# Selberg Trace Formula 入門 (暫定版)[1]

織田　孝幸

はじめに.

このノートは，１９８８年の夏学期に東京大学理学部で，４年生と大学院の学生に向けて行った講義の一部が元になっている．この講義のあと，１９９０年１月，九州大学の理学部で集中講義を行い，いろいろの点で改良でき，ある程度納得のゆくまでまとまってきたので，あるいは近傍の人の役に立つかもと思い，写しを送ります．

Selberg の跡公式が登場してから３０年以上が経つが，あまり自分にとって分かりやすい入門書がないのを，何年も前から不満に思っていた．Selberg 自身の論文 [Selberg56] は対称空間にこだわった書き方をしてあり，後の高階の群への一般化へつなげるためには見やすい書き方がなされていない．Gel'fand, Graev, Piatetskii-Shapiro の本 [G-G-PS69] の書き方は，其の全体の流れは納得の行くものであるが，細かなしかし重要な点で誤りが散見される．Wallach の survey[Wallach76] はとてもよい論文と思うが，表現論の素人には少々難しい．

こんなことから，８８年の夏学期に $SL(2,\mathbf{R})$ の離散部分群に対する跡公式の講義をすることにした．ねらいが成功しているかどうかは，読者のご批判を仰ぎたい．

内容のあらましを述べる．第１章は，実半単純 Lie 群の一様離散部分群の跡公式の naive な形の復習である．第２章は，Paley-Wiener 定理と pseudo-coefficients についての最近までの結果の紹介とそれの Trace formula に対して持つ意味が説明されている．次の第３章は $SL(2,\mathbf{R})$ の表現の分類の結果の復習である．第４章で軌道積分の展開定理 (Fourier 逆変換公式) を示す．ここまでで, 跡公式の最終形とその応用が説明できる．

第５章以下は, 付録である．第５章は，pseudo-coefficients の存在証明の概略を $SL(2,\mathbf{R})$ のときに述べる．第６章は，Gel'fand, Graev, Piatetskii-Shapiro の相互律といわれるものの証明で，第７章は Bergman 核による古典的な方法との関連を説明する．
全体に特に新しいことはない．これまでにまとめて書かれなかったのが不思議である．

講義中の証明の批評をして下さった小林俊行さん，講義のノートをとってくださった堀正さんに特に感謝します．また，九州大学ではたくさんのよい質問を講義中にして下さり，そのための解答を本文と注にまとめることができノートをさらに充実することができたと思います．まとめるように勧めて下さったことと合わせ，九州大学理学部の皆さんに感謝します．最後に，文献等，Lie 群の表現論についていろいろと教えて頂いた大島利雄さんに感謝します．

１９９０年３月３日
織田　孝幸

[1]typeset by K. Gunji, T. Ishii, and T. Moriyama in 2004.

# 第0章 Introduction　Poisson summation formula

## 0.1 R のとき

$f(x) \in L^1(-\infty,\infty) = L^1(\mathbf{R})$: $\mathbf{R}$ 上の可積分関数の空間．さらに，$f$ は有界変動かつ連続とする．$f$ の Fourier 変換 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx,$$

とおく．このとき，$ab = 2\pi$ $(a > 0)$ であるとき，

$$\sqrt{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(ak) = \sqrt{b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(bk).$$

例えば，$a = 1$, $b = 2\pi$ のとき，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n).$$

## 0.2 一般の場合

$G$ を局所コンパクトアーベル群とする．$\mathbf{T} := \{z \in \mathbf{C} | |z| = 1\}$ とおく．$\mathbf{T}$ は通常の位相に関して compact abel 群となる．$\chi : G \to \mathbf{T}$ という連続準同型を $G$ の指標という．指標の全体を $\widehat{G}$ と書く．$\widehat{G}$ は自然に abel 群となり，$\widehat{G}$ に compact-open 位相を導入すると，$\widehat{G}$ も局所コンパクトアーベル群となる．

$\widehat{G}$ を $G$ の (Pontrjagin) 双対群という．$\widehat{G}$ の指標群 $\widehat{\widehat{G}}$ は $G$ と標準的に同型になる (Pontryagin の双対定理).

$\Gamma$ を $G$ の離散部分群で, 剰余群 $G/\Gamma$ が商位相で compact になるとする.

$$\Gamma^{\perp} = \{\chi \in \widehat{G} | \chi|_{\Gamma} = 1\}$$

を $\Gamma$ の零化群という.

**命題** $\Gamma^{\perp}$ は $\widehat{G}$ の離散部分群で, $\widehat{G}/\Gamma^{\perp}$ は compact 群. さらに, $\Gamma$ の双対群は $\Gamma^{\perp}$ と自然に同一視される.

$f(x)$ を $G$ 上の連続関数で, $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(x\gamma)$ は絶対一様収束するとする (とくに, $f$ は $L^1(G)$ に属する). さらに, $\sum_{\xi \in \Gamma^{\perp}} \widehat{f}(\xi)$ は絶対収束するとする. 但し, Fourier 変換 $\widehat{f}$ は

$$\widehat{f}(\xi) = \int_G f(x) \xi(x) dx$$

で定義する.

**定理 (Poisson の和公式)** $G$ 上の Haar measure $dx$ を quotient measure $d\dot{x}$ on $G/\Gamma$ が, $\int_{G/\Gamma} dx = 1$ となるように正規化すると, 上の仮定の下で,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) = \sum_{\xi \in \Gamma^{\perp}} \widehat{f}(\xi).$$

*Proof.* $F(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x\gamma)$ とおく．すると，$F(x)$ は $G/\Gamma$ 上の関数になる ($x = x\Gamma \in G/\Gamma$ にのみに依る)．標準同型 $\widehat{(G/\Gamma)} \cong \Gamma^{\perp}$ に注意する．$\eta \in \Gamma^{\perp}$ に対して，

$$\Phi(\eta) := \int_{G/\Gamma} F(\dot{x})\eta(\dot{x})d\dot{x}$$

とおく．$\Phi$ は $\Gamma^{\perp}$ 上の関数である．Fourier inversion formula より，

$$F(\dot{x}) = \int_{\Gamma^{\perp}} F(\eta)\eta(\dot{x})^{-1}d\eta = \sum_{\eta\in\Gamma^{\perp}} \Phi(\eta)\eta(\dot{x})^{-1}.$$

特に，$\gamma = 1$ とおくと，$F(1) = \sum_{\eta\in\Gamma^{\perp}} \Phi(\eta)$. 定義より，$F(1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$. ところで，$\Phi(\eta) = \int_{G/\Gamma}\{\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x\gamma)\}\eta(\dot{x})d\dot{x}$. ところが，$\eta(\gamma) = 1$ $(\gamma \in \Gamma, \eta \in \Gamma^{\perp})$. よって，

$$\Phi(\eta) = \int_{G/\Gamma}\{\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x\gamma)\eta(x\gamma)\}d\dot{x} = \int_G f(x)\eta(x)dx = \widehat{f}(\eta).$$

□

Selberg の跡公式はこの Poisson 和公式の非可換版と思える．

- Poisson 和公式の応用 (テータ変換公式).

# 第1章　Selberg 跡公式 (the first form)

## 1.1 ユニタリ表現

**(1.1.1) 定義** $G$ を位相群とし $V$ を $\{0\}$ でない複素 Hilbert 空間とする．$V$ 上の $G$ の表現とは，群 $G$ から $V$ の有界作用素で逆も有界であるものたちのなす群への準同型 $\pi$ で，それから誘導される写像 $G \times V \to V$ が連続であるものをいう．

**注意** $G \times V \to V$ が連続であることは，次と同値.

(i) 各 $v \in V$ に対し，$g \to \pi(g)v$ は $g = 1$ において，$G$ から $V$ への連続写像である.
(ii) $g \to \pi(g)$ はノルム $||\pi(g)||$ に対して，$g = 1$ の近傍で一様有界である.

実際,

$$\begin{aligned}|\pi(g)v - \pi(g_0)v_0| &\leqslant ||\pi(g_0)|| \cdot |\pi(g_0^{-1}g)v - v_0| \\ &\leqslant ||\pi(g_0)|| \cdot |\pi(g_0^{-1}g)(v - v_0)| + ||\pi(g_0)|| \cdot |\pi(g_0^{-1}g)v_0 - v_0| \\ &\leqslant ||\pi(g_0)|| \cdot ||\pi(g_0^{-1}g)|| \cdot |(v - v_0)| + ||\pi(g_0)|| \cdot |\pi(g_0^{-1}g)v_0 - v_0|.\end{aligned}$$

$V$ の線型部分空間 $U$ が不変部分空間であるとは，$G$ の任意の元 $g$ に対し，

$$\pi(g)U \subset U$$

が成立するときをいう．$V$ が $\{0\}$ と $V$ 自身以外に閉不変部分空間を持たないとき，既約であるという.

任意の $g \in G$ に対し，$\pi(g)$ がユニタリ作用素であるとき，$\pi$ はユニタリ表現であるという．ユニタリ表現に対して，次の命題は明らかである.

**命題** ユニタリ表現 $(\pi, V)$ に対し, 不変部分空間 $U$ の直交補空間 $U^{\perp}$ は閉不変部分空間である.

**注意** 定義 (1.1.1) で表現空間 $V$ を Hilbert 空間でなく，もっと一般に Banach 空間として表現を定義できる．特に，Hilbert 空間を表現空間としていることを強調するため，Hilbert 表現というときもある．対する Banach 空間上の表現を Banach 表現という.

**(1.1.2) 定義** (i) $G$ の２つの表現 $(\pi, V)$ と $(\pi', V')$ は，ある可逆な有界線型写像 $E : V \to V'$ で逆も有界であるものが存在して，任意の $g \in G$ に対して，

$$\pi'(g) \cdot E = E \cdot \pi(g)$$

となるとき，同値であるという.
(ii) 特に $\pi, \pi'$ がユニタリ表現であり，あるユニタリ作用素 $E$ によって同値であるとき，ユニタリ同値といわれる.

**例** $G$ を局所コンパクト群とする．$d_l x$ を $G$ の $G$ の左不変測度とし，$V = L^2(G, d_l x)$ とする．$G$ の左正則表現 $\lambda$ を $f(x) \in L^2(G, d_l x)$ に対して，

$$\lambda(g)f(x) = f(g^{-1}x), \qquad g \in G$$

とおいて定義する．同様に，$d_r x$ を $G$ の $G$ の右不変測度とし，$V = L^2(G, d_r x)$ とする．$G$ の右正則表現 $\rho$ を $f(x) \in L^2(G, d_r x)$ に対して，

$$\rho(g)f(x) = f(xg), \qquad g \in G$$

とおいて定義する．表現の定義のうち，連続性の条件は測度論の基本的事実から出る.

**例** $G = SL(2, \mathbf{R})$, $V = L^2(\mathbf{R}^2)$, $\pi(g)f(x) = f(g^{-1}x)$．但し，$g^{-1}x$ は行列 $g^{-1}$ が縦ベクト

ル $x$ に作用している.

既約表現には，Schur の Lemma が成立する．無限次元のときにはいくつか variants があるが，最も易しい場合を次に述べる.

**(1.1.3) 命題 (Schur's Lemma)** 位相群 $G$ の Hilbert 空間 $V$ 上のユニタリ表現 $\pi$ が既約であるのは，$V$ の有界線型作用素で $\pi(g)$ $(g \in G)$ たち全てと交換可能なものがスカラー作用素のみであるときでそのときに限る.

*Proof.* $V$ が可約で, $U$ が自明でない閉不変部分空間とすれば，$U$ の上への直交射影は $\pi(g)$ 全てと可換な $V$ 上のスカラーでない有界線型作用素である. 逆に，$L$ を $\pi(g)$ 全てと可換な $V$ の有界線型作用素でスカラーでないものとする．すると，$\pi$ はユニタリであるから，$L^*$ も $\pi(g)$ 全てと可換である.
それ故，自己共役作用素 $A = \dfrac{1}{2}(L + L^*)$ と $B = \dfrac{1}{2i}(L - L^*)$ も $\pi(g)$ と可換である. $L = A + iB$ であるから，少なくとも $A$ か $B$ かはスカラーでない．これから，$A$ または $B$ の関数であるスカラーでない直交射影 $E$ が存在することがわかる．$E$ は $\pi(g)$ たち全てと可換である. □

**記号** $\widehat{G}$ で $G$ の既約ユニタリ表現のユニタリ同値類の集合を表す.

**注意** 現状で (1991 年 5 月), $G = GL(n, \mathbf{R})$, $G = GL(n, \mathbf{C})$, $G = GL(n, \mathbf{H})$ のとき，$\widehat{G}$ は Vogan [Vogan86] によって決定されている．古典複素 Lie 群のときには，Barbasch [Barbasch89] によって決定されている.

**1.1.4** 群環の表現を定める. $(\pi, V)$ を $G$ の表現とする. $\pi$ がユニタリ表現で，$f$ が $L^1(G)$ に属するとき，

$$(\pi(f)v, v') = \int_G f(x)(\pi(x)v, v')dx, \qquad (v, v' \in V)$$

によって $\pi(f)$ が定義される. 一般の $\pi$ に対しては，$f$ は compact support をもつとし，

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)dx$$

で定める．次はすぐに分かる:

**(1.1.5) 命題** (i) $V$ の任意の閉不変部分空間は，$\pi(f)$ で安定に保たれる.

さらに, $G$ を unimodular とする.

(ii) $\pi$ がもしユニタリならば，$||\pi(f)|| \leqslant |f|_1$ である. また，$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$ とするとき，$\pi(f)^* = \pi(f^*)$ が成立する.
(iii) $f * h$ を

$$(f * h)(x) = \int_G f(xy^{-1})h(y)dy$$

で定めるとき，$\pi(f)\pi(h) = \pi(f * h)$ が成立する.

直和分解

**(1.1.6) 定義** $(\pi, V)$ を $G$ のユニタリ表現とする．$V$ の不変部分空間の族 $\{V_i\}_{i \in I}$ があって，$V = \widehat{\oplus}_{i \in I} V_i$ (直交直和) となるとき，表現 $\pi$ は $\pi_i = \pi|_{V_i}$ たちの直和であるという.
ユニタリ表現は完全可約であるが，必ずしも既約表現の直和に分解しない．一般には直積

分を使って分解しなければならない．また，なんらかの意味で既約分解が存在しても一意的とは限らない．$G$ が実半単純 Lie 群のときには，$G$ は I 型であることが Harish-Chandra によって証明されていて $G$ の直積分による既約分解は本質的に一意である．一般に，実代数群の実数値の点からなる実 Lie 群は I 型である．

### 1.2 $L^2(\Gamma\backslash G)$ のスペクトル分解 ($\Gamma\backslash G$ がコンパクトのとき)

準備のためコンパクト作用素（完全連続作用素）の基本性質を思い出す. 必要なことは標準的な教科書, 例えば [Dunford-Schwartz63, Chap. XI] にある.

**(1.2.0) 定義** $X, Y$ を Banach 空間, $T : X \to Y$ を線形作用素とする. このとき $T$ がコンパクト作用素であるとは, $X$ の任意の有界集合 $S$ を $Y$ の相対コンパクト集合 $T(S)$ に移すときをいう.

明らかにコンパクト作用素は有界である. コンパクト作用素のスペクトルについては次が基本的である.

**定理** (これは Riesz-Schauder の定理より出る)
- (i) コンパクト作用素のスペクトルは点スペクトル $\sigma_P$ のみで, $T$ の 0 以外のスペクトルは固有値だけからなる.
- (ii) $\sigma_P(T) = \{$ 固有値全体 $\}$ は可算で, 0 以外の点に集積しない.
- (iii) 0 でない固有値 $\lambda$ の重複度は有限である. つまり固有空間 $M_\lambda = \{u \in X \mid Tu = \lambda u\}$ は有限次元.

$\Gamma\backslash G$ がコンパクトのとき, $L^2(\Gamma\backslash G)$ のスペクトル分解は著しく単純である:

**(1.2.1) 定理** $G$ を局所コンパクトユニモジュラー群で, 第 2 可算公理を満たすとする. $\Gamma$ を $G$ の離散部分群で $\Gamma\backslash G$ がコンパクトなものとする. $L^2(\Gamma\backslash G)$ を $\Gamma\backslash G$ の自乗可積分空間のなす空間とする. $r_\Gamma$ を $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上の右正則表現とする. そのとき, $r_\Gamma$ は既約部分空間の直和に分解し, しかも各既約表現は有限重複度で生じる.

**記号** $\pi \in \widehat{G}$ とする. $m_\Gamma(\pi)$ で表現 $\pi$ の $L^2(\Gamma\backslash G)$ での重複度を表す.

以下, 上の定理の証明を述べる. まず次の Langlands による Lemma が基本的である.

**(1.2.2) 補題** ([Langlands76, Lemma(3.2)]) $G$ を局所コンパクト群, $(\pi, V)$ を可分な Hilbet 空間 $V$ 上の $G$ のユニタリ表現とする. $U$ という $G$ の単位元の近傍が任意に与えられたとき, $G$ 上の可積分関数 $f$ で $U$ の中で compact support であって

$$f(g) \geqslant 0, \quad f(g) = f(g^{-1}), \quad \int_G f(g)\, dg = 1$$

となり, $\pi(f)$ がコンパクト作用素であるものが存在するとせよ. そのとき $V$ は既約な部分空間たちの可算個の直交直和であり, さらに各既約表現は $V$ の中で有限重複度でしか生じない.

(補題の証明) $V$ の既約不変部分空間の直交族たちを考える. それを $\mathcal{F}$ と書けば,

$$\mathcal{F} = \{\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \mid V_\alpha \perp V_\beta \text{ (if } \alpha \neq \beta), \text{各 } V_\alpha \text{は既約な不変部分空間 }\}.$$

この族たちに包含関係 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ で順序をつけると, 帰納的順序集合となる. よって, Zorn の Lemma により極大族 $\mathcal{F}$ がある. $\mathcal{F} = \{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ として, $F = \widehat{\oplus} H_\alpha$ とおく. ここで $\widehat{\oplus}$ は Hilbert 空間としての和である. $F = V$ が示せれば, 前半が言える. これをまず示す.

$F \nsubseteq V$ として, $F^{\perp}$ を $F$ の $V$ の中での直交補空間とする. $F^{\perp} \neq \{0\}$. よってある $v \in F^{\perp}$ があって, $||v|| = 1$. 近傍 $U$ を $U \subset \{g \in G \mid ||v - \pi(g)v|| < 1/2\}$ となるようにとる. $f$ を補題の仮定のようにとると,

$$||\pi(f)v - v|| < \frac{1}{2}.$$

それ故, $\pi(f)v \neq 0$. $\pi(f)$ の $F^{\perp}$ への制限 $\pi(f)|_{F^{\perp}}$ は自己共役で, 従って $0$ でない固有値 $\lambda$ をもつ. $F_{\lambda}^{\perp}$ を固有値 $\lambda$ に属する有限次元固有空間とする. $F^{\perp}$ の閉不変部分空間と $F_{\lambda}^{\perp}$ の交わりで $0$ でないもので極小となるものを $F_0^{\perp}$ とする. $F_0^{\perp}$ を含む $F^{\perp}$ の閉不変部分空間の交わりを $V_0$ とする. $V_0 \neq \{0\}$ より, $V_0$ が既約ならば $\mathcal{F}$ の極大性に矛盾する.

$V_0$ が既約でなければ, $V_0 = V_1 \oplus V_2$ と閉不変部分空間に分かれる. $i = 1, 2$ に対し, $V_i \cap F_{\lambda}^{\perp}$ は $V_0 \cap F_{\lambda}^{\perp} = F_0^{\perp}$ に含まれるから, $V_i \cap F_{\lambda}^{\perp}$ は $\{0\}$ か $F_0^{\perp}$ である. しかし, $\pi(f)V_i \subset V_i$ であるから,

$$F_0^{\perp} = (V_1 \cap F_{\lambda}^{\perp}) \oplus (V_2 \cap F_{\lambda}^{\perp}).$$

よって, $F_0^{\perp} = (V_1 \cap F_{\lambda}^{\perp})$ または $F_0^{\perp} = (V_2 \cap F_{\lambda}^{\perp})$. これより $V_0 \subset V_1$ または $V_0 \subset V_2$ となり矛盾する.

後半は, もしある既約表現が無限重複度で生じれば, ある $f$ に対し, $\pi(f)$ はある $0$ でない固有値を無限重複度でもつことになり矛盾する. □

**(1.2.3) 定理 (1.2.1) の証明** 与えられた $1$ の近傍 $U$ に対して, 別の近傍 $U'$ で

$$U'U' \subset U, \qquad (U')^{-1} = U'$$

となるものが存在する.

仮定より, $G$ は正則空間であるから, ある連続非負関数 $f' \neq 0$ で, $supp(f') \subset U'$ となるものが存在する. $f'^{*}(g) = \overline{f'(g^{-1})}$ とおく.

$$\pi(f')\pi(f'^{*}) = \pi(f' * f'^{*})$$

に注意して, $f = f' * f'^{*}$ とおくと, $supp(f) \subset U$ で $f = f^{*}$ である. また $f'$ の support はコンパクトとして, $supp(f)$ はコンパクトとしてよい. $\phi \in L^2(\Gamma\backslash G)$ とする.

$$\begin{aligned} r_{\Gamma}(f)\phi(x) &= \int_G f(g)\phi(xg)\,dg = \int_G f(x^{-1}y)\phi(y)\,dy \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)\phi(y)\,dy. \end{aligned}$$

つまり, $r_{\Gamma}(f)$ は

$$K_f^{\Gamma}(x,y) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y) \qquad (x, y \in \Gamma\backslash G)$$

を核とする積分作用素である. ここで $K_f^{\Gamma}(x,y)$ は $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$ 上連続である. よって $r_{\Gamma}(f)$ はコンパクト作用素である.

**注意 1** 連続な積分核をもつ作用素はコンパクト作用素の起源である.

**注意 2** 定理の結果は記号で

$$r_{\Gamma} = \oplus_{\pi\in\widehat{G}} m_{\Gamma}(\pi)\pi \qquad (m_{\Gamma}(\pi) < \infty)$$

と書ける.

**(1.2.4) 系** $G$ が Lie 群でユニモジュラーで, $f \in C_c^{\infty}(G)$ とすると, $r_{\Gamma}(f)$ はコンパクト作用

素である.

*Proof.* 定理の途中で示された. □

### 1.3 分解定理と trace class theorem

**(1.3.1) 定理** $G$ を実半単純 Lie 群とする. $L^2(\Gamma\backslash G)$ を不連続群 $\Gamma$ による剰余空間 $\Gamma\backslash G$ 上の自乗可積分関数全体とする. $\Gamma\backslash G$ はコンパクトと仮定し, $r_\Gamma(f)$ を $L^2(\Gamma\backslash G)$ の $G$ 上の右正則表現とする.

このとき $f \in C_c^\infty(G)$, すなわち $f$ は $G$ 上の $C^\infty$ 関数で compact support をもつとするとき, $r_\Gamma(f)$ は跡族 (trace class) である.

証明に入る前に trace class, Hilbert-Schmidt class の復習をしておく. Hilbert 空間 $E$ 上のコンパクト作用素は次のように分類される. $T$ という $E$ 上のコンパクト作用素に対し, $A = (T^*T)^{1/2}$ とおく. 但し $T^*$ は $T$ の随伴作用素である. $A$ は有界な正規作用素であるから "対角化" できる (すなわち $E$ は $A$ の固有空間の Hilbert 直和に分かれる). $A$ の固有値を重複度も込めて大きさの順に並べたものを $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots$ とする. このとき

$$B_p = \{T : \text{コンパクト作用素} \mid \|T\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p)^{1/p} < \infty\}$$

とおく. $B_1$ の元を trace class 作用素, $B_2$ の元を Hilbert-Schmidt class の作用素という. $B_2 \cdot B_2 \subset B_1$ であり, 逆に $B_1$ の元は $B_2$ の元 2 つの積として分解できる.

$T \in B_2$ のとき, $\{u_k\}_{k\geqslant 1}$ を $E$ の完全正規直交系とすれば,

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \|Tu_k\|^2 = \|T\|_2^2$$

となる.

$T \in B_1$ のとき $\mathrm{Tr}(T) = \sum (Tu_k, u_k)$ とおくと右辺は絶対収束する. これを $T$ の跡 (trace) という.

$(*)$ を使って Hilbert-Shimidt 作用素を直接定義してもよい. すなわち

**定義** Hilbert 空間 $E$ 上の線形作用素 $T$ は, $E$ のある完全正規直交系 $\{a_i \mid i \in I\}$ に対して

$$\|T\|_{HS} = (\sum_i \|Ta_i\|^2)^{1/2}$$

が有限のとき, Hilbert-Schmidt 作用素と呼ばれる. 数 $\|T\|_{HS}$ は $T$ の Hilbert-Schmidt norm と呼ばれ, その値は完全正規直交系 $\{a_i \mid i \in I\}$ の取り方に独立である.

$E$ 上の Hilbert-Schmidt 作用素の全体 $B_2$ は, $E$ 上のすべての有界線形作用素のなす Banach 代数 $B(E)$ の中で $*$-ideal をなす. $\|T\|$ を $T$ の operator norm とするとき, 任意の $T \in B_2$ に対して $\|T\| \geqslant \|T\|_{HS}$ となる. 任意のユニタリ作用素 $U$ に対し, $T \in B_2$ ならば $UTU^{-1}$ も $B_2$ に属し, $\|T\|_{HS} = \|UTU^{-1}\|_{HS}$ が成り立つ. $A \in B(E)$ に対し, $\|AT\|_{HS} \leqslant \|A\|\|T\|_{HS}$, $\|TA\|_{HS} \leqslant \|T\|_{HS}\|A\|$.

$B_1$ で $E$ の trace class 作用素全体を記す. $B_1$ は Banach algebra $B(E)$ の中の両側 $*$-ideal をなす. $B_1 \subset B_2$, すなわち, trace class 作用素は Hilbert-Schmidt class に属する. ノルム $\mathrm{Tr} : A \to \|A\|_{TC} = \mathrm{Tr}((A^*A)^{1/2})$ は trace class 作用素の集合に Banach $*$-algebra の構造をもたらし, その中で有限階数の作用素全体は everywhere dense である. $\mathrm{Tr} : B_1 \to \mathbf{C}$ は

線形汎関数である．$A \in B_1, T \in B(E)$ のとき，$AT, TA \in B_1$ であり，$\mathrm{Tr}(AT) = \mathrm{Tr}(TA)$ が成り立つ．$A$ が $E$ 上の self-adjoint operator で，$A \in B_1$ ならば，$\mathrm{Tr}(A)$ は重複度も込めた固有値の和に等しい．ここで，この和の定める級数は絶対収束する．

**(1.3.2) 補題** $f \in C_c(G)$，すなわち $f$ を $G$ 上の compact support を持つ連続関数とする．$G$ は locally compact, unimodular で第 2 可算公理を満たすとする．$(r_\Gamma, L^2(\Gamma\backslash G))$ を co-compact discrete subgroup $\Gamma$ に対する left coset space $\Gamma\backslash G$ 上の自乗可積分関数の空間上の右正則表現とする．このとき $r_\Gamma(f)$ は Hilbert-Schmidt class である．

*Proof.* $r_\Gamma(f)$ の核は $K_f^\Gamma(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)$ であたえらる．これは $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$ 上で有界連続関数であるから，

$$K_f^\Gamma(x,y) \in L^2(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G).$$

つまり

$$\{\int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} |K_f^\Gamma(\dot{x},\dot{y})|^2 d\dot{x}d\dot{y}\}^{1/2} < \infty.$$

これは $r_\Gamma(f)$ が Hilbert-Schmidt class であることを示す． □

**(1.3.3) 分解定理 (Duflo-Labesse)** $G$ を実半単純 Lie 群とする．このとき任意の $f \in C_c^\infty(G)$ に対して，有限個の $f_1, f_2, \ldots, f_{2n} \in C_c^\infty(G)$ が存在して，

$$f = \sum_{i=1}^n f_{2i-1} * f_{2i}$$

とかける．

これは証明しない．実はより強く次が成立する．

**(1.3.4) 定理 (Dixmier-Malliavin)** $G$ を半単純 Lie 群とする．$f \in C_c^\infty(G)$ が与えられたとき，$f_1$, $f_2 \in C_c^\infty(G)$ が存在して，

$$f = f_1 * f_2$$

が成り立つ．

証明は，[Dixmier-Malliavin78] を参照．

定理 (1.3.1) の証明: $r \in C_c^\infty(G)$ に対し，$f_1, f_2, \ldots, f_{2n-1}, f_{2n} \in C_c^\infty(G)$ が存在して，

$$f = \sum_{i=1}^n f_{2i-1} * f_{2i}$$

となる．各 $i$ に対して $r_\Gamma(f_{2i-1})$, $r_\Gamma(f_{2i})$ は Hilbert-Schmidt class であるから，

$$r_\Gamma(f_{2i-1})r_\Gamma(f_{2i}) = r_\Gamma(f_{2i-1} * f_{2i})$$

は trace class である． □

**(1.3.5) 系** $\pi \in \widehat{G}$ で $m_\Gamma(\pi) \neq 0$ であると仮定する．すると，任意の $f \in C_c^\infty(G)$ に対して

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$$

は trace class に属する．

__注__ Harish-Chandra のもっと一般的な結果がある．あとの節 (定理 2.1.1) で説明する．

**(1.3.6) 定理** (1.3.1) と同じ記号と仮定の下で，

$$\mathrm{Tr}(r_\Gamma(f)) = \sum_{\pi\in\widehat{G}} m_\Gamma(\pi)\mathrm{Tr}(\pi(f)).$$

但し $\mathrm{Tr}(r_\Gamma(f))$ は trace class operator の跡を表す．右辺の和は絶対収束する．

### 1.4 Selberg trace formula. 最初の形

**(1.4.1) 補題** $G$ を実半単純 Lie 群，$\Gamma$ を $G$ の離散部分群で，$\Gamma\backslash G$ は compact とする．このとき $f\in C_c^\infty(G)$ に対し，

$$\mathrm{Tr}(r_\Gamma(f)) = \int_{\Gamma\backslash G} K_f^\Gamma(\dot{x},\dot{x})d\dot{x}.$$

但し，

$$K_f^\Gamma(\dot{x},\dot{y}) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y) \quad (x,y\in G,\ \dot{x}=\Gamma x, \dot{y}=\Gamma y).$$

*Proof.* 学部 3 年生の演習問題である．念のため書く．記号を簡略化するため，以下 $\dot{x}$ と $\dot{y}$ の $\dot{}$ を省略する．

Duflo-Labesse の補題 (1.3.3) より, $f = f' * f''$ $(f', f''\in C_c^\infty(G))$ として良い。

$$\begin{aligned}
&[r_\Gamma(f)\phi](x) = [r_\Gamma(f')r_\Gamma(f'')\phi](x)\\
&= \int_{\Gamma\backslash G} K_{f'}^\Gamma(x,y)\Big\{\int_{\Gamma\backslash G} K_{f''}^\Gamma(y,z)\phi(z)dz\Big\}dy\\
&= \int_{\Gamma\backslash G}\Big\{\int_{\Gamma\backslash G} K_{f'}^\Gamma(x,y)K_{f''}^\Gamma(y,z)dy\Big\}\phi(z)dz
\end{aligned}$$

より，

$$(\natural) \qquad \int_{\Gamma\backslash G} K_{f'}^\Gamma(x,y)K_{f''}^\Gamma(y,z)dy = K_f^\Gamma(x,z)$$

がほとんど至る所で成立する．一方, 任意の compact support をもつ連続関数 $h\in C_c(G)$ と任意の $\epsilon>0$ に対して, 単位元 $e\in G$ の相対コンパクトな近傍 $U_\epsilon$ が存在して，

$$|h(xy)-h(y)|<\epsilon, \qquad \forall x\in U_\epsilon,\ \forall y\in G$$

が成立する．$\Gamma\backslash G$ はコンパクトと仮定しているので，

$$\#(U_1\mathrm{supp}(f)y^{-1}\cap\Gamma)\leqslant N_0, \qquad \forall y\in G$$

なる自然数 $N_0$ が存在する．したがって，任意の $0<\epsilon<1$ に対して，

$$|\sum_{\gamma\in\Gamma} h(x^{-1}\gamma y) - \sum_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma y)| < N_0\epsilon, \qquad \forall x\in U_\epsilon\cap U_1,\ \forall y\in G.$$

このことから，$(\natural)$ の左辺が $(x,z)\in(\Gamma\backslash G)^2$ の連続関数であることが容易に示せるので，$(\natural)$ はすべての $(x,z)\in(\Gamma\backslash G)^2$ について成立する. さて，$L^2(\Gamma\backslash G)$ の完全正規直交系を

$\{\phi_n\}_{n\geqslant 1}$ とすると，$\{\phi_m(x)\cdot\overline{\phi_n(y)}\}_{m,n\geqslant 1}$ は $L^2(\Gamma\backslash G\times\Gamma\backslash G)$ の完全正規直交系である．核関数たちは，

$$K^{\Gamma}_{f'}(x,y)=\sum_{m,n}c'_{m,n}\phi_m(x)\overline{\phi_n(y)}\qquad K^{\Gamma}_{f''}(y,z)=\sum_{n,l}c''_{n,l}\phi_n(y)\overline{\phi_l(z)}$$

と $L^2(\Gamma\backslash G\times\Gamma\backslash G)$ の中で展開できるので、

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma\backslash G}K^{\Gamma}_f(x,x)dx\\&=\int_{(\Gamma\backslash G)^2}K^{\Gamma}_{f'}(x,y)K^{\Gamma}_{f''}(y,x)dxdy\\&=\sum_{m,n=1}^{\infty}c'_{m,n}c''_{n,m}=\mathrm{Tr}(r_\Gamma(f')r_\Gamma(f''))=\mathrm{Tr}(r_\Gamma(f)).\end{aligned}$$

□

さて，

$$\int_{\Gamma\backslash G}K^{\Gamma}_f(x,x)dx$$

を計算しよう．上の積分を $I$ とおく．

$$\begin{aligned}I&=\int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma}f(x^{-1}\gamma x)dx\\&=\int_{\Gamma\backslash G}[\sum_{\gamma\in\Gamma/\sim}\{\sum_{\xi\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma}f(x^{-1}\xi^{-1}\gamma\xi x)\}]dx.\end{aligned}$$

但し $\Gamma/\sim$ は $\gamma$ の共役類を表し，$\Gamma_\gamma$ は $\Gamma$ の中での $\gamma$ の中心化群である．

$f\in C_c^{\infty}(G)$ に対し，非負な $h\in C_c^{\infty}(G)$ で $|f|\leqslant h$ なるものが存在するから，$\sum\int$ は絶対収束する．よって順序を交換し，

$$\begin{aligned}I&=\sum_{\gamma\in\Gamma/\sim}\int_{\Gamma\backslash G}\{\sum_{\xi\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma}f(x^{-1}\xi^{-1}\gamma\xi x)\}dx\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma/\sim}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G}f(x^{-1}\gamma x)d\ddot{x}\quad(\ddot{x}=\Gamma_\gamma\backslash G)\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma/\sim}\int_{G_\gamma\backslash G}d\dot{z}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma}f(z^{-1}y^{-1}\gamma yz)d\dot{y}.\end{aligned}$$

但し，$G_\gamma$ は $G$ の中での $\gamma$ の中心化群である．$f(z^{-1}y^{-1}\gamma yz)=f(z^{-1}\gamma z)$ より，

$$I=\sum_{\gamma\in\Gamma/\sim}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma}d\dot{y}\int_{G_\gamma\backslash G}f(\dot{z}^{-1}\gamma\dot{z})d\dot{z}.$$

ここで $\Gamma\backslash G$ は compact より，$\gamma\in G$ は semisimple element で $G_\gamma$ は reductive になる．従って $G_\gamma$ は unimodular で，$G_\gamma\backslash G$ に不変測度が存在することに注意する．

**(1.4.2) 定義 (軌道積分 orbital integral)**

$$\Phi_f(\gamma)=\int_{G_\gamma\backslash G}f(\dot{z}^{-1}\gamma\dot{z})d\dot{z}$$

と書く．但し，$G_\gamma\backslash G$ の不変測度を $d\dot{z}$ と書く．

まとめて

**(1.4.3) 命題** $f \in C_c^\infty(G)$ とするとき，

$$\int_{\Gamma\backslash G} K_f^\Gamma(\dot{x}, \dot{x}) d\dot{x} = \sum_{\gamma \in \Gamma/\sim} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \Phi_f(\gamma).$$

前節の定理 (1.3.6) と上の命題 (1.4.3) をあわせて

**(1.4.4) 定理 (Selberg trace formula)** $G$ を半単純 Lie 群，$\Gamma$ を $G$ の離散部分群で co-compact とする．このとき下の右辺も左辺も収束し，

$$\sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi) \mathrm{Tr}(\pi(f)) = \sum_{\gamma \in \Gamma/\sim} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \Phi_f(\gamma)$$

が成立する．

**(1.4.5) 注意** Selberg trace formula は $f$ が $C_c^\infty(G)$ に属さなくても，もっと一般の関数でも成立する．例えば $K_f^\Gamma(\dot{x}, \dot{x})$ が意味を持つためには，$f$ が可積分であれば十分である．事実，次元公式の計算には $f$ として discrete series の表現の係数で，$G$ 上可積分なものがあるとき (このときの表現も可積分という) 適用して行われてきた．

# 第 2 章　Paley-Wiener の定理と pseudo-coefficients

Selberg の trace formula は保型形式の次元を計算することをその応用として想定して考え出された．いま，$G$ を半単純 Lie 群，$\Gamma$ を $G$ の離散部分群，$\Gamma\backslash G$ を compact とするとき，$f \in C_c^\infty(G)$ に対して，

$$\mathrm{Tr}(r_\Gamma(f)) = \sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi)\mathrm{Tr}(\pi(f))$$

が，その一方の辺を与える．保型形式の次元の計算はあとで示すように特定の $\pi_0 \in \widehat{G}$ に対して $\pi_0$ の $L^2(\Gamma\backslash G)$ の中での重複度を計算することに相当する．このためには，$\pi_0$ にたいして次のような性質をもつ $f_0$ が存在することがわかれば理想的である．

**(2.0.0) 目標**　$\pi_0 \in \widehat{G}$ に対して, $f_0 \in C_c^\infty(G)$ で，

$$\mathrm{Tr}(\pi_0(f_0)) = 1$$

でかつ，$\pi$ と $\pi_0$ が同値でないとき，つまり，$\pi \neq \pi_0$ in $\widehat{G}$ であるとき，

$$\mathrm{Tr}(\pi(f_0)) = 0.$$

実際，このような $f_0$ が存在すれば, Selberg 跡公式の左辺は

$$\mathrm{Tr}(r_\Gamma(f_0)) = m_\Gamma(\pi_0),$$

となり，あとはもう一方の右辺をこの $f_0$ にたいして計算すれば $m_\Gamma(\pi_0)$ がわかることになる．この章では どんな $\pi_0$ に対して上のような $f_0$ が存在するか を問題にする．このような関数を pseudo-coefficient という．理由は, $\pi_0$ の反傾表現 $\pi_0^*$ の係数 $f_0(g) = (\pi_0^*(g)v_0, v_0)$ $(v_0 \in \pi_0^*)$ が Schur の直交関係から

$$\mathrm{Tr}(\pi(f_0)) = \int_G f_0(g)\Theta_\pi(g)dg = \delta_{\pi,\pi_0} \qquad \forall \pi \in \widehat{G}_{\mathrm{temp}},$$

をみたすが, 一般には $f_0$ は $C_c^\infty(G)$ に属すことはないので，係数のごときふるまいをする関数という意味で名付けられた．

## 2.1 表現の指標と Fourier 変換

$G$ を半単純 Lie 群とし，$(\pi, V)$ を $G$ の既約 Hilbert 表現とする．$f \in C_c^\infty(G)$ に対し，

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg \in \mathrm{End}(V)$$

とおく．

**(2.1.1) 定理 (Harish-Chandra)**　$f \in C_c^\infty(G)$ に対し，$\pi(f)$ は of trace class である．

これより，

$$T_\pi : C_c^\infty(G) \ni f \mapsto \mathrm{Tr}(\pi(f)) \in \mathbf{C}$$

は線形汎関数となることがわかる．これが，$C_c^\infty(G)$ に自然に定まる seminorm 系に対して連続になるか，つまり distribution を定義するかどうかが次の問題になる．

**(2.1.2) 定理 (Harish-Chandra)**　(i) $T_\pi$ は連続，つまり $G$ 上の distribution を定める：

$$T_\pi(f) = \int_G \Theta_\pi(g)f(g)dg$$

とかく.
(ii) $\Theta_\pi(g)$ は $G$ 上で局所的に可積分である.
(iii) $\Theta_\pi(g)$ は $G'$ ($G$ 上の正則元のなす集合) 上で実解析的である.

**注意** ここで，正則元とは，$G = SL_n(\mathbf{R})$ のとき，$g$ を対角化して，$g \sim \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix}$
と書いたとき，$\prod_{i<j}(t_i - t_j) \neq 0$ となるような元である.

**(2.1.3) 定義** 上の $\Theta_\pi$ を表現 $\pi$ の指標とよぼう.

**注意** $\Theta_\pi$ は，central or invariant である．つまり，$g \in G$, $x \in G$ という任意の元に対して，

$$\Theta_\pi(x^{-1}gx) = \Theta_\pi(g).$$

**注意** $\Theta_\pi$ は表現 $\pi$ の同値類のみによる．つまり，$\pi$ と $\pi'$ が同値ならば，$\Theta_\pi = \Theta_{\pi'}$.

**記号** $\widetilde{G}$ で群 $G$ の既約 Hilbert 表現の同値類を表す．$\widehat{G} \subset \widetilde{G}$ である.

**(2.1.3) 定義 (Fourier 変換)** $f \in C_c^\infty(G)$ に対して，$\pi \in \widetilde{G}$ のとき，

$$\widetilde{f}(\pi) := \mathrm{Tr}(\pi(f)) = \int_G f(g)\Theta_\pi(g)dg$$

で $\widetilde{G}$ 上の関数 $\widetilde{f}$ を定め，これを $f$ の $\widetilde{G}$ 上での Fourier 変換という．$\widetilde{f}$ の $\widehat{G}$ への制限を $\widehat{f}$ とかく．これを $f$ の $\widehat{G}$ 上での Fourier 変換と呼ぶ.

**注意** 上の記号により，Selberg trace formula の左辺 $\sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi)\mathrm{Tr}(\pi(f))$ は，

$$\sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi)\widehat{f}(\pi)$$

と書ける.

### 2.2 Tempered 表現

**(2.2.1) 定義** $(\pi, V)$ を $G$ の Hilbert 表現とする．$v, v' \in V$ に対して

$$G \ni g \mapsto \varphi_{v,v'}(g) = (\pi(g)v, v')$$

という形の $G$ 上の関数を表現 $\pi$ の係数という．但し, $(\ ,\ )$ は，$V$ の内積.

**(2.2.2) 定義** $(\pi, V)$ を $G$ の既約 Hilbert 表現とする．任意の $\epsilon > 0$ と任意の $v, v' \in V$ に対して係数 $\varphi_{v,v'}(g)$ が $L^{2+\epsilon}(G)$ に属するとき，つまり

$$\left\{ \int_G |\varphi_{v,v'}(g)|^{2+\epsilon} dg \right\}^{1/(2+\epsilon)} < \infty$$

のとき $\pi$ は tempered representation という.

**(2.2.3) 定理** tempered representation は unitary.

**記号** $\widehat{G}_{\mathrm{temp}} \subset \widehat{G}$ を tempered representation で代表される $\widehat{G}$ の subset とする．$\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}} := \widehat{G} \setminus \widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ と書き，$\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}$ の元を non-tempered representaion という.

**(2.2.4) 注意** tempered 表現の特徴付けはいろいろある．平たく言えば, tempered 表現と

は，$L^2(G)$ 上の正則表現の分解に現れる表現である．$L^2(G)$ は一般に既約ユニタリ表現の直積分になる．このとき tempered 表現は Plancherel 測度の support に入っている表現となる．

また，指標を使う別の特徴づけもある．$\mathcal{C}(G)$ を $G$ 上の Harish-Chandra の意味での Schwartz space とする．あるいは，$\mathcal{C}(G)$ を $G$ の cusp forms の空間ともいう．$C_c^\infty(G)$ は，$\mathcal{C}(G)$ の中で dense である．$\pi \in \widehat{G}$ の指標 $\Theta_\pi$ が連続に $C_c^\infty(G)$ から $\mathcal{C}(G)$ に延長できるとき，tempered という．$\pi \in \widehat{G}$ が tempered と $\Theta_\pi$ が tempered は同値である．

**(2.2.5) 例**　$G = SL(2, \mathbf{R})$ とする．このとき，$\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ に属する表現は

(i)　主系列 (principal series) (ii) 離散系列 (discrete series) (iii) 離散系列の極限 (limits of discrete series)

である．$\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}$ に属する表現は

(iv) 補系列 (complementary series) (v) 単位表現
である (これらの表現については, 第 3 章を参照）．

### 2.3 自乗可積分表現と pseudo-coefficients

$G$ を半単純 Lie 群とする．$(\pi, V)$ を $G$ の既約 Hilbert 表現とする．$v, v' \in V$ に対する係数を $\varphi_{v,v'}(g)$ と書く．

**(2.3.1) 定義** $(\pi, V)$ が square-integrable とは，$V$ のある元 $v, v' \neq 0$ で $\varphi_{v,v'}(\neq 0)$ が $L^2(G)$ に属するものが存在することをいう．

**(2.3.2) 命題 (Godement)** $(\pi, V)$ が square-integrable ならば，任意の $w, w'$ に対し，係数 $\varphi_{w,w'}$ は $L^2(G)$ に属する．

**(2.3.3) 注意** $(\pi, V)$ が square-integrable ならば, $L^2(G)$ 上の $G \times G$ の表現

$$(g_1, g_2) \mapsto \big(f(x) \in L^2(G) \mapsto f(g_1^{-1} x g_2) \in L^2(G)\big)$$

を既約分解したとき discrete spectrum $L^2(G)_{\mathrm{d}}$ に生じる．$\pi$ の係数 $\varphi_{w,w'}$ で生成される $L^2(G)$ の部分空間の閉包は，$G \times G$ の表現 $(\pi \otimes \pi^*, V \otimes V^*)$ に同値である. 但し，$\otimes$ は外部テンソル積．このようにして，square-integrable 表現は，Plancherel measure $c$ が，$c(\{\pi\}) > 0$ となるものとしても特徴付けられる．このような表現は, discrete series と呼ばれる．

$$\text{square integrable 表現} = \text{discrete series 表現}$$

である．

**記号** $\widehat{G}_2$ で $\widehat{G}$ の元で square-integrable 表現で代表されるものを表す．$\widehat{G}_{\mathrm{d}}$ で $\widehat{G}$ の元で discrete series に属するものを表す．$\widehat{G}_2 = \widehat{G}_{\mathrm{d}}$ なので，以下 $\widehat{G}_{\mathrm{d}}$ のみ用いる．定義より，

$$\widehat{G}_{\mathrm{d}} \subset \widehat{G}_{\mathrm{temp}} \subset \widehat{G} \subset \widetilde{G}$$

となる．Discrete series の存在については有名な Harish-Chandra の criterion がある:

**(2.3.4) 定理 (Harish-Chandra)** $G$ を半単純 Lie 群とする．このとき，

$$\widehat{G}_{\mathrm{d}} \neq \emptyset \Longleftrightarrow G \text{ は compact Cartan subgroup をもつ}$$

**(2.3.5) 例** (i) $SL(2, \mathbf{R})$ は $SO(2)$ を compact Cartan subgroup にもつ．$\widehat{G}_{\mathrm{d}} \neq \emptyset$.
(ii) もっと一般に

$$Sp(n; \mathbf{R}) = \left\{ g \in GL(2n, \mathbf{R}) \mid {}^t g \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

は，compact Cartan subgroup をもつ．$\widehat{G}_{\mathrm{d}} \neq \emptyset$.
(iii) $SL(2,\mathbf{C})$ は compact Cartan subgroup をもたない．$\widehat{G}_{\mathrm{d}} = \emptyset$. 従って，次の pseudo-coefficients も存在しない．(discrete series の表現がないから).

**pseudo-coefficients**

**(2.3.6) 定義** $\pi_0 \in \widehat{G}_{\mathrm{d}}$ が与えられたとする．$f \in C_c^\infty(G)$ が次を満たすとき，$f$ を $\pi_0$ に対する pseudo-coefficients という．

$$\widehat{f}(\pi) = \int_G f(g)\Theta_\pi(g)dg = \begin{cases} 1 & \pi = \pi_0 \text{ in } \widehat{G}_{\mathrm{temp}} \\ 0 & \pi \neq \pi_0 \text{ in } \widehat{G}_{\mathrm{temp}} \end{cases}$$

ここで，$\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ 以外の $\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}$ では，$\widehat{f}$ のふるまいに何も条件を要請していないことに注意せよ．後で説明するように，scalar Paley-Wiener Theorem (invariant Paley-Wiener Theorem) より次が出る．

**(2.3.7) 定理 (Clozel-Delorme)** $G$ を半単純 Lie 群とする．任意の $\pi_0 \in \widehat{G}_{\mathrm{d}}$ に対して，$\pi_0$ に対する pseudo-coefficients は存在する．

<u>**注意**</u> pseudo-coefficients は $G = SL(2,\mathbf{R})$ のとき，Duflo-Labesse [Duflo-Labesse71] によって初めて考え出された．pseudo-coefficients という名前は David Kazhdan によると聞いている．

## 2.4 表現の Langlands 分類

群 $G$ の既約 Hilbert 表現 $\widetilde{G}$ の (無限小) 同値類の分類は次のように行われる．$G$ は連結半単純 Lie 群．今，$G$ の parabolic subgroup $P$ を考え，その Langlands 分解を $P = MAN$ とする．但し，$N$ は unipotent radical of $P$, $A$ は split component，$M$ は semisimple. そのとき, $M$ の表現 $\sigma$ と $A$ の quasi-character ($A$ から $\mathbf{C}^\times$ への連続準同型) $\lambda$ に対して, $\mathrm{Ind}_P^G((\sigma \otimes \lambda)\cdot\delta_P^{1/2})$ によって誘導表現 $I(P;\sigma,\lambda)$ が定まる．

<u>1st step (temperd representation の分類)</u> $G$ の parabolic subgroup $P = MAN$ で $M$ が compact Cartan subgroup をもつものを cuspidal という．cuspidal parabolic subgroup に対して，$\widehat{M}_{\mathrm{d}} \neq \emptyset$ であるから，$\sigma \in M_{\mathrm{d}}$ と $A$ の <u>unitary</u> character $\lambda$ に対して $G$ の unitary 表現 $I(P;\sigma,\lambda)$ が定まる．このとき，次が知られている：

**(2.4.1) 定理** $G$ を連結半単純 Lie 群とする．$\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ とする．このとき，$\pi$ に対して，ある cuspidal parabolic subgroup $P$,（$P = MAN$ をその Langlands 分解とする)，$\sigma \in \widehat{M}_{\mathrm{d}}$ とさらに $\lambda \in \widehat{A}$ (ユニタリ指標) が up to conj で <u>一意に</u> 定まり，$\pi$ は $I(P;\sigma,\lambda)$ の部分表現 (より強く，直和因子) となる．

ここまでが分類の第一段階である．人によっては次の 2nd step のみを Langlands 分類と呼んでいる．さて，連結な群に対して $\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ が定まったので，連結でない群も $\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ がこれからだいたい分かる．これができたとする．

<u>2nd step</u> $G$ の parabolic subgroup $P = MAN$ を考える．$M$ の tempered 表現 $\sigma \in \widehat{M}_{\mathrm{temp}}$ と $A$ の必ずしもユニタリでない quasi-character $\lambda : A \to \mathbf{C}^\times$ を考える．誘導表現 $I(P;\sigma,\lambda)$ を考える．ここで $I(P;\sigma,\lambda)$ は Hilbert 表現であるが，$\lambda$ はユニタリとは限らないので，ユニタリ表現とは限らない．

さて，$A$ は $(\mathbf{R}_{>0})^l$ と同型なので，$A$ の Lie 環 $\mathfrak{a}$ は $\mathbf{R}^l$ と同型でユニタリ指標全体は, $\mathfrak{a}$ の双対 $\mathfrak{a}^*$ の複素化 $\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$ の純虚部 $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ と同一視される．今 $\lambda : A \to \mathbf{C}^\times$ に対応する $\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$ の元を $\nu = \log\lambda$ とする．

**(2.4.2) 定理 (Miličic)** $\nu = \log\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$ とする．$(P, A)$ の任意の positive root に対し，$\mathrm{Re}\langle\nu, \alpha\rangle > 0$ という条件が満たされているとき，$I(P; \sigma, \lambda)$ は一意に定まる既約な商表現 $J(P; \sigma, \lambda)$ をもつ. 上の条件を満たす $(P, \sigma, \lambda)$ を Langlands data という．

**(2.4.3) 定義** 上の $J(P; \sigma, \lambda)$ を Langlands quotient という．

さて分類の第二段階を説明するために, 表現空間のノルムを忘れないと具合が悪い. そのために言葉を少し準備する．

$G$ を連結半単純リー群，$K$ をその極大コンパクト部分群，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ を $G$ のリー環とする．$(\pi, V)$ を $G$ の表現とする (Hilbert 表現) . $V_K$ で $V$ の $K$-finite vectors 全体のなす部分空間とする．但し，$v \in V$ が $K$-finite とは,

$$\{\pi(k)v | k \in K\}$$

が $V$ の有限次元部分空間をなすことをいう. $V_K$ は $K$ の表現 $(\sigma, W_\sigma)$ たちの直和に分解する．$V$ が既約表現とする．このとき，各 $\sigma$ の $K$ での重複度は有限になる (admissibility). $V_K$ の元は全て $C^\infty$-vector である. つまり関数

$$g \in G \mapsto \pi(g)v$$

は $C^\infty$-写像. よって，$v \in V_K$ のとき，$X \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$X \cdot v = \lim_{t \to 0} \frac{\pi(\exp(tX))v - v}{t}$$

で $\mathfrak{g}$ の $V_K$ への作用が定まる．こうして，$V_K$ は $(\mathfrak{g}, K)$-加群となる．

**(2.4.4) 定義** (i) $G$ の既約表現 $(\pi_1, V_1)$ と $(\pi_2, V_2)$ に対して，$(V_1)_K$ と $(V_2)_K$ とが $(\mathfrak{g}, K)$-加群として同型のとき，$\pi_1$ と $\pi_2$ とは infinitesimal equivalent という．

**注意** $\pi_1, \pi_2$ が共にユニタリ表現のとき，infinitesimal equivalent と unitary equivalent は同値であることが知られている．

さて，分類定理は次の通り．

**(2.4.5) 定理** $(\pi, V)$ を $G$ の既約 Hilbert 表現とすると，一意に定まる Langlands data $(P, \sigma, \lambda)$ があって，$(\pi, V)$ は Langlands quotient $J(P; \sigma, \lambda)$ と infinitesimal equivalent である．

**注意** $(\pi, V)$ が non-tempered unitary のとき，$J(P; \sigma, \lambda)$ は構成時の Hilbert 空間の内積に関して必ずしもユニタリでない．つまり $(\pi, V)$ 及び $J(P; \sigma, \lambda)$ の dense subspaces で $(\mathfrak{g}, K)$-加群として同型になるものがあるが，ユニタリ同値を問題にしているわけではない．

**2.5 Paley-Wiener Theorem.**
古典的な場合から出発する． $\mathbf{R}^n$ を考える． $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ とする．$(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbf{R}^n$ のとき，$f$ の Fourier 変換 $\widehat{f}$ は，

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{(n/2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i \sum_{k=1}^{n} t_k x_k} dx_1 \cdots dx_n$$

で定義される．$(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbf{C}^n$ とするとき，$f$ の Fourier-Laplace 変換 $F(\zeta)$ を

$$F(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{(n/2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i \sum_{k=1}^{n} \zeta_k x_k} dx_1 \cdots dx_n$$

で定める．$r > 0$ とする．$\mathbf{R}^n$ の半径 $r$ の閉円盤を $D_r$ とする．

$$C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)_r := \{f \in C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n) | \mathrm{supp}(f) \subset D_r\}$$

とおく．

$$\begin{aligned}\mathrm{PW}(\mathbf{C}^N)_r = \{&F(\zeta) = F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \text{ は } \{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\} \text{ に関する整関数} \mid \\ &\text{任意の自然数 } N \text{ に対し } \sup_{\zeta \in \mathbf{C}^n} \{|F(\zeta)| e^{-r||\mathrm{Im}\zeta||}(1 + ||\zeta||^N)\} < \infty\}\end{aligned}$$

とおく．但し，$||\ \ ||$ は Euclid norm である．

**(2.5.1) Classical Paley-Wiener Theorem**
Fourier-Laplace 変換 $f \mapsto F$ は線型な全単射

$$C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n)_r \cong \mathrm{PW}(\mathbf{C}^n)_r$$

を引き起こす．特に，$\mathrm{PW}(\mathbf{C}^n) = \cup_{r>0} \mathrm{PW}(\mathbf{C}^n)_r$ とおくと，

$$C_c^{\infty}(\mathbf{R}^n) \cong \mathrm{PW}(\mathbf{C}^n).$$

さて，tempered representation の '複素化' を考えよう．$P = MAN$ を $G$ の cuspidal parabolic subgroup とする．$\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A)$ とする．$\mathfrak{a}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ とし，$\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ をその dual space とする．$\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ は $A$ の quasi-character $\lambda : A \to \mathbf{C}^*$ に $\lambda = \exp \nu$ で対応しているとせよ．$\sigma$ を $M$ の discrete series の表現とするとき，$\mathrm{Ind}_P^G((\sigma \otimes \lambda)\delta_P^{1/2})$ を考える．これを $I(P, \sigma, \lambda)$ と書く．$\sigma \in \widehat{M}_d$ となるような上の $I(P; \sigma, \lambda)$ を一般化された主系列表現という．$P_i = M_i A_i N_i$ $(i = 1, \cdots, R)$ を $G$ の cuspidal parabolic subgroups の (modulo conjugation の) 代表系とする．

**(2.5.2) 定義** $f \in C_c^{\infty}(G)$ のとき，各 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant R)$ に対して，$\delta \in (\widehat{M_i})_{\mathrm{d}}, \nu \in \mathfrak{a}_{i,\mathbf{C}}^*$ のとき，

$$F_i(\delta, \nu) = \widetilde{f}(I(P; \sigma, \lambda)) = \int_G f(g) \Theta_{I(P;\sigma,\lambda)}(g) dg$$

とおく．但し，$\lambda = \exp \nu \in \mathrm{Hom}_{conti}(A, \mathbf{C}^{\times})$.

ここでさらに，$W_i = W(A_i)$ を $(G, A_i)$ の Weyl 群とする．これは，$(\widehat{M_i})_{\mathrm{d}}$ と $\mathfrak{a}_{i,\mathbf{C}}^*$ に作用する．

**定理 (Clozel-Delorme)** 各 $i$ $(1 \leqslant i \leqslant R)$ に対して関数 $F_i = F_i(\delta, \nu) : (\widehat{M_i})_{\mathrm{d}} \times \mathfrak{a}_{i,\mathbf{C}}^* \to \mathbf{C}$ が与えられたと仮定せよ．そのとき，$f \in C_c^{\infty}(G, K)$ が存在して

$$F_i(\delta, \nu) = \widetilde{f}(I(P; \sigma, \lambda)) \qquad (\delta \in (\widehat{M_i})_{\mathrm{d}}, \nu \in \mathfrak{a}_{i,\mathbf{C}}^*)$$

が全ての $i$ に対して成立するように出来るのは，$F_i$ たちが次の条件をみたすときで，そのときに限る：

(i) 全ての $i$ に対して，$F_i$ は $\delta$ に関して有限の support をもつ;

(ii) 各 $\delta$ に対して，$F_i(\delta,\nu)$ は $\nu$ の関数として，$\mathrm{PW}(\mathfrak{a}^*_{i,\mathbf{C}})$ に属する;

(iii) 各 $i$ に対して，$F_i(\delta,\nu)=F_i(w\delta,w\nu)$ $(\forall w\in W_i)$ が成立する．

但し，ここで $\mathrm{PW}(\mathfrak{a}^*_{i,\mathbf{C}})=\cup_{r>0}\mathrm{PW}(\mathfrak{a}^*_{i,\mathbf{C}})_r$ で，

$$\mathrm{PW}(\mathfrak{a}^*_{i,\mathbf{C}})_r=\{F(\zeta):\mathfrak{a}^*_{i,\mathbf{C}}\to\mathbf{C}\text{ は整関数}\mid \\ \text{任意の自然数 } N \text{ に対し} \sup_{\zeta\in\mathfrak{a}^*_{i,\mathbf{C}}}\{|F(\zeta)|e^{-r||\mathrm{Re}\zeta||}(1+||\zeta||^N)\}<\infty\}.$$

証明は [Clozel-Delorme84] にある．

特に，ある $i$ について $M_i=G$ となるとき，つまり $G$ が compact Cartan subgroup をもつとき，即ち Harish-Chandra の criterion によって $\widehat{G}_{\mathrm{d}}\neq\emptyset$ のとき，pseudo-coefficient の存在 (定理 (2.3.7)) がすぐに導かれる．

**注意** $I(P;\sigma,\lambda)$ はユニタリで既約でないときがある．この limits of discrete series が現れるとき，$F_i$ の $\widehat{G}$ 上でのふるまいはもう少し詳しくみる必要がある．それが，Clozel-Delorme の第 II 部 [Clozel-Delorme90] の目的のひとつである．

**例.** $G=SL(2,\mathbf{R})$. cuspidal parabolic subgroup は $G$ 自身と $\left\{\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & *\end{pmatrix}\in G\right\}$ の 2 つある．$P_1=\left\{\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & *\end{pmatrix}\in G\right\}$ とおくと，$M_1=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $A_1=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}|a>0\right\}$. $M_1$ の表現は $+:M_1\to\mathbf{C}^\times$ trivial 表現と sgn 表現 $-:M_1\to\mathbf{C}^\times$ とがある．$\nu\in\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_1\subset\mathfrak{a}^*_{1,\mathbf{C}}$ のとき，$I(P_1;+,\nu)$ はすべて既約ユニタリ表現である．$\nu\in\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_1\subset\mathfrak{a}^*_{1,\mathbf{C}}$ のとき，$I(P_1;-,\nu)$ は $\nu=0$ 以外はすべて既約ユニタリ表現で，$I(P_1;-,0)$ は 2 つの既約ユニタリ表現に分解する．これは，$SL(2,\mathbf{R})$ の 2 つの limit of discrete series を与えている．

### 2.6 Pseudo-coefficients, 残された問題

さて，$\pi_0\in\widehat{G}_{\mathrm{d}}$ とし，$f_0$ を $\pi_0$ に対する pseudo-coefficients とする．すると，$(r_\Gamma,L^2(\Gamma\backslash G))$ で $r_\Gamma(f_0)$ の trace は

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(r_\Gamma(f_0))&=\sum_{\pi\in\widehat{G}}m_\Gamma(\pi)\widehat{f}_0(\pi)\\ &=\sum_{\pi\in\widehat{G}_{\mathrm{temp}}}m_\Gamma(\pi)\widehat{f}_0(\pi)+\sum_{\pi\in\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}}m_\Gamma(\pi)\widehat{f}_0(\pi)\\ &=m_\Gamma(\pi_0)+\sum_{\pi\in\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}}m_\Gamma(\pi)\widehat{f}_0(\pi)\end{aligned}$$

となる．それ故，次の課題は $\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}$ 上での $\widehat{f}_0$ のふるまいである．これはあとで，$SL(2,\mathbf{R})$ のときは完全に決定する (第 4 章の末尾でおこなう)．一般に，次が成立することが望ましく，もっともらしく思える．

**Hope (2.6.1)** $\widehat{G}_{\mathrm{d}}\neq\emptyset$ とする．$f_0\in C_c^\infty(G)$ を $\pi_0\in\widehat{G}_{\mathrm{d}}$ に対する pseudo-coefficient とす

る．このとき，$f_0(\pi) \neq 0$ ($\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}$) ならば, $G$ の既約 non-tempered unitary 表現 $(\pi, V)$ の continuous cohomology, or relative Lie algebra cohomology

$$\oplus_{i=0}^{\infty} H^i_{conti}(G, V \otimes F), \qquad \oplus_{i=0}^{\infty} H^i(\mathfrak{g}, K, V \otimes F)$$

は non-vanishing であろう．ここで，$F$ は $G$ の既約有限次元表現で，$\pi$ と反傾表現 $F^*$ の infinitesimal character は等しいものとする．

**Remark** N. Wallach によれば上の Hope は正しい (1990 年 9 月).

# 第3章　$SL(2,\mathbf{R})$ の既約表現

この章では, $SL(2,\mathbf{R})$ の既約ユニタリ表現の分類についての結果と指標の値を復習する. いずれも周知の事実であるので証明はつけない.

## 3.1 $SL(2,\mathbf{R})$ の既約ユニタリ表現

### 3.1.A Discrete series (離散系列) $D_k^+, D_k^-$ $(k \geqslant 2$ ; 整数$)$

$k$ を整数で, $k \geqslant 2$ とする. $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を上半平面とする. 表現空間として

$$H_k^+ = \{f : \mathfrak{h} \to \mathbf{C} \text{ 正則関数} \mid \int_{\mathfrak{h}} |f(\tau)|^2 y^k \frac{dxdy}{y^2} < \infty\}$$

を考える. 但し, $\tau = x + \sqrt{-1}y \in \mathfrak{h}$. $H_k^+$ は $(f,g) = \int_{\mathfrak{h}} f(\tau)\overline{g(\tau)} y^k \frac{dxdy}{y^2}$ を内積として Hilbert 空間となる.

$g \in SL(2,\mathbf{R})$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. $f \in H_k^+$ に対し, $SL(2,\mathbf{R})$ の作用を

$$\begin{aligned}(D_k^+(g)f)(\tau) &= (c\tau + d)^{-k} f(g^{-1}(\tau)) \\ &= (c\tau + d)^{-k} f\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\Big)\end{aligned}$$

で定める.

**(3.1.1) 命題** $(D_k^+, H_k^+)$ は既約ユニタリ表現である.

同様に

$$H_k^- = \{f : \mathfrak{h} \to \mathbf{C} \text{ 反正則関数} \mid \int_{\mathfrak{h}} |f(\tau)|^2 y^k \frac{dxdy}{y^2} < \infty\}$$

とし, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R})$ に対し,

$$(D_k^-(g)f)(\tau) = (c\bar{\tau} + d)^{-k} f(g^{-1}(\tau))$$

と定める. $(D_k^-, H_k^-)$ も既約ユニタリ表現である. さらに $D_k^\pm$ は $\widehat{G}_2$ に属する. これは例えば, $v_0 = (\tau + i)^{-k} \in H_k^+$ として, 係数 $(\pi(g)v_0, v_0)$ が square integrable であることを直接計算で check すればよい.

**注意** [Knapp86], [Lang75] では $D_k^+$ と $D_k^-$ が逆.

### 3.1.B Principal series (主系列) $P_{it}^+, P_{it}^-$ $(t \in \mathbf{R})$

表現空間を $L^2(\mathbf{R})$ とする. $g \in SL(2,\mathbf{R})$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$(P_{it}^+(g)f)(x) = |cx + d|^{-1-it} f\Big(\frac{ax + b}{cx + d}\Big)$$

$$(P_{it}^-(g)f)(x) = \mathrm{sgn}(cx + d)|cx + d|^{-1-it} f\Big(\frac{ax + b}{cx + d}\Big)$$

と定める.

**(3.1.2) 命題** (i) $P_{i0}^-$ 以外は, $P_{it}^+$, $P_{it}^-$ は既約ユニタリ表現である.
(ii) $P_{it}^+ \cong P_{-it}^+$, $P_{it}^- \cong P_{-it}^-$ というユニタリ同値がある. それ以外にはない.

**注意** $P_{i0}^-$ は 2 つの既約表現の直和に分解する．

**注意** cuspidal parabolic subgroup $P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R}) \right\}$ を考える．$M_1 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{Lie}(A_1) \cong \mathbf{R}$. すると，$P_{it}^+$ と $P_{it}^-$ はそれぞれ $I(P_1; +, it)$, $I(P_1; -, it)$ に相当する．特にこれらは tempered 表現である．

### 3.1.C Complementary series (補系列) $C_u$ $(0 < u < 1)$

表現空間は

$$H_u = \{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \text{ 可測関数} \mid \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\overline{f(y)}}{|x-y|^{1-u}} \, dxdy < \infty \}.$$

$f \in H_u$, $g \in SL(2, \mathbf{R})$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，

$$(C_u(g)f)(x) = |cx + d|^{-1-u} f\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)$$

とおく．

**(3.1.3) 命題** $C_u$ は既約ユニタリ表現である．

### 3.1.D Limit of discrete series (離散系列の極限) $D_1^+, D_1^-$

$$H_1^+ = \{ f : \mathfrak{h} \to \mathbf{C} \text{ 正則関数} \mid \|f\| = \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dx < \infty \}$$

を $D_1^+$ の表現空間とする．$D_n^+$ と同様に $n = 1$ として $SL(2, \mathbf{R})$ の作用を定める．$D_n^-$ についても同様.

**(3.1.4) 命題** (i) $D_1^+, D_1^-$ は既約ユニタリ表現である．
(ii) $P_{i0} \cong D_1^+ \oplus D_1^-$ (直和) という既約分解がある．

### 3.1.E Trivial representation (単位表現) 1

Trivial representation 1 は明らかにユニタリ表現である．

**(3.1.5) 定理** (i) $SL(2, \mathbf{R})$ の既約ユニタリ表現は上の (3.1.A)〜(3.1.E) で尽くされる．各系列は互いに同値でない.

(ii)

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_{\mathrm{d}} &= \{ D_k^+ \mid k \geqslant 2 \} \cup \{ D_k^- \mid k \geqslant 2 \}, \\
\widehat{G}_{\mathrm{temp}} &= \widehat{G}_{\mathrm{d}} \cup \{ D_1^+, D_1^- \} \cup \{ P_{it}^+ \mid t \in \mathbf{R}, t \geqslant 0 \} \cup \{ P_{it}^- \mid t \in \mathbf{R}, t > 0 \}, \\
\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}} &= \{ C_u \mid 0 < u < 1 \} \cup \{ 1 \}.
\end{aligned}$$

### 3.1.F Nonunitary principal series $P_\zeta^\pm (\zeta \in \mathbf{C})$

$\zeta \in \mathbf{C}$ に対して, 表現空間を $L^2(\mathbf{R}, (1+x^2)^{\mathrm{Re}(\zeta)}dx)$ とする. $g \in SL(2, \mathbf{R})$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し,

$$(P_\zeta^+(g)f)(x) = |cx+d|^{-1-\zeta} f\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)$$
$$(P_\zeta^-(g)f)(x) = \mathrm{sgn}(cx+d)|cx+d|^{-1-\zeta} f\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)$$

とおく.

### 3.2 $SL(2, \mathbf{R})$ の既約ユニタリ表現の指標

$G'$ で $G$ の正則元 (regular elements) の集合を表す.

$G' = \{g \in SL(2, \mathbf{R}) \mid P(X; g) := \det(X \cdot 1_2 - g) = 0$ が重根を持たない $\}$.

$G = SL(2, \mathbf{R})$ の元は次のように分類される.

**(3.2.1) 命題** $g \in G$ は次のいずれかに属する ($\sim$ は共役を表す).

(i) hyperbolic element

$$|\mathrm{tr}(g)| > 2 \Leftrightarrow P(t; g) = 0 \text{ は異なる 2 実根を持つ} \Leftrightarrow g \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} (|\lambda| > 1),$$

(ii) elliptic element

$$|\mathrm{tr}(g)| < 2 \Leftrightarrow P(t; g) = 0 \text{ 実根を持たない} \Leftrightarrow g \sim \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (\theta \notin \pi\mathbf{Z}),$$

(iii) quasi-unipotent element

$$|\mathrm{tr}(g)| = 2 \Leftrightarrow P(t; g) = 0 \text{ は重根を持つ} \Leftrightarrow g \sim \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(iv) central

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**記号** $G$ の hyperbolic element の集合を $G_{\mathrm{hyp}}$, elliptic element の集合を $G_{\mathrm{ell}}$ と表す.

$$G' = G_{\mathrm{hyp}} \cup G_{\mathrm{ell}}$$
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda > 0 \right\},\ A' = A \cap G' = A - \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B = \left\{ r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbf{R} \right\},\ B' = B \cap G' = B - \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると,

$$G_{\mathrm{hyp}} = \{\bigcup_{g \in G} gA'g^{-1}\} \cup \{\bigcup_{g \in G} g(-A')g^{-1}\},$$
$$G_{\mathrm{ell}} = \bigcup_{g \in G} gB'g^{-1}.$$

以下, $(\pi, V)$ を $SL(2, \mathbf{R})$ の既約ユニタリ表現, $\Theta_\pi$ をその指標とするとき, $\Theta_\pi$ は $G'$ 上で real analytic. 以下, $\Theta_\pi|_{G'}$ を求める. ([Knapp86, chap.X], [Lang75, chap.VII])

**(3.2.2) 定理**

(i) $\pi = P_{it}^{+}$ $(t \in \mathbf{R})$ のとき.

$$\begin{cases} g \in G_{\mathrm{hyp}},\ g \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \text{ならば} & \Theta_\pi(g) = \dfrac{|\lambda|^{it} + |\lambda|^{-it}}{|\lambda - \lambda^{-1}|}, \\ g \in G_{\mathrm{ell}} \text{のとき} & \Theta_\pi(g) = 0. \end{cases}$$

$\pi = P_{it}^{-}$ $(t \in \mathbf{R}, t \neq 0)$ のとき.

$$\begin{cases} g \in G_{\mathrm{hyp}},\ g \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \text{ならば} & \Theta_\pi(g) = \dfrac{|\lambda|^{it} + |\lambda|^{-it}}{|\lambda - \lambda^{-1}|} \operatorname{sgn}(\lambda), \\ g \in G_{\mathrm{ell}} \text{ならば} & \Theta_\pi(g) = 0. \end{cases}$$

(ii) $\pi = C_u$ $(0 < u < 1)$ のとき.

$$\begin{cases} g \in G_{\mathrm{hyp}},\ g \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \text{ならば} & \Theta_\pi(g) = \dfrac{|\lambda|^{u} + |\lambda|^{-u}}{|\lambda - \lambda^{-1}|}, \\ g \in G_{\mathrm{ell}} \text{ならば} & \Theta_\pi(g) = 0. \end{cases}$$

(iii) $\pi = D_n^{+}$ $(n \geqslant 1,\ n = 1$ のときは limit of discrete series$)$ のとき.

$$\begin{cases} g \in G_{\mathrm{hyp}},\ g \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, |\lambda| > 1 \text{ ならば} & \Theta_\pi(g) = \dfrac{\lambda^{-(n-1)}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \\ g = r_\theta \in G_{\mathrm{ell}} \text{ならば} & \Theta_\pi(g) = \dfrac{e^{-i(n-1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}. \end{cases}$$

$\pi = D_n^{-}$ $(n \geqslant 1)$ のとき.

$$\begin{cases} g \in G_{\mathrm{hyp}},\ g \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, |\lambda| > 1 \text{ ならば} & \Theta_\pi(g) = \dfrac{\lambda^{-(n-1)}}{\lambda - \lambda^{-1}}, \\ g = r_\theta \in G_{\mathrm{ell}} \text{ならば} & \Theta_\pi(g) = -\dfrac{e^{i(n-1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}. \end{cases}$$

**(3.2.2) Remark** 上の表を見ると, principal series と complementary series は指標は $G_{\mathrm{ell}}$ に support を持たないことが見て取れる.

## 第４章　軌道積分の展開 (or Fourier inversion formula) ($SL(2,\mathbf{R})$)

さて Selberg trace formula の一方の辺は

$$\sum_{\pi\in\widehat{G}} m_\Gamma(\pi)\widehat{f}(\pi)$$

である．もう一方の辺は

$$\sum_{\gamma\in\Gamma/\sim} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\cdot\int_{G_\gamma\backslash G} f(\dot{z}^{-1}\gamma\dot{z})\,d\dot{z}$$

である．ここでもし,

$$\Phi_f(\gamma)=\int_{G_\gamma\backslash G} f(\dot{z}^{-1}\gamma\dot{z})\,d\dot{z}$$

たちが $\widehat{f}(\pi)$ ($\pi\in\widehat{G}$) で書き表されれば, Selberg trace formula の両辺とも $\widehat{f}$ で書け, $f$ を陽に含まない形で書くことができる．この第 2 の形の Selberg trace formula を目指す．但し, $G=SL(2,\mathbf{R})$ とする．

例えば $\gamma=1$ のとき, $\Gamma_\gamma=\Gamma$, $G_\gamma=G$, よって $\Phi_f(\gamma)=f(1)$ であり, この問題は $f(1)$ を $\widehat{f}$ で表す問題になる．これは Plancherel の定理として周知の結果である．$\Phi_f(\gamma)$ は $f$ の値の $\Gamma$ 共役類での平均であり, それを $\widehat{f}$ で書き表すことは一種の Fourier 逆変換である．

### 4.1 Weyl の積分公式

準備として Weyl の積分公式を思い出す．その前にまず $G$ の元の分類を思い出す．$G-G'$ は実 2 次元で, $G$ の中で rare である．よって, $f\in C_c(G)$ とすると,

$$\int_G f(g)\,dg=\int_{G'} f(g)\,dg.$$

$G'=G_{\mathrm{hyp}}\cup G_{\mathrm{ell}}$ より,

$$\int_G f(g)\,dg=\int_{G_{\mathrm{hyp}}} f(x)\,dx+\int_{G_{\mathrm{ell}}} f(x)\,dx$$

となる．

$$\begin{aligned}
&A=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} \mid \lambda\in\mathbf{R},\,\lambda>0\right\},\quad A'=A\cap G'=A-\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\\
&-A=\{-x\mid x\in A\},\quad -A'=\{-x\mid x\in A'\}=(-A)-\left\{\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\},\\
&(A')^G=\left\{g\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}g^{-1}\mid \lambda>0, g\in G\right\}=\bigcup_{g\in G} gA'g^{-1},\\
&(-A')^G=\bigcup_{g\in G} g(-A')g^{-1}
\end{aligned}$$

と定めると,

$$G_{\mathrm{hyp}}=(A')^G+(-A')^G$$

より,

$$\int_{G_{\mathrm{hyp}}} f(x)\,dx=\int_{(A')^G} f(x)\,dx+\int_{(-A')^G} f(x)\,dx.$$

$g \in G$, $\dot{g} = Ag = A\backslash G$ と書く．さらに Haar 測度の間に次の関係を定める (測度の正規化条件)：$A\backslash G$, $A$, $G$ の測度を $dg = da\, d\dot{g}$ となるようにする．つまり $f \in C_c(G)$ に対し,

$$\int_G f(g)\, dg = \int_{A\backslash G} \left\{ \int_A f(ag)\, da \right\} d\dot{g}.$$

**(4.1.1) 補題** (Weyl integration formula) 任意の $f \in C_c((A')^G)$ に対して,

$$\int_{(A')^G} f(g)\, dg = \frac{1}{4} \int_{A\backslash G} \int_{A'} f(g^{-1}ag)\, |D_A(a)|^2\, da\, d\dot{g}.$$

$D_A(a)$ は Weyl denominator と呼ばれ, 指標公式の分母に表れる式で, ここでは $a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in A$ に対して, $D_A(a) = \lambda - \lambda^{-1}$ とする．

__注意__ $\Phi_f^A(a) = \displaystyle\int_{A\backslash G} f(g^{-1}ag)\, d\dot{g}$ が trace formula の一方に表れる orbital integral の１つである．

もう１つ compact Cartan subgroup $B(= K)$ に対する積分公式を定式化する．

$$B' = B - \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = B \cap G',$$
$$G_{\mathrm{ell}} = (B')^G = \bigcup_{g \in G} gB'g^{-1}$$

と定める．$B\backslash G$, $B$, $G$ の測度を $dg = db\, d\dot{g}$ で正規化する．但し, $g \in G$, $b \in B$, $\dot{g} \in Bg \in B\backslash G = K\backslash G$.

**(4.1.2) 補題** (Weyl integration formula) 任意の $f \in C_c((B')^G)$ に対して,

$$\int_{G_{\mathrm{ell}}} f(g)\, dg = \int_{(B')^G} f(g)\, dg = \int_{B\backslash G} \int_B f(g^{-1}bg)\, |D_B(b)|^2\, db\, d\dot{g}.$$

但し, $b = r_\theta \in B$ のとき, Weyl denominator $D_B(b)$ は $D_B(b) = D_B(r_\theta) = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ と定める．

(Weyl の積分公式の証明の概略) 写像

$$\phi : A\backslash G \times A' \ni (x, a) \mapsto x^{-1}ax \in (A')^G \subset G_{\mathrm{hyp}} \subset G'$$

を考える．$\phi$ は 4 対 1 写像である．

$A\backslash G \times A'$ の１点 $p_0 = (Ax_0, a_0)$ $(Ax_0 \in A\backslash G,\ a_0 \in A')$ を選び, $p_0$ の tangent space に誘導される linear map $(d\phi)_{p_0}$ を計算する．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A)$ をそれぞれ対応する Lie 環とすると, $T_{Ax_0} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ という自然な同一視がある．$t \in \mathbf{R}$, $X \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ とする．このとき $A\backslash G \times A'$ の curve $\gamma_X$ を

$$\gamma_X(t) = (\exp(tX)x_0, a_0)$$

で定めると,

$$\begin{aligned} \phi \circ \gamma_X(t) &= x_0^{-1} \exp(-tX) a_0 \exp(tX) x_0 \\ &= \{x_0^{-1} \exp(-tX) x_0\} \{x_0^{-1} a_0 \exp(tX) a_0^{-1} x_0\} (x_0^{-1} a_0 x_0) \\ &= \exp(-t\mathrm{Ad}(x_0^{-1})X) \cdot \exp\{t\mathrm{Ad}(x_0^{-1}a_0)X\} (x_0^{-1} a_0 x_0). \end{aligned}$$

$t=0$ で微分して, tangent を計算すると,

$$\{\mathrm{Ad}(x_0^{-1}a_0)-\mathrm{Ad}(x_0^{-1})\}X=\mathrm{Ad}(x_0^{-1})\cdot(\mathrm{Ad}(a_0)-1)X.$$

$A'$ の方の curve で $X\in\mathfrak{a}$ で同様にやると, tangent は

$$\mathrm{Ad}(x_0^{-1})X \qquad (X\in\mathfrak{a}).$$

よって,

$$\begin{aligned}|\det(d\phi)_{p_0}| &= |\det\mathrm{Ad}(x_0^{-1})_{|\mathfrak{a}}|\cdot|\det\mathrm{Ad}(x_0^{-1})\cdot\det(\mathrm{Ad}(a_0)-1)_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}| \\ &= |\det\mathrm{Ad}(x_0^{-1})_{|\mathfrak{g}}|\cdot|\det(\mathrm{Ad}(a_0)-1)_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{a}}| \\ &= 1\cdot|D_A(a_0)|^2 \\ &= |D_A(a_0)|^2.\end{aligned}$$

$B$ のときも同様になる.

## 4.2 双曲型軌道積分の展開

$\gamma\in\Gamma$ かつ $\gamma\in G_{\mathrm{hyp}}$ とする. つまり $|\mathrm{tr}(\gamma)|>2$ のときを考える.

$$\Phi_f(\gamma)=\int_{G_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\,d\dot{g}$$

を計算したい. まず, $\Phi_f(g_0^{-1}\gamma g_0)=\Phi_f(\gamma)$ であるから, $\gamma$ は $A$ か $-A$ に入るとしてよい. $\widehat{f}(P_{it}^+)$ の計算より始めよう. ここで $P_{it}^+$ は $K$-invariant vector をもつ主系列表現とする.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(P_{it}^+) &= \mathrm{Tr}(P_{it}^+(f)) \\ &= \int_G f(g)\Theta_{P_{it}^+}(g)\,dg \\ &= \int_{G_{\mathrm{hyp}}} f(g)\Theta_{P_{it}^+}(g)\,dg+\int_{G_{\mathrm{ell}}} f(g)\Theta_{P_{it}^+}(g)\,dg\end{aligned}$$

(注意：ここで指標が局所的に可積分であるという Harish-Chandra の重要な結果が使われている.) ここで $\Theta_{P_{it}^+}$ は $G_{\mathrm{ell}}$ 上 0 であるから (cf. Remark(3.2.2)), 上式の第 2 項は消える.

$$\widehat{f}(P_{it}^+)=\int_{(A')^G} f(x)\Theta_{P_{it}^+}(x)\,dx+\int_{(-A')^G} f(x)\Theta_{P_{it}^+}(x)\,dx.$$

ここで Weyl の積分公式 (補題 (4.1.1)) を用いて, さらに $\Theta_{P_{it}^+}$ が central であることに注意し,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(P_{it}^+) &= \frac{1}{4}\int_{A\backslash G}\int_{A'} f(g^{-1}ag)\Theta_{P_{it}^+}(a)\cdot|D_A(a)|^2\,da\,d\dot{g} \\ &\quad +\frac{1}{4}\int_{A\backslash G}\int_{A'} f(g^{-1}(-a)g)\Theta_{P_{it}^+}(-a)\cdot|D_A(-a)|^2\,da\,d\dot{g}.\end{aligned}$$

ここで

$$\Phi_f^A(a)=\int_{A\backslash G} f(g^{-1}ag)\,d\dot{g}$$

とおくと,

$$\widehat{f}(P_{it}^+)=\frac{1}{4}\int_{A'}\Phi_f^A(a)\Theta_{P_{it}^+}(a)\cdot|D_A(a)|^2\,da+\frac{1}{4}\int_{A'}\Phi_f^A(-a)\Theta_{P_{it}^+}(-a)\cdot|D_A(-a)|^2\,da.$$

さらに, $a = a_u = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix} \in A$ とおくと,

$$\Theta_{P_{it}^+}(a_u) \cdot |D_A(a_u)|^2 = \frac{(e^{iut} + e^{-iut})}{|e^u - e^{-u}|} \cdot |e^u - e^{-u}|^2 = (e^{iut} + e^{-iut}) \cdot |D_A(a_u)|,$$
$$\Theta_{P_{it}^+}(-a_u) \cdot |D_A(-a_u)|^2 = (e^{iut} + e^{-iut}) \cdot |D_A(-a_u)|,$$
$$da_u = du$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(P_{it}^+) &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(a_u)(e^{iut} + e^{-iut}) \cdot |D_A(a_u)|\, du \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(-a_u)(e^{iut} + e^{-iut}) \cdot |D_A(-a_u)|\, du \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(a_u) \cdot |D_A(a_u)| \cdot e^{iut}\, du \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(-a_u) \cdot |D_A(-a_u)| \cdot e^{iut}\, du.
\end{aligned}$$

これより,

**(4.2.1) 公式**

$$\widehat{f}(P_{it}^+) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(a_u) \cdot |D_A(a_u)| \cdot e^{iut}\, du + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(-a_u) \cdot |D_A(-a_u)| \cdot e^{iut}\, du,$$
$$\widehat{f}(P_{it}^-) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(a_u) \cdot |D_A(a_u)| \cdot e^{iut}\, du - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(-a_u) \cdot |D_A(-a_u)| \cdot e^{iut}\, du.$$

これより,

$$\widehat{f}(P_{it}^+) + \widehat{f}(P_{it}^-) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^A(a_u) \cdot |e^u - e^{-u}| \cdot e^{iut}\, du.$$

$\mathbf{R}$ 上の Fourier 逆変換公式より

$$|e^u - e^{-u}| \cdot \Phi_f^A(a_u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{\widehat{f}(P_{it}^+) + \widehat{f}(P_{it}^-)\} e^{-iut}\, dt.$$

ここで上式は $P_{it}^+ \cong P_{-it}^+$, $P_{it}^- \cong P_{-it}^-$ より $t \to (-t)$ として不変で, $e^{-iut}$ を $e^{iut}$ で取り替えても同じ. よって $e^u = \lambda > 0$ とすると,

$$\begin{aligned}
\Phi_f^A\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|\lambda - \lambda^{-1}|}\int_{-\infty}^{\infty} \{\widehat{f}(P_{it}^+) + \widehat{f}(P_{it}^-)\} \lambda^{it}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\widehat{f}(P_{it}^+) \cdot \frac{\lambda^{it}}{|\lambda - \lambda^{-1}|} + \widehat{f}(P_{it}^-) \cdot \frac{\lambda^{it}}{|\lambda - \lambda^{-1}|}\right\} dt.
\end{aligned}$$

ここで主系列の指標の値を思い出し, また $t$ を $-t$ で置き換えた式を加えて 2 で割ると

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\widehat{f}(P_{it}^+) \cdot \Theta_{P_{it}^+}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right) + \widehat{f}(P_{it}^-) \cdot \Theta_{P_{it}^-}\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right)\right\} dt.$$

$\lambda < 0$ のときも, $\widehat{f}(P_{it}^+) - \widehat{f}(P_{it}^-)$ を計算して次を得る.

**(4.2.2) 命題** (Expansion theorem for hyperbolic conjugacy class) $\gamma \in G_{\mathrm{hyp}}$ で, $\gamma \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned}\Phi_f(\gamma) &= \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\, d\dot{g} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{\widehat{f}(P_{it}^+)\Theta_{P_{it}^+}(\gamma) + \widehat{f}(P_{it}^-)\Theta_{P_{it}^-}(\gamma)\}\, dt.\end{aligned}$$

## 4.3 楕円型軌道積分の展開

この節の目標は, $\gamma \in \Gamma$ かつ $\gamma \in G_{\mathrm{ell}}$ のとき,

$$\Phi_f(\gamma) = \int_{G_\gamma \backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\, d\dot{g}$$

を $\widehat{f}(P_{it}^{\pm})$, $\widehat{f}({D_n}^{\pm})$ 等を使って展開することである.

指標は局所可積分 (定理 (2.1.2)(ii)) だから

$$\widehat{f}(D_n^+) = \int_{G_{\mathrm{ell}}} f(g)\Theta_{D_n^+}(g)\, dg + \int_{G_{\mathrm{hyp}}} f(g)\Theta_{D_n^+}(g)\, dg$$

となり, $\widehat{f}(D_n^-)$ についても同様の式が成立する.

$G_{\mathrm{ell}}$ 上の積分は Weyl の積分公式 (補題 (4.1.2)) から

$$\begin{aligned}\int_{G_{\mathrm{ell}}} f(g)\Theta_{D_n^+}(g)\, dg &= \int_{(B')^G} f(g)\Theta_{D_n^+}(g)\, dg \\ &= \int_B \int_{B\backslash G} f(g^{-1}bg)\Theta_{D_n^+}(b)|D_B(b)|^2\, d\dot{g}\, db.\end{aligned}$$

ここで $b = r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ として, $db = d\theta/2\pi$ とし, さらに $\Theta_{D_n^+}(b)$ の explicit formula を使って,

$$\int_{G_{\mathrm{ell}}} f(g)\Theta_{D_n^+}(g)\, dg = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_f^B(r_\theta)(e^{-i\theta} - e^{i\theta})e^{-i(n-1)\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

但し,

$$\Phi_f^B(r_\theta) = \int_{B\backslash G} f(g^{-1}r_\theta g)\, d\dot{g}.$$

$\widehat{f}(D_n^-)$ についても同様の計算をし, まとめて次を得る.

**(4.3.1) 公式**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_f^B(r_\theta)(e^{-i\theta} - e^{i\theta})e^{-i(n-1)\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} = \widehat{f}(D_n^+) - \int_{G_{\mathrm{hyp}}} f(g)\Theta_{D_n^+}(g)\, dg \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_f^B(r_\theta)(e^{-i\theta} - e^{i\theta})e^{i(n-1)\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} = -\widehat{f}(D_n^-) + \int_{G_{\mathrm{hyp}}} f(g)\Theta_{D_n^-}(g)\, dg \qquad (n \geqslant 1).$$

$\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上の Fourier inversion formula より

### (4.3.2) 公式

$$(e^{-i\theta}-e^{i\theta})\Phi_f^B(r_\theta)=\frac{1}{2}\{\widehat{f}(D_1^+)-\widehat{f}(D_1^-)\}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{\widehat{f}(D_n^+)e^{i(n-1)\theta}-\widehat{f}(D_n^-)e^{-i(n-1)\theta}\}$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\int_{G_{\rm hyp}}f(g)\Theta_{D_n}(g)(e^{i(n-1)\theta}-e^{-i(n-1)\theta})\,dg.$$

但し，ここで $D_n^+, D_n^-$ の指標の $G_{\rm hyp}$ 上での値は一致することに注意し，その共通の値を $\Theta_{D_n}(g)$ と書いた．また上の式の最後の和が $n=1$ からではなく $n=2$ から始まる理由は $n=1$ のとき，$\Theta_{D_n^+}(g)=\Theta_{D_n^-}(g)\,(g\in G_{\rm hyp})$ より，$n=1$ の項は消えてしまうからである．上式のこの最後の和を

$$I=\sum_{n=2}^{\infty}\int_{G_{\rm hyp}}f(g)\Theta_{D_n}(g)(e^{i(n-1)\theta}-e^{-i(n-1)\theta})\,dg$$

とおくと，

$$I=\int_{G_{\rm hyp}}f(g)\Big\{\sum_{n=2}^{\infty}\Theta_{D_n}(g)(e^{i(n-1)\theta}-e^{-i(n-1)\theta})\Big\}\,dg.$$

ここで，$g\in G_{\rm hyp}$ を $g\sim\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ $(|\lambda|>1)$ とすると，

$$\Theta_{D_n}(g)=\frac{\lambda^{-(n-1)}}{\lambda-\lambda^{-1}}.$$

よって，

$$\begin{aligned}
I &= \int_{G_{\rm hyp}}f(g)\Big\{\frac{1}{\lambda-\lambda^{-1}}\sum_{n=2}^{\infty}\lambda^{-(n-1)}(e^{i(n-1)\theta}-e^{-i(n-1)\theta})\Big\}\,dg\\
&= \int_{G_{\rm hyp}}f(g)\Big\{\frac{1}{\lambda-\lambda^{-1}}\Big(\frac{\lambda^{-1}e^{i\theta}}{1-\lambda^{-1}e^{i\theta}}-\frac{\lambda^{-1}e^{-i\theta}}{1-\lambda^{-1}e^{-i\theta}}\Big)\Big\}\,dg\\
&= \int_{G_{\rm hyp}}f(g)\cdot\frac{\lambda}{\lambda-\lambda^{-1}}\cdot\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2}\,dg\\
&= (e^{i\theta}-e^{-i\theta})\int_{G_{\rm hyp}}f(g)\cdot\frac{\lambda}{\lambda-\lambda^{-1}}\cdot\frac{1}{1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2}\,dg.
\end{aligned}$$

ここで Weyl の積分公式を使うと，$da=\frac{d\lambda}{\lambda}$ に注意して，

$$\begin{aligned}
I &= (e^{i\theta}-e^{-i\theta})\cdot\frac{1}{4}\int_{A\cup(-A)}\Phi_f^A\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\right)\cdot|\lambda-\lambda^{-1}|\cdot\frac{\lambda}{1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2}\,\frac{d\lambda}{\lambda}\\
&= (e^{i\theta}-e^{-i\theta})\cdot\frac{1}{4}\int_{A\cup(-A)}\Phi_f^A\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}\right)\cdot|\lambda-\lambda^{-1}|\cdot\frac{1}{1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2}\,d\lambda.
\end{aligned}$$

ここで, $\Phi_f^A(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix})$ の展開定理 (命題 (4.2.2)) を使って,

$$I=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\cdot\frac{1}{4}\Bigg[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^\infty\{\widehat{f}(P_{it}^+)+\widehat{f}(P_{it}^-)\}\cdot\frac{\lambda^{it}}{1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2}\,dt\,d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\!\!\int_{-\infty}^\infty\{\widehat{f}(P_{it}^+)-\widehat{f}(P_{it}^-)\}\cdot\frac{\lambda^{it}}{1+2\lambda\cos\theta+\lambda^2}\,dt\,d\lambda\Bigg].$$

$(t\in(-\infty,\infty),\ \lambda\in(0,\infty))$. 上の 2 重積分で $\lambda$ についての積分を先に実行する. ここで次の公式を思い出す.

<u>公式</u>

$$\int_0^\infty\frac{\lambda^{it}}{1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2}\,d\lambda=\begin{cases}-\dfrac{\pi\sinh(\theta-\pi)t}{\sinh(\pi t)\sin\theta} & (\text{if } 0<\theta<\pi),\\ -\dfrac{\pi\sinh(\theta+\pi)t}{\sinh(\pi t)\sin\theta} & (\text{if } -\pi<\theta<0),\end{cases}$$
$$\int_0^\infty\frac{\lambda^{it}}{1+2\lambda\cos\theta+\lambda^2}\,d\lambda=\frac{\pi\sinh(t\theta)}{\sinh(\pi t)\sin\theta}\qquad(\text{if } 0<|\theta|<\pi).$$

すると $0<\theta<\pi$ のとき,

$$I=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\Bigg[\frac{-1}{8\sin\theta}\int_{-\infty}^\infty\{\widehat{f}(P_{it}^+)+\widehat{f}(P_{it}^-)\}\frac{\sinh(\theta-\pi)t}{\sinh(\pi t)}\,dt$$
$$+\frac{1}{8\sin\theta}\int_{-\infty}^\infty\{\widehat{f}(P_{it}^+)-\widehat{f}(P_{it}^-)\}\frac{\sinh(t\theta)}{\sinh(\pi t)}\,dt\Bigg].$$

双曲三角関数の倍角公式を使って,

$$I=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\cdot\frac{1}{8\sin\theta}\Bigg[\int_{-\infty}^\infty\widehat{f}(P_{it}^+)\frac{\cosh\frac{1}{2}(2\theta-\pi)t}{\cosh(\frac{\pi t}{2})}\,dt-\int_{-\infty}^\infty\widehat{f}(P_{it}^-)\frac{\sinh\frac{1}{2}(2\theta-\pi)t}{\sinh(\frac{\pi t}{2})}\,dt\Bigg].$$

こうして得た $I$ の値を公式 (4.3.2) に代入して,

$$\Phi_f^B(r_\theta)=-\frac{1}{2i\sin\theta}\Bigg[\frac{1}{2}\{\widehat{f}(D_1^+)-\widehat{f}(D_1^-)\}+\sum_{n=2}^\infty\{\widehat{f}(D_n^+)e^{i(n-1)\theta}-\widehat{f}(D_n^-)e^{-i(n-1)\theta}\}\Bigg]$$
$$+\frac{1}{8\sin|\theta|}\int_{-\infty}^\infty\Bigg\{\widehat{f}(P_{it}^+)\frac{\cosh(\frac{2|\theta|-\pi}{2}t)}{\cosh(\frac{\pi t}{2})}-\widehat{f}(P_{it}^-)\frac{\sinh(\frac{2|\theta|-\pi}{2}t)}{\sinh(\frac{\pi t}{2})}\Bigg\}\,dt.$$

指標公式を使って, 上の第 1 行目の式を書き改めると,

**(4.3.3) 命題** (Expansion theorem for elliptic conjugacy classes) $\gamma\in G_{\mathrm{ell}}$ で $\gamma\sim r_\theta\in B$ と

すると,

$$\begin{aligned}\Phi_f(\gamma) &= \int_{G_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\, d\dot{g} \\ &= \frac{1}{2}\big(\widehat{f}(D_1^+)\overline{\Theta_{D_1^+}(\gamma)} - \widehat{f}(\mathrm{D}_1^-)\overline{\Theta_{\mathrm{D}_1^-}(\gamma)}\big) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\big(\widehat{f}(D_n^+)\overline{\Theta_{D_n^+}(\gamma)} - \widehat{f}(D_n^-)\overline{\Theta_{D_n^-}(\gamma)}\big) \\ &\quad + \frac{1}{8\sin|\theta|}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\widehat{f}(P_{it}^+)\frac{\cosh(\frac{2|\theta|-\pi}{2}t)}{\cosh(\frac{\pi t}{2})} - \widehat{f}(P_{it}^-)\frac{\sinh(\frac{2|\theta|-\pi}{2}t)}{\sinh(\frac{\pi t}{2})}\right\} dt.\end{aligned}$$

### 4.4 中心の元での軌道積分の展開

$\gamma = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, あるいは $\gamma = -\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする. これらは $G$ の中心に属する. よって $G_\gamma = G$, $\Gamma_\gamma = \Gamma$. 軌道積分は

$$\int_{G_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\, d\dot{g} = f(\gamma) = f\Big(\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big).$$

$f(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix})$ を $\widehat{f}$ で与える式は Plancherel の公式を導くために使われている. 結果は次のとおり.

**(4.4.1) 命題** (Expansion theorem for central elements) $f \in C_c^\infty(G)$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}f\Big(\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big) &= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=2}^{\infty}(\pm 1)^n(n-1)\{\widehat{f}(D_n^+) + \widehat{f}(D_n^-)\} \\ &\quad + \frac{1}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\widehat{f}(P_{it}^+)\, t\tanh\Big(\frac{\pi t}{2}\Big) \pm \widehat{f}(P_{it}^-)\, t\coth\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\Big\}\, dt\end{aligned}$$

(複号同順).

ただし, ここで $SL_2(\mathbf{R})$ 上の Haar 測度 $dg$ の正規化は次のようにした. Iwasawa 分解 $G = NAK$ を考える. $N = \left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\Big|\, x \in \mathbf{R}\right\}$,$A = \left\{\begin{pmatrix}y^{1/2} & 0\\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix} \,\Big|\, y > 0\right\}$, $K = SO(2)$.

$$g = n_x \cdot a_y \cdot r_\theta = \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^{1/2} & 0\\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

と書くとき,

$$dg = \frac{dx\, dy}{y^2}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

これは次から導かれる.

**(4.4.2) 命題** (Harish-Chandra) $F_f^B(r_\theta) = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})\Phi_f^B(r_\theta)$ とおく. すると

$$\frac{d}{d\theta}F_f^B(r_\theta)|_{\theta=0} = -4\pi i f(1).$$

証明については [Lang75, Chapter VIII] [Knapp86, Chapter XI] を参照のこと.

### 4.5 Selberg trace formula の第 2 の形

$f \in C_c^\infty(SL(2,\mathbf{R}))$, $\Gamma \subset SL(2,\mathbf{R})$ を discrete, co-compact とする. Trace formula の一方の辺は

$$\sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi) \widehat{f}(\pi)$$

と $f$ の Fourier transformation $\widehat{f}$ のみで書ける. もう一方の辺は,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma/\sim} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \int_{\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma} f(g^{-1}\gamma g)\, d\dot{g} = \sum_{\gamma \in \Gamma/\sim} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \Phi_f(\gamma)$$

であった. これを

$$\sum_{\substack{\gamma \in \{\pm 1_2\} \\ \gamma \in \Gamma}} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) f(\gamma) + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma/\sim \\ \gamma \in G_{\mathrm{ell}}}} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \Phi_f(\gamma) + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma/\sim \\ \gamma \in G_{\mathrm{hyp}}}} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \Phi_f(\gamma)$$

と $\gamma$ の形によって分けることができる. ここで第 1 の和は命題 (4.1.1) により, 第 2 の和は命題 (4.3.3), 第 3 の和は命題 (4.2.2) で, $f$ の Fourier 変換 $\widehat{f}$ で展開できた. これを代入して, $\widehat{f}$ のみで書き表した Trace formula が得られる.

**(4.5.1) 定理** Selberg trace formula の両辺は $\widehat{f}$ のみで書き表される. 詳しい式は上に説明したように,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi) \widehat{f}(\pi) \\
&= \sum_{\gamma \in \{\pm 1_2\} \cap \Gamma} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \Bigg[ \frac{1}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (\pm 1)^n (n-1) \{\widehat{f}(D_n^+) + \widehat{f}(D_n^-)\} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \widehat{f}(P_{it}^+)\, t \tanh\Big(\frac{\pi t}{2}\Big) \pm \widehat{f}(P_{it}^-)\, t \coth\Big(\frac{\pi t}{2}\Big) \Big\}\, dt \Bigg] \\
&\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma/\sim,\ \gamma \in G_{\mathrm{ell}}} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \Bigg[ \Big\{ \frac{1}{2} \Big( \widehat{f}(D_1^+) \overline{\Theta_{D_1^+}(\gamma)} - \widehat{f}(D_1^-) \overline{\Theta_{D_1^-}(\gamma)} \Big) \\
&\qquad\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} \Big( \widehat{f}(D_n^+) \overline{\Theta_{D_n^+}(\gamma)} - \widehat{f}(D_n^-) \overline{\Theta_{D_n^-}(\gamma)} \Big) \Big\} \\
&\qquad + \frac{1}{8 \sin|\theta|} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \widehat{f}(P_{it}^+) \frac{\cosh(\frac{2|\theta|-\pi}{2} t)}{\cosh(\frac{\pi t}{2})} - \widehat{f}(P_{it}^-) \frac{\sinh(\frac{2|\theta|-\pi}{2} t)}{\sinh(\frac{\pi t}{2})} \Big\}\, dt \Bigg] \\
&\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma/\sim,\ \gamma \in G_{\mathrm{hyp}}} \mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma \backslash G_\gamma) \Bigg[ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \widehat{f}(P_{it}^+) \Theta_{P_{it}^+}(\gamma) + \widehat{f}(P_{it}^-) \Theta_{P_{it}^-}(\gamma) \}\, dt \Bigg].
\end{aligned}$$

**注意** 最後の行の $\Theta_{P_{it}^\pm}(\gamma)$ は実数であるから, $\overline{\Theta_{P_{it}^\pm}(\gamma)}$ と書いても同じ.

**注意** 右辺には tempered representation しか表れない. これから左辺にも tempered representation しか表れないことは言えない. 実際 $\Gamma$ によっては, $\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}$ で $m_\Gamma(\pi) \neq 0$ なるものの存在が知られている.

高階数の実半単純 Lie 群の軌道積分の展開にも, tempered representation しか表れていない. conceptual な一般的な証明があるべきであるが, 私の不勉強のせいか知らない.

**注意** (i) $SL(2,\mathbf{R})$ 以外の higher rank の群のときの軌道積分の展開は $G$ が classical group で, $\gamma$ が regular element のときは Rebecca Herb が全てやっている. (Herb の論文は Knapp の教科書 [Knapp86] の reference にある)
(ii) Singular semisimple elements のときは, Harish-Chandra の公式の一般化があり regular semisimple elements の展開公式から微分して出す algorithm がある.
(iii) Unipotent orbital integral についても同様に regular element の式から微分して出す方法があるらしいが, 私は詳しくは知らない. いずれにせよ, $\Gamma$ が co-compact のときはこの項は出てこない.

### 4.6 Selberg trace formula の応用

$G=SL(2,\mathbf{R})$ のとき, pseudo-coefficients の存在を仮定して, Trace formula の右辺がどうなるか見てみよう.

$G$ の discrete series 表現, 例えば, $D_k^- \in \widehat{G}_d$ をひとつ fix する. いま, 容易に分かるように, $-1_2 \in \Gamma$ のときには, $k$:odd に対しては $m_\Gamma(D_k^-)=0$ であるから, $k$:even を仮定する. $D_k^-$ に対する pseudo-coefficient $f_k \in C_c^\infty(G)$ は

$$\widehat{f}_k(\pi)=\begin{cases}+1 & \text{if } \pi\cong D_k^-,\\ 0 & \text{if } \pi\in\widehat{G}_{\mathrm{temp}}, \pi\ncong D_k^-\end{cases}$$

で特徴付けられる ($f_k$ は unique ではない). 特に条件より $\widehat{f}_k(P_{it}^+)=\widehat{f}_k(P_{it}^-)=0$. Expansion theorems (命題 (4.2.2), 命題 (4.3.3), 命題 (4.4.1)) より次が出る.

**(4.6.1) 命題**

(i) $\gamma\in G_{\mathrm{hyp}}$ ならば, $\Phi_{f_k}(\gamma)=0$,
(ii) $\gamma\in G_{\mathrm{ell}}$ かつ, $\gamma\sim r_\theta$ ならば, $\Phi_{f_k}(\gamma)=\Phi_{f_k}(r_\theta)=-\overline{\Theta_{D_k^-}(\gamma)}=\overline{\Theta_{D_k^+}(\gamma)}$,
(iii) $\gamma=\pm 1_2\in Z(G)$ ならば, $\Phi_{f_k}(\gamma)=f_k(\pm 1_2)=\dfrac{1}{4\pi}(k-1)\cdot(\pm 1)^k$.

これより trace formula の右辺は

$$\mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash G)\cdot\frac{1}{4\pi}(k-1)\times\#\bigl(\{\pm 1_2\}\cap\Gamma\bigr)+\sum_{\gamma\in G_{\mathrm{ell}}\cap\Gamma/\sim}\mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\cdot\overline{\Theta_{\mathrm{D}_k^+}(\gamma)}.$$

ここで, $\mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash G)\cdot\dfrac{k-1}{4\pi}$ は, $D_k^-$ の formal degree $\deg D_k^-$ を使うと, $\mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash G)\cdot\deg D_k^-$ となり measure の取り方に independent で, $\mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)$ は $\Gamma_\gamma$ の位数の逆数になる. また, $\mathfrak{h}$ 上の不変測度を $\dfrac{dxdy}{y^2}$ とすると, 上の式は

$$\mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash\mathfrak{h})\cdot\frac{1}{4\pi}(k-1)+\sum_{\gamma\in G_{\mathrm{ell}}\cap\Gamma/\sim}\mathrm{vol}\,(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\cdot\overline{\Theta_{\mathrm{D}_k^+}(\gamma)}$$

と書ける.

Trace formula の左辺を見てみよう. このとき次が成立する.

**(4.6.2) 命題** $f_k\in C_c^\infty(SL(2,\mathbf{R}))$ を上のように $D_k^-$ に対する pseudo-coefficient とする. このとき $\pi\in\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}$ に対して,

(i) $k\geqslant 3$ ならば, $\widehat{f}_k(\pi)=0$ $(\pi\in\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}})$.

(ii) $k=2$ ならば,

$$\widehat{f}_k(\pi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \pi \in \widehat{G}_{\mathrm{non-temp}} - \{1\}, \\ -1 & \text{if } \pi = 1 \text{ (単位表現)}. \end{cases}$$

証明は後回しにして, これを trace formula の左辺に適用する.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{\pi \in \widehat{G}} m_\Gamma(\pi)\widehat{f}(\pi) \\ &= \sum_{\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{temp}}} m_\Gamma(\pi)\widehat{f}(\pi) + \sum_{\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}} m_\Gamma(\pi)\widehat{f}(\pi) \\ &= m_\Gamma(D_k^-) + \sum_{\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}} m_\Gamma(\pi)\widehat{f}(\pi) \\ &= m_\Gamma(D_k^-) + \begin{cases} 0 & \text{if } k \geqslant 3, \\ -m_\Gamma(1) & \text{if } k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

ところで, $L^2(\Gamma\backslash G)$ の trivial 表現の multiplicity は 1. よって $m_\Gamma(1)=1$. 従って,

$$\text{左辺} = \begin{cases} m_\Gamma(D_k^-) & \text{if } k \geqslant 3, \\ m_\Gamma(D_2^-) - 1 & \text{if } k = 2. \end{cases}$$

右辺と合わせて次を得る.

**(4.6.3) 定理** (dimension formula) $k \geqslant 3$ のとき,

$$m_\Gamma(D_k^-) = \mathrm{vol}\,(\Gamma\backslash G)\cdot \deg(D_k^-) \times \#\big(\{\pm 1_2\} \cap \Gamma\big) + \sum_{\gamma \in G_{\mathrm{ell}} \cap \Gamma/\sim} \frac{1}{\#(\Gamma_\gamma)} \overline{\Theta_{D_k^-}(\gamma)}.$$

$k=2$ のときは, 右辺にさらに 1 を加える.

**注意** $k=2$ のときに例外になる理由を代数幾何的な見地から "説明" しよう. $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ を上半平面とする. $\mathfrak{h} \cong SL(2,\mathbf{R})/SO(2)$ となる. $\Gamma$ を $SL(2,\mathbf{R})$ の co-compact な離散部分群とする. $\Gamma$ に属する重さ $k$ の正則保型形式の空間 $M_k(\Gamma)$ は,

$$M_k(\Gamma) = \{f : \mathfrak{h} \to \mathbf{C} \text{ 正則関数} \mid f\big(\frac{az+b}{cz+d}\big) = (cz+d)^k f(z) \quad \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\}$$

で定められる. このとき, $\dim M_k(\Gamma) = m_\Gamma(D_k^+) = m_\Gamma(D_k^-)$ が知られている. $\Gamma$ が $\mathfrak{h}$ に fixed point free に作用するとき, $M_k(\Gamma)$ は次のような $\Gamma\backslash\mathfrak{h}$ 上の line bundle の切断の空間と同一視される.

$\mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ という embedding を, $\mathfrak{h} \ni z \mapsto (z:1) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ で定める. 但し, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ は複素射影直線. $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ の tautological line bundle を $\mathcal{O}(1)$ とすると, $\mathcal{O}(1)$ は $SL(2,\mathbf{C})$ の自然な作用で, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への $SL(2,\mathbf{C})$ の作用と両立するものがある. これを $\mathfrak{h}$ に制限すると, それは $SL(2,\mathbf{R})$ の作用をもって, (Mumford, Geometric Invariant theory の用語でいう) $SL(2,\mathbf{R})$-linearlized invertible sheaf になる. これは $\Gamma$ による商を考えて, $-1_2 \notin \Gamma$ のとき, $\Gamma\backslash\mathfrak{h}$ 上の invertible sheaf に落ちる. これを $\mathcal{L}$ と書く. $-1_2 \in \Gamma$ のときも, $\mathcal{O}(1)^{\otimes 2}|_{\mathfrak{h}}$ は $\Gamma\backslash\mathfrak{h}$ 上に落ちる. これを $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ と書く. すると

$$M_k(\Gamma) \cong H^0(\Gamma\backslash\mathfrak{h}, \mathcal{L}^{\otimes(-k)})$$

という自然な同型がある. Riemann-Roch の定理より,

$$\dim H^0(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{L}^{\otimes(-k)})-\dim H^1(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{L}^{\otimes(-k)})=(-k)\deg\mathcal{L}+1-g$$

となる. $\mathcal{L}^{\otimes(-2)}\cong\Omega^1_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}}$ という同型があるので, $\deg\mathcal{L}=1-g$ となる. よって,

$$\dim M_k(\Gamma)=\dim H^1(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{L}^{\otimes(-k)})+(k-1)(g-1)$$

となる. $k\geqslant 3$ のとき, Serre duality より,

$$\dim H^1(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{L}^{\otimes(-k)})=\dim H^0(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\Omega^1_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}}\otimes\mathcal{L}^{\otimes k})=\dim H^0(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{L}^{\otimes(k-2)})$$

で, $\deg\mathcal{L}^{\otimes(k-2)}=(k-2)(1-g)<0$ で, $\dim H^0(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{L}^{\otimes(k-2)})=0$. よって,

$$\dim M_k(\Gamma)=(k-1)(g-1).$$

$k=2$ のとき,

$$\dim H^1(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{L}^{\otimes(-k)})=\dim H^0(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{L}^{\otimes(k-2)})=\dim H^0(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{O}^1_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}})=1$$

より,

$$\dim M_k(\Gamma)=(k-1)(g-1)+1=g.$$

trivial 表現に対応する項が $\dim H^0(\Gamma\backslash\mathfrak{h},\mathcal{O}^1_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}})=1$ として表れる. $\Gamma$ が torsion を持つときも, holomorphic Lefschetz theorem を用いて同様にできる.

**(4.6.4) 命題 (4.6.2) の証明** 2 通りの証明を与える.

(第 1 の証明) $C_u$ を complementary series の表現とする. $\widehat{f}(C_u)$ を直接計算する.

$$\widehat{f}(C_u)=\int_G f(g)\Theta_{C_u}(g)dg=\int_{G_{\mathrm{ell}}}f(g)\Theta_{C_u}(g)dg+\int_{G_{\mathrm{hyp}}}f(g)\Theta_{C_u}(g)dg.$$

ここで $\Theta_{C_u}(g)$ が局所的に可積分であることを用いた.

$\Theta_{C_u}(g)$ は $G_{\mathrm{ell}}$ 上では 0 であるので,

$$\widehat{f}(C_u)=\int_{G_{\mathrm{hyp}}}f(g)\Theta_{C_u}(g)dg=\int_{(A)^G}f(g)\Theta_{C_u}(g)dg+\int_{(-A)^G}f(g)\Theta_{C_u}(g)dg.$$

Weyl 積分公式より,

$$\widehat{f}(C_u)=\frac{1}{4}\int_A\Phi^A_f(a)\Theta_{C_u}(a)|D_A(a)|^2da+\frac{1}{4}\int_A\Phi^A_f(-a)\Theta_{C_u}(-a)|D_A(-a)|^2da.$$

さてここで $f=f_k$ とすると, $\Phi^A_f(a)=0$ が $\widehat{f_k}(P^{\pm}_{it})=0$ より言える. よって,

$$\widehat{f_k}(C_u)=0.$$

よって, $\widehat{f_k}$ は complementary series 上では 0.

$\widehat{f_k}(1)$ を計算する.

$$\widehat{f_k}(1)=\int_G f_k(g)dg=\int_{G_{\mathrm{ell}}}f_k(g)dg+\int_{G_{\mathrm{hyp}}}f_k(g)dg.$$

ここで $f=f_k$ のとき, $\int_{G_{\mathrm{hyp}}}f_k(g)dg$ は上と同様の理由で 0.

$$\widehat{f_k}(1)=\int_{G_{\mathrm{ell}}}f_k(g)dg=\int_{B\backslash G}\int_B f_k(g^{-1}bg)|D_B(b)|^2db\dot{g}=\int_B\Phi^B_{f_k}(b)|D_B(b)|^2db$$

(Weyl 積分公式). $\Phi^B_{f_k}(b)$ に展開定理を用いると, $\widehat{f}_k(P^{\pm}_{it})=0$, $\widehat{f}_k(D^{\pm}_n)=0$ (if $k\neq n$ or $-$) によって, $D_B(r_\theta)\Phi^B_{f_k}(r_\theta)=e^{i(k-1)\theta}$. よって,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_k(1) &= \int_B e^{-i(k-1)\theta}\cdot\overline{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\{e^{-ik\theta}-e^{i(k-2)\theta}\}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \begin{cases} -1 & \text{if } k=2. \\ 0 & \text{if } k>2. \end{cases}
\end{aligned}$$

$\widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}=\{C_u \mid 0<u<1\}\cup\{1\}$ であるから証明は完結した.

(第 2 の証明) nonunitary principal series の表現 $P^{\pm}_{\zeta}(\zeta\in\mathbf{C})$ を思い出す. これを, 表現空間を $K$-finite ベクトルたちに制限して, 代数的に考え $(\mathfrak{g},K)$-加群と思う. すると $\widehat{f}(P^{\pm}_{it})$ は, $\widetilde{f}(P^{\pm}_{\zeta})$ の虚軸 $\zeta=it$ 上への制限と考えられる. $f\in C^{\infty}_c(G)$ のとき, $\widetilde{f}(P^{\pm}_{\zeta})$ は $\zeta$ について整関数なので, $f=f_k$ のとき解析関数の一致の定理より, $\widetilde{f}_k(P^{\pm}_{\zeta})=0$ となる.

$0<u<1$ のとき, $C_u$ と $P^+_u$ は $(\mathfrak{g},K)$-加群として同型. これより $\widehat{f}_k(C_u)=\widetilde{f}(P^+_u)=\widehat{f}_k(C_u)=0$ となる.

さて, $n$ が偶数のとき, $D^+_n\oplus D^-_n$ は $(\mathfrak{g},K)$-加群として $P^+_{n-1}$ の部分表現となり, 剰余表現は $(n-1)$ 次の対称テンソル表現 ($SL(2,\mathbf{R})$ の次数 $n$ の有限次元既約表現) となる. 特に $n=2$ のとき,

$$0\to D^+_2\oplus D^-_2\to P^+_1\to\mathbf{C}\to 0 \quad \text{(exact)}$$

となる. 但し $\mathbf{C}$ は trivial 表現. よって $\widehat{f}_k(D^+_2)+\widehat{f}_k(D^-_2)+\widehat{f}_k(1)=\widetilde{f}_k(P^+_1)=0$. それ故, $\widehat{f}_k(1)=-\widehat{f}_k(D^-_2)=-1$.

**(4.6.5) 注意** $P^{\pm}_{\zeta}$ $(\zeta\in\mathbf{C})$ という nonunitary principal series を $(\mathfrak{g},K)$-加群と見る. $\zeta$ が整数のとき, 次のような部分表現がある. 但し $\mathcal{F}_n$ で $SL(2,\mathbf{R})$ の $n$ 次の対称テンソル表現を表す. $\mathcal{F}_n$ $(n\geqslant 0)$ で $SL(2,\mathbf{R})$ の有限次元既約表現は尽くされる.

(i) $n$ が偶数のとき $\mathcal{F}_n\subseteq P^+_{-(n+1)}$, $n$ が奇数のとき $\mathcal{F}_n\subseteq P^-_{-(n+1)}$ で, いずれも商は $D^+_n\oplus D^-_n$.

(ii) $n$ が偶数のとき $D^+_n\oplus D^-_n\subseteq P^+_{n-1}$, $n$ が奇数のとき $D^+_n\oplus D^-_n\subseteq P^-_{n-1}$ で, いずれも商は $\mathcal{F}_{n-2}$.

# 第5章　(付録)　pseudo-coefficients　の存在証明$(SL(2,\mathbf{R}))$

この章では，$G=SL(2,\mathbf{R})$ のときに，離散系列表現に対する pseudo-coefficients の存在の証明のあらましを述べる．Spherical Fourier transform に対する Paley-Wiener 定理 (後述) に帰着するという方針で行なう．

**(5.0) 記号** $G=SL(2,\mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群 $SO(2)$ の元を

$$r_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\qquad (\theta\in\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$$

と回転で表す.

**(5.1) 定義** $f\in C_c^\infty(G)$ とする．このとき，$f$ が type $(n,n)$ $(n\in\mathbf{Z})$ であるとは，任意の $r_\theta,r_{\theta'}\in K=SO(2)$ と $g\in G$ に対し，

$$f(r_\theta g r_{\theta'})=e^{in\theta}e^{in\theta'}f(g)$$

となるときをいう.

**(5.2) 注意** (i) Type $(n,n)$ の $f\in C_c^\infty(G)$ の全体は convolution 積に関して閉じていて，$C_c^\infty(G)$ の部分環になっている．
(ii) $n$ が偶数のとき，$f(-g)=f(g)$ 特に，$f(1_2)=f(-1_2)$．$n$ が奇数のとき，$f(-g)=-f(g)$ 特に，$f(1_2)=-f(-1_2)$.

**(5.3) 補題** $D_m^\pm$ $(m\geqslant 1)$ を離散系列，あるいはその極限の表現とする．$f\in C_c^\infty(G)$ を type $(n,n)$ で $n\geqslant 0$ とする．このとき，

$$\begin{array}{ll} \text{もし } m>n \text{ ならば} & \widehat{f}(D_m^+)=0;\\ \text{もし } m\not\equiv n \pmod 2 \text{ ならば} & \widehat{f}(D_m^+)=0;\\ m\geqslant 1 \text{ なる，任意の } m \text{ に対して} & \widehat{f}(D_m^-)=0.\end{array}$$

*Proof.* Discrete series 及び limits of discrete series の $K$-types をみればほとんど明らか. Discrete series の $K$-types に関する結果を復習しよう.

表現 $D_m^+$ の表現空間を $H$ と記す．$K=SO(2)$ とする．$v\in H$ は $\{D_m^+(k)v|k\in K\}$ で生成される空間が有限次元のとき $K$-finite と言われる． $H_K$ で $H$ の $K$-finite vectors の全体のなす $H$ の部分空間を表す．各 $n\in\mathbf{Z}$ に対し

$$H_n:=\{v\in H|D_m^+(r_\theta)v=e^{in\theta}\quad(\forall\theta\in\mathbf{R})\}$$

とおくと，

$$H_K=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}H_n$$

という直和分解がある．このとき，次の事実はよく知られている.

**定理 ($K$-type theorem)** $D_m^+$ $(m\geqslant 1)$ に対して，

$$\begin{array}{ll} n>-m \text{ ならば} & H_n=\{0\};\\ n\not\equiv m \pmod 2 \text{ ならば} & H_n=\{0\};\\ n\leqslant -m\text{，かつ } n\equiv m \pmod 2 \text{ ならば} & H_n=\mathbf{C}.\end{array}$$

さらに詳しく言うと，$H_K$ の元は全て $C^\infty$-vector で，$\mathfrak{g}$ を $G$ の Lie 環，$\mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}$ をその複素化とするとき，

$$X_+ = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}$$

に対して，

$$D_m^+(X_-)H_n = H_{n-2}, \qquad D_m^+(X_+)H_n = H_{n+2}.$$

さらに，$H_{-m}$ に対してその生成元 $v_0$ は

$$D_m^+(X_+)v_0 = 0$$

をみたす．これを highest weight vector という．

さて，$K$-type theorem の復習は終わって，本来の証明に戻ろう．今，$v \in H_l$ $(l \in \mathbf{Z})$ とする．このとき，

$$D_m^+(f)v = \int_G f(g)D_m^+(g)vdg$$

を考えると，$l \neq -n$ のとき，$D_m^+(f)v = 0$. 実際，$r_\theta \in K$ に対し，

$$\begin{aligned} D_m^+(f)v &= \int_G f(gr_\theta)D_m^+(gr_\theta)vd(gr_\theta) \\ &= e^{in\theta}e^{il\theta}\int_G f(g)D_m^+(g)vdg = e^{i(n+l)\theta}D_m^+(f)v. \end{aligned}$$

まず，$m > n$ とする．このとき，$H_K$ のなかで，　$H_{-n} = \{0\}$．このとき，$v \in H_K$ は $v = v_{-m} + v_{-m-2} + \cdots$ (有限和) で各 $v_{-i} \in H_{-i}$. 仮定により，$-m \neq -n, -m-2 \neq -n, \cdots$. よって，

$$D_m^+(f)v = D_m^+(f)v_{-m} + \cdots = 0$$

これより，$D_m^+(f) \in \mathrm{End}(H)$ は dense subspace $H_K$ 上で 0. それゆえ，

$$\mathrm{Tr}(D_m^+(f)) = \widehat{f}(D_m^+) = 0.$$

これで，$m > n$ のときは示された．$m \neq n \pmod 2$ のときも同様の議論でできる．

$D_m^-$ のとき，$D_m^-$ の表現空間 $H$ に対し，$H_K$ の分解は

$$H_K = H_m + H_{m+2} + H_{m+4} \cdots$$

で $H_{m+2i} = \mathbf{C}$ $(i \geqslant 0)$. これから同様に，$\widehat{f}(D_m^-) = 0$ が示される．補題 (5.3) は示された． □

**(5.4) 補題** $n \geqslant 1$ とする．$f \in C_c^\infty(G)$ で type $(n,n)$ で $\widehat{f}(D_n^+) = 1$ となるものが存在する．

*Proof.* $f' \in C_c^\infty(G)$ で，$\widehat{f'}(D_n^+) \neq 0$ となるものがあれば，$c = \widehat{f'}(D_n^+)$ とおき，$f = \dfrac{1}{c}f'$ とおけばよい．

$f'$ の存在は次のようにして分かる．$v_0 \neq 0$ を $D_n^+$ の表現空間 $H$ の lowest weight vector とする．このとき，補題 (5.3) の証明からわかるように，

$$\widehat{f'}(D_n^+) = (D_n^+(f')v_0, v_0)$$

となる．但し，$(\,,\,)$ は $H$ の内積である．

$$(D_n^+(f')v_0, v_0) = \int_G f'(g)(D_n^+(g)v_0, v_0)dg.$$

ここで，$\varphi(g) = (D_n^+(g)v_0, v_0)$ は $g$ については，

$$\varphi(r_\theta g r_{\theta'}) = (D_n^+(r_\theta g r_{\theta'})v_0, v_0) = e^{-in\theta}e^{-in\theta'}\varphi(g)$$

となり，表現 $D_n^+$ に属する球関数になっている．よって，$f'(g)\varphi(g)$ は $K$ について両側不変．いま，$\rho : A \to \mathbf{R}_{>0}$ が

$$\int_G f(g)dg = \int_K \int_A \int_K \rho(a) f(r_\theta a r_{\theta'}) d\theta da d\theta'$$

となるように定めると，

$$\widehat{f'}(D_n^+) = \int_G f'(g)\varphi(g)dg = \int_A \rho(a) f'(a)\varphi(a)da.$$

$\rho(a) \neq 0$ で (Weyl 積分公式, cf. Ch.4)，$\varphi(a) \not\equiv 0$ であるから，$f'(a) \in C_c^\infty(A)$ を適当に定めて，$\widehat{f'}(D_n^+) \neq 0$ とできる． □

**(5.5) 補題** $n \geqslant 1$ とする．ある $f \in C_c^\infty(G)$ で両側 $K$-有限で，各々$n$ が even のときには type $(n,n), (n-2,n-2), \cdots, (2,2)$, の $n$ が odd のときには type $(n,n), (n-2,n-2), \cdots, (1,1)$, の $C_c^\infty(G)$ の元の一次結合になっているものが存在して,

$$\widehat{f}(D_n^+) = 1$$

で, 他の discrete series 及び limit of discrete series $D_m^\pm$ に対して

$$\widehat{f}(D_m^\pm) = 0$$

となる．

*Proof.* $n$ に関する induction. $n=1$ または，$n=2$ のときは補題 (5.4) の $f$ を選ぶと，補題 (5.3) より上の補題の条件は満たされる．
$n<k$ でできたとして，$n=k$ のときに示す．補題 (5.4) の $f$ を $f_k$ とする．$\widehat{f_k}(D_m^-) = 0$, $\widehat{f_k}(D_m^+) = 0$ は，$m > k$ または，$m \not\equiv k \pmod 2$ のときいえている．よって，$n<k$ のときに帰納法の仮定によって存在の保証された関数を $f'_n$ $(n<k)$ と書き，$\widehat{f_k}(D_m^+) = c_m$ $(m = k-2, k-4, k-6, \cdots)$ とおけば,

$$f' = f_k - \sum_{i=1}^{[k/2]} c_{k-2i} f'_{k-2i}$$

が求めるものである． □

さて，ここまでで，$G$ の tempered spectrum $\widehat{G}_{\mathrm{temp}}$ のうち，(limits of) discrete series の上で，のぞみどうりのふるまいをする $f \in C_c^\infty(G)$ の存在がわかった．あとは，$\{P_{it}^\pm | t \in \mathbf{R}\}$ 上で消してやればよい．

さて，§§2.5 で定義した Paley-Wiener 空間を $SL(2,\mathbf{R})$ のときに考えよう．

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{R}) \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbf{R} \right\}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} | u > 0 \right\}$$

とする．このとき，$A$ の Lie algebra は $\mathfrak{a}=\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} | t\in\mathbf{R}\}$ で $\mathbf{R}$ と同一視される．$\mathfrak{a}$ の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ の複素化 $\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}=\mathfrak{a}^*\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ は，$\mathbf{C}$ と同一視される．このとき，$A$ のユニタリ指標は $\sqrt{-1}\mathbf{R}$ と同一視される．各 $r>0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{PW}(\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}})_r=&\{F(\zeta)\text{ は }\zeta\text{ に関する整関数}\,|\\ &\qquad\text{任意の自然数 }N\text{ に対し}\sup_{\zeta\in\mathbf{C}}\{|F(\zeta)|e^{-r|\mathrm{Re}(\zeta)|}(1+|\zeta|^N)\}<\infty\}\end{aligned}$$

で定める (古典的な $\mathbf{R}$ の Fourier 変換の場合と実部と虚部が当然逆になっていることに注意せよ). さらに,

$$\mathrm{PW}(\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}})=\cup_{r>0}\mathrm{PW}(\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}})_r$$

とおく.

**(5.6) 補題** $P^{\pm}_{\zeta}$ $(\zeta\in\mathbf{C})$ を non-unitary principal series representation とする．$f\in C^{\infty}_c(G)$ が type $(n,n)$ とする．すると，Fourier 変換

$$\varphi^+(\zeta)=\int_G f(g)\Theta_{P^+_\zeta}(g)dg=\widetilde{f}(P^+_\zeta)$$
$$\varphi^-(\zeta)=\int_G f(g)\Theta_{P^-_\zeta}(g)dg=\widetilde{f}(P^-_\zeta)$$

は共に $\mathrm{PW}(\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}})$ に属す.

**注意** $n=$even ならば，parity より，$\varphi^-(\zeta)\equiv 0$, $n=$odd ならば，$\varphi^+(\zeta)\equiv 0$.

*Proof.* $P^+_\zeta$ を考えているとき，parity $\epsilon=0$, $P^-_\zeta$ を考えているとき，$\epsilon=1$ と定める．$P^{\pm}_\zeta$ の表現空間を $H$ とし，$H_K$ で $H$ の $K$-finite vectors を表す．$H_K=\oplus_{m=-\infty}^{\infty}H_m$ とする．$P^{\pm}_\zeta$ の $K$-type について次が成立する.

$K$-type theorem

$$H_m=\{v\in H_K|P^{\pm}_\zeta(r_\theta)v=e^{im\theta}v(\theta\in\mathbf{R})\}$$

とおく.
(i) $m\equiv\epsilon\pmod 2$ ならば，$H_m=\mathbf{C}$;
(ii) $m\not\equiv\epsilon\pmod 2$ ならば，$H_m=\{0\}$.

$H_m\neq\{0\}$ なる $m$ に対し，$v_m\in H_m$ を $(v_m,v_m)=1$ となるように選べば，$\{v_m|m\in\mathbf{Z}, m\equiv\epsilon\pmod 2\}$ は $H$ の完全正規直交系になる．すると，トレースの定義により $f\in C^{\infty}_c(G)$ で type $(n,n)$ のとき,

$$\widetilde{f}(P^{\pm}_\zeta)=\mathrm{Tr}(P^{\pm}_\zeta(f))=\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\not\equiv\epsilon\pmod 2}}^{\infty}(P^{\pm}_\zeta(f)v_m,v_m)$$

容易に分かるように，$m\neq -n$ ならば $(P^{\pm}_\zeta(f)v_m,v_m)=0$. よって,

$$\widetilde{f}(P^{\pm}_\zeta)=\begin{cases}(P^{\pm}_\zeta(f)v_{-n},v_{-n}) & (n\equiv\epsilon\pmod 2\text{ のとき});\\ 0 & (n\not\equiv\epsilon\pmod 2\text{ のとき}).\end{cases}$$

定義より,

$$(P^{\pm}_\zeta(f)v_{-n},v_{-n})=\int_G f(g)(P^{\pm}_\zeta(g)v_{-n},v_{-n})dg.$$

ここで,
$$\varphi_\zeta^{\pm,(-n)}(g) = (P_\zeta^\pm(g)v_{-n}, v_{-n})$$
とおくと,
$$\widetilde{f}(P_\zeta^\pm) = \int_G f(g)\varphi_\zeta^{\pm,(-n)}(g)dg.$$
ここで, $\varphi_\zeta^{\pm,(-n)}$ は球関数と呼ばれるもので, 上のような積分変換を spherical Fourier transform という．$f(g)$ は type $(n,n)$ で $\varphi_\zeta^{\pm,(-n)}$ は type $(-n,-n)$．よって積は type $(0,0)$. $p = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in P$ に対して, $\delta(p) = |a|^2$ とおく．ここで主系列表現 $P_\zeta^\pm$ の別の定義を思い出す.

$\alpha : P \to \mathbf{C}^\times$ という quasi-character を
$$\alpha(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}) = |a|$$
で定める. $\zeta \in \mathbf{C}$ とするとき, $p = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in P$ に対して,
$$\mu_\zeta^+(p) = \alpha(p)^\zeta \quad \text{と} \quad \mu_\zeta^-(p) = \mathrm{sign}(a)\alpha(p)^\zeta$$
によって準同型 $\mu_\zeta^+ : P \to \mathbf{C}^\times$ と $\mu_\zeta^- : P \to \mathbf{C}^\times$ とを定める．表現空間として
$$\begin{aligned} H = &\{f : G \to \mathbf{C}\ \text{は可測関数}\ | \\ &\text{(i)}\ \forall p \in P,\ \forall g \in G\ \text{に対し}\ f(pg) = \delta(p)^{1/2}\mu_\zeta^\pm(p)f(g)(\text{a.e.}) \\ &\text{(ii)}\ f\ \text{は}\ K\ \text{に制限すると}\ L^2(K)\ \text{に属する}\ \} \end{aligned}$$
で定める．$H$ の Hilbert norm は $L^2(K)$ のそれで定める．ここで，条件より，parity $\epsilon = +$ のとき，$f(-r_\theta) = f(r_\theta)$, $\epsilon = -$ のとき，$f(-r_\theta) = -f(r_\theta)$, になることに注意する．$G$ の作用は右作用
$$G \ni g \mapsto (f(x) \mapsto f(xg))$$
で定める．$k \in K$ のとき $f(kg)$ に移るから，$kg$ を Iwasawa 分解して
$$kg = n_{kg}a_{kg}k_{kg}, \quad (n_{kg} \in N,\ a_{kg} \in MA = \{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\}\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} | t > 0\},\ k_{kg} \in K)$$
と書くと,
$$[P_\zeta^\pm(g)f](k) = \delta(a_{kg})^{1/2}\mu_\zeta^\pm(a_{kg})f(k_{kg})$$
となる．さて，$P_\zeta^\pm$ のこの実現を使って，$\widetilde{f}(P_\zeta^\pm)$ を計算してみよう．$v_{-n}$ は $K$ 上の関数として, $v_{-n}(r_\theta) = e^{-in\theta}$ で与えられる $(r_\theta \in K)$.
$$\begin{aligned} \widetilde{f}(P_\zeta^\pm) &= \int_G f(g)(P_\zeta^\pm(g)v_{-n}, v_{-n})dg \\ &= \int_G \int_K f(g)[P_\zeta^\pm(g)v_{-n}](k)\overline{v_{-n}(k)}dkdg \\ &= \int_G \int_K f(g)(\delta^{1/2}\mu_\zeta^\pm)(a_{kg})v_{-n}(k_{kg})\overline{v_{-n}(k)}dkdg. \end{aligned}$$
但し，$a_{kg} \in A, k_{kg} \in K$ は $kg$ の Iwasawa 分解
$$kg = n_{kg}a_{kg}k_{kg} \in NAK$$

で定まる．上式で積分の順序を交換して，

$$\widetilde{f}(P_\zeta^\pm) = \int_K \int_G f(k^{-1}g)(\delta^{1/2}\mu_\zeta^\pm)(a_g)v_{-n}(k_g)\overline{v_{-n}(k)}dgdk$$

但し，$g = n_g a_g k_g$ と岩澤分解する．ここで，$dg = \delta^{-1}(a_g)dn_g\, da_g\, dk_g$ という積分公式を用いて，

$$\widetilde{f}(P_\zeta^\pm) = \int_K \Big\{ \int_N \int_A \int_K f(k^{-1}na\widetilde{k})\delta^{-1/2}\mu_\zeta^\pm(a)v_{-n}(\widetilde{k})\overline{v_{-n}(k)}dn\, da\, d\widetilde{k} \Big\} dk$$

$dk$ で積分を実行して，

$$\widetilde{f}(P_\zeta^\pm) = \int_N \int_A \int_K f(na\widetilde{k})(\delta^{-1/2}\mu_\zeta^\pm)(a)v_{-n}(\widetilde{k})\overline{v_{-n}(1)}dn\, da\, d\widetilde{k}$$

$\widetilde{k} = r_\theta$ とすると，$v_{-n}(r_\theta) = e^{-in\theta}v_{-n}(1)$．よって，$f$ の Abel transform $F_f^n(a)$ $(n \in \mathbf{Z})$ を

$$F_f^n(a) = \delta(a)^{-1/2} \int_N \int_K f(nar_\theta)e^{-in\theta}dndr_\theta$$

で定めると，

$$\widetilde{f}(P_\zeta^\pm) = |v_{-n}(1)|^2 \int_A F_f^n(a)\mu_\zeta^\pm(a)da.$$

さて，$f \in C_c^\infty(G)$ より，$F_f^n(a)$ も $C_c^\infty(A)$ に属する．$a = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix}$ $(u \in \mathbf{R})$ とすると，$\mu_\zeta^\pm(a) = e^{\zeta u}$, $da = du$ なので，

$$\widetilde{f}(P_\zeta^\pm) = |v_{-n}(1)|^2 \int_A F_f^n\Big(\begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix}\Big)e^{\zeta u}du.$$

Classical な $\mathbf{R}$ のときの Paley-Wiener theorem (cf. §§2.5) より

$$\widehat{f}(P_\zeta^\pm) \in \mathrm{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*).$$

□

さて，$f$ が type $(0,0)$ のとき，つまり $f \in C_c^\infty(G)$ が $K$-不変のときを考えよう．このとき，$\varphi_\zeta^{+,0}(g) = (P_\zeta^+(g)v_0, v_0)$ は zonal spherical function になる．これについては次の形の，Paley-Wiener theorem が成立する．

**(5.7) 定理**

$$C_{c,0}^\infty(G) = \{f \in C_c^\infty(G) | f \text{ は type } (0,0)\}$$

とおく．$\zeta \in \mathbf{C}$ に対して，spherical Fourier transform を

$$\Psi_f(\zeta) = \int_G f(g)\varphi_\zeta^{+,0}(g)dg = \widehat{f}(P_\zeta^+)$$

で定める．このとき，$\Psi_f$ は $\mathrm{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*)$ に属し，対応

$$f \in C_{c,0}^\infty(G) \mapsto \Psi_f \in \mathrm{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*)^W$$

は全単射である．

この定理は証明しない．章末に reference を示す．

$n =$ 偶数のとき，pseudo-coefficient の存在を示そう．$n =$ 奇数のときは，$P_\zeta^-$ $(\zeta \in \mathbf{C})$ に対して，定理 (5.7) と類似の結果を使って同様に出来る．

さて，$D_n^+$ $(n \geqslant 2, n = \text{even})$ を discrete series の表現とする．補題 (5.5) の $f$ を $f_1$ と書くと，$\widehat{f_1}(D_n^+) = 1$ で他の discrete series や limit of discrete series については，$\widehat{f_1}(\pi) = 0$. 補題 (5.6) より $\widehat{f_1}(P_\zeta^+)$ は $\zeta$ の関数としては，$\mathrm{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*)$ に属する．また，parity より，$\widehat{f_1}(P_\zeta^-) = 0$. $\Theta_{P_{i\nu}^+} = \Theta_{P_{-i\nu}^+}$ なので，$\mathrm{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*)^W$ である．従って，定理 (5.7) より $(0,0)$-type の $f_2 \in C_c^\infty(G)$ で $\widehat{f_1}(P_\zeta^+) = \widehat{f_2}(P_\zeta^+)$ となるものが存在する．$f_2$ は type $(0,0)$ であるから，discrete series, limit of discrete series に対して，$\widehat{f_2}(\pi) = 0$ (cf. 補題 (5.3)). また，parity より $\widehat{f_2}(P_\zeta^-) = 0$. これより，$f = f_1 - f_2$ とおくと $f$ が $D_n^+$ に対する pseudo-coefficient である． □

**(5.8) 注意** Limits of discrete series に対しては，pseudo-coefficient　にあたるものは存在しない．$\widetilde{f}(P_{it}^-) = 0$ $(t \neq 0)$　とすると $t = 0$ でも一致の定理より $\widetilde{f}(P_{i0}^-) = 0$. ところが，

$$P_{i0}^- = D_1^+ \oplus D_1^-$$

と 2 つの limit of discrete series に分解する．よって，$\widehat{f}$ が主系列 $\{P_{it}^+ | t \in \mathbf{R}\}$ と $\{P_{it}^- | t \in \mathbf{R}, t \neq 0\}$ で 0 になる限り，

$$\widehat{f}(D_1^+) + \widehat{f}(D_1^-) = 0$$

でなければならない．よって $\widehat{f}(D_1^+) = -\widehat{f}(D_1^-)$ で一方を 0 にして，他方を $\neq 0$ にできない.

**(5.9) 文献** $C_c^\infty(G)$ の両側 $K$-不変の関数の spherical Fourier 変換に対する reference は次の通り.

[Warner72b] これの Chapter 9, 特に，§9.2. 但し，辞書のごとき本であまり読みやすくないかもしれない. 次の Helgason の方が compact.

[Helgason84] これの §7 The Paley-Wiener Theorem and the inversion formula for the spherical transform. 特に，第 2 節の p.450 の Theorem 7.1 を見よ．いずれにせよ，Abel 変換 $f \mapsto F_f$ による同型

$$C_c^\infty(K\backslash G/K) \cong C_c^\infty(A)^W$$

と一所に論じられている.

# 第6章　(付録)　Gel'fand, Graev, Piatetski-Shapiro の reciprocity

$G = SL(2,\mathbf{R})$, $\Gamma$ を $G$ の discrete, co-compact な部分群とする．$D_k^- \in \widehat{G}_{\mathrm{d}}$ とする．$m_\Gamma(D_k^-)$ が weight $k$ の $\Gamma$ に属する正則保型形式の空間の次元と等しいことを示す．$\mathfrak{h} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ とおき，$\mathfrak{h} \cong G/K$ として，$G$ が $\mathfrak{h}$ に作用する．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対し，$j(\gamma, z) = cz + d$ とおく．

$$M_k(\Gamma) = \{f : \mathfrak{h} \to \mathbf{C} \text{ 正則関数} \mid f(\gamma(z)) = j(\gamma, z)^k f(z),\ \forall\gamma \in \Gamma\}$$

とおく．

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_k(\Gamma) = \{\varphi : G \to \mathbf{C} : C^\infty \text{ 関数} \mid\ &\text{(i)}\ \forall\gamma \in \Gamma \text{に対し}\quad \varphi(\gamma g) = \varphi(g),\ (\forall g \in G),\\ &\text{(ii)}\ \forall r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in K \text{ に対し}\quad \varphi(g r_\theta) = e^{ik\theta}\varphi(g)\ (\forall g \in G),\\ &\text{(iii)}\ X_- = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Lie}(G) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \text{ に対して}\quad X_- \cdot \varphi = 0\}\end{aligned}$$

と定める．但し，$X \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ の元の $\varphi \in C^\infty(G)$ への作用は

$$X \cdot \varphi(g) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{\varphi(g\exp(tX)) - \varphi(g)\}$$

で定める．

**(6.1) 補題**　$f \in M_k(\Gamma)$ に対して

$$\varphi_f(g) = j(g, \sqrt{-1})^{-k} f(g(i))$$

とおくと，$\varphi_f \in \mathfrak{M}_k(\Gamma)$ で対応

$$f \in M_k(\Gamma) \longmapsto \varphi_f \in \mathfrak{M}_k(\Gamma)$$

は全単射である．

周知の事実であるから証明は略す．$X_- \cdot \varphi = 0$ という条件が Cauchy-Riemann 条件である．

$L^2(\Gamma\backslash G)$ での右正則表現は discrete sum になる．$(\pi, H)$ を既約ユニタリ表現とすると，これには $G$ 不変な metric は1つしかない．

よって，$\mathrm{Hom}_G(H, L^2(\Gamma\backslash G))$ を有界な intertwining operator の空間とすると，

$$m_\Gamma(\pi) = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_G(H, L^2(\Gamma\backslash G)).$$

$D_k^-$ を "反" 正則離散系列表現とする．$H_k^-$ を $D_k^-$ の表現空間とすると $H_k^-$ には，

$$\begin{cases} D_k^-(r_\theta)v_0 = e^{ik\theta}v_0 \quad (r_\theta \in K,\ \theta \in \mathbf{R}) \\ X_- \cdot v_0 = 0 \end{cases}$$

を満たす lowest weight vector $v_0$ があって，scalar 倍を除いて一意に定まる．

**(6.2) 定理**　$\Phi \in \mathrm{Hom}_G(H_k^-, L^2(\Gamma\backslash G))$ に対して，$\Phi(v_0) \in L^2(\Gamma\backslash G)$ を考えると，$\Phi(v_0)$ は $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ に属し，対応

$$\theta : \Phi \in \mathrm{Hom}_G(H_k^-, L^2(\Gamma\backslash G)) \longmapsto \Phi(v_0) \in \mathfrak{M}_k(\Gamma)$$

は全単射である．

補題 (6.1) とあわせて，$\mathrm{Hom}_G(H_k^-, L^2(\Gamma\backslash G)) \cong M_k(\Gamma)$ であり，特に

$$m_\Gamma(D_k^-) = \dim_{\mathbf{C}} M_k(\Gamma).$$

*Proof.* $\Phi(v_0)$ を $G$ 上の関数とみて $\Phi(v_0)(g)$ と書く．$P$ で $L^2(\Gamma\backslash G)$ への regular representation を表すと，

$$\begin{aligned}\Phi(v_0)(gr_\theta) &= P(r_\theta)\Phi(v_0)(g)\\ &= \Phi(D_k^-(r_\theta)v_0)(g)\\ &= \Phi(e^{ik\theta}v_0)(g)\\ &= e^{ik\theta}\Phi(v_0)(g).\end{aligned}$$

よって，$\Phi(v_0)$ は $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ を定義する条件のうち，(i) と (ii) を almost everywhere で満たす ($\Phi(v_0)$ はまだ可積分でしかない)．$\underline{m_\Gamma(D_k^-) < \infty \text{ より}}$，$\Phi(v_0)$ は $H_k^-$ と isotypic なものの有限個の直和の中の $K$-finite vector になっている．よって $\Phi(v_0)$ は $C^\infty$-vector であり，ゆえに $\Gamma\backslash G$ 上の $C^\infty$- 関数である．よって

$$X_- \cdot \Phi(v_0) = \Phi(X_- \cdot v_0) = \Phi(0) = 0$$

であるから $\Phi(v_0)$ は条件 (iii) もみたし，$\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ に属する．

$v_0$ は $H_k^-$ の cyclic vector であるから，$\theta$ は単射．

$\varphi \in \mathfrak{M}_k(\Gamma)$ が与えられたとして，$\Phi$ を作ろう．$\varphi$ が生成する $(\mathfrak{g}, K)$-加群を $V_\varphi$ とする．$\varphi$ の右移動で生成される $L^2(\Gamma\backslash G)$ の線形部分空間の閉包を $H_\varphi$ とする．$H_\varphi$ は Hilbert 空間で $V_\varphi$ はその中で dense である．$V_\varphi$ は代数的に既約だから，$H_\varphi$ も既約ユニタリ表現になる．$(H_k^-)_K$ も $V_\varphi$ も highest weight module で $v_0$ および $\varphi$ で生成されるから $(\mathfrak{g}, K)$-加群の同型

$$(H_k^-)_K \xrightarrow{\approx} V_\varphi$$

がある．これより

$$\Phi_\varphi : H_k^- \xrightarrow{\approx} H_\varphi$$

という有界同値写像が導かれる．定義より $\Phi_\varphi(v_0) = \varphi$ であるから $\theta$ の全射性が示された．

□

# 第 7 章（付録) 古典的方法の意味

Cartan セミナー等では，保型形式の次元を Bergman 核関数を用いた軌道積分で表している．この章では，この定式化がどんな風な意味を持っているかを簡単に説明する．

$G = SL(2, \mathbf{R})$, $\Gamma$ は $G$ の discrete subgroup で co-compact であるとする．

$D_n^+$ を discrete series の表現とし，$v_0$ を highest weight vector とする．$G \ni g \mapsto (D_n^+(g)v_0, v_0)$ という表現の係数を考える．$g$ を $g, h \in G$ の積 $g^{-1}h$ で置き換えて，$(D_n^+(g^{-1}h)v_0, v_0) = (D_n^+(h)v_0, D_n^+(g)v_0)$ とする．$z = x + \sqrt{-1}y \in \mathfrak{h}$, $w = u + \sqrt{-1}v \in \mathfrak{h}$,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{1/2} & 0 \\ 0 & v^{-1/2} \end{pmatrix}$$

とおいて $(D_n^+(h)v_0, D_n^+(g)v_0)$ にさらに $y^{-n/2}$, $v^{-n/2}$ をかけると，結果は

$$(2i)^n(z - \overline{w})^{-n}$$

と Bergman kernel となる．

Discrete series の係数，$\varphi_{v_0}(g) = (D_n^+(g)v_0, v_0)$ は Harish-Chandra の Schwartz 関数の空間 $\mathcal{C}(G)$ に属する．$\varphi_{v_0}(g) \notin C_c^\infty(G)$ である．Schur の直交性より，

$$\int_G \varphi_{v_0}(g)\Theta_\pi(g)dg = 0, (\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{temp}},\ \pi \ncong D_n^-)$$

となる．

しかし $n = 2$ のとき $\varphi_{v_0}$ は $L^1(G)$ に属さず (一般に $n \geqslant 3$ なら $\varphi_{v_0} \in L^1(G)$)，trace formura を計算するときの一方の辺の $K_f^\Gamma(x, x)$ は絶対収束しない．こういうときは普通 dumping factor をかけて収束させて，dumping factor の parameter $s \to 0$ とする．$n \geqslant 3$ のとき，

$$\int_G \varphi_{v_0}(g)\Theta_\pi(g)dg = 0$$

は $\pi \in \widehat{G}_{\mathrm{non-temp}}$ のときも justify できて，定理 (4.6.3) と同じ結果を得る．

## 文献について (1990 年当時のコメント?)

表現論全体について

[Wallach88] は全体によくまとまっているよい本である．Lie 代数の相対 cohomology に詳しい．

[Knapp86] は例が多くて教育的．軌道積分の話は比較的分かり易く書いてある．relative Lie algebra cohomology はない．最近，Princeton Univ. Press から同じ著者の本で，黄表紙の Paper-back でこの主題についての新しい本 [Knapp88] が出た．

[Warner72a], [Warner72b] は辞書の代わりに使える．

Selberg 跡公式関連

[Duflo-Labesse71] は古典的な論文．あと，何故か Langlands と Labesse の $SL_2$ は読んでいる人が少ないように思う．読めば得るところがある．

[Wallach76] は $SU(2,1)$ のコンパクトな商のときに詳しい．

もっと sophisticate したものは，J.Arthur の一連の論文がある。最近，Annals of Math.Studies で $GL_n$ の base-change について Clozel との共著が出た．

### References


[Arthur-Clozel88] Arthur, James and Clozel, Laurent, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula.* Annals of Mathematics Studies, 120. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xiv+230 pp.

[Barbasch89] Barbasch, Dan, *The unitary dual for complex classical Lie groups* , Invent. Math. **96** (1989), no. 1, 103–176.

[Cartan Seminar] Cartan. Henri. et al, .

[Clozel-Delorme84] Clozel, Laurent and Delorme, Patrick, *Le theoreme de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie reductifs.* Invent. Math. 77 (1984), no. 3, 427–453.

[Clozel-Delorme90] Clozel, Laurent and Delorme, Patrick, *Le theoreme de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie reductifs. II.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 23 (1990), no. 2, 193–228.

[Dixmier-Malliavin78] Dixmier, Jacques and Malliavin, Paul *Factorisations de fonctions et de vecteurs indefiniment differentiables.* (French) Bull. Sci. Math. (2) 102 (1978), no. 4, 307–330.

[Duflo-Labesse71] Duflo, Michel and Labesse, Jean-Pierre , *Sur la formule des traces de Selberg.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 4 (1971), 193–284.

[Dunford-Schwartz63] Dunford, Nelson and Schwartz, Jacob T. , *Linear operators. Part II: Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space.* With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle Interscience Publishers John Wiley and Sons New York-London 1963 ix+pp. 859–1923+7 pp.

[G-G-PS69] Gel'fand, I. M.; Graev, M. I.; Pyatetskii-Shapiro, I. I., *Representation theory and automorphic functions.* Translated from the Russian by K. A. Hirsch W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa.-London-Toronto, Ont. 1969 xvi+426 pp. 10.20

[Helgason84] Helgason, Sigurdur, *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.* Pure and Applied Mathematics, 113. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. xix+654

[Knapp86] Knapp, Anthony W. *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples.* Princeton Mathematical Series, 36. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. xviii+774 pp.

[Knapp88] Knapp, A. W, *Lie groups, Lie algebras, and cohomology* Mathematical Notes, 34. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988. xii+510 pp.

[Labesse-Langlands79] Labesse, Jean-Pierre and Langlands, Robert P, *L-indistinguishability for* SL(2). Canad. J. Math. 31 (1979), no. 4, 726–785.

[Langlands76] Langlands, Robert P *On the functional equations satisfied by Eisenstein series.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. v+337 pp.

[Lang75] Lang, Serge , $\mathrm{SL}_2(R)$. Reprint of the 1975 edition. Graduate Texts in Mathematics, 105. Springer-Verlag, New York, 1985. xiv+428 pp.

[Selberg56] Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series.* J. Indian Math. Soc. (N.S.) 20 (1956), 47–87.

[Vogan86] Vogan, David A., Jr., *The unitary dual of* $\mathrm{GL}(n)$ *over an Archimedean field.* , Invent. Math. **83** (1986), no. 3, 449–505.

[Wallach76] Wallach, Nolan *On the Selberg trace formula in the case of compact quotient.* Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), no. 2, 171–195.

[Wallach88] Wallach, Nolan, *Real reductive groups I*, Pure and Applied Mathematics, 132. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. xx+412 pp.

[Warner72a] Warner, Garth, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. xvi+529 pp.

[Warner72b] Warner, Garth, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. II.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 189. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. viii+491 pp.