2元2次形式の空間に関する L-関数とエンドスコピー

若槻 聡 （金沢大学）

２０１２年5月１９日

2元2次形式の空間と非自明な2次指標に関する L-関数の明示的公式と階数2の斜交群 $\mathrm{Sp}(2)$ のエンドスコピーとの関係について説明することがこの原稿の主な目的である．内容的には新しい結果を含んでいないが，２つの具体例を元に概均質ベクトル空間のゼータ関数の安定化という新しい概念について解説する．

謝辞．２０１２早稲田整数論研究集会での２０１２年３月１９日の私の講演の要約がこの原稿に書かれています．集会に招待してくださったオーガナイザーの坂田裕さんに感謝致します．また跡公式の安定化と概均質ゼータ関数について色々と議論してくださった Steven Spallone さんに感謝致します.

1 Labesse-Langlandsの公式

このセクションでは，[Labesse-Langlands, (5.11)] において与えられた公式と $\mathrm{SL}(2)$ のエンドスコピーについて解説する．F を代数体とし，$\mathbb{A}$ を F のアデールとする．$\mathcal{S}(\mathbb{A})$ によって $\mathbb{A}$ 上のシュワルツ空間とし，$\mathbb{A}^\times$ をイデール，$|\,|$ をイデールノルム，そして $\mathbb{A}^1=\{x\in\mathbb{A}^\times \mid |x|=1\}$ としよう．まずは $\mathrm{SL}(2,F)$ の放物型部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a\in F^\times\,,\, v\in F \right\}$$

について考えよう．元 a は元 v に随伴作用により $v\mapsto a^2v$ で作用しており，概均質ベクトル空間になっている．よって，$s\in\mathbb{C}$ と $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A})$ に対して概均質ベクトル空間のゼータ積分 $\xi(\phi,s)$ が

$$\xi(\phi,s)=\int_{\mathbb{A}^\times/F^\times}|a^2|^s\sum_{v\in F^\times}\phi(a^2v)\,\mathrm{d}^\times a$$

と自然に定義される．ただし，$\mathrm{d}^\times a$ は $\mathbb{A}^\times$ 上のハール測度とする．ゼータ積分 $\xi(\phi,s)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し，そして全 s-平面に有理型に解析接続される．次にテイト積分 $\zeta(\phi,s,\omega)$ を思い出そう．$\mathbb{A}^1/F^\times$ 上の指標 ω と $s\in\mathbb{C}$ と $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{A})$ に対して

$$\zeta(\phi,s,\omega)=\int_{\mathbb{A}^\times}|a|^s\,\omega(a)\,\phi(a)\,\mathrm{d}^\times a$$

とテイト積分 $\zeta(\phi,s,\omega)$ が定義される．もちろん $\zeta(\phi,s,\omega)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し，そして全 s-平面に有理型に解析接続されることは良く知られている．

定理 1 (Labesse-Langlands) 次の等式が成り立つ．

$$\xi(\phi,s)=\frac{1}{2}\sum_{\omega}\zeta(\phi,s,\omega).$$

ただし，等式の右辺の和において ω は $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上の 2 次指標全体を走る．

固定したテスト関数 ϕ に対して，等式の右辺は有限和であることに注意しよう．この定理は $\mathbb{A}^1/(F^\times)^2$ と $F^\times/(F^\times)^2$ に関するポアソン和公式によって簡単に証明できる．この公式の意味は [Labesse-Langlands] における $\mathrm{SL}(2)$ の安定跡公式の観点から次のように説明できる．$\mathrm{SL}(2)$ の跡公式に適用されるテスト関数 $f\in C_c^\infty(\mathrm{SL}(2,\mathbb{A}))$ に対して，

$$\phi(v)=\int_K f(k^{-1}\begin{pmatrix}1&v\\0&1\end{pmatrix}k)\,\mathrm{d}k$$

とゼータ積分のテスト関数 ϕ を定める．ただし，K は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{A})$ の標準的な極大コンパクト部分群とし，$\mathrm{d}k$ はそのハール測度とする．このとき，テスト関数 f に関する跡公式の幾何サイドのユニポテント項は $\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\xi(\phi,s)$ となっている．これに定理 1 を適用すれば，等式

$$\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)\xi(\phi,s)=\frac{1}{2}\lim_{s\to1}(s-1)\zeta(\phi,s,1)+\frac{1}{2}\sum_{\omega\neq1}\zeta(\phi,1,\omega)$$

が得られる．ただし，右辺の ω は $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上の非自明 2 次指標全体を走る．第一項は $\mathrm{GL}(2)$ の跡公式のユニポテント項と対応しているのだから，いわゆる安定項である．ここで，L を非自明な 2 次指標 ω に対応する F の 2 次拡大とする．トーラス $H=R^{(1)}_{L/F}(\mathbb{G}_m)$ は $\mathrm{SL}(2)$ の標準楕円内視群であることは知られている．非自明な 2 次指標 ω に対して，もし f^H を f の H への移送とすると，

$$\zeta(\phi,1,\omega)=L(1,\omega)\,f^H(1)$$

が成り立つので，$\mathrm{SL}(2)$ のユニポテント項の安定化が得られる (cf. [Labesse-Langlands])．つまり，定理 1 は $\mathrm{SL}(2)$ のユニポテント項の安定化を意味している．定理 1 の興味深い点は，ゼータ関数 $\xi(\phi,s)$ を安定化しているように見える点である．放物型部分群から来る概均質ゼータ関数は，だいたいユニポテント軌道積分なので，概均質ゼータ関数に関する安定化の理論が存在しても，そんなに不思議ではないと思う．次のセクションでは 2 元 2 次形式の空間に関連する L-関数の明示的公式を解説する．この具体例により，伊吹山氏と斎藤氏の概均質ゼータ関数の明示的公式の理論と斎藤氏のその定式化の研究が概均質ゼータ関数の安定化の存在を暗示していることが予想できると思う．

2　2元2次形式の空間に関するL-関数

このセクションでは2元2次形式の空間と非自明な2次指標に関連するL-関数の明示的公式について述べる．セクション1の記号を引き続き用いる．そして，F上において

$$V = \{x \in M(2) \,|\, x = {}^t x\} \quad \text{かつ} \quad G = \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{PGL}(2)$$

と置く．群GはV上に

$$g \cdot x = \frac{a}{\det(h)} h x\, {}^t h\,, \quad g = (a, h) \in G\,,\ a \in \mathrm{GL}(1)\,,\ h \in \mathrm{PGL}(2)\,,\ x \in V$$

と忠実に作用する．記号$\mathcal{S}(V(\mathbb{A}))$は$V(\mathbb{A})$上のシュワルツ空間を意味する．**これより記号$\omega$は$\mathbb{A}^1/F^\times$上の2次指標（つまり$\omega^2 = 1$）とする．**元$g = (a, h) \in G$について，

$$\omega(g) = \omega\Big(\frac{a}{\det(h)}\Big) \quad \text{かつ} \quad \chi(g) = a^2$$

と定める．$V(F)$の部分集合$V^*(F)$を

$$V^*(F) = \{x \in V(F) \,|\, \det(x) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad -\det(x) \notin (F^\times)^2\,\}$$

で定義する．最後に，$\mathrm{d}g$を$G(\mathbb{A})$上の玉河測度とすれば，ゼータ積分$Z(\Phi, s, \omega)$が変数$s \in \mathbb{C}$とテスト関数$\Phi \in \mathcal{S}(V(\mathbb{A}))$と2次指標$\omega$について

$$Z(\Phi, s, \omega) = \int_{G(\mathbb{A})/G(F)} |\chi(g)|^s\, \omega(g) \sum_{x \in V^*(F)} \Phi(g \cdot x)\, \mathrm{d}g$$

と定義される．$Z(\Phi, s, \omega)$は領域$\mathrm{Re}(s) > 3/2$において絶対収束する．非自明な2次指標ωに対して$Z(\Phi, s, \omega)$の明示的公式を与えよう．そのための記号をいくつか導入する．まず，ΣによってFの素点の集合を記述する．任意の$v \in \Sigma$に対して，F_vをvにおけるFの完備化とし，$|\ |_v$をF_v上の正規付値とする．$V(F_v)$上のシュワルツ空間を$\mathcal{S}(V(F_v))$で記述する．各有限素点$v < \infty$について，F_vの整数環を$\mathfrak{O}_v$で記し，$\mathfrak{O}_v$の極大イデアルを$\mathfrak{p}_v$で書き，π_vをその素元とし，$q_v = |\mathfrak{O}_v/\mathfrak{p}_v|$と置く．類体論を通じて$\omega$に対応する$F$の二次拡大が存在する．そして，その二次拡大が$F(\sqrt{d})$となるような$F^\times$の元$d$を一つ固定する．各$v \in \Sigma$について$F_v^\times$上の2次指標$\omega_v$を$\omega = \prod_{v \in \Sigma} \omega_v$によって定める．通常通り$\zeta_F(s)$はデデキントゼータ関数を意味する，つまり$\zeta_F(s) = \prod_{v < \infty}(1 - q_v^{-s})^{-1}$である．さらに，$L(s, \omega)$でヘッケ$L$-関数を記す，つまり$L(s, \omega) = \prod_{v < \infty} L_v(s, \omega_v)$,

$$L_v(s, \omega_v) = \begin{cases} (1 - \omega_v(\pi_v) q_v^{-s})^{-1} & v < \infty \text{ かつ } \omega_v \text{ は不分岐のとき,} \\ 1 & v < \infty \text{ かつ } \omega_v \text{ は分岐のとき.} \end{cases}$$

無限素点をすべて含むような素点の有限集合Sに対して，

$$\zeta_F^S(s) = \prod_{v \notin S} (1 - q_v^{-s})^{-1}$$

とゼータ関数 $\zeta_F^S(s)$ を定める．記号 c_F は $\zeta_F(s)$ の $s=1$ における留数を記す．Δ_F を F の判別式とし, 素点 $v|2$ に対して e_v を F_v の分岐指数とし, 素点 $v<\infty$ について $\Phi_{0,v}$ は集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V(F_v) \,\middle|\, a,\, c \in \mathfrak{O}_v \text{ かつ } b \in \frac{1}{2}\mathfrak{O}_v \right\}$$

の特性関数を記す．各 $v\in\Sigma$ について，局所ゼータ関数 $Z(\Phi_v,s,\omega_v,d)$ が

$$Z(\Phi_v,s,\omega_v,d) = \frac{2\,c_v}{L_v(1,\omega_v)} \times \int_{G(F_v)\cdot x_d} |\det(x_v)|_v^{s-\frac{3}{2}}\omega_v(x_v)\,\Phi_v(x_v)\,\mathrm{d}x_v$$

と定義される．ただし，$x_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$，$c_v = \begin{cases} (1-q_v^{-1})^{-1} & v<\infty \text{ のとき,} \\ 1 & v|\infty \text{ のとき,} \end{cases}$ $\mathrm{d}x_v$ は $\int_{V(\mathfrak{O}_v)}\mathrm{d}x_v = 1$ と正規化された $V(F_v)$ 上のハール測度，$x_v = g_v\cdot x_d$ と $g_v=(a_v,h_v)\in G(F_v)$ について $\omega_v(x_v)=\omega_v(\frac{a_v}{\det(h_v)})$ と定めた．次の公式は斎藤氏の研究 [斎藤１, 斎藤２] から簡単に従う．詳しくは [Hoffmann-若槻] に書いている．

定理 2 テスト関数 $\Phi\in\mathcal{S}(V(\mathbb{A}))$ は $\Phi=\prod_{v\in\Sigma}\Phi_v$, $\Phi_v\in\mathcal{S}(V(F_v))$ を満たすと仮定する．Σ の有限集合 S を任意に一つ取る．そして，S は $\{v\in\Sigma\,|\,v|\infty\ \mathit{or}\ \omega_v$ は不分岐 $\mathit{or}\ \Phi_v\neq\Phi_{0,v}\}$ を含むと仮定する．このとき，等式

$$Z(\Phi,s,\omega) = \frac{L(1,\omega)}{c_F\,|\Delta_F|^{3/2}} \times \prod_{v|2\,,\,v\notin S} \frac{2q_v^{(2s-1)e_v}}{|\mathfrak{O}_v^\times : (\mathfrak{O}_v^\times)^2|} \times \frac{\zeta_F^S(2s-1)}{\zeta_F^S(2)} \times \prod_{v\in S} Z(\Phi_v,s,\omega_v,d)$$

が成り立つ．

この定理 2 と局所ゼータ関数の結果 (cf. [井草１, 井草２, 佐藤-新谷]) から $Z(\Phi,s,\omega)$ は全 s-平面に有理型に解析接続される．解析接続に関しては，一般的に [雪江] で証明されている．各 $v<\infty$ に対してテスト関数 $\Phi_{1,v}$ を

$$\Phi_{1,v}(x_v) = \begin{cases} \omega_v(a) & \text{ある } h\in\mathrm{GL}(2,\mathfrak{O}_v) \text{ について} \\ & x_v = h\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}{}^t h,\ a\in\mathfrak{O}_v^\times,\ b,c\in\mathfrak{p}_v \text{ となるとき,} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって定義する．定理 2 と局所的な計算により次の結果を得る．

定理 3 まず次のように素点の有限集合を定める．

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{fin}} &= \{v\in\Sigma\,|\,v<\infty \quad \text{かつ} \quad \omega_v \text{ は分岐}\}, \\ S_{\mathrm{fin},\not{2}} &= \{v\in S_{\mathrm{fin}}\,|\,v\not|2\}, \\ S_{\mathrm{fin},2,1} &= \{v\in S_{\mathrm{fin}}\,|\,v|2 \quad \text{かつ} \quad d\in\mathfrak{O}_v^\times(F_v^\times)^2\}, \\ S_{\mathrm{fin},2,\pi_v} &= \{v\in S_{\mathrm{fin}}\,|\,v|2 \quad \text{かつ} \quad d\in\pi_v\mathfrak{O}_v^\times(F_v^\times)^2\}, \\ \Sigma_\infty &= \{v\in\Sigma\,|\,v|\infty\}. \end{aligned}$$

もちろん $S_{\mathrm{fin}} = S_{\mathrm{fin},v\nmid 2} \cup S_{\mathrm{fin},2,1} \cup S_{\mathrm{fin},2,\pi_v}$ *(disjoint union)* となっている．テスト関数を $\Phi = \prod_{v\in\Sigma} \Phi_v \in \mathcal{S}(V(\mathbb{A}))$ とする．そして，$v \notin S_{\mathrm{fin}} \cup \Sigma_\infty$ に対して $\Phi_v = \Phi_{0,v}$ と仮定し，さらに $v \in S_{\mathrm{fin}}$ に対して $\Phi_v = \Phi_{1,v}$ と仮定する．このとき

$$
\begin{aligned}
Z(\Phi, s, \omega) = & \frac{L(1,\omega)}{c_F\, |\Delta_F|^{3/2}\; 2^{[F:\mathbb{Q}]}} \times \frac{\zeta_F(2s-1)}{\zeta_F(2)} \times \prod_{v\in\Sigma_\infty} Z(\Phi_v, s, \omega_v, d) \\
& \times \prod_{v|2\,,\, v\notin S_{\mathrm{fin}}} q_v^{(2s-1)e_v} \times \prod_{v\in S_{\mathrm{fin},v\nmid 2}} q_v^{-s+\frac{1}{2}} \times \prod_{v\in S_{\mathrm{fin},2,1}} q_v^{-2s+1} \times \prod_{v\in S_{\mathrm{fin},2,\pi_v}} q_v^{-s+\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

さて，[伊吹山-斎藤, Theorem 1] における $L(s, L_2^*, \psi)$ の公式が定理 3 から従うことを見てみよう．つまり，定理 3 は彼らの公式の一般化になっている．**これより $F = \mathbb{Q}$ をこのセクションの終わりまで仮定する．** 整数 m は square-free としよう．そして，m は 0 でも 1 でもないと仮定する．$\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times$ 上の 2 次指標 ω_m は二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に対応しているとし，D_m は $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の判別式とし，ψ_m は $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に対応する $\mathbb{Z}/D_m\mathbb{Z}$ 上のディリクレ指標とする．そして格子を次のように定める．

$$
L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in V(\mathbb{Q}) \;\middle|\; a,\, c \in \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \right\},
$$

$$
L_1 = \{\, x \in L \mid x \text{ は正定値 } \},
$$

$$
L_2 = \{\, x \in L \mid \det(x) < 0 \quad \text{かつ} \quad -\det(x) \notin (\mathbb{Q}^\times)^2 \,\}.
$$

格子の各点 $x \in L$ について

$$
\psi_m(x) = \begin{cases}
\psi_m(a) & \text{次のような元 } g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \text{ が存在するとき} \\
 & gx\,{}^t g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ \text{もし } m \equiv 1 \bmod 4 \text{ なら } b \in \tfrac{1}{2}m\mathbb{Z} \text{ かつ } c \in m\mathbb{Z}, \\
 & \text{もし } m \equiv 2 \bmod 4 \text{ なら } b, c \in m\mathbb{Z}, \\
 & \text{もし } m \equiv 3 \bmod 4 \text{ なら } b, c \in 2m\mathbb{Z}, \\
0 & \text{その他}
\end{cases}
$$

と定める．各点 $x \in L$ に対して，$\mathfrak{O}_x$ で $\mathbb{Q}(\sqrt{-\det(x)})$ の極大整環とし，$\varepsilon_x > 1$ を $\mathbb{Q}(\sqrt{-\det(x)})$ の基本単数とする．

$$
\mu(x) = \begin{cases} \pi\, |\mathfrak{O}_x^\times|^{-1} & x \in L_1 \text{ のとき}, \\ \log \varepsilon_x & x \in L_2 \text{ のとき} \end{cases}
$$

と関数 $\mu(x)$ を定める．記号 G_x で G における点 $x \in V(F)$ の安定化群を記し，記号 G_x^0 で G_x の 1 の連結成分とする．これらの記号により **「$m < 0$ かつ $i = 2$」の場合を除いて** L-

関数 $L(s,m,i)$ が

$$L(s,m,i)=\sum_{x\in G(\mathbb{Z})\backslash L_i}\frac{\mu(x)\,\psi_m(x)}{[G_x(\mathbb{Z}):G_x^0(\mathbb{Z})]\,|\det(x)|^s}$$

と定義される．リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は，もちろん $\zeta(s)=\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ で定義される．定理3から次の定理が従う．

定理 4 等式

$$L(s,m,\frac{3+\mathrm{sgn}(m)}{2})=L(1,\omega_m)\times\zeta(2s-1)\times|m|^{-s+\frac{1}{2}}\times\begin{cases}2^{-2s} & \textit{if } m\equiv 3 \mod 4,\\ 2^{-1} & \textit{if } m\equiv 2 \mod 4,\\ 2^{2s-2} & \textit{if } m\equiv 1 \mod 4\end{cases}$$

が成り立つ．また，$m>0$ に対して $L(s,m,1)=0$ が成り立つ．

もし $m=-p$ かつ $p\equiv 3 \bmod 4$ である場合を定理4に適用するならば，そのときの定理4の公式は，[伊吹山-斎藤, Theorem 1] における $L(s,L_2^*,\psi)$ の公式と完全に一致する．そもそもがこのセクションの定理は [伊吹山-斎藤, Theorem 1] の公式から予測して研究を進めたことに注意しておく．

3 Sp(2) のエンドスコピー

定理2を元に，セクション1の類似を作ろう．まず $\mathrm{Sp}(2,F)$ のジーゲル放物型部分群

$$\left\{\begin{pmatrix} h & O_2\\ O_2 & {}^t h^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & x\\ O_2 & I_2\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(2,F)\,\middle|\, h\in\mathrm{GL}(2,F)\ \text{ and }\ x\in V(F)\right\}$$

を見れば，ゼータ積分 $\Xi(\Phi,s)$ が

$$\Xi(\Phi,s)=\int_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})/\mathrm{GL}(2,F)}|\det(h)|^{2s}\sum_{x\in V^*(F)}\Phi(hx\,{}^t h)\mathrm{d}h$$

と定義できる．ただし，$\Phi\in\mathcal{S}(V(\mathbb{A}))$，$s\in\mathbb{C}$，$\mathrm{d}h$ は $\mathrm{GL}(2)$ 上の玉河測度とする．ゼータ積分 $\Xi(\Phi,s)$ は $\mathrm{Re}(s)>3/2$ で絶対収束する．セクション1での定理1の証明を $\Xi(\Phi,s)$ に適用すれば，等式

$$\Xi(\Phi,s)=\sum_{\omega}Z(\Phi,s,\omega)$$

を得る．ただし，和における ω は $\mathbb{A}_F^1/F^\times$ 上のすべての2次指標を走る．跡公式の話に入ろう．$\mathrm{Sp}(2)$ の跡公式に関するテスト関数を $f\in C_c^\infty(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{A}))$ とする．ゼータ積分のテ

スト関数 Φ を $\Phi(x)=\int_K f(k^{-1}\begin{pmatrix} I_2 & x \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix})\mathrm{d}k$ により定める．ただし，K は $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{A})$ の適切な極大コンパクト部分群であり，$\mathrm{d}k$ は K 上のハール測度である．記号 $\{\gamma\}_{\mathrm{Sp}(2,F)}$ は元 $\gamma\in\mathrm{Sp}(2,F)$ の $\mathrm{Sp}(2,F)$-共役類を意味する．Hoffmann 氏との共同研究 [Hoffmann-若槻] により，f に関する $\mathrm{Sp}(2)$ の跡公式における集合 $\cup_{x\in V^*(F)}\{\begin{pmatrix} I_2 & x \\ O_2 & I_2 \end{pmatrix}\}_{\mathrm{Sp}(2,F)}$ の寄与は

$$\lim_{s\to 3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-\frac{3}{2})\,\Xi(\Phi,s)$$

で与えられる．さらに上述の等式により

$$\lim_{s\to 3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-\frac{3}{2})\,\Xi(\Phi,s)=\lim_{s\to 3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-\frac{3}{2})\,Z(\Phi,s,1)+\sum_{\omega\neq 1}Z(\Phi,\frac{3}{2},\omega)$$

が成り立つ．私は右辺の第一の項は非安定であると予想しているが，その安定化について私は知らないので，何もコメントできない．定理 2 に $s=3/2$ を代入すると，

$$Z(\Phi,\frac{3}{2},\omega)=\frac{L(1,\omega)}{c_F\,|\Delta_F|^{3/2}}\times\prod_{v|2\,,\,v\notin S}\frac{2q_v^{2e_v}}{|\mathfrak{O}_v^\times:(\mathfrak{O}_v^\times)^2|}\times\prod_{v\in S}Z(\Phi_v,\frac{3}{2},\omega_v,d)$$

を得る．まず L を $\omega\neq 1$ に対応する F の二次拡大としよう．論文 [Assem] の局所的なユニポテント軌道積分に関する研究により，$Z(\Phi,\frac{3}{2},\omega)$ は $\mathrm{Sp}(2)$ の楕円内視群 $H=R^{(1)}_{L/F}(\mathbb{G}_m)\times\mathrm{SL}(2)$ と関係していることが予想される．セクション 1 で述べたことの類似であるように，テスト関数 f の移送 f^H について $Z(\Phi,\frac{3}{2},\omega)=$（定数）$\times f^H(1)$ となっていることは間違いないと思うのだけと，素点 $v|2$ のことや（定数）の部分が私には良く分からない．まあなんにせよ，定理 2 は $\mathrm{Sp}(2)$ の安定化に密接に関わっていることが明らかとなった．つまり定理 2 は概均質ゼータ関数の安定化の例となっている．

最後に [斎藤 2] の公式についてコメントしたい．斎藤氏の概均質ゼータ関数の明示的公式の証明は跡公式の安定化の議論に極めて近いらしいということを複数の研究者から著者は助言してもらった．著者本人もそれなりに勉強したところ最近はそのように思っている．なので概均質ゼータ関数の安定化が存在するのであれば，大域的な問題は斎藤氏の研究でできている．つまり主な問題は局所にある．Assem と Waldspurger は局所的なユニポテント軌道積分の安定化を議論しているが，彼らの議論と結果を概均質ベクトル空間の局所ゼータ関数の話に一般化することが概均質ゼータ関数を安定化するために要求されていることだと思う．

参考文献

[Assem] M. Assem, Unipotent orbital integrals of spherical functions on p-adic 4×4 symplectic groups, J. Reine Angew. Math. **437** (1993), 181–216.

[伊吹山-斎藤] T. Ibukiyama, H. Saito, On L-functions of ternary zero forms and exponential sums of Lee and Weintraub. J. Number Theory **48** (1994), 252–257.

[Hoffmann-若槻] W. Hoffmann, S. Wakatsuki, On the geometric side of the Arthur trace formula for the symplectic group of rank 2, 作成中.

[井草１] J. Igusa, Some results on p-adic complex powers, Amer. J. Math. **106** (1984), 1013–1032.

[井草２] J. Igusa, An introduction to the theory of local zeta functions, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 2000.

[Labesse-Langlands] J.-P. Labesse, R. P. Langlands, L-indistinguishability for SL(2), Canad. J. Math. **31** (1979), 726–785.

[斎藤１] H. Saito, Explicit formula of orbital p-adic zeta functions associated to symmetric and Hermitian matrices, Comment. Math. Univ. St. Paul. **46** (1997), 175–216.

[斎藤２] H. Saito, Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces, Math. Ann. **315** (1999), 587–615.

[佐藤-新谷] M. Sato, T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 131–170.

[雪江] A. Yukie, On the Shintani zeta function for the space of binary quadratic forms, Math. Ann. **292** (1992), 355–374.

Faculty of Mathematics and Physics, Institute of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakumamachi, Kanazawa, Ishikawa, 920-1192, Japan. Tel:+81-76-264-5655, Fax:+81-76-264-5738.