

第18回(2010年度)整数論サマースクール
「アーサー・セルバーグ跡公式入門」

時期: 2010年9月6日(月)から9月10日(金)まで

場所: 山中温泉 河鹿荘ロイヤルホテル

1. プログラム

9/6(月)

- 10:20-12:40 プレサマースクール
GL(2)上の保型形式と Hecke 作用素 (森山知則)
- 12:50-13:50 昼食
- 14:00-14:50 参加受付
- 15:00-16:30 Selberg 跡公式 (権寧魯)
- 16:45-18:15 GL(2)の跡公式 I (都築正男)
- 18:45-20:00 夕食
- 20:15-21:45 Selberg ゼータ関数 (権寧魯)

9/7(火)

- 7:00-9:00 朝食
- 9:15-10:30 GL(2)の跡公式 II (若槻聡)
- 10:45-12:00 GL(2)の跡公式 III (若槻聡)
- 12:15-13:15 昼食
- 13:30-14:30 Eichler-Selberg 跡公式 (伊吹山知義)
- 14:45-16:15 Jacquet-Langlands 対応 I (都築正男)
- 16:30-18:00 Jacquet-Langlands 対応 II (都築正男)
- 18:30-19:45 夕食
- 20:15-21:15 院生とポストクの時間
竹森翔「degree 2 の p 進 Siegel-Eisenstein 級数」
原隆「ガロワ表現の円分 p -進ゼータ関数の合同式について」
大下達也「円単数の Euler 系と実 Abel 体の岩澤加群の
高次 Fitting イデアル」

9/8(水)

- 7:00-9:00 朝食
- 9:15-10:30 GL(3)の跡公式 I (若槻聡)
- 10:45-12:00 GL(3)の跡公式 II (若槻聡)
- 12:15-13:15 昼食
- 13:30-15:30 安定跡公式と志村多様体についての紹介 (安田正大)
- 16:00-18:00 内視論入門 (今野拓也)
- 18:30-19:45 夕食
- 20:15-21:15 来年度以降のサマースクールについての討論

9/9(木)

7:00– 9:00 朝食
9:15–10:30 移行因子と基本補題 (今野拓也)
10:45–12:00 楕円項の安定化 (今野拓也)
12:15–13:15 昼食
13:30–14:30 応用—玉河数 (今野拓也)
14:45–16:15 ユニタリ群の安定跡公式 I (平賀郁)
16:30–18:00 ユニタリ群の安定跡公式 II (平賀郁)
19:00–21:00 懇親会

9/10(金)

7:00– 9:00 朝食
9:15–10:45 ユニタリ群の安定跡公式 III (平賀郁)
11:00–12:30 ユニタリ群の安定跡公式 IV (平賀郁)
12:45–13:45 昼食 — 昼食後終了

2. 各講演の内容と参考文献

2.1. プレサマースクール: $GL(2)$ 上の保型形式と Hecke 作用素 (森山知則) 140 分.

(i) 半単純 Lie 群上の解析の基礎: $SL(2, \mathbb{R})$ を例にとって、Haar 測度の岩澤分解、普遍展開環、特に Casimir 作用素について説明します。

(ii) 上半平面上の保型形式と $SL(2, \mathbb{R})$ 上の保型形式の関係: 正則保型形式から、 $SL(2, \mathbb{R})$ 上の保型形式を構成し、それが (反) 正則離散系列表現と呼ばれる $SL(2, \mathbb{R})$ の無限次元表現を生成する事 (Gel'fand-Graev-Piatetski-Shapiro の相互律) を解説します。

(iii) adèle 群 $GL(2, \mathbb{A})$ 上の保型形式と Hecke 作用素: adèle 群 $GL(2, \mathbb{A})$ 上の保型形式を定義し、上半平面上の保型形式における Hecke 作用素が $GL(2, \mathbb{Q}_p)$ の Hecke 環の作用として書けることを説明します。また Hecke-eigen form の例として Eisenstein 級数を取り上げて解説します。

REFERENCES

- [1] A. Borel, Automorphic forms on $SL_2(\mathbb{R})$, Cambridge Tracts in Mathematics **130**, Cambridge, Cambridge University Press, 1997.
- [2] D. Bump, Automorphic forms and representations, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **55**, Cambridge, Cambridge University Press, 1997.
- [3] H. Iwaniec, Topics in classical automorphic forms, Graduate Studies in Mathematics **17**, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1997.

2.2. Selberg 跡公式 (権寧魯) 90 分.

● ポアソン和公式

\mathbb{R} の加法群とその離散部分群 \mathbb{Z} に対するポアソン和公式について説明する.

● 半単純リー群 G とそのコンパクト離散部分群 Γ に対するセルバーグ跡公式

滑らかでコンパクト台を持つ G 上の試験関数 f からきまる $L^2(\Gamma \backslash G)$ 上の右正則表現 $r_\Gamma(f)$ が跡族であることを説明し、セルバーグ跡公式 (の最初の形) を導く.

● $SL(2, \mathbb{Z})$ に対するセルバーグ跡公式

$G = SL(2, \mathbb{R})$ の離散部分群 $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ に対するセルバーグ跡公式について説明する. 右正則表現 $r_\Gamma(f)$ が $L^2(\Gamma \backslash G)$ 上跡族にならないが、 $L^2_{\text{dis}}(\Gamma \backslash G)$ への制限が跡族になることを説明する. その際に必要となるユニポテント軌道積分やマースセルバーグの関係式について解説する.

REFERENCES

- [1] 織田孝幸, Selberg Trace Formula 入門.
- [2] A.W. Knap, Theoretical aspects of the trace formula for $GL(2)$, Representation theory and automorphic forms, American Mathematical Society, Proc. Symp. Pure Math. **61** (1997), 355–405.
- [3] A. Selberg, Harmonic analysis, Collected Papers, Vol. I, 626–674, Springer-Verlag, 1989.

- [4] G. Warner, Selberg's trace formula for nonuniform lattices: The \mathbb{R} -rank one case, *Studies in Algebra and Number Theory*, Adv. Math., Suppl. Stud. **6** (1979), 1–142.

2.3. $GL(2)$ の跡公式 I (都築正男 90 分). この講演では、 $GL(2)$ の Arthur-Selberg 跡公式への準備として、アデール群上の L^2 -保型形式の空間の既約分解 (スペクトル分解) について復習する。連続スペクトルをアイゼンシュタイン級数の波束によって構成し、その直交補空間としてカスプ形式を導入する。

- アデール群やイデール群について簡単な復習。(用語や記号の説明をかねる)
- $GL(1)$ のスペクトル理論
 - Poisson 和公式 (アデール群上で説明)
 - 岩澤テート理論の復習
- $GL(2)$ のスペクトル理論
 - L^2 -space とその上の正則表現を導入し、 $GL_2(A)$ 上のコンパクト台のテスト関数 φ の決める作用素 $R(\varphi)$ の核関数について説明
 - Eisenstein 級数とその定数項 (大域絡作用素)
 - 擬 Eisenstein 級数とその内積公式
 - 連続スペクトルの構成 (アイゼンシュタイン級数の波束)
 - カスプ形式、留数形式について説明
 - カスピダルデータについて説明

参考文献 :

- Weil, A., *Basic number theory*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 144, Springer-Verlag New York Heiderberg Berlin 1974.
- Tate, J. *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Algebraic Number Theory, Academic Press (1990), 305–347.
- Ramakrishnan, D., Valenza, R.J., *Fourier analysis on number fields*, Graduate Texts in Mathematics vol. 186, Springer (1998).
- Knapp, A., *Theoretical aspects of the trace formula for $GL(2)$* , Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **61** (1997), 355–405.
- Gelbert, S., Jacquet, H., *Forms of $GL(2)$ from the analytic point of view*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 33 (1979), part 1, 213–251.
- Bump, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge studies in Advanced Mathematics: 55, Cambridge University Press (1998).
- Borel, A., *Automorphic forms on $SL_2(\mathbb{R})$* , Cambridge tactics in Mathematics, Cambridge University Press (1997).

- Iwaniec, H., *Spectral methods of automorphic forms* (second edition), Graduate Studies in Mathematics 53, American Mathematical Society Providence, Rhode Island (2002).

2.4. Selberg ゼータ関数 (権 寧魯) 90 分.

- 「セルバーグ跡公式」についての補足と復習

$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ のコンパクトな離散部分群に対するセルバーグ跡公式を両側 K 不変な場合に, 軌道積分をフーリエ展開して書き直す.

- コンパクトリーマン面のセルバーグゼータ関数

セルバーグ跡公式を用いて, 上記の場合のセルバーグゼータ関数の解析接続や関数等式などを導く.

- 応用: 実二次体の類数の分布など

$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対するセルバーグゼータ関数を実二次体の基本単数と類数を用いて書き下し, 素測地線定理を用いて実二次体の類数の分布に関する漸近公式を導く.

REFERENCES

- [1] D. A. Hejhal, The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ Vol. I, Lecture Notes in Mathematics **548**, Berlin- Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976.
- [2] D. A. Hejhal, The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ Vol. II, Lecture Notes in Mathematics **1001**, Berlin- Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1983.
- [3] P. Sarnak, Class numbers of indefinite binary quadratic forms, J. Number Theory **15** (1982), no. 2, 229–247.
- [4] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.

2.5. $\mathrm{GL}(2)$ の跡公式 II, III (若槻聡) 150 分. 「 $\mathrm{GL}(2)$ の跡公式 I」の続. この講演では $L^2(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})^1)$ に関する Arthur-Selberg 跡公式を Arthur の定式化に沿って解説する. そして, 「Eichler-Selberg 跡公式」と「Jacquet-Langlands 対応」の講演で用いられる公式を導く. 以下の項目について話す.

- Arthur’s modified kernel とその収束性
- 幾何サイドについて
- スペクトルサイドについて
- Simple trace formula
- $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ の離散系列表現に関する明示的公式

REFERENCES

- [1] H. Jacquet, R. P. Langlands, Automorphic forms on $\mathrm{GL}(2)$, Lecture Notes in Mathematics **114**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970.
- [2] S. Gelbart, H. Jacquet, Forms of $\mathrm{GL}(2)$ from the analytic point of view, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **33** Part 1 (1979), 213–252.
- [3] S. Gelbart, Lectures on the Arthur-Selberg trace formula, University Lecture Series **9**, Providence, RI: American Mathematical Society, 1996.
- [4] A.W. Knap, Theoretical aspects of the trace formula for $\mathrm{GL}(2)$, Proc. Symp. Pure Math. **61** (1997), 355–405.

2.6. Eichler-Selberg 跡公式 (伊吹山知義) 60 分. 跡公式の表示にはいろいろな段階があるわけで、たとえば核関数を与えて積分表示した段階で、これを公式と称したらいけないということはないであろう。これをもっと細かく、軌道積分、体積その他を用いて書くともっと公式らしくなるであろう。しかし保型形式の次元や保型形式の古典的な意味でのヘッケ作用素の跡は、少なくとも整数であるから数値が決まっているわけで、これを実際に計算できる公式を与えよといわれるともっと細かいことをやらなくてはならなくなる。その最初が、共役類の分類であろう。たとえば Gottschling は $Sp(2, \mathbb{Z})$ の基本領域を精密に求めて、その境界での挙動から $Sp(2, \mathbb{Z})$ の共役類の分類を行っており、これは代数幾何の人たちが使ったりしていた。しかし、共役類の分類は、普通は体上の分類を局所的にやっておいて、さらに整数環上の分類を行い、Hasse の原理などで大域的にまとめなおすのが効率がよい。実際、そういうやり方をすれば基本領域を求める必要などは全くなく (cf. Hashimoto and Ibukiyama の論文), いきなり大域的に考えるのは、一般には、いかにも効率が悪い。ところが、 $SL_2(\mathbb{Z})$ では、実は大域的な考察もまことに綺麗におこなえるし、このような大域的な考察は $Sp(2)$ の半単純でない元の分類にも役に立つ。あいにく、この非常に綺麗な手法は Miyake [5] などでは解説されていない。よってここでは最初に、敢えてまず大域的な手法を用いて説明し、後に一般の local-global の手法について少しだけ解説したい。

REFERENCES

- [1] M. Eichler, On the class number of imaginary quadratic fields and the sums of divisors of natural numbers, J. Indian Math. Soc. **19** (1955), 153-180.
- [2] M. Eichler, Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren, J. Reine Angew. Math. **195** (1955), 127-151.
- [3] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA. Math. Vol. 27 No. 3 (1980), 549-601.
- [4] A. Knightly, C. Li, Traces of Hecke operators, Mathematical Surveys and Monographs **133**, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2006.
- [5] T. Miyake, Modular forms, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [6] D. Zagier, The Eichler-Selberg trace formula on $SL_2(\mathbb{Z})$, Introduction to modular forms by S. Lang, Appendix, pp. 44-54, Springer, Berlin, 1976.

2.7. Jacquet-Langlands 対応 I (都築正男 90 分). Arthur-Selberg 跡公式は、異なる代数群上の保型表現の対応付け (lifting) を確立する手段として導入され整備されてきた。この講演では、そのような例の中でもっとも基本的な Jacquet-Langlands 対応の解説を行う。

- 四元数環と $GL(2)$ の inner forms の説明 (分類、具体的構成、大域局所原理など)
- Jacquet-Langlands 対応の定式化 (局所体上 $GL(2)$ の smooth 表現の場合)
 - $GL(2)$ の inner forms におけるトーラスの分類 (正則半単純元の分類)

- $GL(2)$ の smooth 表現とその指標
- 離散系列表現
- 主定理の説明
- Jacquet-Langlands 対応の定式化 (保型表現の場合)
 - 表現の制限テンソル積
 - L^2 -空間の分解、カスプ保型表現の説明
 - 主定理の説明

2.8. Jacquet-Langlands 対応 II (都築正男 90 分). この講演では、Arthur-Selberg 跡公式の応用として Jacquet-Langlands 対応の証明をスケッチする。

- 玉河測度
- 離散系列表現の指標の直交関係式
- 軌道積分
- 不分岐 Hecke 環
- テスト函数の「matching」
- Arthur-Selberg 跡公式とその単純化
- 主定理の証明 (スケッチ)
- その他の帰結や注意 (重複度 1、周期積分による特徴づけ等)

参考文献 :

- Jacquet, H., Langlands, L.P., *Automorphic forms on $GL(2)$* , Lecture Notes in Mathematics, **114**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1970).
- Knapp, A. W, Rogawski, J. D, *Applications of the trace formula*, Proc. Symp. Pure Math. 61 (1997), 413–431
- Rogawski, Jonathan D, *Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field*, Duke Math. J. 50 (1983), no. 1, 161–196.
- Deligne, P., Kazhdan, D., Vigneras, M.-F. *Representations des algèbres centrales simples p -adiques*, 33–117, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984
- Gelbert, Stephen S., *Automorphic forms on adèle groups*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1975).

2.9. $GL(3)$ の跡公式 (若槻聡) 150 分. この講演では $GL(3)$ の跡公式について解説する. 目的は $GL(3)$ の場合をもとに一般の連結簡約代数群に対する跡公式の雰囲気を理解してもらうことにある. 表現の指標は不変超関数 (invariant distribution) なので, 跡公式から保型表現もしくは保型形式の情報を得ようとするならば各項の超関数に関する不変性に注目する必要がある. そのため特に跡公式の不変性に関することについて詳しく解説したい. 以下の項目について話す.

- $GL(3)$ の跡公式の粗い展開
- (G, M) -family と distribution と不変性
- $GL(3)$ の跡公式の細かい展開
- $GL(3)$ の不変跡公式

REFERENCES

- [1] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(Q)$, *Duke Math. J.* **45** (1978), no. 4, 911–952.
- [2] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. II. Applications of a truncation operator, *Compositio Math.* **40** (1980), no. 1, 87–121.
- [3] J. Arthur, The trace formula in invariant form, *Ann. of Math. (2)* **114** (1981), 1–74.
- [4] J. Arthur, The invariant trace formula. I. Local theory, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 2, 323–383.
- [5] J. Arthur, The invariant trace formula. II. Global theory, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 3, 501–554.
- [6] J. Arthur, An introduction to the trace formula, *Clay Mathematics Proceedings* **4** (2005), 1–263.

2.10. 安定跡公式と志村多様体についての紹介 (安田正大) 120 分.

2.11. 内視論入門 (今野拓也) 120 分. このサマースクールの前半では Arthur-Selberg 跡公式そのものの構成が解説されるが、安田正大さんの講演に始まる後半では跡公式を使って簡約群上の保型形式を記述することに主眼が移る。この講演ではその基盤となる内視論の基本的なアイデアを解説する。まず群コホモロジーについて簡潔に復習した後、保型形式の記述の雛形となるトーラスの Langlands 対応を復習する。調和解析の観点から見ると内視論はアデール群の既約ユニタリ表現のなす L パケットの内部構造を記述するものだが、その解説には Langlands 対応など仮説的な内容を仮定しなくてはならない。代わりにこの講演ではアデール群の共役類の局所大域原理から内視論、特に内視データの必要性を導く。こうして得られる共役類ごとの局所大域原理からアデール群全体の保型表現のそれを導くために跡公式が用いられる。そこで講演の最後に、共役類ごとの局所項で大域的なトレースを表すという Lefschetz 跡公式的な視点から Arthur 跡公式を簡単に復習しておく。

文献

群コホモロジーと Tate・中山双対性について

Serre, J.-P. *Local fields* Springer-Verlag, 1979, 67, viii+241.

Milne, J. *Arithmetic duality theorems* Booksurge Publishing, 2006, 339+viii.

Hida, H. *Modular forms and Galois cohomology* Cambridge University Press, 2000, 69, x+343.

トーラスの Langlands 対応について

Labesse, J.-P. *Cohomologie, L -groupes et functorialit?* *Compositio Math.*, 1985, 55, 163-184.

安定共役と共役類の局所大域原理について

Langlands, R. P. *Les débuts d'une formule des traces stable* Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, 1983, v+18.

Kottwitz, R. E. *Rational conjugacy classes in reductive groups* *Duke Math. J.*, 1982, 49, 785-806.

Kottwitz, R. E. Stable trace formula: elliptic singular terms
Math. Ann., 1986, 275, 365-399.

2.12. 移行因子と基本補題 (今野拓也) 75 分. 共役類の局所大域原理を調和解析 (跡公式) に織り込むのが軌道積分の移行である。非コンパクトな簡約群上の不変分布は一般に極を持ち、その挙動は共役類の幾何によって統制されている。異なる群の間で軌道積分を移行するためにはその特異挙動の差、共役類の有理性の差を埋め、なおかつ表現の内視リフトを正しく正規化する移行因子が必要である。この講演では Langlands-Shelstad による移行因子の定義を復習し、結果として期待される軌道積分の移行を定式化する。次いで不分岐表現と Hecke 環の関係についての佐武同型を復習し、不分岐表現の内視リフトから Hecke 環の軌道積分の移行について求められる基本補題を解説する。時間があればこれらの予想の証明にも触れたいが、基本補題の証明は関数体の場合の跡公式の楕円部分の安定化を幾何で書き直すことで達成されるため、次の講演の前にそれを扱うことは適切ではない。

文献

Langlands, R. P. & Shelstad, D. On the definition of transfer factors Math. Ann., 1987, 278, 219-271.

Harris, M. Arithmetic applications of the Langlands program Jpn. J. Math., 2010, 5, 1-71. 153-236.

2.13. 楕円項の安定化 (今野拓也) 75 分. ここでは Arthur 跡公式の幾何サイドの楕円共役類に付随する項の安定化を解説する。議論の大部分は正則楕円共役類に対して得られている結果を関手を拡張することで一般の楕円共役類に延ばすことに割かれる。

文献

Langlands, R. P. Les débuts d'une formule des traces stable Université de Paris VII U.E.R. de Mathématiques, 1983, v+18.

Kottwitz, R. E. Stable trace formula: elliptic singular terms Math. Ann., 1986, 275, 365-399.

2.14. 応用—玉河数 (今野拓也) 60 分. 跡公式の安定化は Arthur 跡公式を内視群の安定跡公式で展開する操作だが、楕円項の安定化には一般に内視群の安定跡公式の楕円部分の一部しか現れない。つまりこのような部分的な安定化では、安定跡公式の楕円項だけでさえ計算できない。しかし内視群の寄与が消えるような特殊なテスト関数に対しては、Clozel-Labesse のベースチェンジなどのように楕円項の安定化だけでも応用に耐えることがある。ここではそのような応用として簡約群の内部形式の間で玉河数が一致するという Kottwitz の結果を紹介する。

文献

小野孝 玉河数について 雑誌「数学」, 1963, 15, 8-17.

Kottwitz, R. E. Tamagawa numbers Ann. of Math. (2), 1988, 127, 629-646.

Clozel, L. Nombres de Tamagawa des groupes semi-simples (d'après Kottwitz) Astérisque, 1989, Exp. No. 702, 61-82.

2.15. ユニタリ群の安定跡公式 (平賀郁) 360 分. 今野拓也氏による trace formula の elliptic term の stabilization の解説に引き続いて、本講演ではユニタリ群 (主に 3 次のユニタリ群 $U(3)$) の場合に限定した上で trace formula の stabilization とそこから得られる結果について説明する。最終的な目標として、ユニタリ群の trace formula と GL の twisted trace formula を比較することにより、次が得られることを説明する。1. ユニタリ群の局所 Langlands 対応と A -packet の構造 2. ユニタリ群の保型表現と GL の保型表現との対応 3. ユニタリ群の保型表現の multiplicity formula

REFERENCES

- [1] J. D. Rogawski, The multiplicity formula for A -packets. The zeta functions of Picard modular surfaces, 395–419, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992.
- [2] J. D. Rogawski, Automorphic representations of unitary groups in three variables. Annals of Mathematics Studies, 123. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990. xii+259 pp.
- [3] J. Arthur, An introduction to the trace formula. Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1–263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.