(f^2D_K)/\#(\mathcal{O}_{K,f})^\times$ の和をとればよい。ここで $\mathcal{O}_{K,f}$ は K の conductor f の整数環としている。ここで、f はどこを動くかというと、$s^2 - 4n = l^2 D_K$ ($l > 0$, $l \in \mathbb{Z}$) とするとき、$f > 0$ は $f|l$ なる数を全部動き、そのそれぞれについて、$e = l/f$ が定まり、また共役類に応じて (x_0, y_0, z_0) の代表が定まることになるのである。一方で積分からの寄与は

$$-\frac{1}{2} \times \det(\gamma)^{(k-2)/2} \frac{e^{i(k-1)\theta} - e^{-i(k-1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{(\sqrt{n}e^{i\theta})^{k-1} - (\sqrt{n}e^{-i\theta})^{k-1}}{\sqrt{n}e^{i\theta} - \sqrt{n}e^{-i\theta}}$$

だった。ここで $e^{\pm i\theta}$ は $\det(\gamma)^{1/2}e^{i\theta} = \sqrt{n}e^{\pm i\theta}$ が γ の固有値として定まる量である。言い換えると

$$1 - sx + nx^2 = (1 - \eta x)(1 - \zeta x)$$

とするとき

$$P_k(s, n) := \frac{\eta^{k-1} - \zeta^{k-1}}{\eta - \zeta}$$

で与えられる。これは

$$\frac{1}{1 - sx + nx^2} = \frac{1}{x(\eta - \zeta)} \times \left(\frac{1}{1 - \eta x} - \frac{1}{1 - \zeta x} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k - \zeta^k}{\eta - \zeta} x^{k-1}$$

に注意すれば、$P_k(s, n)$ は $(1 - sx + nx^2)^{-1}$ の x^{k-2} の係数といっても同じことである。こう書いたほうが有理数だという感じがわかりやすいであろう。

さて、非常に微妙なところだが、固有多項式 $x^2 - sx + n = 0$ から決まる共役類を分類する際に δ と $-\delta$ は２次形式で言えば、positive definite と negative definite に対応するので、共役にはなれない。（ひとつの $s^2 - 4n$ に対し、２種類のとり方がある。）それで跡公式の一般形に登場する 1/2 なる因子はここキャンセルする。また公式

$$\frac{h(f^2 D_K)}{\#(\mathcal{O}_{K,f}^{\times})} = \frac{1}{\#(\mathcal{O}_{K,f}^{\times})} \times \frac{h(D_K)}{[\mathcal{O}_K^{\times} : \mathcal{O}_{K,f}^{\times}]} f \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{p} \left(\frac{D_K}{p} \right) \right)$$

によって、$\#(\mathcal{O}_{K,f}^{\times})[\mathcal{O}_K^{\times}, \mathcal{O}_{K,f}^{\times}] = \#(\mathcal{O}_K^{\times})$ と簡易化される。

以上により、elliptic な寄与全体は次で与えられる。

Theorem 8.1 $Tr(T(n))$ における楕円元の寄与は

$$\begin{aligned} & - \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z} \ s.t. \\ s^2 - 4n = l^2 D_K < 0}} \sum_{f|l} \frac{h(f^2 D_K)}{\#(\mathcal{O}_{K,f}^{\times})} \\ = & - \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z} \ s.t. \\ s^2 - 4n = l^2 D_K < 0}} \frac{h(D_K)}{\#(\mathcal{O}_K^{\times})} \sum_{f|l} f \prod_{p|f} \left(1 - \frac{1}{p} \left(\frac{D_K}{p} \right) \right) \end{aligned}$$

で与えられる。

8.7 中心と elliptic のとりまとめ

中心は elliptic の degenerate case だと思って、まとめることを考える。γ が中心の元のときは、固有方程式は重根をもつので $s^2 - 4n = 0$ であり、このとき、

$$\frac{1}{1 - sx + nx^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{2}x\right)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{s^k}{2^k}x^k.$$

これの x^{k-2} の係数も $P_k(s,n)$ と書くことにする。つまり

$$P_k(\pm 2\sqrt{n}, n) = (k-1)(s/2)^{k-2} = (k-1)n^{(k-2)/2}$$

である。よって中心の寄与は

$$\sum_{s;s^2=4n} \frac{-1}{24}P_k(s,n) = \chi(\sqrt{n})\frac{-1}{12}P_k(2\sqrt{n}, n)$$

である。ここで Zagier にならって、次のような記号を導入しよう。

$$H(0) = -\frac{1}{12}$$

判別式 $D < 0$ に対して

$$H(-D) = \sum_{D_1 | D, D_1 \text{は判別式}} \frac{h(D_1)}{w(D_1)/2}$$

ここで、$w(D_1)$ は判別式 D_1 の order の単数群の位数。$h(D_1)$ は判別式 D_1 の order の類数。また負の数 x に対しては $H(x) = 0$ とおくことにする。

こうすると中心と elliptic の寄与をまとめてかける。すなわち

$$-\frac{1}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty} P_k(s,n)H(4n - s^2)$$

となる。これは n を固定しているので、実際には有限和である。

8.8 公式と実例

k を偶数、$T(n)_k$ を $S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ 上のヘッケ作用素とすると、

$$Tr(T(n)_k) = -\frac{1}{2}\sum_{s=-\infty}^{\infty} P_k(s,n)H(4n - s^2) - \frac{1}{2}\sum_{dd'=n, d, d'>0} min(d, d')^{k-1}.$$

ここで、

$$\frac{1}{1-sx+nx^2}=\sum_{k=2}^{\infty}P_k(s,n)x^{k-2}.$$

たとえば

$$\begin{aligned}
P_2(s,n) &= 1\\
P_4(s,n) &= s^2-n\\
P_6(s,n) &= s^4-3ns^2+n^2\\
P_8(s,n) &= s^6-5ns^4+6n^2s^2-n^3\\
P_{10}(s,n) &= s^8-7ns^6+15n^2s^4-10n^3s^2+n^4.
\end{aligned}$$

また

$$H(m)=\begin{cases}0 & m<0\\ -\frac{1}{12} & m=0\\ \sum_{D|m,D>0,-D\text{ は判別式}}\frac{h(-D)}{w(-D)/2} & m>0\end{cases}$$

ここで、判別式というのは $1 \bmod 4$ または $0 \bmod 4$ となる整数のこととする。(上の設定では、$-D$ は負だから平方数ではない。）また $h(-D)$ は判別式が $-D=D_Kf^2$ の整数環 $\mathcal{O}_{K,f}$ の類数、$w(-D)$ は $\mathcal{O}_{K,f}^{\times}$ の位数。たとえば、$m=12$ ならば、$-D$ の候補は $-D=-3$, -12. $h(-3)=h(-12)=1$, $w(-3)=6$, $w(-12)=2$, $H(12)=1/3+1=4/3$. 実際には $m>0$ に対して、$H(m)$ は判別式が $-m$ の**原始的とは限らない**正定値整数係数2次形式の $SL_2(\mathbb{Z})$ 同値類の個数を x^2+y^2 は $1/2$, x^2+xy+y^2 は $1/3$, その他は 1 と重みをつけてカウントしたものに等しい。

m	0	3	4	7	8	11	12	15	16	19	20	23	24
$H(m)$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	1	2	3	2

実例: $S_k(\Gamma)$ の次元公式。$n=1$ のとき $T(1)_k$ は恒等写像で $Tr(T(1)_k)=\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$. これが良く知られた次元公式に一致することを確かめる。

$s^2\le 4$ とすると $s=0$, $s=\pm1$, $s=\pm2$ である。$s=0$ ならば

$$\frac{1}{(1+x^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^{2k}=\sum_{k=0,k:even}(-1)^{k/2}x^k$$

よって、k even に対しては $-\frac{1}{2}P_k(0,n)=(-1)^{k/2}/2$,

$s=1$ と $s=-1$ をまとめて考えると

$$\frac{1}{1-x+x^2}+\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1+x}{1+x^3}+\frac{1-x}{1-x^3}=2\frac{1-x^4}{1-x^6}$$

つまり
$$-\frac{1}{2}(P_k(1,1)+P_k(-1,1)) = [1,0,-1,0,0,0;6]_k$$
ただし、$[a_0,a_1,\ldots,a_{l-1};l]_k$ というのは $k\equiv i \bmod l$ のとき a_i になるという意味とする。$H(0)=-1/12$, $H(3)=1/3$, $H(4)=1/2$ より、k even に対して
$$\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) = Tr(T(1)) = \frac{k-1}{12} + \frac{(-1)^{k/2}}{4} + \frac{1}{3}[1,0,-1,0,0,0;6]_k - \frac{1}{2}.$$
いまは k 奇数を跡公式にあまりちゃんといれていないので、奇数部分が面倒になるが、母関数は、次の式から奇数部分と小さい k を除外すれば得られる。
$$\begin{aligned}&-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{1-2x+x^2}+\frac{1}{1+2x+x^2}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)}\\ &-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-x+x^2)}+\frac{1}{(1+x+x^2)}\right)-\frac{1}{2(1-x)}\\ &=\frac{1+x+2x^2+x^3-x^4-3x^6-x^7-2x^8-x^9+x^{10}}{2(1-x^4)(1-x^6)}\end{aligned}$$
偶数部分は
$$\frac{1+2x^2-x^4-3x^6-2x^8+x^{10}}{2(1-x^4)(1-x^6)}$$
$k=0$, 2 を、$\dim S_0(\Gamma)=S_2(\Gamma)=0$ という、跡公式以外の論法で分かる事実を利用して補正して、
$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) = \frac{t^{12}}{(1-t^4)(1-t^6)}$$
(注意：一般の群 Γ について、$k=2$ まで跡公式が成り立つように補正する方法は知られている。(cf. [10], [5]). $S_0(\Gamma)=0$ は一般的事実である。一般の群では $S_1(\Gamma)$ の簡単に計算可能な公式は知られていない。ただしもちろん ad hoc に具体的な値がわかることは、よくある。また、$\Gamma_0(p)$ で Selberg zeta の留数との関係、ガロア表現との関係、などは知られているが、この方向で直接次元を計算した例は知らない。)

例： $T(2), n=2$.
$s=0$, $s^2-4n=-8$, $H(8)=1$
$s=\pm1$, $s^2-4n=-7$, $H(7)=1$
$s=\pm2$, $s^2-4n=-4$, $H(4)=\frac{1}{2}$.
$$\frac{1}{1+2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k x^{2k}$$

$$-\frac{1}{2}P_k(0,2)=(-1)^{k/2}2^{k/2-2}.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x+2x^2}+\frac{1}{1+x+2x^2}\right)=-1+x^2+x^4-7x^6+17x^8-23x^{10}+x^{12}+89x^{14}+\cdots$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x+2x^2}+\frac{1}{1+2x+2x^2}\right) &= -\frac{1+2x^2}{1+4x^4}=-1-2x^2+4x^4+8x^6-16x^8-32x^{10}\\ &\quad +64x^{12}+128x^{14}+\cdots\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{dd'=2}min(d,d')^{k-1}=-1.$$

$k=12$ で考えると

$$2^4-23-32/2-1=16-23-16-1=-24$$

$k=14$ で $-2^5+1+64/2-1=0$. $k=16$ で $2^6+89+128/2-1=216$. $\Delta E_4=q+216q^2+\cdots$. 一般には

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{\infty}Tr(T(2)_k)x^{k-2} &= -24x^{10}+216x^{14}-528x^{16}+456x^{18}-288x^{20}\\ &\quad +1080x^{22}-48x^{24}-8280x^{26}+8640x^{28}+\cdots\end{aligned}$$

例：$n=3$, $s=0$, $s^2-4n=-12$, $H(12)=\frac{4}{3}$, $s=\pm1$, $s^{-2}-4n=-11$, $H(11)=1$, $s=\pm2$, $s^2-4n=-8$, $H(8)=1$, $s=\pm3$, $s^2-4n=-3$, $H(3)=\frac{1}{3}$,

$$-\frac{1}{2(1+3x^2)}=-\frac{1}{2}(1-3x^2+9x^4-27x^6+81x^8-243x^{10}+\cdots)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x+3x^2}+\frac{1}{1+x+3x^2}\right)=-1+2x^2-x^4-13x^6+74x^8-253x^{10}+\cdots$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x+3x^2}+\frac{1}{1+2x+3x^2}\right)=-1-x^2+11x^4-13x^6-73x^8+263x^{10}+\cdots$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-3x+3x^2}+\frac{1}{1+3x+3x^2}\right)=-1-6x^2-9x^4+27x^6+162x^8+243x^{10}+\cdots$$

$k=12$ として

$$Tr(T(3))=\frac{243}{2}\times\frac{4}{3}-253+263+\frac{243}{3}-1=252=\tau(3).$$

なお、上の分数式を用いて各ウェイトに対する $Tr(T(3))$ の値の母関数を書くことができる。展開式は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{\infty} Tr(T(3)_k)x^{k-2} &= 252x^{10} - 3348x^{14} - 4284x^{16} + 50652x^{18} - 128844x^{20} \\
&\quad + 339480x^{22} - 195804x^{24} - 1286280x^{26} - 4967640x^{28} + \cdots
\end{aligned}
$$

の x^{k-2} の係数。たとえば

$$
\begin{aligned}
\Delta &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots \\
\Delta E_4 &= q + 216q^2 - 3348q^3 + 13888q^4 + \cdots \\
\Delta E_6 &= q - 528q^2 - 4284q^3 + 147712q^4 + \cdots \\
\Delta E_4^2 &= q + 456q^2 + 50652q^3 - 316352q^4 + \cdots \\
\Delta E_4 E_6 &= q - 288q^2 - 128844q^3 - 2014208q^4 + \cdots \\
\Delta E_4^3 &= q + 696q^2 + 162252q^3 + 12831808q^4 + \cdots \\
\Delta E_6^2 &= q - 1032q^2 + 245196q^3 + 10965568q^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

例：$n = 4$,
$s = 0$, $s^2 - 4n = -16$, $H(16) = \frac{3}{2}$, $s = \pm 1$, $s^2 - 4n = -15$, $H(15) = 2$
$s = \pm 2$, $s^2 - 4n = -12$, $H(12) = \frac{4}{3}$, $s = \pm 3$, $s^2 = 4n = -7$, $H(7) = 1$,
$s = \pm 4$, $s^2 - 4n = 0$, $H(0) = -\frac{1}{12}$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{\infty} Tr(T(4)_k)x^{k-2} &= -1472x^{10} + 13888x^{14} + 147712x^{16} - 316352x^{18} - 2014208x^{20} \\
&\quad + 25326656x^{22} - 33552128x^{24} + 190623296x^{26} + \cdots
\end{aligned}
$$

以上より、$k = 24$ で $\dim S_{12}(SL_2(\mathbb{Z})) = 2$, $Tr(T(2)_{24}) = 1080$, $Tr(T(4)_{24}) = 25326656$, 固有空間では $T(4)_k = (T(2)_k)^2 - 2^{k-1}$. よって $T(2)_{24}$ の固有値を α, β として、$\alpha^2 + \beta^2 = Tr(T(4)_{24}) + 2^{24} = 19309881$, $\alpha + \beta = 1080$, $\alpha\beta = -20468736$. $\alpha, \beta = 540 \pm 12\sqrt{144169}$. ここで有名な 144169 がでてくる。

ちなみに $\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) = 2$ となるものの固有値をあげておく。

k	$T(2)$	$T(3)$
24	$540 \pm 12\sqrt{144169}$	$169740 \mp 576\sqrt{144169}$
28	$-4140 \pm 108\sqrt{18209}$	$-643140 \pm 20736\sqrt{18209}$
30	$4320 \pm 96\sqrt{51349}$	$-2483820 \mp 52992\sqrt{51349}$
32	$19980 \pm 12\sqrt{18295489}$	$324(26795 \pm 16\sqrt{18295489}$
34	$-60840 \mp 72\sqrt{2356201}$	$18959940 \pm 22464\sqrt{2356201}$

注意：$k \leq 10$ では $\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) = 0$ だからトレースは常に 0 である。これから類数の間の関係式 (class number relation) がでる。

9　一般の古典群の共役類の分類方針

つぎのような行列群のみを考える。

$$\begin{aligned} G &= \{g \in M_n(B); gg^* = n(g)1_n\} \text{ or} \\ G^1 &= \{g \in M_n(B); gg^* = 1_n\} \end{aligned}$$

ここで、$*$ は $M_n(B)$ の involution （$M_n(B)$ の位数 2 の自己同型、または逆自己同型）とする。例としては

(1) $B = \mathbb{Q}$; $g^* = JgJ^{-1}$, $g^* = {}^t g$, $g^* = S{}^t gS^{-1}$ など。ただし $S = {}^t S \in M_n(\mathbb{Q})$

(2) $B = K$ （虚 2 次体）、$g^* = {}^t\overline{g}$, $g^* = H^{-1}\,{}^t\overline{g}H$ など。

(3) B quarternion algebra, $g^* = {}^t\overline{g}$ など。

9.1　体上の共役類と共役類の Hasse の原理

以下に述べる方針は、私は土方弘明先生の記事で学んだ。

(0) $GL_n(B)$ 共役類。

$M_n(B)$ の元の固有多項式 $f(x)$ の候補をひとつ固定しておく。$f(x)$ をひとつ固定するとき、これを固有多項式に持つ $M_n(B)$ の半単純元は、Remak-Schmidt の直既約分解定理と Skolem Noether の定理より、$GL_n(B)$ 共役である。さて、$f(x)$ を固有多項式にもつ G の元が存在するためには $f(x)$ には多少条件がつくのが普通であるが、それについて論じるのはやめて、そのような元 g が存在するとして、ひとつ固定しておく。

(1) 以下の話は G で考えるか G^1 で考えるかで多少かわるが、G^1 のほうが話が見かけ上単純なので、G^1 で考えることにする。G^1 共役類。ある $x \in GL_n(B)$ について $x^{-1}gx \in G^1$ と仮定すると、$(x^{-1}gx)(x^{-1}gx)^* = 1$ すなわち $g(xx^*)g^* = xx^*$ である。$gg^* = 1_n$ により、$g(xx^*) = (xx^*)g.$ 今 $Z(g) = \{z \in M_n(B) : zg = gz\}$ とおくと、$xx^* \in Z(g)$ である。$Z(g)$ は $*$ の作用で集合として不変である。$Sym(Z(g)) = \{z = z^*; z \in Z(g)\}$ とおくと、$xx^* \in Sym(Z(g))$ である。$z^* = z$ となる $M_n(B)$ の元を $*$ symmetric と呼ぶことにする。$*$ symmetric な $M_n(B)$ の元のうち、どれが xx^* $(x \in GL_n(B))$ とかけるかというのは $(B, *)$ による。たとえば B が定符号 4 元数体で、$g^* = {}^t\overline{g}$, $\overline{g_{ij}}$ は main involution とすると正定値 4 元数的エルミート行列はみな xx^* の形にかけるので、さらに $Sym^+(Z(g))$ を $Sym(Z(g))$ の中で正定値なものとすれば $xx^* \in Sym^+(Z(g))$ である。一般に $Sym^+(M_n(B)) = \{z = z^* \in M_n(B); z = xx^* \text{ for some } x \in GL_n(B)\}$ とおいて、

$$Sym^+(Z(g)) = Z(g) \cap Sym^+(M_n(B))$$

とする。$x_i x_i^* \in Sym^*(Z(g))$ となる x_i $(i=1,2)$ について、$x_i^{-1} g x_i$ が G^1 共役とすると。

$$x_1^{-1} g x_1 = g_1^{-1} x_2^{-1} g x_2 g_1$$

$(g_1 \in G^1)$ だが、$x_2 g_1 x_1^{-1} = z \in Z(g)$ である。つまり

$$x_2 g_1 g_1^* x_2^* = z x_1 x_1^* z^*.$$

ここで $g_1 g_1^* = 1_n$ より $x_2 x_2^* = z(x_1 x_1^*) z^*$. 言い換えると、algebra $Z(g)$ の involution できまる「* 対称元」を $Z(g)$ 同値で分類していることになる。一般に $Z(g)$ は半単純ではあるが、単純環ではないので、詳しい分類は個別に論じるべきであるが、以上の流れをまとめると

(i) $f(x)$ を固有多項式にもつ G^1 の元全体の集合 $G(f)$ は

$$T(f) = \{x^{-1} g x ; x x^* \in Sym^+(Z(g))\}$$

(ii) $G(f)$ の元の G^1 共役類は

$$T(f)//G^1 = Sym^+(Z(g))/\sim .$$

ここで、$s_1, s_2 \in Sym^+(Z(g))$ のとき $s_1 \sim s_2$ というのは、ある $z \in Z(g)$ について $z s_1 z^* = s_2$ ということ。

一般に Global 共役類の分類は難しいので、以上を local に帰着したい。以上は local に考えても全て同じで、G^1, B などのかわりに $G_{1,v}$, B_v $(v \le \infty)$, $Z(g)_v$ などを考えればよい。さて、(ii) の分類は、２次形式、エルミート形式等々の普通の分類であるが、形式に対する Hasse 原理は quaternion anti-hermitian の場合を除けば成立することが知られている。(quaternion anti-hermitian の場合の反例は土方先生の論文があったはず。この場合は具体的なレベルではどう取り扱えばよいのか良く知らない。）ということは、この特殊な場合をのぞけば共役類に関する Hasse の原理、つまりすべての $v \le \infty$ について $G_{1,v}$ 共役ならば (あるいは言い換えるとアデールで考えて $G_{1,A}$ 共役ならば）G^1 共役ということになる。（なお、正確に言うと、どのような代数群を考えるか、たとえば「形式」について、どのような同型を考えるか、で Hasse 原理は変わってくるかもしれない。従って、場合によっては similitude（相似変換）での同値類で考えることになるが、この場合、Hasse 原理自身、知られていないのではないかと思われる場合もある。）もちろん、これ以外に、どのアデール共役類がグローバルから来るかという判定も必要だが、以上のようなパラメトリゼーションでは、局所と大域の共役類のパラメータが具体的に書き下せる場合が多いので、実際上はあまり問題にならない。(G^1 に関してなら、局所的な「２次形式」がいつ大域的「２次形式」から来るかという話になって、これはまあ知られているといって良い。）ちなみに私の観点から見て、local に考えることのひとつのメリットは local には共役類が有限個になることが多いので、標準的な代表元を具体的に記述して計算を進めることができる点にあると思う。

9.2 整数環上のデータなど

実用上、実際に必要なのは、アデール $G_{1,A}$ の open subgroup U に対して、U-double coset $T=\prod_v T_v$ in G_A に属するような元である。(Hecke 作用素を考えるには、G^1 よりも G のほうが適当なので、話が少しかわるが、共役類という点では G^1 共役のまま話をすすめても構わない。）local に言えば、$g\in G_v$ を $G_{1,v}$ 共役類の代表として、$x^{-1}gx\in T_v$ $(x\ inG_v)$ となるものだけを考えたい。言い換えると、大域的な $G_{\mathbb{Q}}$-共役類が存在しても、このような x が存在しないならば、その元の寄与はないので、除外して考えなければならない。一方で、global な寄与を local な量で記述するには、中心化群でわった大域的な「体積」が必要になるが、ひとつの G_v 共役類を U_v 共役で分類しなおすと、中心化群の同型類がまた細かく分かれることになる。中心化群といわば「階層わけ」する方法はいろいろあると思うが、[11], [12], [13], [4] 等で伝統的なやりかたは、g と交換可能な元のつくる代数 $Z(g)$ の整数環 Λ を指定し、これと G_v の共通部分という見方で中心化群を「階層わけ」するというものである。これは計算に必要な群の index などを求める場合にわかりやすい手段を提供している。中心化群のアデール化の、このような global な Λ で決まる開部分群についての mass formula は、一応 local なデータをうまく計測すれば（Tamagawa number とあわせて）計算できるはずである。以上のような説明はたとえば、[4], [2], [3] などを参照されたい。以上のようなプロセスは、ヘッケ作用素の跡を計算する具体的な手段を与えているが、もちろんこのような説明は、具体的に跡公式を計算するという立場から言えば、単なる計算の出発点に過ぎない。実際の計算は個別的な長い面倒な計算による。その技術的な面白そうなトリックは多々あるのだが、紙数もつきたので、ここで筆をおく。

References

[1] 荒川恒男、伊吹山知義、金子昌信、「ベルヌーイ数とゼータ関数」、牧野書店 (2001), pp. 243 + ix.

[2] K. Hashimoto, On Brandt matrices associated with the positive definite quaternion Hermitian forms. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), no. 1, 227–245.

[3] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math, **27** (1980), 549–601.

[4] H. Hijikata, Explicit formula of the traces of Hecke operators for $\Gamma_0(N)$ J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 56–82.

[5] H. Ishikawa, On the trace formula for Hecke operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **20**(1973), 217–237.

[6] H. Ishikawa, On trace of Hecke operators for discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **21** (1974), 357–376.

[7] The traces of Hecke operators in the space of the " Hilbert modular " type cusp forms of weight two. Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo **29** (1979), no. 1, 1–28.

[8] S. Lang, Elliptic Functions, Addison Wesley (1973), xii+pp.326.

[9] T. Miyake, Modular Functions, Springer Verlag Berlin Heidelberg (1989), x+335 pp.

[10] H. Saito, On Eichler's Trace formula, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 333-340.

[11] H. Shimizu, On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. Ann. of Math. (2) **77** (1963), 33–71.

[12] H. Shimizu, On traces of Hecke operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **vol.10**(1963), 1–19.

[13] H. Shimizu, On zeta functions of quaternion algebras, Ann. of Math. (2) **81** (1965),166–193.

[14] H. Weber, Lehrbuch der Algebra III, 1908 Braunschweig Druck und verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. xvi+733 pp.

[15] D. Zagier, Appendix to S. Lang, Introduction to Modular Forms, (Springer 1976) pp. 44-54. **See also**: Correction to "The Eichler-Selberg trace formula on $SL_2(\mathbb{Z})$", *Modular functions of one variable VI*, Springer Lecture Notes in Math. No.627 (1977) 171–173.

Department of Mathematics,
Graduate School of Science,
Osaka University,
Machikaneyama 1-1,
Toyonaka, Osaka, 560-0043 Japan.
ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp