軌道積分，表現の指標

若槻聡 *

この原稿の目的は軌道積分と表現の指標の germ expansion について解説することである．Harish-Chandra の本 [5] が主な参考文献となっている．この原稿を通じて F は標数 0 の非アルキメデス的局所体とする．

1　GL(1)

まずは GL(1) を考えよう．つまり，

$$G = F^\times = \mathrm{GL}(1, F)$$

の既約ユニタリ表現を扱う．この場合の指標の germ expansion は自明であるが，理解しておくと一般論の見通しが良くなると思われるので最初に紹介しておく．

$\mathcal{O}$ を整数環，ϖ を素元，$|\ |$ を F の正規付値，ord を F の加法的付値とする．G の既約ユニタリ表現 π に対して，ある実数 $s \in \mathbb{R}$ と $\mathcal{O}^\times = \{x \in F^\times \mid |x| = 1\}$ から $\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z$ の $\mathbb{C}$ 上の絶対値は $1\}$ への連続な準同型 π_0 が存在して

$$\pi(x) = |x|^{is}\pi_0(\varpi^{-\mathrm{ord}(x)}x) \quad (x \in G)$$

と表される．特に $\mathrm{Ker}(\pi_0)$ は $\mathcal{O}^\times$ の開部分群で，π_0 は局所定数であることに注意する．この場合 π の指標 $J(\pi)$ は π そのものである．つまり，

$$J(\pi, \gamma) = \pi(\gamma) \quad (\gamma \in G)$$

となる．

G の Lie 環は F であり，十分大きい自然数 N について 0 の近傍 $\varpi^N\mathcal{O}$ から 1 の近傍 $1 + \varpi^N\mathcal{O}$ への写像 exp が $\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k!$ で与えられる．F の位相で収束するこ

* 〒920-1192 石川県金沢市角間町 金沢大学理工研究域数物科学系
E-mail address: `wakatsuk@staff.kanazawa-u.ac.jp`

とに注意されたい．Lie 環 F 上の G-共役類は一点のみからなるので，それを $O=\{X\}$ $(X\in F)$ とすると，その軌道積分 μ_O は

$$\mu_O(f)=f(X)\quad (f\in C_c^\infty(F))$$

と与えられる．χ を F 上の非自明な指標とし，$f\in C_c^\infty(F)$ について

$$\widehat{f}(Y)=\int_F f(Z)\,\chi(ZY)\mathrm{d}Z$$

と f のフーリエ変換を定める．ただし，$\mathrm{d}Z$ は F 上のハール測度とする．これにより軌道積分 μ_O のフーリエ変換 $\widehat{\mu_O}$ が $\widehat{\mu_O}(f)=\mu_O(\widehat{f})$ によって定まる．このとき，超関数 $\widehat{\mu_O}$ は $\widehat{\mu_O}(Y)=\chi(YX)$ で定められる局所定数関数 $\widehat{\mu_O}$ によって

$$\widehat{\mu_O}(f)=\widehat{f}(X)=\int_F f(Z)\,\widehat{\mu_O}(Z)\,\mathrm{d}Z$$

と表される．

ここで $\xi=0\in F$ とする．つまり ξ は Lie 環 F の nilpotent 元であり，$\widehat{\mu_\xi}(Y)=1$ と定数関数となる．以上を合わせて，十分大きい自然数 N' について，

$$J(\pi,\exp(Y))=\pi_0(\exp(Y))=1=c_\xi(\pi)\widehat{\mu_\xi}(Y)\quad (Y\in\varpi^{N'}\mathcal{O})$$

が成り立つ．ただし，$c_\xi(\pi)=1$ と置いた．この等式が GL(1) の指標の germ expansion である．とても自明な等式ではあるが，Lie 環から Lie 群への写像 exp と軌道積分のフーリエ変換などの雰囲気を理解してもらえると嬉しい．以下より一般的な germ expansion の解説を始める．

2　準備

$\mathbf{G}$ を F 上の連結簡約線形代数群とし，$\mathbf{G}$ は GL_n の F-部分線形代数群としておく．以下，$G=\mathbf{G}(F)$ とし，$\mathrm{d}x$ を G 上のハール測度とする．$\mathrm{GL}_n(F)$ の Lie 環は $M_n(F)$ と同一視される．仮定より G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $M_n(F)$ の部分代数となる．詳しくは [6, 10] を参照されたい．

例としてユニタリ群 $U_n(F)$ の Lie 環をあげておく．E を F の 2 次拡大, σ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ の非自明な元，I_n は n 次の単位行列，O_n は n の零行列とする．そうすると $U_n(F)=\{g\in\mathrm{GL}_n(E)\mid g\sigma({}^tg)=I_n\}$ の Lie 環は

$$\{X\in M_n(E)\mid X+\sigma({}^tX)=O_n\}$$

と同一視される (cf. [10, 1.4 Lie 環]). もちろん $M_{2n}(F)$ の部分代数となっている.

G の $\mathfrak{g}$ 上への随伴表現 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Ad}(g)X = g^{-1}Xg$ ($X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$) によって定められる. 不定元 t の多項式

$$\det(1 + t - \mathrm{Ad}(x)) = \sum_{k \geq 0} D_k(x)\, t^k$$

について, $D_k \neq 0$ となる最小の k を G の階数 ($\mathrm{rank}(G)$) といい,

$$D_G(x) = D_l(x)\,, \quad (l = \mathrm{rank}(G))$$

とする. G の部分集合

$$G_{\mathrm{reg}} = \{x \in G \mid D_G(x) \neq 0\}$$

は G において稠密な開集合であり, $\int_{G \setminus G_{\mathrm{reg}}} \mathrm{d}x = 0$ となる. G_{reg} の元を正則元という. $\mathfrak{g}$ の随伴表現 $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$) で定められる. 不定元 t の多項式 $\det(t - \mathrm{ad}(X)) = \sum_{k \geq 0} \eta_k(X)\, t^k$ によって

$$\eta_{\mathfrak{g}}(X) = \eta_l(x)\,, \quad (l = \mathrm{rank}(G))$$

とする. $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ を

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \eta_{\mathfrak{g}}(X) \neq 0\}$$

により定める.

$\mathfrak{g} \subset M_n(F)$ かつ $G \subset \mathrm{GL}_n(F)$ なので, $\mathfrak{g}$ の元に対する exp と G の元に対する log が

$$\exp(X) = E_n + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^m}{m!} + \cdots \in G \quad (X \in \mathfrak{g}),$$

$$\log(x) = (x - E_n) - \frac{(x - E_n)^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}(x - E_n)^m}{m} + \cdots \in \mathfrak{g} \qquad (x \in G)$$

のように収束を仮定した上で定義される. 収束については [5, Section 10] を参照されたい. 固有値が 0 に近い $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp(X)$ は収束することに注意しよう. そして十分に 0 に近い $\mathfrak{g}$ の元 X(cf. [5, p.57]) について $|\eta_{\mathfrak{g}}(X)| = |D_G(\exp(X))|$ が成り立つ. 特に

$$\exp(\mathrm{Ad}(g)X) = g^{-1}\exp(X)g, \quad \log(g^{-1}xg) = \mathrm{Ad}(g)\log(x)$$

が成り立つ．exp を用いた Lie 環から Lie 群への持ち上げの議論 (cf. [4, 5, 7]) により，いくつかの条件を仮定すると後で述べる G 上の軌道積分は $\mathfrak{g}$ 上の軌道積分と同一視できる．$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ の nilpotent 元全体とし，$\mathcal{U}$ を G の unipotent 元全体とする．$\mathcal{N}$ の元に対して exp は有限和になること，$\mathcal{U}$ の元に対して log も有限和になることに注意されたい．$\log\circ\exp=\mathrm{id}_{\mathcal{N}}$ かつ $\exp\circ\log=\mathrm{id}_{\mathcal{U}}$ なので exp は $\mathcal{N}$ から $\mathcal{U}$ への全単射である．$\mathcal{N}$ の G-軌道は有限個であることに注意する．さらに exp は $\mathcal{N}$ 上の G-共役類全体から $\mathcal{U}$ 上の共役類全体への全単射も与える．

3　指標

(π, V) を G の既約許容表現とする．テスト関数 $f\in C_c^\infty(G)$ に対して，自己準同形 $\pi(f): V\to V$ を

$$\pi(f)v=\int_G f(x)\pi(x)v\,\mathrm{d}x \quad (v\in V)$$

によって定める．G の十分小さい開コンパクトな部分群 K について f が KxK $(x\in G)$ の特性関数の一次結合となっているので，$\mathrm{rank}(\pi(f))<\infty$ となる．そのため，$C_c^\infty(G)$ 上の超関数 $\Theta(\pi)$（連続な線型汎関数）が

$$\Theta(\pi, f)=\mathrm{Tr}(\pi(f)) \quad (f\in C_c^\infty(G))$$

によって与えられる．（注：$C_c^\infty(G)$ 上には，有限個の G の開コンパクトな部分集合の特性関数で張られる空間の位相を $\mathbb{C}$ の通常の積位相により定め，それらによる帰納的極限の位相が入っている．そのため $C_c^\infty(G)$ 上の任意の線型汎関数は超関数になる．）

定理 1　[5, Theorem 16.3]. G_{reg} 上局所定数であるような G 上局所可積分な関数 $\Theta(\pi)$ が存在して，

$$\Theta(\pi, f)=\int_G \Theta(\pi, x)f(x)\,\mathrm{d}x \quad (f\in C_c^\infty(G))$$

が成り立つ．そして $|D_G|^{1/2}\,\Theta(\pi)$ は G 上局所有界である．

今回のサマースクールでは，関数 $\Theta(\pi)$ を

$$J(\pi,\gamma)=|D_G(\gamma)|^{1/2}\,\Theta(\pi,\gamma)$$

のように正規化して得られる関数 $J(\pi)$ を扱い，関数 $J(\pi)$ を π の指標と言う．特に指標 $J(\pi)$ は $J(\pi, g^{-1}\gamma g)=J(\pi,\gamma)$ $(\gamma\in G_{\mathrm{reg}}, g\in G)$ を満たすことに注意されたい．

4 $\mathfrak{g}$ 上の軌道積分

$B(X,Y)=\mathrm{Tr}(XY)$ $(X,Y\in\mathfrak{g})$ とおくと，$B(X,Y)$ は $\mathfrak{g}$ 上の G-不変双一次形式となる．$\mathrm{d}X$ を $\mathfrak{g}$ 上のハール測度とし，χ を F 上の非自明な指標とする．$f\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ について

$$\widehat{f}(Y)=\int_{\mathfrak{g}} f(X)\,\chi(B(X,Y))\,\mathrm{d}X$$

により $\widehat{f}\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ を定義する．$C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 上の超関数 T に対して，そのフーリエ変換である $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 上の超関数 $\widehat{T}$ が

$$\widehat{T}(f)=T(\widehat{f})$$

により定まる．

Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X について，その G における X の中心化群を $C_G(X)$ とする．つまり，$C_G(X)=\{g\in G\,|\,\mathrm{Ad}(g)X=X\}$ である．$C_G(X)$ はユニモジュラーであることが知られているので，G-軌道 $O=\mathrm{Ad}(G)X\cong C_G(X)\backslash G$ 上に不変測度 $\mathrm{d}x^*$ が定数倍を除いて唯一定まる．そして [7] により任意の $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ に対して積分

$$\mu_O(f)=\int_{C_G(X)\backslash G} f(\mathrm{Ad}(x)X)\,\mathrm{d}x^*$$

が値を持つので，$C_c^\infty(\mathfrak{g})$ 上の超関数 μ_O が得られる．この積分 μ_O のことを軌道積分と呼ぶ．[5, Theorem 4.4] より，$\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ 上局所定数となる $\mathfrak{g}$ 上の局所可積分関数 $\widehat{\mu_O}$ が存在して

$$\widehat{\mu_O}(f)=\int_{\mathfrak{g}}\widehat{\mu_O}(X)\,f(X)\,\mathrm{d}X\quad(f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}))$$

が成り立ち，$|\eta_{\mathfrak{g}}(\gamma)|^{1/2}\widehat{\mu_O}$ は $\mathfrak{g}$ 上局所有界となる．特に $\widehat{\mu_O}$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ 上の局所定数関数となっている．

定理 2 [5, Theorem 16.2 の原点近傍のみの場合]．0 に十分近い任意の $Y\in\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ について

$$J(\pi,\exp(Y))=\sum_{\xi}c_\xi(\pi)\,\widehat{\mu_\xi}(Y)$$

が成り立つような nilpotent 軌道 ξ と π にのみ依存した複素数 $c_\xi(\pi)$ が一意的に存在する．ただし，上の和において ξ は G の nilpotent 軌道全体を動く．

この展開を指標の germ expansion という．特にすべての既約な square integrable 表現 π に対して，$c_0(\pi)$ は π の形式次数と適当な定数との積に一致する (cf. [5, Theorem 22.3] and [3]).

G 上の unipotent 軌道 u が $\mathfrak{g}$ 上の nilpotent 軌道 ξ に対応しているとき，0 に十分近い $Y \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$ について

$$\widehat{J}(u, \exp(Y)) = \widehat{\mu_\xi}(Y)\,, \quad c_u(\pi) = c_\xi(\pi)$$

とおく．こうすると上の定理は，「1 に十分近い任意の $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$ について

$$J(\pi, \gamma) = \sum_u c_u(\pi)\,\widehat{J}(u, \gamma)$$

が成り立つような unipotent 軌道 u と π にのみ依存した複素数 $c_u(\pi)$ が一意的に存在する」と書き換えれる．

上の定理は原点近傍での展開になっているので，固定した半単純元の近傍での展開への一般化は次のようになる (cf. [10, 1.5.2 Jordan 分解]). δ を G の半単純元とし，$\mathbf{G}_\delta$ を $\mathbf{G}$ における δ の中心化群の 1 を含む連結成分とする．$\mathbf{G}_\delta$ は簡約であることに注意しよう．$G_\delta = \mathbf{G}_\delta(F)$ とおき，$\mathfrak{g}_\delta$ をその Lie 環とする．さらに，上述の $\mathfrak{g}$ の場合と同じように，G_δ の Lie 環 $\mathfrak{g}_\delta$ の各 nilpotent 軌道 ξ に対して関数 $\widehat{\nu_\xi}$ が定まる．

定理 3 [5, Theorem 16.2]. 0 に十分近い任意の $Y \in \mathfrak{g}_\delta$（$\delta \exp(Y)$ は G_{reg} に属する）について

$$J(\pi, \delta \exp(Y)) = \sum_\xi c_{\delta,\xi}(\pi)\,\widehat{\nu_\xi}(Y)$$

が成り立つような π と δ と ξ に依存した複素数 $c_{\delta,\xi}(\pi)$ が一意的に存在する．ただし和において ξ は $\mathfrak{g}_\delta$ の nilpotent 軌道全体を動く．

証明は [5, Theorem 16.1] によるので，δ が 1 でも他の半単純元でも証明は変わらない．定理 2 と 3 における Y の 0 への近さの正確な議論については，[5, p.74–p.85] を参照されたい．また $\delta\gamma$ が $G_{\mathrm{reg}} \cap \delta G_\delta$ に属するならば γ は $G_{\delta,\mathrm{reg}}$ に属することに注意されたい (cf. [2, Lemma 7]) ($G_{\delta,\mathrm{reg}}$ はセクション 2 の G_{reg} と同じように定義される).

5 G 上の軌道積分

$\gamma \in G$ について $\mathbf{G}_\gamma$ を，$\mathbf{G}$ における γ の中心化群の 1 を含む連結成分とする．そして，$G_\gamma = \mathbf{G}_\gamma(F)$ とおく．G の unipotent 元 u とその G-軌道 $\{g^{-1}ug \mid g \in G\}$ を同一視し

よう．$f \in C_c^\infty(G)$ と unipotent 軌道 u について

$$J(u,f) = \int_{G_u\backslash G} f(x^{-1}ux)\,\mathrm{d}x^*$$

と unipotent 軌道積分 $J(u,f)$ を定義する．

次に ω を G_{reg} の元とする．この場合，$\mathbf{G}_\omega$ はトーラスになる．そこで，$\mathbf{T} = \mathbf{G}_\omega$ として，$T = \mathbf{T}(F)$ かつ $T_{\mathrm{reg}} = T \cap G_{\mathrm{reg}}$ とおく．T 上のハール測度 $\mathrm{d}t$ を固定する．$T\backslash G$ 上の不変測度 $\mathrm{d}x^*$ を $\mathrm{d}t$ と $\mathrm{d}x$ によって定め，$f \in C_c^\infty(G)$ と $\gamma \in T_{\mathrm{reg}}$ に関する軌道積分 $J(\gamma,f)$ を

$$J(\gamma,f) = |D_G(\gamma)|^{1/2}\int_{T\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\,\mathrm{d}x^*$$

と定義する．

定理 4　[8, Theorem 2.1.1], [9, p.955 Proposition の原点近傍のみの場合], [5, Theorem 8.1 Lie 環の場合]. 1 に十分近い任意の $\gamma \in T_{\mathrm{reg}}$（近さは f に依存する）について

$$J(\gamma,f) = \sum_u g(u,\gamma)\,J(u,f)$$

が成り立つような unipotent 軌道 u にのみ依存した T_{reg} 上の関数 $g(u)$ が一意的に存在する．ただし，上の和において u は G の unipotent 軌道全体を動く．特に $g(u)$ は T_{reg} 上の局所定数関数となる．

この展開を軌道積分の germ expansion という．続いて，指標の germ expansion と同様に固定した半単純元の近傍での展開を考えよう．証明は [9, p.954–955] を参照されたい．証明は上述の原点近傍の展開に帰結する形で行われる．G の半単純元 δ を固定する．δ はトーラス T に属していると仮定して良い．G_δ のユニポテント元 u に対して

$$J(\delta u,f) = |\det(1-\mathrm{Ad}(\delta))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\delta}|^{1/2}\int_{G_{\delta u}\backslash G} f(x^{-1}\delta ux)\,\mathrm{d}x^*$$

と定義する．

定理 5　[9, p.955 Proposition]. 1 に十分近い任意の $\gamma \in G_\delta \cap \delta^{-1}T_{\mathrm{reg}}$（近さは f と δ に依存する）について

$$J(\delta\gamma,f) = \sum_u g(\delta u,\gamma)\,J(\delta u,f)$$

が成り立つような δu に依存した $G_\delta \cap \delta^{-1}T_{\mathrm{reg}}$ 上の関数 $g(\delta u)$ が一意的に存在する．ただし，上の和において u は G_δ の unipotent 軌道全体を動く．特に $g(\delta u)$ は $G_\delta \cap \delta^{-1}T_{\mathrm{reg}}$ 上の局所定数関数となる．

6 捻った場合

G の捻られた指標（twisted character）と捻られた軌道積分（twisted orbital integral）を考えよう．σ を F 上定義された有限位数の $\mathbf{G}$ の自己同型とする．このとき，$\mathbf{G} \rtimes \langle\sigma\rangle$ は非連結な簡約線形代数群となる．以下，

$$\tilde{G} = G \rtimes \langle\sigma\rangle\,, \quad l = |\langle\sigma\rangle|$$

と置く．つまり積は $(g_1 \rtimes \varepsilon_1)(g_2 \rtimes \varepsilon_2) = g_1\varepsilon_1(g_2) \rtimes \varepsilon_1\varepsilon_2$ となる．もちろん正則表現を考えることで $\tilde{G}$ は GL_{nl} の部分代数群となる．そのため，$\tilde{G}$ の Lie 環は $\mathfrak{g}$ と同一視でき，$D_{\tilde{G}}$ や $\tilde{G}_{\mathrm{reg}}$ が同様にして定められる (cf. [2, p.151])．そこで

$$D_{G,\sigma}(g) = D_{\tilde{G}}(g \rtimes \sigma) \quad (g \in G), \quad G_{\mathrm{reg},\sigma} = \{g \in G \,|\, g \rtimes \sigma \in \tilde{G}_{\mathrm{reg}}\}$$

と記号を定めておく．$G_{\mathrm{reg},\sigma}$ の元を σ-正則元という．

(π, V) を G の既約許容表現としよう．π が σ-安定であるとは，$\pi^\sigma(x) = \pi(\sigma(x))$ で定義される表現 π^σ と π が同値であることを意味する．以下，π が σ-安定とする．このとき，π と π^σ の間の零でない intertwining operator $I_\sigma : V \to V$ が存在する．そして，$I_\sigma^l = \mathrm{Id}_V$ と正規化してよく，このような I_σ は一意的に定まる（cf. [1, p.10–11]）．σ-安定な既約許容表現 π について，

$$\pi(g \rtimes \sigma^i) = \pi(g)\, I_\sigma^i$$

と置くことによって $\tilde{G}$ の既約許容表現 (π, V) が得られる．テスト関数 $f \in C_c^\infty(G)$ について

$$\Theta_\sigma(\pi, f) = \mathrm{Tr}(\pi(f)\, I_\sigma)$$

と定めることで，超関数 $\Theta_\sigma(\pi)$ が得られる．

定理 6 [2, Theorem 1] $G_{\mathrm{reg},\sigma}$ 上局所定数であるような G 上局所可積分な関数 $\Theta_\sigma(\pi)$ が存在して，

$$\Theta_\sigma(\pi, f) = \int_G \Theta_\sigma(\pi, x) f(x)\, \mathrm{d}x \quad (f \in C_c^\infty(G))$$

が成り立つ．そして $|D_{G,\sigma}|^{1/2}\, \Theta_\sigma(\pi)$ は G 上局所有界である．

[2] において [5] の結果の非連結な簡約線形代数群への一般化がなされているので，$\tilde{G}$ へ適用すればこの定理が従う．

$$J_\sigma(\pi, \gamma) = |D_{G,\sigma}(\gamma)|^{1/2}\Theta_\sigma(\pi, \gamma)$$

と正規化して，関数 $J_\sigma(\pi)$ を捻られた指標と呼ぶ．

$\delta \rtimes \sigma$ を $\tilde{G}$ の半単純元として，$\mathbf{G}_{\delta,\sigma}$ を $g^{-1}\delta\sigma(g) = \delta$ で定められる G における σ-中心化群の単位元を含む連結成分とする．$G_{\delta,\sigma} = \mathbf{G}_{\delta,\sigma}(F)$ とおいて，$\mathfrak{g}_{\delta,\sigma}$ を $G_{\delta,\sigma}$ の Lie 環とする．そして，セクション 4 での話と同じように $\mathfrak{g}_{\delta,\sigma}$ の nilpotent 軌道 ξ に対して関数 $\widehat{\nu_\xi}$ が定まる．捻られた指標 $J_\sigma(\pi)$ の germ expansion が次のように記述される．$\tilde{G}$ において $\delta \rtimes \sigma$ と $\exp(Y) \rtimes 1$ の積を考えると分かり易いと思う．

定理 7 [2, Theorem 3]. 0 に十分近い任意の $Y \in \mathfrak{g}_{\delta,\sigma}$（$\exp(Y)\delta$ は $G_{\mathrm{reg},\sigma}$ に属する）について

$$J_\sigma(\pi, \exp(Y)\delta) = \sum_\xi c_{\delta,\sigma,\xi}(\pi)\, \widehat{\nu_\xi}(Y)$$

が成り立つような π と $\delta \rtimes \sigma$ と ξ に依存した複素数 $c_{\delta,\sigma,\xi}(\pi)$ が一意的に存在する．和における ξ は $\mathfrak{g}_{\delta,\sigma}$ の nilpotent 軌道全体を動く．

$f \in C_c^\infty(G)$ と半単純元 $\omega \rtimes \sigma$ と $G_{\omega,\sigma}$ のユニポテント元 u に対して捻られた軌道積分を

$$J_\sigma(u\omega, f) = |\det(1 - \mathrm{Ad}(\omega \rtimes \sigma))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\omega,\sigma}}|^{1/2} \int_{G_{u\omega,\sigma}\backslash G} f(x^{-1}u\omega\sigma(x))\,\mathrm{d}x^*$$

と定義する．半単純元 $\delta \rtimes \sigma$ を固定すると，捻られた軌道積分 $J_\sigma(\gamma\delta)$ の germ expansion は次のように記述される．

定理 8 [9, p.955 Proposition] 1 に十分近い任意の $\gamma \in G_{\delta,\sigma} \cap \delta^{-1}G_{\mathrm{reg},\sigma}$（近さは f と δ に依存する）について

$$J_\sigma(\gamma\delta, f) = \sum_u g_\sigma(u\delta, \gamma)\, J_\sigma(u\delta, f)$$

が成り立つような $u\delta \rtimes \sigma$ に依存した $G_{\delta,\sigma} \cap \delta^{-1}G_{\mathrm{reg},\sigma}$ 上の関数 $g_\sigma(u\delta)$ が一意的に存在する．ただし，上の和において u は $G_{\delta,\sigma}$ の unipotent 軌道全体を動く．

謝辞. 私自身は京都大学でＰＤをしているときに，この germ expansion の話を学びました．当時，自分のやりたいことを池田さん達に話したところ，germ expansion であることを教えてもらったためです．本サマースクールの講演依頼が来たときに，オーガナイザーの平賀さんや今野さんにＰＤの時代に色々と助言を頂いたことを懐かしく思い出しました．講演と原稿執筆，そして良い学習の機会をくださったオーガナイザーの原下秀士さ

ん，今野拓也さん，平賀郁さんに感謝致します．また菅野孝史さんには講演内容について助言してもらい感謝致します．

参考文献

[1] J. Arthur, L. Clozel, Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula, Annals of Mathematics Studies, 120, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[2] L. Clozel, Characters of nonconnected, reductive p-adic groups, Canad. J. Math. **39** (1987), 149–167.

[3] L. Clozel, Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group, Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, ME, 1989), 101–121, Progr. Math., 101, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[4] Harish-Chandra, Harmonic analysis on reductive p-adic groups, LNM 162, Springer-Verlag, 1970.

[5] Harish-Chandra, Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, Preface and notes by Stephen DeBacker and Paul J. Sally, Jr., University Lecture Series 16, AMS, 1999.

[6] V. P. Platonov, A. S. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen, Pure and Applied Mathematics **139**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[7] R. Ranga Rao, Orbital integrals in reductive groups, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 505–510.

[8] J. A. Shalika, A theorem on semi-simple P-adic groups, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 226–242.

[9] M. F. Vignéras, Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique. J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Ser. IA **29** (1981), 945-962.

[10] 今野拓也, p 進簡約群の構造, 本報告集.