

JACQUET-LANGLANDS 対応

都築正男

導入：四元数体上の保型表現と $GL(2)$ の保型表現の関連性は、古典的には上半平面上の正則保型形式を 4 変数テータ級数として表す問題として関心を持たれていたが、60 年代初頭に清水により多元体のゼータ函数の観点から Selberg 跡公式を用いた一連の研究がなされた。その後、Jacquet と Langlands は、有名なテキスト [15] で、この問題への表現論的かつ組織的なアプローチを 2 通り与えた。1 番目の方法は、ヘッケ理論の局所化と Weil 表現を利用した局所体上の $GL(2)$ の無限次元既約許容表現の構成・分類を基礎に、まず局所体上で既約許容表現の移送を実現し (局所 Jacquet-Langlands 対応)、次に、保型 L -函数の Hecke 理論とその「逆定理」を経由して四元数体の保型表現を $GL(2)$ の保型表現に移送する (大域 Jacquet-Langlands 対応) というものである。第二の方法は、Selberg 跡公式を利用するもので、[15] の最終章 (§16) はその解説に充てられている。これは、対応する保型表現同士の局所 (楕円) 指標の明示的な関係を導けるためより優れたものといえるが、必要な Selberg 跡公式周辺の整備が当時は十分でなかったためか、証明はスケッチにとどまっている。(序文で、細部を補完し応用などにも踏み込んだ続編の可能性をほのめかしているが実現されていない。) 跡公式の研究はその後、Duflo-Labesse [9] や Arthur の一連の仕事などで一気に進み、Gelbart のテキスト [10] や Gelbart と Jacquet による Arthur-Selberg 跡公式の解説記事 [12] などで証明のより詳しい解説が与えられた。こうして実現された大域 Jacquet-Langlands 対応は、保型表現の L 函数や L^2 -重複度といった量で「間接的に」記述される。清水 ([27]) は、アデル群の Weil 表現 (テータ級数) を用いて、四元数体の保型表現に対応する $GL(2)$ の保型形式を直接構成し大域 Jacquet-Langlands 対応の別証明を与えた。このような経緯から、 $GL(2)$ とその inner forms (= 四元数体の乗法群) の間の保型表現の対応は「Jacquet-Langlands-Shimizu 対応」とも呼ばれる。 $GL(n)$ の inner forms (内部形式) に対する同種の問題が自然に直近のテーマとなるが、 $GL(3)$ の場合は Flath (Thesis, Harvard Univ.) によって扱われ、 $GL(n)$ の場合は、(少なくとも局所体上の既約離散系列表現の移送に関しては) Rogawski ([25]), Deligne-Kazhdan-Vigneras [8] によって「簡易版の Selberg 跡公式」を使った大域的な方法で実現された。これらの仕事で使われた簡易版の跡公式では試験函数に強い制約が必要で、大域対応に関しては保型表現の局所成分に条件を加えなければならない。大域対応を完全な形で扱うのに必要な跡公式は、Arthur の一連の仕事に基づいて Arthur-Clozel [1] によって与えられた。Badulescu ([2], [3]) は、局所対応を離散系列表現から一般の既約ユニタリー表現に拡張し、[1] で確立された跡公式を使うことで $GL(n)$ とその内部形式に対して大域対応を制約条件なしで証明した。

さて、このノートの目的は、Arthur-Selberg 跡公式の応用として、 $GL(2)$ とその内部形式に対する「Jacquet-Langlands-Shimizu 対応」の証明を解説することである。主に、[15], [25], [12], [11] を参考に若干の整理を加えた。以下は各章の詳しい内容である。

- 第 1 章では、四元数環の基本的な性質を、主に [26], [28] に従って復習したあと、四元数環の乗法群の共役類の分類を述べた。
- 第 2 章では、局所体上の四元数環の乗法群の共役類に対する軌道積分の基本的な性質を調べる。特に、非アルキメデス局所体に限定して、軌道積分の Shalika germ 展開を詳述し、[25] に従って「E 型函数」の軌道積分の特徴付け () を述べた。
- 第 3 章では、主定理の証明で使われる函数解析の結果 (無限個の既約ユニタリー表現に対する汎函数指標の解析的線型独立性) を証明する。
- 第 4 章では、局所体上の $GL(2)$ とその内部形式の既約表現とその指標の基礎的な性質を述べた。非アルキメデス局所体の場合に、離散系列表現の擬行列係数の存

在を第2章で準備した軌道積分の特徴付けを利用して証明する。(アルキメデス的な場合は証明を割愛した。)

- 第5章では、主定理を述べ、第6章でその証明を詳述した。

4章までは局所調和解析の必要事項のおさらいである。便宜のためと考えなるべく証明を付けが、そのため準備が予想以上に長くなってしまいかえって読みにくいものになってしまったかも知れない。

1. 四元数環とその乗法群

1.1. 四元数環. ([26, 第3章 §3.3], [28, ChapIV §20, Chap V §27])

F を標数0の体とする。 F -代数 \mathfrak{A} が、次の3条件を満たすとき F 上の四元数環という。

- \mathfrak{A} は単純環である。
- $\dim_F(\mathfrak{A}) = 4$
- \mathfrak{A} の中心は $F (= \{a 1_{\mathfrak{A}} | a \in F\})$ に一致する。

更に、 \mathfrak{A} が斜体になるとき \mathfrak{A} を四元数体とよぶ。□

四元数環の構成法として次がある ([28, Chap IV, §20]) : E/F を2次拡大体、その非自明な F -自己同型写像 $x \mapsto \bar{x}$ とする。 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \in M_2(E)$ に対して、 $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} \end{bmatrix}$ とおく。 $c \in F$ に対して $\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ とおく。 $M_2(E)$ の部分環

$$\{E, c\}_F = \{X \in M_2(E) | \gamma \bar{X} \gamma^{-1} = X\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ c\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix} \mid x, y \in E \right\}$$

は F 上の四元数環になり、 E に同型な部分体 $\left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \mid \alpha \in E \right\}$ を含む。

補題 1. \mathfrak{A} が F 上の四元数環とする。 $E \subset \mathfrak{A}$ を2次部分体、 $x \mapsto \bar{x}$ を E/F の共役写像とする。 $\gamma x = \bar{x} \gamma (\forall x \in E)$, $\gamma^2 = c 1_{\mathfrak{A}}$ なる $\gamma \in \mathfrak{A}^\times$, $c \in F$ が存在して、 $\{1_{\mathfrak{A}}, \gamma\}$ は右 E -ベクトル空間 \mathfrak{A} の基底になる。 $\lambda_E : \mathfrak{A} \rightarrow M_2(E)$ をこの基底による \mathfrak{A} の左正則表現の表現行列とすれば、係数拡大によって

$$\lambda_E \otimes 1 : \mathfrak{A} \otimes_F E \xrightarrow{\cong} M_2(E) \quad (E\text{-同型})$$

であり、 $\lambda_E(\mathfrak{A}) = \{E, c\}_F$ となる。

Proof: [28, Theorem 20.3, Lemma 20.4] □

\mathfrak{A} が F 上の四元数環、 $\nu_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \rightarrow F$ および $\tau_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \rightarrow F$ をそれぞれ被約ノルムおよび被約トレースとする。 $E \subset \mathfrak{A}$ を2次部分体、 $\lambda_E : \mathfrak{A} \rightarrow M_2(E)$ を補題1のように決めるとき、

$$\nu_{\mathfrak{A}}(a) = \det \lambda_E(a), \quad \tau_{\mathfrak{A}}(a) = \text{tr} \lambda_E(a)$$

である。

補題 2. \mathfrak{A} を F 上の四元数体とする。

- (1) $\nu_{\mathfrak{A}}(\xi) = 0 (\exists \xi \in \mathfrak{A} - \{0\})$ ならば $\mathfrak{A} \cong M_2(F)$
- (2) $\nu_{\mathfrak{A}}(\xi) \neq 0 (\forall \xi \in \mathfrak{A} - \{0\})$ ならば \mathfrak{A} は斜体である。

Proof: [26, Lemma 3.2, Lemma 3.3] □

補題 3. $\mathfrak{A} = \{E, c\}_F$ (E/F は2次体、 $c \in F^\times$) のとき、

$$\{E, \gamma\}_F \cong M_2(F) \iff c \text{ が } E/F \text{ のノルムで表される}$$

Proof: $\{E, 1\}_F \cong M(2, F)$ ([28, (20.6)]) に注意すると、これは [28, Theorem 20.8] から従う。□

1.1.1. 局所体上の四元数環の分類. F が標数 0 の局所体とする。

F が非アルキメデス的なとき、 F_0 を F の不分岐 2 次拡大、 ϖ_F を F の素元として、 $D = \{F_0, \varpi_F\}_F$ とおくと、 D は四元数体になる。

$F = \mathbb{R}$ のときは、 $D = \{\mathbb{C}, -1\}_{\mathbb{R}}$ を Hamilton の四元数体とする。

補題 4. F 上の四元数環は $M(2, F)$ あるいは D のいずれか一方に同型である。 $F = \mathbb{C}$ のときは、 \mathbb{C} 上の四元数環は全て $M(2, \mathbb{C})$ と同型である。

Proof: [28, Theorem 21.22] \square

そこで、 F 上の任意の四元数環 \mathfrak{A} に対して、そのハッセ不変量を

$$\text{inv}_F(\mathfrak{A}) = \begin{cases} +1 & (\mathfrak{A} \cong D) \\ -1 & (\mathfrak{A} \cong M(2, F)) \end{cases}$$

で定義する。

1.1.2. 大域体上の四元数環の分類. F を有限次元代数体とする。 Σ を F の素点全体の集合とし、複素アルキメデス素点全体を $\Sigma_{\mathbb{C}}$ とする。

F 上の四元数環 \mathfrak{A} と素点 $v \in \Sigma$ に対して、係数拡大 $\mathfrak{A} \otimes_F F_v$ を \mathfrak{A}_v とし、 $\text{inv}(\mathfrak{A}) = (\text{inv}_{F_v}(\mathfrak{A}_v))_{v \in \Sigma} \in \{\pm 1\}^{\Sigma}$ とおく。

$$\Sigma_{\mathfrak{A}} = \{v \in \Sigma \mid \text{inv}_{F_v}(\mathfrak{A}_v) = -1\}$$

と定義する。

補題 5. (1) F 上の四元数環 \mathfrak{A} に対して、 $\Sigma_{\mathfrak{A}}$ は有限集合であり、

$$\prod_{v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}} \text{inv}_{F_v}(\mathfrak{A}_v) = 1$$

である。

(2) 偶数個の素点からなる有限集合 $S \subset \Sigma - \Sigma_{\mathbb{C}}$ に対して、

$$\text{inv}_{F_v}(\mathfrak{A}_v) = \begin{cases} -1 & (v \in S), \\ +1 & (v \notin S) \end{cases}$$

を満たす四元数環 \mathfrak{A} が同型を除いて唯一つつ存在する。

(3) $\mathfrak{A} \mapsto \Sigma_{\mathfrak{A}}$ は次の全単射を導く：

$$\{F \text{ 上の四元数環}\} / (F\text{-同型}) \xrightarrow{\cong} \{S \subset \Sigma - \Sigma_{\mathbb{C}} \mid \#(S) < \infty, \#(S) \equiv 0 \pmod{2}\}$$

Proof: [28, Theorem 26.6, Theorem 27.8] \square

1.2. 共役類. F を標数 0 の体、 \mathfrak{A} を F 上の四元数環とする。 G を乗法群 \mathfrak{A}^{\times} とする。 Z を G の中心とすると、 $Z = \{z 1_{\mathfrak{A}} \mid z \in F^{\times}\}$ となる。群 G の共役類の分類を行うのがこの節の目標である。

定義 6. G の元 ξ が条件「 $F[\xi]$ は体である」を満たすとき F -楕円的であるといい、その全体の集合を G_{ell} と書く：

$$G_{\text{ell}} = \{\xi \in G \mid F[\xi] \text{ は体である}\}$$

G_{ell} は G -共役で安定な部分集合である。

補題 7. $\xi, \eta \in G_{\text{ell}} - Z$ が G -共役になるための必要十分条件は

$$\nu_{\mathfrak{A}}(\xi) = \nu_{\mathfrak{A}}(\eta), \quad \tau_{\mathfrak{A}}(\xi) = \tau_{\mathfrak{A}}(\eta)$$

である。

Proof: 必要性は自明である。逆に $\nu = \nu_{\mathfrak{A}}(\xi) = \nu_{\mathfrak{A}}(\eta)$, $\tau = \tau_{\mathfrak{A}}(\xi) = \tau_{\mathfrak{A}}(\eta)$ であるとする、Cayley-Hamilton の定理から ξ, η はともに F 上の 2 次方程式 $X^2 - \tau X + \nu = 0$ を満たす。 $\xi, \eta \in G_{\text{ell}} - Z$ ゆえ、この 2 次式は F 上で既約で $F[\xi] \cong F[X]/(X^2 - \tau X + \nu) \cong F[\eta]$ となる。 F -同型 $\phi: F[\xi] \rightarrow F[\eta]$ を一つ固定する。補題 1 より

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= F[\xi] + \gamma F[\xi], & \gamma x &= \bar{x}\gamma \quad (\forall x \in F[\xi]), & \gamma^2 &\in F, \\ \mathfrak{A} &= F[\eta] + \delta F[\eta], & \delta y &= \bar{y}\delta \quad (\forall y \in F[\eta]), & \delta^2 &\in F \end{aligned}$$

となる $\gamma, \delta \in \mathfrak{A}^\times$ が存在する。 $\mathfrak{A} \cong \{F[\xi], \gamma^2\}_F \stackrel{\phi}{\cong} \{F[\eta], \gamma^2\}_F \cong \{F[\eta], \delta^2\}_F$ となるので、[28, Theorem 20.8(i)] より $\gamma^2 = N_{F[\eta]/F}(a) \delta^2$ ($\exists a \in F[\eta]^\times$) となる。 δ を $a\delta$ で置き換えれば、最初から $\gamma^2 = \delta^2$ だとしてよい。そこで写像 $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ を

$$\varphi(x_1 + \gamma x_2) = \phi(x_1) + \delta \phi(x_2), \quad x_1, x_2 \in F[\xi]$$

で定義すると、これは F -代数 \mathfrak{A} の F -自己同型であることが分かる。Skolem-Noether の定理から $\varphi(\alpha) = g^{-1}\alpha g$ ($\forall \alpha \in \mathfrak{A}$) なる $g \in \mathfrak{A}^\times$ が存在する。特に、 $g^{-1}F[\xi]g = F[\eta]$ となる。 $g^{-1}\xi g, \eta$ の F -最小多項式は共通だから $g^{-1}\xi g = \eta$ または $g^{-1}\xi g = \bar{\eta}$ となる。 $\bar{\eta} = \delta\eta\delta^{-1}$ ゆえ、いずれにしる ξ, η は G -共役である。□

G_{ell} に含まれる共役類 (= F -楕円共役類) の完全代表系は次のように記述される。まず、代数的閉包 \bar{F} を一つ固定して $Q(F)$ を \bar{F} に含まれる F の 2 次拡大の全体の集合とする。更に、

$$Q_{\mathfrak{A}}(F) = \{E \in Q(F) \mid F\text{-埋め込み } E \hookrightarrow \mathfrak{A} \text{ が存在する}\}$$

とおく。各 $E \in Q_{\mathfrak{A}}(F)$ に対して、 F -埋め込み $\iota_E: E \hookrightarrow \mathfrak{A}$ を一つ固定しておく。 ι_E の E^\times への制限 $\iota_E^G: E^\times \rightarrow \mathfrak{A}^\times$ の像を T_E^G とする。補題 1 により、

$$\begin{aligned} w_E \iota_E^G(x) w_E^{-1} &= \iota_E^G(\bar{x}), \quad (\forall x \in E), \\ w_E^2 &\in Z \end{aligned}$$

を満たす $w_E \in G$ がある。以下、このような w_E を一つ固定する。

補題 8. $E \in Q_{\mathfrak{A}}(F)$ に対して、商群 $W(G, T_E^G) = N_G(T_E^G)/T_E^G$ (= T_E^G の Weyl 群) は w_E で生成される位数 2 の群である。ここで、 $N_G(T_E^G)$ は T_E^G の G における正規化部分群である。

Proof: $gT_E^G g^{-1} = T_E^G$ とすると、 $g\iota_E^G(x)g^{-1} = \iota_E^G(x')$ ($x \in E$) によって体 E の F -自己同型 $x \mapsto x'$ が決まる。 E/F は 2 次拡大だからこの自己同型は恒等写像か共役写像のいずれかである。前者の場合 $g \in T_E^G$ であり、後者の場合 $g \in w_E T_E^G$ となる。□

G の部分集合

$$(1.1) \quad \mathcal{E}_G = Z \cup \left(\bigcup_{E \in Q_{\mathfrak{A}}(F)} (T_E^G - Z) \right)$$

と定める。

補題 9. (1.1) は disjoint union である。更に、この集合の 2 元 ξ, η が G -共役になるのは次のいずれか場合に限られる：

- $\xi = \eta \in Z$
- $(\exists E \in Q_{\mathfrak{A}}(F)) (\exists w \in W(G, T_E^G)) \quad \xi, \eta \in T_E^G - Z, \quad \xi = w\eta w^{-1}$

G_{ell} の任意の元は \mathcal{E}_G のある元に G -共役である。

Proof: $E, E' \in Q_{\mathfrak{A}}(F)$, $\xi \in (T_E^G - Z) \cap (T_{E'}^G - Z)$ とすると、 $F[\xi]$ は \mathfrak{A} の 2 次の部分体であり $F[\xi] \subset \iota_E(E)$ なので、 $F[\xi] = \iota_E(E)$ となる。同様に $F[\xi] = \iota_{E'}(E')$ となる。よって、 $\iota_E(E) = \iota_{E'}(E')$ であり、 $Q_{\mathfrak{A}}(F)$ の定義から、 $E = E'$ が従う。故に、(1.1) は disjoint である。

$\xi, \eta \in \mathcal{E}_G - Z$ が G -共役だとすると、補題 7 より ξ, η の F -最小多項式は一致する。よって、 $\xi = \iota_E^G(t)$ ($t \in E^\times$) と書くとき、 $\eta = \iota_E(t)$ または $\iota_E^G(\bar{t})$ である。あとは、 $w_E \iota_E^G(t) w_E^{-1} = \iota_E^G(\bar{t})$ に注意すればよい。□

補題 10. (1) \mathfrak{A} が斜体であるとする。このとき、 $G = G_{\text{ell}}$ である。

(2) $\mathfrak{A} = M_2(F)$ とする。このとき、 $G - G_{\text{ell}}$ の任意の元は集合 $\mathcal{U}_G \cup \mathcal{H}_G$,

$$\mathcal{U}_G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in F^\times \right\}, \quad \mathcal{H}_G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, d \in F^\times, a \neq d \right\} = M - Z$$

の元に G -共役である。 \mathcal{E}_G の元と $\mathcal{U}_G \cup \mathcal{H}_G$ の元は G -共役ではない。 \mathcal{U}_G の異なる 2 元は G -共役ではない。 \mathcal{H}_G の 2 元はそれらの対角成分が順序を除いて一致する場合に限り G -共役になる。

Proof: (1) \mathfrak{A} が斜体ならば、任意の元 $\xi \in \mathfrak{A}$ に対して $F[\xi]$ は部分体になる。

(2) Jordan 標準型より明らか。□

便宜上、 \mathfrak{A} が斜体の場合 $\mathcal{H}_G = \mathcal{U}_G = \emptyset$ とおく。 $G_{\text{reg}} = G - (Z \cup \mathcal{U}_G)$ の元を G の正則元と呼ぶ。

以下で必要になる場合に対して、集合 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ を決定しておこう。

補題 11. \mathfrak{A} を F 上の四元数環とする。

(1) F が局所体のとき、 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F) = \mathcal{Q}(F)$ である。

(2) F が大域体のとき、 $E \in \mathcal{Q}(F)$ に対して、

$$\Sigma(E) = \{v \in \Sigma \mid E_v = E \otimes_F F_v \text{ が体である}\}$$

とおくと、 $\mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F) = \{E \in \mathcal{Q}(F) \mid \Sigma_{\mathfrak{A}} \subset \Sigma(E)\}$ である。

Proof: \mathfrak{A} が斜体であるとして示せばよい。

(1) $E \in \mathcal{Q}(F)$ とする。 $N_{E/F}(E^\times)$ は F^\times の指数 2 の部分群だから、ある要素 $c \in F^\times - N_{E/F}(E^\times)$ が存在する。そこで、四元数環 $\{E, c\}_F$ を考えると、これは E と同型な部分体 $\left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in E \right\}$ を含む。しかも、補題 3 より、 $\{E, c\}_F$ は斜体になる。補題 4 より $\mathfrak{A} \cong \{E, c\}_F$ なので、 \mathfrak{A} も E と同型な体を含む。よって、 $E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ である。

(2) $E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ ならば $\Sigma_{\mathfrak{A}} \subset \Sigma(E)$ は明らか。逆に、 $\Sigma_{\mathfrak{A}} \subset \Sigma(E)$ となる $E \in \mathcal{Q}(F)$ は \mathfrak{A} に埋め込めることを示そう。 F のイデール群 \mathbb{A}^\times の開部分集合

$$\mathcal{U} = \prod_{v \in \Sigma - \Sigma_{\mathfrak{A}}} N_{E_v/F_v}(E_v^\times) \prod_{v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}} (F_v - N_{E_v/F_v}(E_v^\times))$$

は開部分群 $N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ の作用で安定である。明らかに $\mathcal{U} \not\subset F^\times$ であるから、 $\mathcal{U} \not\subset F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ となる。一方、類体論の結果から $\mathbb{A}^\times / F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ は E/F のガロア群と同型であり、特に位数 2 である。よって $\mathbb{A}^\times = \mathcal{U} F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) = \mathcal{U} F^\times$ となる。従って、 $1 = cx$ となる $c \in F^\times$, $x \in \mathcal{U}$ が存在する。 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において $c^{-1} \in F_v^\times - N_{E_v/F_v}(E_v^\times)$ 、 $v \notin \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において $c^{-1} \in N_{E_v/F_v}(E_v^\times)$ となるので、補題 3 から、四元数環 $\mathfrak{A}' = \{E, c^{-1}\}_F$ は $\Sigma_{\mathfrak{A}'} = \Sigma_{\mathfrak{A}}$ を満たす。補題 5(2) より $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{A}$ となる。故に、 $E \hookrightarrow \{E, c^{-1}\}_F \cong \mathfrak{A}$ となり、 $E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ が言えた。□

2. 軌道積分

この節では F を標数 0 の局所体、 $|\cdot|_F$ を標準的な乗法付値とする。 F が非アルキメデスのときには、有限次元拡大体 E/F に対して、 E の整数環を \mathfrak{o}_E 、 E の素元を ϖ_E 、剰余体の位数を q_E で表す。

\mathfrak{A} を F 上の四元数環、 $G = \mathfrak{A}^\times$ とする。

2.1. 玉河測度. 非自明な加法指標 $\psi_F : F \rightarrow \mathbb{C}^1$ を固定する. 任意の有限次元拡大 E に対して, $d_E x$ を加法指標 $\psi_E = \psi_F \circ \text{tr}_{E/F}$ に対する加法群 E 上の自己双対的 Haar 測度とする. トーラス $T = E^\times$ の乗法的 Haar 測度を

$$d\mu_T(t) = C_{E/F} \frac{d_E t}{|\mathbb{N}_{E/F}(t)|_F}$$

で定義する. ここで, $F = \mathbb{R}$ または \mathbb{C} のとき, $C_{E/F} = 1$ とする. F が非アルキメデス的なとき, e を E/F の分岐指数, q_E を E の剰余体の位数として, $C_{E/F} = e^{-1} \text{vol}(\mathfrak{o}_E)^{-1} (1 - q_E^{-1})^{-1}$ とする. $Z = F^\times$ による商群 $Z \backslash T$ に商測度 $d\mu_{Z \backslash T} = d\mu_T / d\mu_Z$ を与えると,

$$\text{vol}(Z \backslash T) = 1$$

となることが容易に分かる.

同様に, \mathfrak{A} の加法指標 $\psi_D = \psi_F \circ \tau_D$ に対する \mathfrak{A} 上の自己双対的測度を $d_{\mathfrak{A}} \xi$ とする. $G = \mathfrak{A}^\times$ の測度 $d\mu_G$ を

$$d\mu_G(\xi) = \frac{d_{\mathfrak{A}} \xi}{|\nu_{\mathfrak{A}}(\xi)|_F^2} \times \begin{cases} (1 - q_F^{-1})^{-1} & (F : \text{非アルキメデス的}) \\ 1 & (F : \text{アルキメデス的}) \end{cases}$$

で固定する. これを G の (正規化された) 玉河測度とよぶ.

注意: F が非アルキメデス的なとき, $(1 - q_F^{-1}) d\mu_G$ を非正規化玉河測度と呼ぶ. 因子 $(1 - q_F^{-1})^{-1}$ はアデール群上の玉河測度を構成する際の収束因子として働く. \square

$G = \text{GL}(2, F)$ とすると, ある定数 $C_0 > 0$ が存在して

(2.1)

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = C_0 \int_{z \in F^\times} \int_{t \in F^\times} \int_{x \in F} \int_{k \in \mathbf{K}} f\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} k\right) d\mu_{F^\times}(z) d\mu_{F^\times}(t) d_F x dk$$

となる. dk は $\text{vol}(\mathbf{K}) = 1$ なる \mathbf{K} のハール測度である. 比例定数 C_0 は次で与えられる.

補題 12. F が非アルキメデス的なとき, $C_0 = \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^3 (1 - q_F^{-2})$ である. $F = \mathbb{R}$ ならば $C_0 = \pi$, $F = \mathbb{C}$ ならば $C_0 = 2\pi$ である.

Proof: F が非アルキメデス的な場合: f に \mathbf{K} の特性函数を代入して公式 (2.1) の両辺を計算すればよい. $R = \text{M}(2, \mathfrak{o}_F)$ の $\text{M}(2, F)$ における特性函数を χ_R とすると, χ_R のフーリエ変換は

$$\hat{\chi}_R(x) = \text{vol}(R) \chi_R(\varpi_F^d x), \quad x \in \text{M}(2, F)$$

と計算される. ただし, $\text{vol}(R)$ は $\mathfrak{A} = \text{M}(2, F)$ の自己双対ハール測度 $d_{\mathfrak{A}} x$ に関する体積, d は $\{x \in F \mid \psi_F(x \mathfrak{o}_F) = \{1\}\} = \varpi_F^{-d} \mathfrak{o}_F$ なる整数である. もう一度フーリエ変換すると, $\chi_R = \text{vol}(R)^2 |\varpi_F^d|_F^4 \hat{\chi}_R$ を得る. よって, $\text{vol}(R) = |\varpi_F^{-d}|_F^2 = q_F^{-2d} = \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$ となる. 行列の基本変形より, 容易に

$$R \cap \text{GL}(2, F) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}} \mathbf{K} \begin{bmatrix} \varpi_F^{l+m} & 0 \\ 0 & \varpi_F^l \end{bmatrix} \mathbf{K},$$

(2.2)

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \varpi_F^m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K} = \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \bigcup_{x \in (\mathfrak{o}_F / \varpi_F^j \mathfrak{o}_F)^\times} \begin{bmatrix} \varpi_F^j & x \\ 0 & \varpi_F^{m-j} \end{bmatrix} \mathbf{K} \right) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathfrak{o}_F / \varpi_F^m \mathfrak{o}_F} \begin{bmatrix} \varpi_F^m & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K} \right) \cup \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F^m \end{bmatrix} \mathbf{K}$$

が分かる. 各両側剰余類 $\mathbf{K} \begin{bmatrix} \varpi_F^{l+m} & 0 \\ 0 & \varpi_F^l \end{bmatrix} \mathbf{K}$ の測度 $d_{\mathfrak{A}} x$ による体積 $V_{l,m}$ は分解 (2.2) を利用すると, $m > 0$ ならば $V_{l,m} = q_F^{-4l-m} (1 + q_F^{-1}) \text{vol}(\mathbf{K})$, $m = 0$ ならば $V_{l,0} = q_F^{-4l} \text{vol}(\mathbf{K})$ と

計算できる。vol(K) は K の $d_{\mathbb{R}}x$ に関する体積であるが、これは $(1 - q_F^{-1}) \mu_G(\mathbf{K})$ と等しい。故に、

$$\begin{aligned} \text{vol}(R) &= \text{vol}(R \cap \text{GL}(2, F)) = \sum_{l, m \in \mathbb{N}} V_{l, m} = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} q_F^{-m} (1 + q_F^{-1}) + 1 \right\} q_F^{-4l} (1 - q_F^{-1}) \mu_G(\mathbf{K}) \\ &= (1 - q_F^{-2})^{-1} \mu_G(\mathbf{K}) \end{aligned}$$

よって、(2.1) の左辺は $\mu_G(\mathbf{K}) = (1 - q_F^{-2}) \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$ と求まる。

一方、(2.1) の右辺は、 $C_0 \mu_{F^\times}(\mathfrak{o}_F)^2 \text{vol}(\mathfrak{o}_F) = C_0 \text{vol}(\mathfrak{o}_F)$ である。これらを比較することで、 C_0 の値が分かる。

$F = \mathbb{R}$ の場合： $f(g) = \exp(-\pi \text{tr}({}^t g g)) |\det g|_{\mathbb{R}}^2$ に対して、(2.1) の両辺を計算する。

左辺は $\left\{ \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) dx \right\}^4 = 1$ となる。右辺は

$$\begin{aligned} &C_0 \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{(z, t) \in (\mathbb{R}^\times)^2} \int_{\mathbf{K}_v} \exp(-\pi z^2 (t^2 + t^2 x^2 + 1)) (z^2 t)^2 dx \frac{dt}{t} \frac{dz}{z} dk \\ &= C_0 \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \right\} \left\{ \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi z^2} z^2 \frac{dz}{z} \right\} \left\{ \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi t^2} |t| \frac{dt}{t} \right\} = \pi^{-1} C_0 \end{aligned}$$

よって、 $C_0 = \pi$ となる。

$F = \mathbb{C}$ の場合： $f(g) = \exp(-\pi \text{tr}({}^t \bar{g} g)) |\det g|_{\mathbb{C}}^2$ に対して、(2.1) の両辺を計算する。左辺は 16、右辺は $8\pi^{-1} C_0$ になることが分かるので、 $C_0 = 2\pi$ が得られる。□

補題 13. D を F 上の四元数体とする。

- (1) 商空間 $F^\times \backslash D^\times$ はコンパクトである。
- (2) F が非アルキメデス的とすると、 $\text{vol}(F^\times \backslash D^\times) = 2 q_F^{-2} (q_F + 1) \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$ である。

Proof: $F = \mathbb{R}$ のとき、 $\mathbb{H}^\times = \mathbb{R}_+^\times \text{SU}(2)$ なので (1) は明らか。以下、 F は非アルキメデス的とする。 $u_0 \in \mathfrak{o}_F^\times - (\mathfrak{o}_F^\times)^2$ とすると、 $E_0 = F(\sqrt{u_0})$ は不分岐 2 次拡大である。従って、

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \varpi_F \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in E_0 \right\}$$

であり、 $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}_{E_0}$ である要素全体 \mathfrak{o}_D はその極大オーダーを与える。 $\varpi_D = \begin{bmatrix} 0 & \varpi_F \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ は素元であり、 $\varpi_D \mathfrak{o}_D = \mathfrak{o}_D \varpi_D$ はその唯一つの極大イデアルである。 $\mathfrak{o}_D^\times = \mathfrak{o}_D - \varpi_D \mathfrak{o}_D$ より、 \mathfrak{o}_D^\times はコンパクトである。 $D^\times = \mathfrak{o}_D^\times \varpi_D^{\mathbb{Z}}$ 、 $F^\times = \mathfrak{o}_F^\times \varpi_F^{\mathbb{Z}}$ であり、 $\varpi_F = \varpi_D^2$ なので、

$$(2.3) \quad F^\times \backslash D^\times = (\mathfrak{o}_F^\times \backslash \mathfrak{o}_D^\times) \{ \varpi_D, 1 \}$$

となる。これより (1) は明らかである。さて、 $\mathfrak{o}_{D/F} = \{ \gamma \in D \mid \psi_F(\tau_D(\gamma \mathfrak{o}_D)) = \{1\} \}$ とすると、直接計算によって $\mathfrak{o}_{D/F} = \varpi_D^{-1} \varpi_F^{-d} \mathfrak{o}_D$ が分かる。ここで、 d は ψ_F の differential exponent (i.e. $\{x \in F \mid \psi_F(ax) = \{1\}\} = \varpi_F^{-d} \mathfrak{o}_F$) である。以下、この証明のなかでは、vol で F 代数の加法的自己双対測度による集合の測度を表す。[29,] により $\text{vol}(\mathfrak{o}_F) = q_F^{-d/2}$ である。これと同様に、 $\text{vol}(\mathfrak{o}_D)$ を計算する。 \mathfrak{o}_D の特性関数 $\chi_{\mathfrak{o}_D}$ のフーリエ変換は $\text{vol}(\mathfrak{o}_D) \chi_{\mathfrak{o}_{D/F}}$ になる。よって、再度これをフーリエ変換すると $\chi_{\mathfrak{o}_D}$ になるので、 $1 = |\nu_D(\varpi_D \varpi_F^d)|_F^{-2} \text{vol}(\mathfrak{o}_D)^2$ を得る。これより、 $\text{vol}(\mathfrak{o}_D) = |\nu_D(\varpi_D \varpi_F^d)|_F = q_F^{-1-2d} = q_F^{-1} \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$ と求まる。 $\mathfrak{o}_D^\times = \mathfrak{o}_D - \varpi_D \mathfrak{o}_D$ だから

$$(1 - q_F^{-1}) \mu_{D^\times}(\mathfrak{o}_D^\times) = \text{vol}(\mathfrak{o}_D^\times) = (1 - |\nu_D(\varpi)|_F^2) \text{vol}(\mathfrak{o}_D) = (1 - q_F^{-2}) q_F^{-1} \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$$

これと、(2.3) によって

$$\mu_{F^\times \backslash D^\times}(F^\times \backslash D^\times) = \frac{\mu_{D^\times}(\mathfrak{o}_D^\times)}{\mu_{F^\times}(\mathfrak{o}_F^\times)} \times 2 = 2 q_F^{-2} (q_F + 1) \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$$

を得る。□

2.2. 共役類上の不変測度. $\gamma \in G$ に対して $\mathcal{O}_G(\gamma) = \{g^{-1}\gamma g \mid g \in G\}$ を γ の G -共役類、 G_γ を γ の G における中心化群とする。補題 10 より、 G の共役類分割は $\mathcal{O}_G(\gamma)$ ($\gamma \in \mathcal{E}_G \cup \mathcal{H}_G \cup \mathcal{U}_G$) で与えられる。 $\gamma \in \mathcal{E}_G \cup \mathcal{H}_G \cup \mathcal{U}_G$ に対する共役類と中心化群は次のように具体的に求められる。

- $\gamma = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$ ($z \in F^\times$) ならば、

$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \{\gamma\}, \quad G_\gamma = G$$

である。 $\mathcal{O}_G(\gamma)$ には体積 1 の離散測度を与える。

- $\gamma = \iota_E^G(t)$ ($E \in \mathcal{Q}(F)$, $t \in E^\times - F^\times$) ならば、

$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \{\xi \in G \mid \det \xi = N_E(t), \operatorname{tr} \xi = \operatorname{tr}_E(t)\}, \quad G_\gamma = T_E^G$$

である。 $d\mu_{G_\gamma}(\iota_E^G(x)) = d\mu_{E^\times}(x)$ で $G_\gamma \cong E^\times$ の Haar 測度 $d\mu_{G_\gamma}$ が定まる。

- $\mathfrak{A} = M(2, F)$ のとき、 $\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ ($a_1, a_2 \in F^\times$) ならば

$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \{\xi \in G \mid \det \xi = a_1 a_2, \operatorname{tr} \xi = a_1 + a_2\}, \quad G_\gamma(F) = M$$

$d\mu_M(x_1, x_2) = d\mu_{F^\times}(x_1) d\mu_{F^\times}(x_2)$ により $G_\gamma \cong (F^\times)^2$ の Haar 測度 $d\mu_{G_\gamma}$ が定まる。

- $\mathfrak{A} = M(2, F)$ のとき、 $\gamma = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ($a \in F^\times$) ならば

$$\mathcal{O}_G(\gamma) = \{\xi \in G \mid (\xi - a 1_2)^2 = 0, \xi \neq a 1_2\}, \quad G_\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} z & x \\ 0 & z \end{bmatrix} \mid z \in F^\times, x \in F \right\}$$

である。これより、 G_γ はユニモジュラーである。 $d\mu_{G_\gamma} = d\mu_{F^\times}(z) d_F x$ によって G_γ に Haar 測度を固定する。

$\mathcal{O}_G(\gamma)$ は G の局所閉集合になる。 G -同型 $G_\gamma \backslash G \cong \mathcal{O}_G(\gamma)$ によって $G_\gamma \backslash G$ 上の商測度 $d\mu_G/d\mu_{G_\gamma}$ を移送して共役類 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_G(\gamma)$ に不変測度 $\mu_{\mathcal{O}}$ を与える。

$\omega : Z \rightarrow \mathbb{C}^1$ をユニタリー指標とする。smooth 函数 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ で mod Z でコンパクト台を持ち、

$$f(zg) = \omega(z)^{-1} f(g), \quad z \in Z, g \in G$$

を満たすもの全体を $C_c^\infty(G, \omega)$ とかく。

定義 14. $\gamma \in G$, $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ とする。積分

$$(2.4) \quad \Phi(\gamma, f) = \int_{\mathcal{O}_G(\gamma)} f(x) d\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma)}(x)$$

を γ に沿った f の軌道積分と呼ぶ。□

補題 15. $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ に対して、積分 (2.4) は絶対収束する。

Proof: γ が半単純 (i.e. $\mathcal{E}_G \cup \mathcal{H}_G$ に共役) ならば $\mathcal{O}_G(\gamma)$ は閉集合なので、任意のコンパクト集合 $\omega \subset G$ に対して、 $\mathcal{O}_G(\gamma) \cap (Z\omega)$ はコンパクトである。(実際、点列 $g_n \in \mathcal{O}_G(\gamma) \cap (Z\omega)$ をとると、 $g_n = \begin{bmatrix} z_n & 0 \\ 0 & z_n \end{bmatrix} h_n$ ($z_n \in F^\times$, $h_n \in \omega$) と書ける。部分列に移行して $\{h_n\}$ は収束列であるとしてよい。 $g_n \in \mathcal{O}_G(\gamma)$ ゆえ $\det g_n = \det \gamma$ なので、 $z_n^2 = \det \gamma \det h_n^{-1}$ となり z_n^2 は収束する。よって、部分列に更に移行すれば z_n も収束する。)

これより、 $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ に対して上の積分が絶対収束することは見やすい。 $G = \operatorname{GL}(2)$ で、 $\gamma = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ($a \in F^\times$) のときは、岩澤分解 $G = NAK$ より自然な同一視 $G_\gamma \backslash G = ZN \backslash G \cong \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid t \in F^\times \right\} K$ がある。これにより不変測度 $d\mu_G/d\mu_{G_\gamma}$ は $|t|_F^{-2} d_F t dk$ の定数倍に対応する。ここで、 dk は K の全体積 1 のハール測度である。

$$\begin{aligned} \int_{G_\gamma \backslash G} |f(g^{-1}\gamma g)| d\mu_G/d\mu_{G_\gamma} &\ll \int_{F^\times} \int_K |f(k^{-1} \begin{bmatrix} z & t^{-1} \\ 0 & z \end{bmatrix} k)| |t|_F^{-2} dt dk \\ &= \int_{F^\times} \int_K |f(k^{-1} \begin{bmatrix} z & t \\ 0 & z \end{bmatrix} k)| dt dk \quad (\because t^{-1} = t' \text{ と変数変換}) \end{aligned}$$

この最後の表示と f が mod Z でコンパクト台を持つことから積分の収束は自明である。□

2.3. Weyl の積分公式. $\mathcal{T}_G^{\text{ell}} = \{T_E \mid E \in \mathcal{Q}(F)\}$ とする. \mathfrak{A} が斜体のときには $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ とし, $\mathfrak{A} = M(2, F)$ のときは $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_G^{\text{ell}} \cup \{M\}$ (M : 対角行列全体) とする. 各 $T \in \mathcal{T}_G$ に対して, $T_{\text{reg}} = T - Z$ とおく.

$T \in \mathcal{T}_G$ に対して,

$$D_T(t) = |\det(\text{Ad}(t) - I)|_F, \quad t \in T$$

とおく.

補題 16. $T \in \mathcal{T}_G$ とする. 写像 $\eta_T : (T \setminus G) \times T_{\text{reg}} \rightarrow G$,

$$\eta_T(g, t) = g^{-1} t g, \quad g \in T \setminus G, \quad t \in T_{\text{reg}}$$

は submersive であり, 任意の $(g, t) \in (T \setminus G) \times T_{\text{reg}}$ に対して

$$\eta_T^{-1}(\eta_T(g, t)) = \{(w_E g, w_E t w_E^{-1}) \mid w \in W(G, T)\}$$

である. 像 $(T_{\text{reg}})^G = \bigcup_{t \in T_{\text{reg}}} \mathcal{O}_G(t)$ は G の開集合になる.

Proof: [8, §A.3.f], [21, 補題 (4.1.2)] □

補題 17. (Weyl の積分公式) : 可積分函数 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ に対して,

$$\int_{Z \setminus G} f(g) d\mu_G(g) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_G} \int_{Z \setminus T_{\text{reg}}} D_T(t) \Phi(t, f) d\mu_T(t)$$

が成り立つ.

Proof: [8, §A.3.f], [21, 補題 (4.1.2)] を参照せよ. □

2.4. 軌道積分の germ 展開. この節では F は非アルキメデス的とする.

$T \in \mathcal{T}_G$ とする. 軌道積分 $\Phi(t, f)$ の $t \in T$ の函数としての振る舞いは次の命題で与えられる.

命題 18. (1) $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ する. T_{reg} 上では $\Phi(t, f)$ は smooth 函数であり, 台は mod Z で相対コンパクトな集合に含まれる.

(2) $\gamma = z 1_{\mathfrak{A}} \in Z$ とする.

(a) \mathfrak{A} が斜体ならば, $\Phi(t, f)$ は γ の近傍で smooth である.

(b) $\mathfrak{A} = M(2, F)$ とする. T_{reg} 上の函数 $\Gamma_{\gamma, u}^T, \Gamma_\gamma^T (= \text{Shalika germ})$ が存在して次の性質を持つ :

- mod 任意の函数 $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ に対して, γ の G での近傍 $\mathcal{N}(f)$ が存在して

$$(2.5) \quad \Phi(t, f) = \Gamma_{\gamma, u}^T(t) \Phi\left(\begin{bmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix}, f\right) + \Gamma_\gamma^T(t) f(\gamma), \quad t \in T_{\text{reg}} \cap \mathcal{N}(f)$$

- γ の十分近傍で, $\Gamma_{\gamma, u}^T(t)$ は $D_T(t)^{-1/2}$ に比例し, $\Gamma_\gamma^T(t)$ は次の定数に一致する :

$$(2.6) \quad \Gamma_\gamma^T(t) = \begin{cases} 0 & (T \notin \mathcal{T}_G^{\text{ell}}), \\ -\text{vol}(F^\times \setminus D^\times) & (T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}) \end{cases}$$

ここで, D は F 上の四元数体である. □

命題 18 の証明は, 以下でいくつかの補題を準備しながら段階を分けて与える. (一般の場合は, [24], [32], [19, §5, §6] を参照せよ.)

2.4.1. *Germ*展開の存在証明. [32] に従いながら、「中心指標付き」に修正しつつ進む。この小節を通して、 $G = \mathrm{GL}(2, F)$ とし、 $\gamma_u = \begin{bmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix}$, $\gamma = z 1_2$ とおこう。

補題 19. 開集合 $U \subset G$ に対して、 $\tilde{U} = \mathrm{Ad}(G)U$ をその充満化として $Z(U) = Z \cap \tilde{U}^{-1}\tilde{U}$ とおく。 U がある点 $x \in G$ の基本近傍系を走るとき、 $Z(U)$ は Z における単位元の基本近傍系をなす。

Proof: $g \in \tilde{U}$ の固有値を $\lambda_i(g) \in \bar{F}$ ($i = 1, 2$) とするとき、 ζg ($\zeta \in F^\times$) の固有値が $\zeta \lambda_i(g)$ になることに注意すればよい。□

補題 20. $f_u, f_1 \in C_c^\infty(G, \omega)$ で

$$\begin{cases} \Phi(\gamma_u, f_u) = 1, \\ \Phi(\gamma, f_u) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi(\gamma_u, f_1) = 0, \\ \Phi(\gamma, f_1) = \omega(\gamma)^{-1} \end{cases}$$

を満たすものが存在する。

Proof: $\mathcal{O}_G(\gamma_u) = (G - Z) \cap \overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ より $\mathcal{O}_G(\gamma_u)$ は $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ において開集合である。 γ_u の $G - Z$ での相対コンパクト近傍 \mathcal{N} を十分小さくとると、補題 19 から Z における単位元の相対コンパクト近傍 $Z(\mathcal{N})$ 上で ω は自明になる。不変測度 $d\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ の台は $\mathcal{O}_G(\gamma_u)$ 全体に等しいので、 $\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}(Z(\mathcal{N})\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)) \neq 0$ である。

$$f_u(g) = \begin{cases} \omega(\zeta)^{-1} \mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}(Z(\mathcal{N})\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u))^{-1} & (g = \zeta g_0 \in Z\mathcal{N}), \\ 0 & (g \notin Z\mathcal{N}) \end{cases}$$

によって smooth 関数 $f_u : G \rightarrow \mathbb{C}$ は矛盾無く定義されて、 $\mathrm{supp}(f_u) \subset Z\mathcal{N}$ となる。 $f_u(\zeta g) = \omega(\zeta)^{-1} f_u(g)$ ($\zeta \in Z$) も明らかなので、 $f_u \in C_c^\infty(G, \omega)$ である。 $Z\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u) = Z(\mathcal{N})\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma_u, f_u) &= \int_{Z(\mathcal{N})\mathcal{N} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)} \varphi d\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)} = 1, \\ \Phi(\gamma, f_u) &= f_u(\gamma) = 0 \end{aligned}$$

となる。次に、 G における γ の微小近傍 \mathcal{N}_1 を $\omega|(Z \cap \mathcal{N}_1^{-1}\mathcal{N}_1) = 1$ となるようにとり、

$$\chi_0(g) = \begin{cases} \omega(\zeta)^{-1} & (g = \zeta g_0 \in Z \mathrm{Ad}(G)\mathcal{N}_1), \\ 0 & (g \notin Z \mathrm{Ad}(G)\mathcal{N}_1) \end{cases}$$

として、 $\chi_0 \in C_c^\infty(G, \omega)$ と定め

$$f_1 = \chi_0 - \Phi(\gamma_u, \chi_0) f_u$$

と定義する。すると、

$$\Phi(\gamma, f_1) = f_1(\gamma) = \omega(\gamma)^{-1}, \quad \Phi(\gamma_u, f_1) = \Phi(\gamma_u, \chi_0) - \Phi(\gamma_u, \chi_0) \Phi(\gamma_u, f_u) = 0$$

となる。□

$Z \backslash G$ -作用を持つ全不連結空間 X 上の関数 $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ に対して $\phi^g(x) = \phi(g^{-1} \cdot x)$ ($g \in Z \backslash G, x \in X$) とする。 $C_0(X)$ を $\phi^g - \phi$ ($\phi \in C_c^\infty(X), g \in Z \backslash G$) の形を持つ関数によって生成される $C_c^\infty(G)$ の部分空間とする。 $X = \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ は Ad による G -作用を持つので、 $C_0(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ が定義される。

補題 21. $\langle \mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}, \varphi \rangle = 0$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ ならば $\varphi \in C_0(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ である。

Proof: $\mathcal{O}_G(\gamma_u)$ は G -軌道なのでその上の Haar 測度は定数倍を除いて一意である。これは、商空間 $C_c^\infty(\mathcal{O}_G(\gamma_u))/C_0(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ の双対空間が 1 次元であることを意味する。□

補題 22. f_u, f_1 を補題 20 のようにとる。任意の $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ に対して、 $f' = f - \Phi(\gamma_u, f) f_u - \Phi(\gamma, f) f_1$ とおくと、 $h \circ \text{Ad}(g) - h$ ($h \in C_c^\infty(G, \omega), g \in G$) の形の函数の有限一次結合が存在して $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ 上で f' と一致する。

Proof: f_u, f_1 の性質から $\Phi(\gamma_u, f') = 0, f'(\gamma) = 0$ となる。よって、 f' は γ のある近傍で零なので、 $\varphi = f'|_{\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}}$ は $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ であって、

$$\langle \mu_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}, \varphi \rangle = \Phi(\gamma_u, f') = 0$$

を満たす。従って、補題 21 より $\varphi \in C_0(\mathcal{O}_G(\gamma_u))$ となるので、

$$\varphi = \sum_{j \in J} (h_j \circ \text{Ad}(g_j) - h_j), \quad h_j \in C_c^\infty(\mathcal{O}_G(\gamma_u)), g_j \in G$$

と有限和で書ける。補題 19 より、 $G-Z$ の $\text{Ad}(G)$ -不変開集合 \mathcal{N} を $\gamma_u \in \mathcal{N}$ かつ $\omega|_{(\mathcal{N}^{-1}\mathcal{N} \cap Z) = 1}$ となるように取れる。各点 $x \in \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ の \mathcal{N} における開近傍 \mathcal{U}_x が存在して、任意の j に対して $h_j|_{\mathcal{U}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ は定数になる。補題 19 に注意して $Z(\mathcal{U}_x)\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ を満たすように x の開近傍 \mathcal{V}_x をとる。 $Z\mathcal{V}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u) = Z(\mathcal{V}_x)\mathcal{V}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u) \subset \mathcal{U}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ より、 h_j は $Z\mathcal{V}_x \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ 上で定数になる。 $\bigcup_j \text{supp}(h_j)$ はコンパクトなので、有限個の点 x_α ($\alpha = 1, \dots, r$) が存在して $\mathcal{V}_{x_\alpha} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ によって被覆される。 $\mathcal{V}'_\beta = \mathcal{V}_{x_\beta} - \bigcup_{\alpha < \beta} (\mathcal{V}_{x_\beta} - Z\mathcal{V}_{x_\alpha})$ によって \mathcal{V}'_β を定めると、 $Z\mathcal{V}'_\beta$ は disjoint で $Z\mathcal{V}'_\beta \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ 上すべての h_j が定数になる。

h_j は $\mathcal{O}_G(\gamma_u)$ の開集合 $Z\mathcal{V}'_{\beta_j} \cap \mathcal{O}_G(\gamma_u)$ の特性函数の定数 c_j 倍であるとしよう。

各 $j \in J$ に対して、 $\mathcal{N}_j = Z\mathcal{V}'_{\beta_j} \cap \mathcal{N}$ とおき、 $\zeta g \in Z\mathcal{N}_j$ のとき $\phi_j(\zeta g) = \omega(\zeta)^{-1}c_j$ とし、 $G - Z\mathcal{N}_j$ 上で零とすることで $\phi_j \in C_c^\infty(G, \omega)$ が矛盾無く作れる。すると、 $\phi_j|_{\mathcal{O}_G(\gamma_u)} = h_j$ ($j \in J$) となる。そこで、 $\phi = \sum_{j \in J} (\phi_j \circ \text{Ad}(g_j) - \phi_j)$ とおけば $\phi|_{\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}} = f'|_{\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}}$ となる。□

補題 23. $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ が $f|_{\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}} = 0$ を満たせば、 γ のコンパクト近傍 \mathcal{N}_f が存在して、 $\tilde{\mathcal{N}}_f = \text{Ad}(G)\mathcal{N}_f$ 上で f は恒等的に零になる。

Proof: $\text{Ch} : Z \setminus G \rightarrow F^3$ を $g \in Z \setminus G$ に $\text{Ad}(g) \in \text{GL}_F(\mathfrak{g})$ の特性多項式 $\det(t - \text{Ad}_g(g))$ の係数を対応させる写像とする。これは連続かつ G -不変である。 $\text{Ch}(\text{supp}(f))$ はコンパクト集合であり、 $\text{Ch}(\gamma)$ を含まない。よって、 $\text{Ch}(\gamma)$ の近傍 $C \subset F^3$ が存在して、 $C \cap \text{Ch}(\text{supp}(f)) = \emptyset$ となる。そこで、 $\gamma \in \mathcal{N} \subset \text{Ch}^{-1}(C)$ なる \mathcal{N} をとればよい。□

germ 展開の存在性 : $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ に対して、補題 22 を適用すると、有限個の函数 $h_i \in C_c^\infty(G, \omega)$ および点 $g_i \in G$ が存在して、

$$f'' = f - \Phi(\gamma_u, f) f_u - \Phi(\gamma, f) f_1 - \sum_i (h_i \circ \text{Ad}(g_i) - h_i)$$

の $\overline{\mathcal{O}_G(\gamma_u)}$ への制限が恒等的に零になる。そこで、この f'' に対して補題 23 を適用することで、 γ のあるコンパクト近傍 \mathcal{N}_f であって $f''|_{\text{Ad}(G)\mathcal{N}_f} \equiv 0$ なるものが存在する。特に、 $\Phi(t, f'') = 0$ ($\forall t \in T \cap \mathcal{N}_f$)、つまり、

$$\Phi(t, f) = \Phi(\gamma_u, f) \Phi(t, f_u) + \Phi(\gamma, f) \Phi(t, f_1), \quad t \in T \cap \mathcal{N}_f$$

そこで、 $\Gamma_{\gamma, u}^T(t) = \Phi(t, f_u), \Gamma_\gamma^T(t) = \Phi(t, f_1)$ とすれば germ 展開 (2.5) が成り立つ。□

2.4.2. *Shalike germ* の決定. 引き続き、 $G = \text{GL}(2, F)$ とする。(2.5) の両辺を特別な函数に対して計算すればよい。 $\chi_K \in C_c^\infty(G)$ を極大コンパクト部分群 $K = \text{GL}(2, \mathfrak{o}_F)$ の特性函数とする。

$$\chi_K^1(g) = \int_{F^\times} \chi_K(cg) d\mu_{F^\times}(c), \quad g \in G$$

とすれば、 $\chi_K^1 \in C_c^\infty(G, 1)$ である。以下で現れる C_0 は補題 12 の定数である。また、条件 P に対して、それが成立するとき限り $\delta(P) \in \{0, 1\}$ は 1 とする。

補題 24. (1) $a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \in M - Z$ に対して

$$\Phi(g, \chi_{\mathbf{K}}^1) = C_0 \text{vol}(\mathfrak{o}_F) \delta(a_1 a_2^{-1} \in \mathfrak{o}_F^\times) |a_1 a_2|_F^{-1/2} D_M(a)^{-1/2}$$

(2) $z \in F^\times$ に対して、

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \chi_{\mathbf{K}}^1\right) = C_0 (1 - q_F^{-1})^{-1}$$

Proof: $G_a \backslash G$ の不変測度の決め方から、

$$\begin{aligned} \Phi(a, \chi_{\mathbf{K}}^1) &= \int_{M \backslash G} \int_Z f(g^{-1}cag) d\mu_{A \backslash G}(g) d\mu_F^\times(c) \\ &= C_0 \int_{x \in F} \int_{c \in F^\times} \int_{k \in \mathbf{K}} \chi_{\mathbf{K}}\left(k^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ca_1 & 0 \\ 0 & ca_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} k\right) d\mu_{F^\times}(c) d_F x dk \\ &= C_0 \int_{x \in F} \int_{c \in F^\times} \chi_{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} ca_1 & (a_1 - a_2)cx \\ 0 & ca_2 \end{bmatrix}\right) d\mu_{F^\times}(c) d_F x dk \\ &= C_0 \left\{ \int_{c \in F^\times} \delta(ca_1, ca_2 \in \mathfrak{o}_F, c^2 a_1 a_2 \in \mathfrak{o}_F^\times) d\mu_{F^\times}(c) \right\} \text{vol}(\mathfrak{o}_F) |a_1 - a_2|_F^{-1} \\ &= C_0 \text{vol}(\mathfrak{o}_F) \delta(a_1 a_2^{-1} \in \mathfrak{o}_F^\times) |a_1 a_2|_F^{-1/2} D_A(a)^{-1/2} \end{aligned}$$

もう一つの積分も同様に容易に計算される。 \square

$E \in \mathcal{Q}(F)$, $T = T_E^G$ とする。 $\mathfrak{o}_E = \mathfrak{o}_F + \mathfrak{o}_F \theta$ となる $\theta \in \mathfrak{o}_E$ が存在する。 θ の F -最小多項式を $f(t) = t^2 + b_1 t + b_0 \in \mathfrak{o}_F[t]$ とすると、 E/F の differentail ideal は $f'(\theta)\mathfrak{o}_E$ となる。そこで、 $u = f'(\theta) = 2\theta + b_1$ とおくと、 $\bar{u} = -u$, $E = F + Fu$ である。 E の F -基底 $\{1, u\}$ による正則表現によって E を行列環に埋め込むと

$$T_E = \left\{ \begin{bmatrix} z & tu^2 \\ t & z \end{bmatrix} \mid t, z \in F^\times \right\}$$

となる。 $\text{vol}(Z \backslash T_E^G) = \text{vol}(F^\times \backslash E^\times) = 1$ であったことを想起しよう。

補題 25. $e \in \{1, 2\}$ を E/F の分岐指数とする。 $|N(\tau)|_F = |z|_F^2$ を満たすような $\tau = \begin{bmatrix} z & t\delta^2 \\ t & z \end{bmatrix} \in T_E^G - Z$ に対して

$$\Phi(\tau, \chi_{\mathbf{K}}^1) = C_0 (q_F - 1)^{-1} \text{vol}(\mathfrak{o}_F) \{-2 + (q_F^{e-1} + q_F) |u|_F D_T(\tau)^{-1/2}\}$$

Proof: 写像 $\sigma : E \rightarrow F$ を $\sigma(\xi) = (\xi - \bar{\xi})/u$ で定義しよう。 ϖ_F, ϖ_E を F, E の素元とする。このとき、任意の整数 $l \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\sigma(\varpi_E^l \mathfrak{o}_E) = \varpi_F^{\lfloor l/e \rfloor} \mathfrak{o}_F$ が成り立つ。まず、 $\chi_{\mathbf{K}}$ の軌道積分を計算する。

$$\begin{aligned} C_0^{-1} \Phi(\tau, \chi_{\mathbf{K}}) &= C_0^{-1} \int_{Z \backslash G} \chi_{\mathbf{K}}(g^{-1}\tau g) d\mu_{Z \backslash G}(g) \\ &= \int_{x \in F} \int_{a \in F^\times} \int_{k \in \mathbf{K}} \chi_{\mathbf{K}}\left(k^{-1} \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & tu^2 \\ t & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} k\right) |a|_F^{-1} d\mu_{F^\times}(a) d_F x dk \\ &= \int_{x \in F} \int_{a \in F^\times} \int_{k \in \mathbf{K}} \chi_{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} z - xt & a^{-1}t(u^2 - x^2) \\ at & z + xt \end{bmatrix}\right) |a|_F^{-1} d\mu_{F^\times}(a) d_F x dk \\ (2.7) \quad &= \int_{x \in F} \int_{a \in F^\times} \int_{k \in \mathbf{K}} \chi_{\mathbf{K}}\left(\begin{bmatrix} z - x & a^{-1}(t^2 u^2 - x^2) \\ a & z + t \end{bmatrix}\right) |a|_F^{-1} d\mu_{F^\times}(a) d_F x dk \end{aligned}$$

最後の被積分函数の中に現れた行列が \mathbf{K} に属する条件は、 $x = c + z$ として変数 c を導入すると、次と同値；

$$(c, 2z, a) \in \mathfrak{o}_F^3, \quad N(\tau) \in \mathfrak{o}_F^\times, \quad N(c + \tau) \in a\mathfrak{o}_F$$

よって、(2.7) は積分 $I = \iint_{(a,c) \in \mathcal{J}} |a|_F^{-2} d_F a d_F c$ の $\delta(2z \in \mathfrak{o}_F, N(\tau) \in \mathfrak{o}_F^\times)$ 倍に等しい。た

だし、 $\mathcal{J} = \{(a, c) \in \mathfrak{o}_F^2 \mid N(c+\tau) \in a\mathfrak{o}_F\}$ である。 \mathcal{J} は減少集合列 $\{(a, c) \in \mathcal{J} \mid c+\tau \in \varpi_E^l \mathfrak{o}_E\}$ ($l \in \mathbb{N}$) によるフィルター付けを持つ。これで積分 I を分解すると、

(2.8)

$$I = \sum_{l \in \mathbb{N}} J(l) (V(l) - V(l+1)),$$

$$\text{ただし、} J(l) = \int_{a \in \mathfrak{o}_F; \text{ord}_F(a) \leq 2l/e} |a|_F^{-1} d\mu_{F^\times}(a), \quad V(l) = \text{vol}\{c \in \mathfrak{o}_F \mid c+\tau \in \varpi_E^l \mathfrak{o}_E\}$$

となる。 $J(l)$ は容易に

$$(2.9) \quad J(l) = \frac{q_F^{2l/e+1} - 1}{q_F - 1}$$

と計算される。一方、

$$I(l) = \delta((\mathfrak{o}_F + \tau) \cap \varpi_E^l \mathfrak{o}_E \neq \emptyset) \text{vol}(F \cap \varpi_E^l \mathfrak{o}_E)$$

となる。 $\tau \in \mathfrak{o}_E$ のとき、 $(\mathfrak{o}_F + \tau) \cap \varpi_E^l \mathfrak{o}_E \neq \emptyset$ は $2t \in \sigma(\varpi_E^l \mathfrak{o}_E)$ と同値である。また、 $E = F + \theta F \cong F^2$ によって一時的に E に $d_F x$ の積測度を与えると、 $\text{vol}(\varpi_E^l \mathfrak{o}_E) = \text{vol}(F \cap \varpi_E^l \mathfrak{o}_E) \text{vol}(\sigma(\varpi_E^l \mathfrak{o}_E))$ であり、しかも $\sigma(\varpi_E^l \mathfrak{o}_E) = \varpi_F^{[l/e]} \mathfrak{o}_F$ なので、

$$(2.10) \quad V(l) = \delta(2t \in \sigma(\varpi_E^l \mathfrak{o}_E)) \frac{\text{vol}(\varpi_E^l \mathfrak{o}_E)}{\text{vol}(\varpi_F^{[l/e]} \mathfrak{o}_F)} = \delta(\text{ord}_F(2t) \geq [l/e]) q_F^{2l/e - [l/e]} \text{vol}(\mathfrak{o}_F)$$

(2.8) に (2.9), (2.10) を代入して直接計算すれば、 $I = (q_F - 1)^{-1} \text{vol}(\mathfrak{o}_F) \{-2 + (q_F^{e-1} + q_F) |2t|_F^{-1}\}$ を得る。 $D_T(\tau)^{1/2} = |u|_F |2t|_F |N(\tau)|_F^{-1/2}$ なので、最終的に

$C_0^{-1} \Phi(\tau, \chi_K) = \delta(2z \in \mathfrak{o}_F, N(\tau) \in \mathfrak{o}_F^\times) (q_F - 1)^{-1} \text{vol}(\mathfrak{o}_F) \{-2 + (q_F^{e-1} + q_F) |u|_F D_T(\tau)^{-1/2}\}$ を得る。これより、

$$\Phi(\tau, \chi_K^1) = \left\{ \int_{c \in F^\times} \delta(2cz \in \mathfrak{o}_F, c^2 N(\tau) \in \mathfrak{o}_F^\times) |c|_F^{-1} d_F c \right\} \\ \times C_0 (q_F - 1)^{-1} \text{vol}(\mathfrak{o}_F) \{-2 + (q_F^{e-1} + q_F) |u|_F D_T(\tau)^{-1/2}\}$$

右辺の積分は条件 $|N(\tau)|_F = |z|_F^2$ のもとでは1になる。□

命題 18 の証明の完成：さて、Shalika germ の構成の仕方より、函数 $\Gamma_{\gamma_u}^T(t) = \Phi(\gamma_u, f_u)$ である。ただし、 $f_u \in C_c^\infty(G, \omega)$ は補題 20 の性質を持つ任意の函数であるが、その構成法から γ_u の任意の微小開近傍 \mathcal{N} であって $\mathcal{N}^{-1}\mathcal{N} \cap Z$ 上で ω が自明となるものに対して、 $Z\mathcal{N}$ に台を持ちしかも $f_u|_{\mathcal{N}}$ は中心指標 ω によらないようにとることが出来た。これより、 $\Gamma_{\gamma, u}^T(t) = \Phi(t, f_u)$ の γ での芽は中心指標に依存しないことが分かる。 $\Gamma_\gamma^T(t)$ についても同様である。よって、 $\chi_K^1 \in C_c^\infty(G, 1)$ に対して展開 (2.5) の両辺を計算すれば $\Gamma_{\gamma, u}^T(t)$, $\Gamma_\gamma^T(t)$ が決定できる。補題 24、補題 25 および補題 13 を使って実際に求めると (2.6) のようになる。

命題 18 (1) は補題 16 から従う。(2) の主張 (a) を示そう。 $t_0 \in T$ を固定する。函数 f が局所定数函数なことより、各点 $x \in Z \setminus G$ に対してその近傍 $\mathcal{N}_x \subset Z \setminus G$ および t_0 の T での近傍 \mathcal{U}_x が存在して、 $(g, t) \in \mathcal{N}_x \times \mathcal{U}_x$ 上で $f(g^{-1}tg)$ は定数値になる。 \mathfrak{A} が斜体なので、 $Z \setminus G$ はコンパクトである (補題 13(1))。よって、 $\{\mathcal{N}_x\}$ は有限部分被覆 $\{\mathcal{N}_{x_j}\}$ を持つ。 $\mathcal{U} = \bigcap_j \mathcal{U}_{x_j}$ とおこう。 $t \in \mathcal{U}$ のとき

$$\Phi(t, f) = \int_{Z \setminus G} f(g^{-1}tg) d\mu_{Z \setminus G}(g) = \sum_j \mu_{Z \setminus G}(\mathcal{N}_{x_j}) f(x_j^{-1}t_0 x_j)$$

となつて、 $\Phi(t, f)$ は t_0 の近傍 U 上で定数函数になる。□

注意：

- (1) (2.6) より、 $T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ に対する $\Phi(t, f)$ の展開 (2.5) の右辺第 2 項 (「漸近展開」の定数項) は T に依存しない。これを保障するには正規化 $\text{vol}(Z \backslash T) = 1$ が重要であることを注意しておく。
- (2) 両側 K_v -不変かつコンパクト台を持つ $G = \text{GL}(2, F)$ 上の smooth 函数 (要するに不分岐ヘッケ環の元) 全てに対する軌道積分の計算は [20, Chap. 5] で実行されている。計算は Bruhat-Tits building ($SL_2(F)$ の tree) の頂点の個数を数え上げる問題に帰着させる方法で行われる。[19, §5] に詳しい解説がある。

2.5. E 型函数.

定義 26. ([25, Definition A (p.174)]) $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ が条件

- $G_{\text{ell}} - Z$ 上の函数 $\gamma \mapsto \Phi(\gamma, f)$ は G_{ell} 上の smooth 函数に延長される。
- $\Phi(\gamma, f) = 0$ ($\forall \gamma \in \mathcal{H}_G$)

を満たすとき、 E -型函数とよぶ。

補題 27. F は非アルキメデス的とする。 $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ が E -型函数ならば、

$$\Phi(\gamma, f) = 0, \quad \forall \gamma \in G - G_{\text{ell}}$$

Proof: $G = \text{GL}(2, F)$ の場合のみが問題になる。共役類の分類結果 (2.2 節参照) から、任意の $z \in F^\times$ に対して $\Phi(\begin{bmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix}, f) = 0$ を示せばよい。 $T = M$ に対する germ 展開 (2.5) の左辺は f が E 型ならば消える。右辺でみると、 $\Gamma_{\gamma, u}^T(t)$ は零ではないので、その係数 $\Phi(\begin{bmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{bmatrix}, f)$ は零でなくてはならない。□

命題 28. ([25, Theorem 2.4(p.171)]) : F は非アルキメデス的とする。各 $E \in \mathcal{Q}(F)$ に対して函数 $\varphi^E : T_E^G \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられ、次の条件を満たすとする。

- $\varphi^E(wtw^{-1}) = \varphi^E(t)$ ($\forall t \in T_E^G, \forall w \in W(G, T_E^G)$)
- $\varphi^E(z t) = \omega(z)^{-1} \varphi^E(t)$ ($\forall t \in T_E^G, \forall z \in Z$)
- $\{\varphi^E\}$ は G_{ell} 上の smooth 函数に「貼り合わされる」。即ち、任意の $\gamma \in Z$ に対して、 G における γ の近傍 $\mathcal{N}(\gamma)$ とある定数 $c(\gamma)$ が存在して、任意の $E \in \mathcal{Q}(F)$ に対して

$$\varphi^E(t) = c(\gamma), \quad t \in \mathcal{N}(\gamma) \cap T_E^G$$

このとき、 E -型函数 $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ が存在して、

$$\Phi(t, f) = \varphi^E(t), \quad \forall E \in \mathcal{Q}(F), \forall t \in T_E^G$$

となる。□

この命題の証明は次節で与える。

2.5.1. 命題 28 の証明. [25, Theorem 2.4] に従って進む。 T_E^G ($E \in \mathcal{Q}(F)$) 全体の互いに素な合併を G -共役で割って得られる商空間を X とする。自然な全射 $\mathcal{E}_G \rightarrow X$ が存在する。これにより商位相を与えると、 X は中心 Z が連続に作用する局所コンパクト全不連結位相空間になる。各点 $x \in X$ に対して、その持ち上げの一つ $\tilde{x} \in \mathcal{E}_G$ を固定しておく。

補題 29. $x \in X$ として、 \tilde{x} の G での任意の近傍 \mathcal{V} を与える。すると、 \tilde{x} の近傍 $\mathcal{V}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{V}$ および函数 $f_x \in C_c^\infty(Z\mathcal{V}_{\tilde{x}}, \omega)$ で、任意の半単純正則元 $t \in G$ に対して

$$\Phi(t, f_x) = \begin{cases} 1 & (\mathcal{O}_G(t) \cap \mathcal{V}_{\tilde{x}} \cap \mathcal{E}_G \neq \emptyset), \\ 0 & (\mathcal{O}_G(t) \cap \mathcal{V}_{\tilde{x}} \cap \mathcal{E}_G = \emptyset) \end{cases}$$

を満たすものが存在する。つまり、函数 $t \mapsto \Phi(t, f_x)$ を空間 X 上の函数と見做すと、 $\mathcal{V}_{\tilde{x}} \cap \mathcal{E}_G$ の像の特性函数に伸びる。

Proof: $\tilde{x} \notin Z$ の場合: 補題 9 より $\tilde{x} \in T - Z$ となる $T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ が唯ひとつ存在する。命題 16 の写像 $\eta_T: (T \setminus G) \times (T - Z) \rightarrow G$ を想起しよう。 $\eta_T(1, \tilde{x}) = \tilde{x}$ なので、命題 16 から $\mathcal{V}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{V} \cap (G - Z)$ を満たす開近傍を $\mathcal{V}_{\tilde{x}} = \eta_T(N_1 \times N_2)$ (N_1 は $T \setminus G$ の原点のコンパクト開近傍、 N_2 は T における \tilde{x} のコンパクト開近傍) の形に取れて、しかも $\eta_T: N_1 \times N_2 \cong \mathcal{V}_{\tilde{x}}$ は位相同型になる。更に、 $\mathcal{V}_{\tilde{x}}^{-1} \mathcal{V}_{\tilde{x}} \cap Z$ 上で ω が自明になるとしてよい。 $N'_1 \subset N_1, N'_2 \subset N_2$ を空でないコンパクト開集合として、 $\mathcal{V}'_{\tilde{x}} = \eta_T(N'_1 \times N'_2)$ とおく。 $f_x \in C_c^\infty(Z\mathcal{V}_{\tilde{x}}, \omega)$ を各 $\zeta \in Z$ に対して $\zeta \mathcal{V}'_{\tilde{x}}$ 上では定数 $\omega(\zeta)^{-1} \text{vol}(N'_1)^{-1}$ として、 $Z\mathcal{V}'_{\tilde{x}}$ の外では零として定める。すると、 $\gamma \in \mathcal{V}'_{\tilde{x}} \cap T$ のとき

$$\Phi(\gamma, f_x) = \int_{\mathcal{O}_G(\gamma) \cap Z\mathcal{V}'_{\tilde{x}}} f_x d\mu_{\mathcal{O}_G(\gamma)} = \text{vol}(N'_1)^{-1} \int_{N'_1} d\mu_{T \setminus G}(g) = 1$$

$\text{Ad}(G)\mathcal{V}_{\tilde{x}}$ は T 以外の \mathcal{T}_G に属するトーラスと交わらない。これより、 f_x が求めるものである。

$\tilde{x} = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \in Z$ の場合: $\beta := \begin{bmatrix} z & b \\ 0 & z \end{bmatrix} \in \mathcal{V}$ となるような $b \in F^\times$ が存在する。よって、補題 20 の証明から、 β の近傍 $\mathcal{N}_\beta \subset \mathcal{V} \cap (G - Z)$ と函数 $h_\beta \in C_c^\infty(Z\mathcal{V}, \omega)$ が存在して $\Phi(\beta, h_\beta) = 1$ となる。 $\mathcal{N}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{V}$ を \tilde{x} のコンパクト近傍とする。 $\mathcal{N}_{\tilde{x}}^{-1} \mathcal{N}_{\tilde{x}} \cap Z$ 上で ω が自明になるように $\mathcal{N}_{\tilde{x}}$ を小さくしておく。函数 $h_{\tilde{x}} \in C_c^\infty(Z\mathcal{V}, \omega)$ を各 $\zeta \in Z$ について $\zeta \mathcal{N}_{\tilde{x}}$ 上で $\omega(\zeta)^{-1} \Gamma_{\tilde{x}}^{-1}$ に等しく、 $Z\mathcal{N}_{\tilde{x}}$ の外では零とおくことで定義する。 $f_x = \omega(\tilde{x}) (\Gamma_{\tilde{x}})^{-1} \{h_{\tilde{x}} - \Phi(\beta, \chi_{\tilde{x}}) h_\beta\}$ とおく。ここで、 $\Gamma_{\tilde{x}}$ は「0 次」Shalika germ $\Gamma_{\tilde{x}}^T(t)$ (これは $T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ によらない) である。すると、

$$\Phi(\beta, f_x) = 0, \quad f_x(\tilde{x}) = \Gamma_{\tilde{x}}^{-1}$$

を満たす。この函数 f_x に対して、germ 展開 (2.5) が成り立つような \tilde{x} の近傍 $\mathcal{V}_{\tilde{x}} \subset \mathcal{N}_{\tilde{x}}$ が存在する。 $\gamma \in \mathcal{V}_{\tilde{x}} \cap (T - Z)$ ならば

$$\Phi(\gamma, f_x) = \Gamma_{\tilde{x}u}^T(\gamma) \Phi(\beta, f_x) + \Gamma_{\tilde{x}}^T f_x(\tilde{x})$$

である。右辺の第一項は $\Phi(\beta, f_x) = 0$ より消える。第二項は $T \notin \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ ならば $\Gamma_{\tilde{x}}^T = 0$ (命題 18 (2.6)) より零であり、 $T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ ならば $\Gamma_{\tilde{x}}^T f_x(\tilde{x}) = 1$ である。よって、 f_x が求める函数である。□

命題 28 の証明: 命題の仮定から、 $\{\varphi^E\}$ は X 上の smooth 函数 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$ を自然に決める:

$$\varphi(x) = \varphi^E(\tilde{x}), \quad (\tilde{x} \in T_E, E \in \mathcal{Q}(F))$$

φ は X 上 smooth で商空間 $Z \setminus X$ はコンパクトなので、 X の有限開集合族 $\{V_i\}_{i=0}^r$ を次のように選べる:

- φ は V_i 上定数函数である。
- $\{ZV_i\}_{i=0}^r$ は X の被覆である。
- G の開コンパクト集合 \mathcal{V}_i であって $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{E}_G$ の X への像が V_i となるものが存在して、 $\mathcal{V}_i^{-1} \mathcal{V}_i \cap Z$ 上では ω は定数値をとる。

$\{V_i\}$ を $U_i = V_i - \bigcup_{h < i} (V_i \cap ZV_h)$ で定義される開集合族 $\{U_i\}$ で置き換えれば、最初から $\{ZV_i\}$ が disjoint であると仮定できる。補題 29 から各 $\tilde{x} \in \mathcal{V}_i$ に対して、 \tilde{x} の開コンパクト近傍 $\mathcal{V}(\tilde{x}) \subset \mathcal{V}_i$ と函数 $f_x \in C_c^\infty(Z\mathcal{V}(\tilde{x}), \omega)$ であって、任意の半単純元 $t \in G - Z$ に対して、 $\Phi(t, f_x) = 1$ (if $\mathcal{O}_G(t) \cap \mathcal{E}_G \cap \mathcal{V}(\tilde{x}) \neq \emptyset$), $\Phi(t, f_x) = 0$ (if $\mathcal{O}_G(t) \cap \mathcal{V}(\tilde{x}) \cap \mathcal{E}_G = \emptyset$) を満たすものが存在する。 \mathcal{V}_i のコンパクト性から $\{\mathcal{V}(\tilde{x})\}$ から有限部分開被覆 $\{\mathcal{V}(\tilde{x}_{i,\alpha})\}_{\alpha=0}^{q(i)}$ を選べる。更に、 $\mathcal{N}_{i,\alpha} = \mathcal{V}(\tilde{x}_{i,\alpha}) - \bigcup_{\beta < \alpha} (\mathcal{V}(\tilde{x}_{i,\beta}) \cap Z\mathcal{V}(\tilde{x}_{i,\alpha}))$ として、 $f_{i,\alpha} = f_{x_{i,\alpha}}|_{Z\mathcal{N}_{i,\alpha}}$ とおき、 $f_i = \sum_{\alpha} f_{i,\alpha}$ と定義すると、 $f_i \in C_c^\infty(Z\mathcal{V}_i, \omega)$ であり、 $\Phi(\gamma, f_i) = 0$ (if $\mathcal{O}_G(\gamma) \cap \mathcal{E}_G \cap \mathcal{V}_i = \emptyset$), $\Phi(\gamma, f_i) = 1$ (if $\mathcal{O}_G(\gamma) \cap \mathcal{E}_G \cap \mathcal{V}_i \neq \emptyset$) となる。 φ の V_i 上での値を c_i として $f = \sum_i c_i f_i$ と定義すると、これが求める函数になっている。□

3. 既約表現の DISTRIBUTION 指標とその独立性

H を局所コンパクト位相群、 Z_H をその中心の閉部分群とする。 $Z_H \setminus H$ の Haar 測度 dh を固定する。 K を H のコンパクト部分群とする。 (π, \mathcal{V}_π) を H の Hilbert 空間上の連続表現、 $\langle | \rangle$ を表現空間 \mathcal{V} の (必ずしも G -不変とは限らない) 内積とする。(エルミート内積は常に最初の変数に関して \mathbb{C} -線型とする。) π の中心指標は η であるとする:

$$\pi(z) = \eta(z) \text{Id}, \quad z \in Z_H$$

K の任意の有限次元連続表現 (τ, W_τ) に対して

$$\mathcal{V}_\pi[\tau] = \text{Image}(\text{Hom}_K(W_\tau, \mathcal{V}_\pi) \otimes_{\mathbb{C}} W_\tau \longrightarrow \mathcal{V}_\pi)$$

とおき、これを π の K -等型成分 (isotypic component) とよぶ。以下では、 π は K -許容可能 (即ち、 K の任意の既約表現 τ に対して $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_\pi[\tau] < +\infty$) であると仮定する。

$L^1(H, \eta)$ を H 上の可側函数 f で、 $f(zh) = \omega(z)^{-1} f(h)$ ($z \in Z_H$) を満たし、 $|f|$ が $Z_H \setminus H$ 上可積分となるもの全体の空間とする。 $L^1(H, \eta)_{(K)}$ を両側 K -有限な $f \in L^1(H, \eta)$ 全体のなす部分空間とする。 $f \in L^1(H, \eta)_{(K)}$ に対して、有界線型作用素 $\pi(f) : \mathcal{V}_\pi \rightarrow \mathcal{V}_\pi$ が

$$\langle \pi(f)v | u \rangle = \int_{Z_H \setminus H} f(h) \langle \pi(h)v | u \rangle dh, \quad u, v \in \mathcal{V}_\pi$$

で定義される。 K のある有限次元表現 τ が存在して $\pi(f)(\mathcal{V}_\pi) \subset \mathcal{V}_\pi[\tau]$ となるので、 $\pi(f)$ は有限階数をもつ。線型写像

$$\text{tr } \pi : L^1(H, \eta)_{(K)} \ni f \longrightarrow \text{tr} [\pi(f)] \in \mathbb{C}$$

を π の distribution 指標 (distributional character) と呼ぶ。

\mathbb{C} -部分空間 $\mathcal{H} \subset L^1(H, \eta)_{(K)}$ は次の条件を満たすとする:

- $L^1(H, \eta)$ で稠密である。
- \mathcal{H} は合成積で閉じている。
- $f \in \mathcal{H}$ ならば $f^* \in \mathcal{H}$ である。ただし、 $f^*(h) = \overline{f(h^{-1})}$ である。

補題 30. $(\sigma_\alpha, L_\alpha)$ を H の中心指標 η の既約ユニタリー表現の族とし、各 α に対して $x_\alpha \in L_\alpha - \{0\}$ が与えられているとする。また、 (σ, L) を H の中心指標 η の既約ユニタリー表現、 $x \in L$ 零でないベクトルとする。任意の α について σ_α が σ とユニタリー同値でないならば、任意の正数 ϵ に対して、ある $f \in \mathcal{H}$ が存在して、

$$\sum_{\alpha} \|\sigma_\alpha(f)x_\alpha\|^2 < \epsilon \|\sigma(f)x\|^2$$

となる。

Proof: ([15, Lemma 16.1.1]) 背理法で証明するため、仮にある $\epsilon_0 > 0$ に対して

$$(3.1) \quad \sum_{\alpha} \|\sigma_\alpha(f)x_\alpha\|^2 \geq \epsilon_0 \|\sigma(f)x\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

となったとしよう。 L' を $\{(\sigma_\alpha(f)x_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha} L_\alpha \mid f \in \mathcal{H}\}$ の $\bigoplus_{\alpha} L_\alpha$ での閉包とする。すると、 L' は G -安定な閉部分空間になる。(3.1) より、条件

$$\psi((\sigma_\alpha(f)x_\alpha)) = \sigma(f)x, \quad f \in \mathcal{H}$$

を満たす有界線型写像 $\psi : L' \rightarrow L$ が唯一つつ存在する。特に、 ψ は G -作用と可換になる。更に、 $\psi \neq 0$ である。(実際、 $x \neq 0$ で、 \mathcal{H} は $L^1(H, \eta)$ において稠密だから $\sigma(f)x \neq 0$ となる $f \in \mathcal{H}$ が存在する。よって $\psi((\sigma_\alpha(f)x_\alpha)) = \sigma(f)x \neq 0$ である。) $\tilde{\psi}|(L')^\perp = 0$, $\tilde{\psi}|L' = \psi$ として $\tilde{\psi} : \bigoplus_{\alpha} L_\alpha \rightarrow L$ を定義すると、これは零でない連続な G -線型写像になる。包含写像 $L_\alpha \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha} L_\alpha$ と $\tilde{\psi}$ の合成写像として G -線型写像 $\psi_\alpha : L_\alpha \rightarrow L$ が定義される。任意の α に対して、 σ_α と σ は同値ではないので、Schur の補題から $\psi_\alpha = 0$ でなくてはならない。よって、 $\tilde{\psi} = 0$ となってしまう矛盾する。□

補題 31. $\pi_j (j \in I)$ を中心指標 η の K -許容可能な既約ユニタリー表現の族であって、 $i \neq j$ ならば $\pi_i \not\cong \pi_j$ を満たすとし、 $\{a_j\}_{j \in I}$ を複素数の族とする。任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して $\sum_{j \in I} a_j \operatorname{tr} \pi_j(f)$ が絶対収束して 0 に等しいならば、 $a_j = 0 (\forall j \in I)$ である。特に、 \mathcal{H} 上の線型形式の族 $\{\operatorname{tr} \pi_j\}_{j \in I}$ は線型独立である。

Proof: $a_j = a'_j + \sqrt{-1}a''_j$ ($a'_j, a''_j \in \mathbb{R}$) と表す。任意の $f \in \mathcal{H}$ について $\operatorname{tr} \pi_j(f * f^*) \in \mathbb{R}_+$ ($\forall j \in I$) だが $\sum_{j \in I} a_j \operatorname{tr} \pi_j(f * f^*) = 0$ より

$$\sum_{j \in I} a'_j \operatorname{tr} \pi_j(f * f^*) = \sum_{j \in I} a''_j \operatorname{tr} \pi_j(f * f^*) = 0$$

である。よって、

$$\sum_{j \in I} a_j \operatorname{tr} \pi_j(f * f^*) = 0, \quad (a_j \in \mathbb{R}) \implies a_j = 0 (\forall j \in I)$$

を示せばよい。 $I_+ = \{j \in I \mid a_j > 0\}$, $I_- = I - I_+$ とおく。 $I_+ \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。 $j_0 \in I_+$ とし、零でない単位ベクトル $u_0 \in \mathcal{V}_{\pi_{j_0}}$ をとる。更に、各添え字 $j \in I_-$ に対して、 \mathcal{V}_{π_j} の正規直交基底 $\{u_{\alpha,j}\}$ をとる。補題 30 より、ある函数 $f \in \mathcal{H}$ が存在して、

$$\sum_{j \in I_-} \sum_{\alpha} \|\pi_j(f) \sqrt{-a_j} u_{\alpha,j}\|^2 < \frac{1}{2} \|\pi_{j_0}(f) \sqrt{a_{j_0}} u_0\|^2$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_-} (-a_j) \operatorname{tr} \pi_j(f * f^*) &= \sum_{j \in I_-} (-a_j) \sum_{\alpha} \|\pi_j(f) u_{\alpha,j}\|^2 \\ &< \frac{1}{2} a_{j_0} \|\pi_{j_0}(f) u_0\|^2 \\ &< \frac{1}{2} a_{j_0} \operatorname{tr} \pi_{j_0}(f * f^*) \leq \frac{1}{2} \sum_{j \in I_+} a_j \operatorname{tr} \pi_j(f * f^*) \end{aligned}$$

となり、 $\sum_{j \in I} a_j \operatorname{tr} \pi_j(f * f^*) = 0$ と矛盾する。よって、 $I_+ = \emptyset$ である。同様の論法で、 $\{j \in I \mid a_j < 0\} = \emptyset$ が示せる。従って、 $a_j = 0 (\forall I)$ である。□

4. 局所体上の $GL(2)$ およびその INNER FORMS の局所調和解析

この章を通して、 F を標数 0 の局所体、 D を F 上の四元数体とする。 $G = D^\times$ または $GL(2, F)$ とする。 $D^\times, GL(2, F)$ の中心はいずれも F^\times に自然に同型だから区別せず Z と書く。 $G = GL(2, F)$ のとき、標準的な極大コンパクト部分群 K を [31,] のように固定する。 $G = D^\times$ のとき、 K を任意に固定した極大コンパクト部分群とする。

4.1. 指標の局所可積分性. G の任意の既約ユニタリー表現 (π, \mathcal{V}_π) は K 許容可能であることが知られている。更に、 G の正則元全体 $G - Z$ の上で定義された smooth 函数 χ_π が存在して、 χ_π は G 上局所可積分函数になり

$$\operatorname{tr} \pi(f) = \int_G f(g) \chi_\pi(g) d\mu_G(g), \quad f \in C_c^\infty(G)$$

であることが知られている ([15, Theorem 7.7], [14])。以降では、この函数 χ_π をも $\operatorname{tr} \pi$ と書くことにする。(注意：函数 χ_π は G のハール測度のとり方に依存しない。)

与えられた指標 $\omega : F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して、 $\mathcal{H}(G, \omega)$ を両側 K -有限であるような函数 $\phi \in C_c^\infty(G, \omega)$ 全体の空間とする。

4.2. 主系列表現. $G = \mathrm{GL}(2, F)$ としよう. $\mu_1, \mu_2 : F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を擬指標とすると、 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ は自然に分裂トーラス M の擬指標と見做せる. G 上の smooth 函数 $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ で

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 & x \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} g\right) = \mu_1(a_1) \mu_2(a_2) \left| \frac{a_1}{a_2} \right|_F^{1/2} \varphi(g), \quad (a_1, a_2 \in F^\times, x \in F, g \in G)$$

を満たすものの全体の空間 $\mathbf{H}^0(\mu)$ に群 G を右移動で作用させることで G の smooth 許容表現 $\pi(\mu)$ が定義される. この表現は μ がユニタリー指標ならば内積

$$(4.1) \quad \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathbf{K}} = \int_{\mathbf{K}} f_1(k) \overline{f_2(k)} dk$$

によってユニタリー化可能であることが分かる. 函数としての指標 $\mathrm{tr} \pi(\mu) : G - Z \rightarrow \mathbb{C}$ は次のように求めることが出来る.

補題 32. $g \in G - Z$ が $a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_G$ に共役ならば

$$[\mathrm{tr} \pi(\mu)](g) = D_M(a)^{-1/2} \{ \mu_1(a_1) \mu_2(a_2) + \mu_1(a_2) \mu_1(a_2) \}$$

ただし、 $D_M(a) = |a_1 - a_2|_F^2 |a_1 a_2|_F^{-1}$ である. $g \in G - Z$ が \mathcal{H}_G の要素に共役でなければ $[\mathrm{tr} \pi(\mu_1, \mu_2)](g) = 0$ である.

Proof: (cf. [15, Proposition 7.6]) $\omega = \mu_1 \mu_2$ が $\pi(\mu)$ の中心指標になる. 任意の $\varphi, \varphi' \in \mathbf{H}^0(\mu)$ および $f \in C_c^\infty(G, \omega)$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle [\pi(\mu)(f)]\varphi, \varphi' \rangle_{\mathbf{K}} &= \int_{Z \backslash G} f(g) \langle \pi(\mu_1, \mu_2)\varphi, \varphi' \rangle_{\mathbf{K}} dg \\ &= \int_{Z \backslash G} f(g) \left\{ \int_{\mathbf{K}} \varphi(kg) \overline{\varphi'(k)} dk \right\} dg \\ &= \int_{Z \backslash G} \int_{\mathbf{K}} f(k^{-1}g) \varphi(g) \overline{\varphi'(k)} dk dg \\ &= \int_{n \in N} \int_{m \in Z \backslash M} \int_{k_1 \in \mathbf{K}} \int_{k \in \mathbf{K}} f(k^{-1}nmk_1) \varphi(nmk_1) \overline{\varphi'(k)} \delta_P(m)^{-1} dn dm dk_1 dk \\ &= \int_{\mathbf{K} \times \mathbf{K}} K_f(k, k_1) \varphi(k_1) \overline{\varphi'(k)} dk dk_1 \end{aligned}$$

ただし、

$$K_f(k, k_1) = \int_N \int_{Z \backslash M} f(k^{-1}nmk_1) \mu(m) \delta_P(m)^{-1/2} dm dn$$

\mathbf{K} への制限写像 $\mathbf{H}^0(\mu) \rightarrow \mathbf{H}^0(\mu)|_{\mathbf{K}}$ は線型同型であり、この同型のもとで、作用素 $\pi(\mu) : \mathbf{H}^0(\mu)|_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{H}^0(\mu)|_{\mathbf{K}}$ は核函数 K_f によって表される. よって、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} [\pi(\mu)f] &= \int_{\mathbf{K}} K_f(k, k) dk \\ &= \int_{N \times Z \backslash M \times \mathbf{K}} f(knmk) \mu(m) \delta_P(m)^{-1/2} dm dn dk \end{aligned}$$

最後の式の $N \times \mathbf{K}$ 上の積分は $m \in M - Z$ の軌道積分でかける. 実際、

$$\begin{aligned} \Phi(m, f) &= \int_{M \backslash G} f(g^{-1}mg) dg \\ &= \int_{N \times \mathbf{K}} f(k^{-1}n^{-1}mnk) dn dk \\ &= |\det(\mathrm{Ad}(m) - 1)_n|_F^{-1} \int_{N \times \mathbf{K}} f(k^{-1}n'mk) dn' dk \end{aligned}$$

最後の等号を得るためには、変数変換 $n' = n^{-1}mnm^{-1}$ を行い、 $dn' = |\det(\text{Ad}(m) - 1)|_n|_F dn$ であることを使った。(行列表示で簡単に分かる。) $|\det(\text{Ad}(m) - 1)|_n|_F = D_M(m)^{1/2} \delta_P(m)^{1/2}$ なので、結局、

$$\text{tr} [\pi(\mu)f] = \int_{Z \backslash M} \mu(m) D_M(m)^{-1/2} \Phi(m, f) dm$$

が得られた。 $\theta(g)$ を $m \in M - Z$ に共役な g に対しては $D_M(m)^{-1/2}(\mu(m) + \mu(wm))$ とおき、 $M - Z$ に共役でない g に対しては零で定義すると、Weyl 積分公式から

$$\int_{Z \backslash G} \theta(g) f(g) dg = \frac{1}{2} \int_{Z \backslash M_{\text{reg}}} \theta(m) \Phi(m, f) D_M(m) dm = \int_{Z \backslash M_{\text{reg}}} \mu(m) D_M(m)^{-1/2} \Phi(m, f) dm$$

よって、 $\chi_{\pi(\mu)}(g) = \theta(g)$ ($g \in G - Z$) が示せた。□

注意：主系列表現の distribution 指標が $G - Z$ 上では smooth 関数で表されることは、補題 32 から分かる。

4.3. 離散系列表現. (π, \mathcal{V}_π) を中心指標 ω の既約ユニタリー表現、 V_π を \mathcal{V}_π の K -有限ベクトル全体の空間とする。

$v, u \in V_\pi$ に対して、函数

$$\phi_{u,v}^\pi(g) = \langle u | \pi(g)v \rangle, \quad g \in G$$

を行列係数と呼ぶ。 $\phi_{u,v}^\pi(zg) = \omega(z)^{-1} \phi_{u,v}^\pi(g)$ ($z \in Z$) であることに注意しよう。

可側函数 $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ で、 $\phi(zg) = \omega(z)^{-1} \phi(g)$ ($z \in Z$) かつ $\int_{Z \backslash G} |\phi(g)|^2 d\mu_{Z \backslash G}(g) < +\infty$ なるもの全体の空間を $L^2(G, \omega)$ と定義する。

定義 33. $\phi_{v,v}^\pi \in L^2(G, \omega)$ となるような $v \in V_\pi - \{0\}$ が存在するとき、 (π, \mathcal{V}_π) を 2 乗可積分表現 (離散系列表現) と呼ぶ。 $\Pi_2(G, \omega)$ を中心指標 ω を持つ離散系列表現のユニタリー同値類の集合 (或いはその完全代表系) とする。

補題 34. $\pi \in \Pi_2(G, \omega)$ とすると、ある正の定数 $d(\pi)$ が存在して

$$\int_{Z \backslash G} \phi_{u_1, v_1}^\pi(g) \overline{\phi_{u_2, v_2}^\pi(g)} d\mu_{Z \backslash G}(g) = d(\pi)^{-1} \langle u_1 | u_2 \rangle \overline{\langle v_1 | v_2 \rangle}, \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in V_\pi$$

を満たす。 $(d(\pi)$ を π の形式次数 (formal degree) とよぶ。) $\sigma \in \Pi_2(G, \omega)$ が π と同値でなければ、

$$\int_{Z \backslash G} \phi_{u_1, v_1}^\pi(g) \overline{\phi_{u_2, v_2}^\sigma(g)} d\mu_{Z \backslash G}(g) = 0, \quad u_1, v_1 \in \mathcal{V}_\pi, u_2, v_2 \in \mathcal{V}_\sigma$$

である。

Proof: F が非アルキメデス的のときは、[4, 10a.2 (p.74-75)] を参照。□

注意：形式次数は群 $Z \backslash G$ の Haar 測度のとり方に依存する。□

我々の目的のために必要となる、離散系列表現の「粗い」分類を復習しよう。 $G = D^\times$ の場合、 $Z \backslash D^\times$ はコンパクトだから任意の既約表現は有限次元であり、行列係数は当然 2 乗可積分になる。故に、任意の既約ユニタリー表現は離散系列表現である。 $G = \text{GL}(2, F)$ の場合、 F が非アルキメデス的かそうでないかで分けて述べよう。

(1) F が非アルキメデスの場合。離散系列表現は次の 2 種類からなる：

- 超尖点表現：既約 smooth 表現 π は、その任意の行列係数 $\phi_{u,v}^\pi$ が $C_c^\infty(G, \omega)$ (ω は π の中心指標) に属するとき超尖点的と定義される。([4, Chap 3 §10])

- Steinberg 表現の捻り: 射影直線 \mathbb{P}_F^1 に一次分数変換で G を作用させることで函数空間 $C^\infty(\mathbb{P}^1)$ は G の smooth 表現になる。定数函数の生成する 1 次元部分加群による商表現 $C^\infty(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C}$ を Steinberg 表現とよび、 St_G とかく。ユニタリー指標 $\eta: F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して、 $\eta \circ \det$ を G の 1 次元表現と見做して、 $\text{St}_G(\eta) = \text{St}_G \otimes [\eta \circ \det]$ と定義する。 $\text{St}(\eta)$ の中心指標は η^2 である。 G -空間としての同型 $\mathbb{P}^1 = P \backslash G$ によって、 G -加群の同型 $C^\infty(\mathbb{P}^1) \cong \mathbf{H}^0(|\cdot|_F^{-1/2}, |\cdot|_F^{1/2})$ が得られる。 $\pi(\mu)$ の組成列の記述 ([18, 2.3.3], [4, Chap 3 §9]) より、 $\mathbf{H}^0(|\cdot|_F^{-1/2}, |\cdot|_F^{1/2})$ は自明表現 \mathbb{C} を唯ひとつの部分加群に持ち、その商は既約であることが分かる。よって、 $\text{St}_G(\eta)$ を G 加群の完全列

$$(4.2) \quad 0 \longrightarrow \eta \circ \det \longrightarrow \pi(\eta | \cdot|_F^{-1/2}, \eta | \cdot|_F^{1/2}) \longrightarrow \text{St}_G(\eta) \longrightarrow 0$$

で定義してもよい。 $\text{St}_G(\eta)$ が離散系列表現であることは行列係数の分裂トラス M に沿った増大度を漸近的に評価することで示せる ([15, Lemma 15.2 (p.472)], [6, §8], [4, Theorem 17.5(p.118)])

既約 smooth 表現の分類表 ([18, 定理 2.11]) のなかで、上に挙げた 2 系列の表現以外 (既約主系列表現あるいは 1 次元指標) が 2 乗可積分でないことは、例えば、2 乗可積分性の判定条件 ([6, Theorem 4.4.6]) により、あるいは、直接行列係数の漸近的大きさを評価して ([4, Proposition 17.10(p.121)]) もチェックできる。

- (2) $F = \mathbb{R}$ の場合。 $l_1 - l_2 \in \mathbb{N}$ を満たす $(l_1, l_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して、 $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ の有限次元表現 $\det^{l_2} \otimes \text{Sym}_{l_1 - l_2}$ を $\rho_{l_1, l_2}^{\mathbb{C}}$ とする。ただし、 Sym_k は $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ の \mathbb{C}^2 における自然な表現の k 次対称積表現である。 $\rho_{l_1, l_2} = \rho_{l_1, l_2}^{\mathbb{C}} | \text{GL}(2, \mathbb{R})$ により $G = \text{GL}(2, \mathbb{R})$ の有限次元表現を定義する。さて、主系列表現 $\pi(\mu_1, \mu_2)$ を考えよう。その $\text{O}(2, \mathbb{R})$ -有限ベクトル全体を表現空間とする $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \text{O}(2, \mathbb{R}))$ -加群を $\pi^0(\mu_1, \mu_2)$ とする。 $\mu_1(t) = |t|_{\mathbb{R}}^{l_1} \text{sgn}(t)^{\epsilon_1}(t)$, $\mu_2(t) = |t|_{\mathbb{R}}^{l_2} \text{sgn}(t)^{\epsilon_2}(t)$ ($l_1, l_2 \in \mathbb{C}$, $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$) と書ける。条件

$$(4.3) \quad l_1 - l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 \equiv l_1 - l_2 + 1 \pmod{2}$$

のもとで、 $(\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \text{O}(2, \mathbb{R}))$ -加群 $\pi^0(\mu_1, \mu_2)$ は ρ_{l_1, l_2} を唯ひとつの既約商にもち、 $\sigma(l_1, l_2) = \text{Ker}(\pi(\mu_1, \mu_2) \rightarrow \rho_{l_1, l_2})$ は既約表現である:

$$(4.4) \quad 0 \longrightarrow \sigma^0(l_1, l_2) \longrightarrow \pi^0(\mu_1, \mu_2) \longrightarrow \rho_{l_1, l_2} \longrightarrow 0$$

$\sigma^0(l_1, l_2)$ を適切な内積で完備化することで、ユニタリー表現 $\sigma(l_1, l_2)$ が得られ、これは離散系列表現であることが知られている。更に、 $\omega(t) = |t|_{\mathbb{R}}^m \text{sgn}^\epsilon(t)$ のとき、

$$\Pi_2(\text{GL}(2, \mathbb{R}), \omega) = \{\sigma(l_1, l_2) \mid l_1 - l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, l_1 + l_2 = m, l_1 - l_2 + 1 \equiv \epsilon \pmod{2}\}$$

であることも知られている。

- (3) $F = \mathbb{C}$ の場合。離散系列表現は存在しない。

4.3.1. 離散系列表現の性質 (非アルキメデス素点の場合). 離散系列表現、特に Steinberg 表現の行列係数の必要な性質を復習する。([23], [4] を参照。)

この小節では F を非アルキメデス的、 $G = \text{GL}(2, F)$ とする。 \mathbf{K} の開部分群 $\mathbf{I} = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{K} \mid c \in \varpi_F \mathfrak{o}_F \}$ を岩堀部分群とよぶ。容易に $\mathbf{K} = \mathbf{I} \cup \mathbf{I}w\mathbf{I}$ (ただし、 $w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$) であることが分かる。よって、 $\mu_G(\mathbf{K}) = \mu_G(\mathbf{I}) \{1 + \#(\mathbf{I}/\mathbf{I} \cap w\mathbf{I}w^{-1})\} = \mu_G(\mathbf{I}) (1 + q)$ となる。これと、補題 12 の証明から

$$(4.5) \quad \mu_G(\mathbf{I}) = q_F^{-2} (q_F - 1) \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^4$$

となる。

補題 35. $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_F & 0 \end{bmatrix}$ とし、 $\epsilon \in \{0, 1\}$, $a \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$w_{\epsilon, a} = \Pi^\epsilon \begin{bmatrix} \varpi_F^a & 0 \\ 0 & \varpi_F^{-a} \end{bmatrix}, \quad w'_{\epsilon, a} = \Pi^\epsilon \begin{bmatrix} 0 & \varpi_F^a \\ \varpi_F^{-a} & 0 \end{bmatrix},$$

とおく。すると、 $W = \{w_{\epsilon,a}, w'_{\epsilon,a} | \epsilon \in \{0,1\}, a \in \mathbb{Z}\}$ は $Z\mathbf{I}\backslash G/\mathbf{I}$ の完全代表系を与える。更に、

$$\begin{aligned}\mu_G(\mathbf{I}w_{\epsilon,a}\mathbf{I}) &= \mu_G(\mathbf{I}w_{\epsilon,-a}\mathbf{I}) = q^{-2a} \mu_G(\mathbf{I}), \\ \mu_G(\mathbf{I}w'_{\epsilon,a}\mathbf{I}) &= \mu_G(\mathbf{I}w'_{\epsilon,-a-1}\mathbf{I}) = q^{-(2a+1)} \mu_G(\mathbf{I})\end{aligned}$$

となる。

Proof: [4, 17.1 Proposition (p.115), 17.8 Lemma1 (p.119)] \square

補題 36. 任意の指標 $\eta : F^\times \rightarrow \mathbb{C}^1$ に対して Steinberg 表現の捻り $\text{St}(\eta)$ の形式次数は次のように与えられる：

$$d(\text{St}(\eta))^{-1} = 2q_F^{-2}(q_F + 1) \text{vol}(\mathfrak{o}_F)^4 = \text{vol}(F_v^\times \backslash D^\times)$$

Proof: $\text{St}(\eta) = \text{St} \otimes \eta(\det)$ により $d(\text{St}(\eta)) = d(\text{St})$ である。[4, 17.6] のように St のある単位ベクトル τ, θ に対する行列係数 $f = \phi_{\tau, \theta}$ を考える。測度の正規化の違いに注意して [4, 17.9 (p.120)] および補題 35 を使うと、

$$\mu_G(\mathbf{I})^{-1} \int_{Z\backslash G} |f(g)|^2 d\mu_{Z\backslash G}(g) = \sum_{w \in W} \mu_G(\mathbf{I}) \mu_G(\mathbf{I}w\mathbf{I})^{-1} = 2 \left\{ \sum_{b=1}^{\infty} q_F^{-b} + 1 \right\} = 2 \frac{q_F + 1}{q_F - 1}$$

となり、 $d(\text{St})^{-1} = 2(q_F + 1)(q_F - 1)^{-1} \mu_G(\mathbf{I})$ を得る。これと (4.5), 補題 13 より結論が従う。 \square

補題 37. $\pi = \text{St}(\eta)$ を Steinberg 表現の $\eta : F^\times \rightarrow \mathbb{C}^1$ による捻りとする。その指標は正則楕円元上で

$$[\text{tr } \pi](t) = -\eta(\det t), \quad t \in G_{\text{ell}} - Z$$

となる。また、

$$[\text{tr } \pi](a) = \eta(a_1 a_2) \left(\frac{|a_1|_F + |a_2|_F}{|a_1 - a_2|_F} - 1 \right), \quad a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \in M - Z$$

Proof: 一般に長さ有限の smooth 表現の短完全列 $0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \pi_2 \rightarrow \pi_3 \rightarrow 0$ に対して、 $\text{tr } \pi_2 = \text{tr } \pi_1 + \text{tr } \pi_3$ が成り立ち、従って G_{reg} 上で $\text{tr } \pi_2 = \text{tr } \pi_1 + \text{tr } \pi_3$ である。これを短完全列 (4.2) に適用すると、

$$[\text{tr } \pi(|_F^{-1/2} \eta, |_F^{1/2} \eta)](t) = [\text{tr } \text{St}(\eta)](t) + [\text{tr } \eta \circ \det](t), \quad t \in G_{\text{reg}}$$

を得る。命題 32 と $[\text{tr } \eta \circ \det](t) = \eta(\det t)$ であることから結論が従う。 \square

主系列表現 $\pi_0 = \pi(1_{F^\times}, 1_{F^\times})$ (1_{F^\times} は F^\times の自明指標) は $f_0(k) = 1 (\forall k \in \mathbf{K})$ となる \mathbf{K} -不変ベクトル f_0 を唯ひとつ含む。内積 (4.1) により、行列要素 $\Xi = \phi_{f_0, f_0}^{\pi_0}$ を考えると、

$$\Xi(g) = \int_{\mathbf{K}} \delta_P(kg)^{1/2} dk, \quad g \in G$$

となる。明らかに $\Xi(zk'gk) = \Xi(g)$ ($(z, g, k, k') \in Z \times G \times \mathbf{K} \times \mathbf{K}$) であるから、Cartan 分解 $G = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} Z\mathbf{K} \begin{bmatrix} \varpi_F^a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K}$ によれば、次の補題は Ξ の明示公式を与える：

補題 38.

$$\Xi \left(\begin{bmatrix} \varpi_F^a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = q_F^{-a/2} \left(1 + \frac{q_F - 1}{q_F + 1} a \right), \quad a \in \mathbb{N}$$

Proof: $T(\mathfrak{p})$ を両側剰余類 $\mathbf{K} \begin{bmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K}$ の特性函数とすると、 $\pi_0(T(\mathfrak{p}))f_0 = 2q_F^{1/2} f_0$ なので $\Xi * T(\mathfrak{p}) = 2q_F^{1/2} \Xi$ が成り立つ。この方程式から $a_m = \Xi \left(\begin{bmatrix} \varpi_F^m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ の漸化式を導き解けばよい。cf. [5, Exsercise 4.6.2 (p.511)] \square

補題 39. ϕ を $\text{St}(\eta)$ の任意の行列係数とすると次が成り立つ。

- (1) $|\phi(g)| \ll \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})^{-1}$, $g \in G$
(2) 積分 $\int_N \phi(n) dn$ は絶対収束する。

Proof: ([23, Proposition 2.2.3]) (1) St のある単位ベクトル τ, θ に対して、等式 $|\phi_{\tau, \theta}(g)| = \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})^{-1}$ が [4, 17.7 Proposition, 17.8 Lemma 2] から従う。St が既約なことから、 g の函数として $\phi(g)$ は有限線型結合 $\sum_i c_i \phi_{\tau, \theta}(x_i g y_i)$ に表せることが分かる。簡単に示せる不等式 $\mu_G(\mathbf{I}gh\mathbf{I}) \leq \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I}) \mu_G(\mathbf{I}h\mathbf{I})$ ([23, Lemma 2.1.2]) により、 $g \mapsto \mu_G(\mathbf{I}x_i g y_i \mathbf{I})$ は上下から $\mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})$ の定数倍で評価される。これらの注意から (1) が従う。

(2) 不等式 $\mu_G(\mathbf{I}gh\mathbf{I}) \leq \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I}) \mu_G(\mathbf{I}h\mathbf{I})$ から、ある定数 $C > 1$ が存在して評価 $\mu_G(\mathbf{I}k' g k \mathbf{I}) \leq C \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})$ ($g \in G, k', k \in \mathbf{K}$) が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}
(4.6) \quad & \int_{a \in Z \setminus M} \int_{n \in N} |\phi(na)| \delta_P(a)^{-1/2} d\mu_M(a) d\mu_N(n) \\
& \ll \int_{a \in Z \setminus M} \int_{n \in N} \mu_G(\mathbf{I}na\mathbf{I})^{-1} \delta_P(a)^{-1/2} d\mu_M(a) d\mu_N(n) \\
& \leq C^{-1} \int_{a \in Z \setminus M} \int_{n \in N} \int_{k \in \mathbf{K}} \int_{k' \in \mathbf{K}} \mu_G(\mathbf{I}k' n a k \mathbf{I})^{-1} \delta_P(a)^{-1/2} dk dk' d\mu_M(a) d\mu_N(n) \\
& = C^{-1} C_0^{-1} \int_{Z \setminus G} \int_{\mathbf{K}} \mu_G(\mathbf{I}k' g \mathbf{I})^{-1} \delta_P^{1/2}(g) dk' d\mu_{Z \setminus G}(g) \\
& = C^{-1} C_0 \int_{Z \setminus G} \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})^{-1} \Xi(g) d\mu_{Z \setminus G}(g) = C^{-1} C_0 \sum_{w \in W} \Xi(w)
\end{aligned}$$

補題 35 および補題 38 からこの最後の級数は $\sum_{b \in \mathbb{N}} q_F^{-b+\epsilon}$ ($\forall \epsilon > 0$) で評価されるので収束する。よって、積分 (4.6) は有限になる。これより、測度零の補集合をもつ部分集合 $X \subset Z \setminus M$ が存在して、 $a \in X$ のとき $\int_{n \in N} |\phi(na)| d\mu_N(n) < +\infty$ となる。しかし、 ϕ は smooth だから、 $Z \setminus M$ の開コンパクト部分群 U があって、 $\phi(nag) = \phi(na)$ ($\forall g \in U$) となる。 $Z \setminus M = XU$ だから、任意の $a \in Z \setminus M$ で積分 $\int_{n \in N} |\phi(na)| d\mu_N(n) < +\infty$ となる。□

補題 40. (Selberg principle) ϕ を離散系列表現 $\pi \in \Pi_2(\mathrm{GL}(2, F), \omega)$ の任意の行列係数とすると

$$\int_N \phi(xny) dn = 0, \quad x, y \in G$$

Proof: ([23, Proposition 2.2.5]) $\pi = \mathrm{St}(\eta)$ とする。行列係数 ϕ を定義するのに使ったベクトルをとりかえれば、 $x = y = e$ として示せば十分。St の表現空間を V とする。双線型形式 J が

$$J(\xi, \xi') = \int_N \langle \mathrm{St}(n)\xi | \xi' \rangle dn, \quad \xi, \xi' \in V$$

で定義される。(補題 39 から積分は絶対収束する。) $V(N)$ を $\mathrm{St}(n)\xi - \xi$ ($n \in N, \xi \in V$) の形のベクトルの有限和全体とすると、Jacquet 加群 $V/V(N)$ は M の表現として δ_P^{-1} と同型 ([4, (9.10.3) 直後 (p.68)]). 故に、あるベクトル $u_1 \in V$ が存在して $V = \mathbb{C}u_1 + V(N)$, $\mathrm{St}(a)u_1 - \delta_P(a)^{-1}u_1 \in V(N)$ となる。 $\xi \in V(N)$ または $\xi' \in V(N)$ ならば、 $J(\xi, \xi') = 0$ であることは明らか。よって、 $J(u_1, u_1) = 0$ をしめせば、 $J = 0$ となって証明が終わる。 $a \in M - Z$ に対して、内積の不変性と変数変換によって $J(\mathrm{St}(a)u_1, u_1) = \delta_P(a) J(u_1, \mathrm{St}(a^{-1})u_1)$ が分かる。これと、 $\mathrm{St}(a)u_1 - \delta_P^{-1}(a)u_1 \in V(N)$ より、 $J(u_1, u_1) = \delta_P^3(a) J(u_1, u_1)$ が得られる。従って、 $J(u_1, u_1) = 0$ である。 π が超尖点的な場合には、 $V = V(N)$ であるから、上の証明をなぞればよい。□

補題 41. ϕ を離散系列表現 $\pi \in \Pi_2(\mathrm{GL}(2, F), \omega)$ の任意の行列係数とすると、任意の $a \in M - Z$ に対して軌道積分 $\Phi(a, \phi)$ は絶対収束して零に等しい。更に、

$$\int_{Z \setminus G_{\mathrm{ell}}} |\phi(g)| d\mu_G(g) < +\infty$$

Proof: ([23, Lemma 3.1.1]) 補題 32 の証明から

$$(4.7) \quad \Phi(m, |\phi|) = |\det(\mathrm{Ad}(m) - 1)_n|_F^{-1} \int_{N \times K} |\phi(k^{-1}nmk)| dn dk$$

となる。 $\phi = \phi_{u,v}^\pi$ とすると、ある開コンパクト部分群 $K \subset \mathbf{K}$ に対して、 u, v は K -不変になる。このことから、 \mathbf{K} に関する積分は $\int_N |\phi(k_i^{-1}nmk_i)| dn$ なる形の積分の有限和に帰着されることが分かる。 $g \mapsto \phi(k_i^{-1}gmk_i)$ は π の行列係数なので補題 39 から軌道積分の絶対収束性が従い、補題 42 からその消滅が従う。(注： π が超尖点的表現のとき、軌道積分の収束は補題 15 による。)

後半部の主張は、超尖点表現にたいしては自明なので、以下 $\pi = \mathrm{St}(\eta)$ とする。補題 39(1) から $\int_{Z \setminus G_\ell} \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I})^{-1} d\mu_G(g) < +\infty$ を示せば十分である。 G_n を $|a| \leq n$ を満たす両側剰余類 $\mathbf{I}w_{\epsilon,a}\mathbf{I}, \mathbf{I}w'_{\epsilon,a}\mathbf{I}$ の合併集合として、 χ_{G_n} をその特性函数とする。 $\varphi(g) = \mu_G(\mathbf{I}g\mathbf{I}), \varphi_n(g) = \chi_{G_n}(g)\varphi(g)$ とおくと、 $\varphi_n(g)$ はコンパクト台を持つ正の単調増加函数列で G の各点で $\varphi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(g)$ となる。積分論の単調収束定理から、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Z \setminus G_{\mathrm{ell}}} \varphi_n(g) d\mu_{Z \setminus G}(g)$ が存在することを言えば十分。さて、 G_{ell} 上で $[\mathrm{tr} \mathrm{St}](t) = -1$ (補題 37) に注意すると、 $-\int_{Z \setminus G_{\mathrm{ell}}} \varphi_n(g) d\mu_{Z \setminus G}(g)$ は次の 2 つの積分の差 $I_1(n) - I_2(n)$ になる：

$$I_1(n) = \int_{Z \setminus M^G} [\mathrm{tr} \mathrm{St}](g) \varphi_n(g) d\mu_{Z \setminus G}(g), \quad I_2(n) = \int_{Z \setminus G} [\mathrm{tr} \mathrm{St}](g) \varphi_n(g) d\mu_{Z \setminus G}(g)$$

$\mathrm{St}^{\mathbf{I}}$ は有限次元 (実は 1 次元) なので、有限基底 $\{\xi_i\}$ がとれる。 φ_n は両側 \mathbf{I} -不変だから

$$I_2(n) = \sum_i \int_{Z \setminus G} \overline{\phi_{\xi_i, \xi_i}(g)} \varphi_n(g) d\mu_{Z \setminus G}(g)$$

となる。 ϕ_{ξ_i, ξ_i} は St の行列係数である。補題 39 の証明の中で注意したとおり $\varphi(g) = |\phi_{\tau, \theta}(g)|$ だから、非積分函数 $\overline{\phi_{\xi_i, \xi_i}(g)} \varphi_n(g)$ は上から $\beta(g) = |\phi_{\xi_i, \xi_i}(g)| |\phi_{\tau, \theta}(g)|$ で押さえられる。 $\mathrm{St} \in \Pi_2(G, 1)$ なので、 β は可積分函数である。よって、優収束定理から $\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n)$ は収束する。 $I_1(n)$ の方は、Weyl 積分公式から

$$I_1(n) = \frac{1}{2} \int_{Z \setminus M_{\mathrm{reg}}} D_M(a) [\mathrm{tr} \mathrm{St}](a) \Phi(a, \varphi_n) d\mu_{Z \setminus M}(a)$$

である。補題 37 から、ある定数 $C' > 0$ が存在して、 $0 < D_M(a)^{1/2} [\mathrm{tr} \mathrm{St}](a) < C'$ ($\forall a \in M_{\mathrm{reg}}$) 上となる。特に、 $I_1(n)$ は正の数からなる増加数列になり、積分

$$\frac{C'}{2} \int_{Z \setminus M_{\mathrm{reg}}} D_M(a)^{1/2} \Phi(a, \varphi) d\mu_{Z \setminus M}(a)$$

で上から押さえられる。この積分は、(4.7) によって書き直すと、

$$\int_{Z \setminus M_{\mathrm{reg}}} \delta_P(a)^{-1/2} |\varphi(na)| dn d\mu_{Z \setminus M}(a)$$

の定数倍で上から評価される。これは (4.6) より有限である。□

補題 42. ϕ を離散系列表現 $\pi \in \Pi_2(\mathrm{GL}(2, F), \omega)$ の任意の行列係数とすると、任意の $T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}, t \in T_{\mathrm{reg}}$ に対して軌道積分 $\Phi(t, \phi)$ は絶対収束する。

4.3.2. 離散系列の擬行列係数.

命題 43. F は非アルキメデスの、 $\pi \in \Pi_2(G, \omega)$ とする。 $v, u \in V_\pi$ に対する行列係数 $\phi = \phi_{u,v}$ は次の性質を満たす。

(1) $T \in \mathcal{T}_G$ とするとき、軌道積分 $\Phi(t, \phi)$ は $t \in T_{\text{reg}}$ について局所一様に絶対収束して、

$$\Phi(t, \phi) = \begin{cases} 0 & (T \notin \mathcal{T}_G^{\text{ell}}), \\ \frac{\phi(1)}{d(\pi)} \overline{[\text{tr } \pi](t)} & (T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}) \end{cases}$$

となる。

(2) 任意の $\sigma \in \Pi_2(G, \omega)$ に対して、有界線型作用素 $\sigma(\phi) : \mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_\sigma$ で

$$\langle \sigma(\phi)u' | v' \rangle = \int_{Z \backslash G} \langle \sigma(g)u' | v' \rangle \phi(g) d\mu_{Z \backslash G}(g), \quad u', v' \in \mathcal{V}_\sigma$$

なるものが定義される。この作用素は有限階数で、そのトレースは

$$\text{tr}[\sigma(\phi)] = \begin{cases} 0 & (\sigma \not\cong \pi) \\ \frac{1}{d(\pi)} \phi(1) & (\sigma \cong \pi) \end{cases}$$

で与えられる。

Proof: (1) ([8, Proposition A.3.e (p.53)]) $G = \text{GL}(2, F)$, $m \in M$ のとき、補題 41 から $\Phi(m, f) = 0$ である。 $T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ としよう。 $f \in \mathcal{H}(G, \omega)$ を任意にとる。 f は左右から \mathbb{K} -有限だから、 \mathbb{K} の有限次元表現 τ が存在して $\text{Im } \pi(f) \subset \mathcal{V}_\pi[\tau]$ となる。有限次元空間 $\mathcal{V}_\pi[\tau]$ の正規直交基底 $\{\xi_i\}$ を固定すると、

$$\begin{aligned} (4.8) \quad & \int_{Z \backslash G} \left\{ \int_G \bar{f}(g) \phi(x^{-1}gx) d\mu_G(g) \right\} d\mu_{Z \backslash G}(x) \\ &= \int_{Z \backslash G} \langle \pi(x)u | \pi(f) \pi(x)v \rangle d\mu_{Z \backslash G}(x) \\ &= \int_{Z \backslash G} \sum_{ij} \langle \pi(x)u | \xi_i \rangle \langle \xi_i | \pi(f) \xi_j \rangle \langle \xi_j | \pi(x)v \rangle d\mu_{Z \backslash G}(x) \\ &= \sum_{ij} \langle \xi_i | \pi(f) \xi_j \rangle \int_{Z \backslash G} \langle \pi(x)u | \xi_i \rangle \langle \xi_j | \pi(x)v \rangle d\mu_{Z \backslash G}(x) \\ &= \sum_{ij} \langle \xi_i | \pi(f) \xi_j \rangle \frac{1}{d(\pi)} \langle u | v \rangle \overline{\langle \xi_i | \xi_j \rangle} \quad (\because \text{補題 34}) \\ &= \frac{1}{d(\pi)} \sum_i \langle \xi_i | \pi(f) \xi_i \rangle = \frac{1}{d(\pi)} \overline{\text{tr } \pi(f)} \end{aligned}$$

$\text{supp}(f) \subset G_{\text{ell}} - Z$ ならば、(4.8) の最初の累次積分の順序交換が可能であることが分かる。実際、任意の $T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ に対して、 $\text{supp}(f) \cap T^G$ はコンパクトなので、 $\eta_T(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$ なる形のコンパクト集合に含まれる (補題 16)。ただし、 $\mathcal{U}_1 \subset T \backslash G$, $\mathcal{U}_2 \subset T - Z$ はいずれもコンパクトである。Weyl の積分公式 (補題 17) から

$$\begin{aligned} & \int_{Z \backslash G} \left\{ \int_{T^G - Z} |f(g)| |\phi(x^{-1}gx)| d\mu_G(g) \right\} d\mu_{Z \backslash G}(x) \\ & \ll \int_{x \in Z \backslash G} \left\{ \int_{t \in \mathcal{U}_2} D_T(t) \int_{g \in \mathcal{U}_1} |\phi(x^{-1}g^{-1}tgx)| d\mu_{T \backslash G}(g) d\mu_T(t) \right\} d\mu_{Z \backslash G}(x) \\ &= \text{vol}(Z \backslash T) \text{vol}(\mathcal{U}_1) \int_{t \in \mathcal{U}_2} D_T(t) \left\{ \int_{T \backslash G} |\phi(x^{-1}tx)| d\mu_{T \backslash G}(x) \right\} d\mu_T(t) \end{aligned}$$

最後の積分は補題 41 の 2 番目の主張から有限である。故に、積分順序交換により、 $G_{\text{ell}} - Z$ に台を持つ任意の函数 $f \in C_c^\infty(G)$ に対して

$$\int_G \bar{f}(g) \left\{ \int_{Z \backslash G} \phi(x^{-1}gx) d\mu_{Z \backslash G}(x) \right\} d\mu_G(g) = \frac{1}{d(\pi)} \overline{\text{tr } \pi(f)}$$

が得られた。 $\text{vol}(Z \backslash T) = 1$ に注意すれば、これは $\Phi(t, \phi) = d(\pi)^{-1} \overline{\text{tr } \pi(t)}$ ($\forall t \in G_{\text{ell}} - Z$) を示している。

(2) ([8, Proposition A.3.g (p.57)]) Cauchy-Schwarz 不等式と補題 34 から

$$\int_{Z \backslash G} |\langle \sigma(g)u' | v' \rangle| |\phi(g)| d\mu_{Z \backslash G}(g) \leq \frac{1}{d(\sigma)} \|v'\| \|u'\| \|\phi\|_{L^2(G, \omega)}$$

となる。これより有界作用素 $\sigma(\phi) : \mathcal{V}_\sigma \rightarrow \mathcal{V}_\sigma$ が定義可能なことが分かる。 $u, v \in V_\pi[\tau]$ となる K の有限次元表現 τ を選ぶと、 $\sigma(\phi)\mathcal{V}_\sigma \subset \mathcal{V}_\sigma[\tau]$ となるが、 σ の許容可能性から $\mathcal{V}_\sigma[\tau]$ は有限次元である。故に、 $\sigma(\phi)$ は階数有限の作用素である。 $\{\xi_i\}$ を $\mathcal{V}_\sigma[\tau]$ の正規直交基底とすると、

$$\begin{aligned} \text{tr } \sigma(\phi) &= \sum_i \int_{Z \backslash G} \langle \sigma(g)\xi_i | \xi_i \rangle \phi(g) d\mu_{Z \backslash G}(g) \\ &= \sum_i \int_{Z \backslash G} \overline{\phi_{\xi_i, \xi_i}^\sigma(g)} \phi_{u, v}^\pi(g) d\mu_{Z \backslash G}(g) \\ &= \delta_{\sigma, \pi} \sum_i \frac{1}{d(\pi)} \langle u | \xi_i \rangle \langle \xi_i | v \rangle \quad (\because \text{補題 34}) \\ &= \frac{1}{d(\pi)} \langle u | v \rangle = \frac{\phi(1)}{d(\pi)} \end{aligned}$$

□

命題 44. $\pi \in \Pi^2(G, \omega)$ とする。このとき次の条件を満たす函数 $f_\pi \in \mathcal{H}(G, \omega)$ が存在する。

(1) $\sigma \in \Pi^2(G, \omega)$ に対して、

$$\text{tr } \sigma(f_\pi) = \begin{cases} 0 & (\sigma \not\cong \pi), \\ 1 & (\sigma \cong \pi) \end{cases}$$

$G = \text{GL}(2, F)$ で $\sigma = \pi(\mu_1, \mu_2)$ が主系列表現ならば $\text{tr } \sigma(f_\pi) = 0$ となる。

(2) $T \in \mathcal{T}_G, t \in T_{\text{reg}}$ のとき

$$\Phi(t, f_\pi) = \begin{cases} 0 & (T \notin \mathcal{T}_G^{\text{ell}}), \\ \chi_\pi(t) & (T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}) \end{cases}$$

Proof: $F = \mathbb{R}$ の場合には [21, 第 5 章] を参照せよ。(SL(2, \mathbb{R}) で書かれているので、若干の修正が必要。)

以下では、 F が非アルキメデス的と仮定する。 $v \in V_\pi - \{0\}$ を一つ固定する。離散系列の分類より、 π は超尖点表現かあるいは Steinberg 表現の捻りである。それぞれに応じて場合分けして考える。

- π が超尖点表現の場合：このとき、 $f_\pi = d(\pi) \phi_{v, v}$ は $C_c^\infty(G, \omega)$ に属し、 f_π が (1) の後半部分以外の主張を満たすことは命題 43 から従う。
- π が Steinberg 表現の捻りの場合：各 $E \in \mathcal{Q}(F)$ に対して

$$\varphi^E(t) = d(\pi) \Phi(t, \phi_{v, v}), \quad t \in T_E$$

によって $\varphi^E : T_E \rightarrow \mathbb{C}$ を定義する。(命題 43(2) により、ここに現れる軌道積分は絶対収束する。) すると、 $\{\varphi^E\}$ は命題 28 の条件を満たす。実際、(a) は φ^E を軌道積分で定義しているのが自明。(b) は $\phi_{v, v}(zg) = \phi_{v, v}(g)$ ($z \in Z$) より従う。函

数 $\varphi^E(t)$ が $\gamma = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \in Z$ の近傍で smooth なことを確かめる。命題 43(1) から $\varphi^E(t) = \overline{\text{tr } \pi}(t)$ ($t \in T_E - Z$) なので、(c) を確かめるには指標 $\text{tr } \pi|_{(G_{\text{ell}} - Z)}$ が G_{ell} 全体に smooth に伸びればよい。補題 37 から $[\text{tr } \pi](t) = -\eta(\det t)$ ($t \in G_{\text{ell}} - Z$) なので明らかに G_{ell} 全体で smooth である。

さて、函数族 $\{\varphi^E\}_{E \in \mathcal{Q}(F)}$ に命題 28 を適用することによって、任意の $E \in \mathcal{Q}(F)$ に対して

$$(4.9) \quad \Phi(t, f_\pi) = \varphi^E(t) = d(\pi) \Phi(t, \phi_{v,v}), \quad t \in T_E - Z$$

を満足する E-型函数 $f_\pi \in C_c^\infty(G, \omega)$ が存在する。(2) はこの関係式と命題 43(1) から自明である。任意の $\sigma \in \Pi_2(G, \omega)$ に対して、

$$(4.10) \quad \text{tr } \sigma(f_\pi) = \sum_{T \in \mathcal{T}_G} \frac{1}{2} \int_{Z \setminus T_{\text{reg}}} \chi_\sigma(t) \Phi(t, f_\pi) D_T(t) d\mu_{Z \setminus T}(t),$$

$$(4.11) \quad \text{tr } \sigma(\phi_{v,v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_G} \frac{1}{2} \int_{Z \setminus T_{\text{reg}}} \chi_\sigma(t) \Phi(t, \phi_{v,v}) D_T(t) d\mu_{Z \setminus T}(t)$$

である。命題 43(1) より $\Phi(t, \phi_{v,v}) = 0$ ($T \notin \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$) であり、 f_π が E-型函数なので $\Phi(t, f_\pi) = 0$ ($T \notin \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$) である。この注意と関係式 (4.9) をあわせれば、 $d(\pi) \text{tr } \sigma(\phi_{v,v}) = \text{tr } \sigma(f_\pi)$ が従う。よって、命題 43(2) から $\text{tr } \sigma(f_\pi) = \delta_{\sigma, \pi}$ となり、(1) の前半部が示せた。

$G = \text{GL}(2, F)$ として、(1) の後半部分を示そう。 $\sigma = \pi(\mu_1, \mu_2)$ の指標公式 (補題 32) から $\chi_\sigma(t) = 0$ ($\forall t \in G_{\text{ell}}$) である。公式 (4.10) は $\sigma = \pi(\mu_1, \mu_2)$ でも正しいが、 $T \notin \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ ならば $\Phi(t, f_\pi) = 0$ 、 $T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}$ ならば $\chi_\sigma(t) = 0$ により、右辺はゼロになる。□

定義 45. $\pi \in \Pi_2(G, \omega)$ に対して、命題 44 の条件を満たす函数 $f_\pi \in \mathcal{H}(G, \omega)$ を擬行列係数 (pseudo matrix coefficient) と呼ぶ。□

補題 46. $G = \text{GL}(2, F)$ (F : 非アルキメデス的) とする。Steinberg 表現の捻り $\pi = \text{St}(\eta)$ の擬行列係数 f_π に対して、 $f_\pi(1) = d(\pi)$ である。

Proof: 補題 37 より、任意の $t \in T - Z$ に対して $\Phi(t, f_\pi) = \overline{[\text{tr } \pi](t)} = -\eta(\det t)$ である。そこで $t \rightarrow 1$ を考えると、germ 展開から $\Gamma_1^T f(1) = -1$ を得る。よって、(2.6), 補題 13(2) および補題 36 から、 $f(1) = -(\Gamma_1^T)^{-1} = \text{vol}(Z \setminus D^\times)^{-1} = d(\pi)$ となる。□

補題 47. $G = \text{GL}(2, F)$ とする。 F が非アルキメデス的なとき、 f を Steinberg 表現 St の擬行列要素、 $F = \mathbb{R}$ のとき、 f を離散系列表現 $\sigma(1/2, -1/2)$ の擬行列係数とすると、 $\eta^2 = 1$ なる任意のユニタリー指標 $\eta: F^\times \rightarrow \mathbb{C}^1$ に対して、

$$[\text{tr } (\eta \circ \det)](f_{\text{St}}) = -\delta_{\eta, 1}$$

である。

Proof: F が非アルキメデス的な場合、完全系列 (4.2) より

$$[\text{tr } (\eta \circ \det)](f_{\text{St}}) = [\text{tr } \pi(\eta|_F^{-1/2}, \eta|_F^{1/2})](f_{\text{St}}) - [\text{tr } \text{St}(\eta)](f_{\text{St}})$$

命題 44 より右辺の値は確定する。 $F = \mathbb{R}$ の場合も、完全系列 (4.4) を用いれば同様。□

4.3.3. 指標の直交関係. (cf. [8, A.3]) F を標数 0 の非アルキメデスの局所体とする。補題 11(1) より $\mathcal{Q}_D(F) = \mathcal{Q}_{\text{M}(2, F)}(F) = \mathcal{Q}(F)$ であることに注意しよう。集合 $\mathcal{E}_G - Z$ は $T_E^G - Z$ ($E \in \mathcal{Q}(F)$) の互いに素な合併集合になり自然に F -多様体である。 $C_c^\infty(\mathcal{E}_G - Z, \omega)$ をこの空間上の smooth 函数 $\varphi: \mathcal{E}_G - Z \rightarrow \mathbb{C}$ で $\varphi(zt) = \omega(z)^{-1} \varphi(t)$ ($z \in Z$) を満たすもの全体のなす \mathbb{C} -線型空間とする。函数 $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathcal{E}_G - Z, \omega)$ に対して

$$(4.12) \quad \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\text{ell}} = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_G^{\text{ell}}} \int_{Z \setminus T_{\text{reg}}} D_T(t) \varphi_1(t) \overline{\varphi_2(t)} d\mu_{Z \setminus T}(t)$$

によって内積を定義する。更に、この内積で $C_c^\infty(\mathcal{E}_G - Z, \omega)$ を完備化して得られる L^2 空間を $L^2(\mathcal{E}_G, \omega)$ と書く。 $E \in \mathcal{Q}(F)$ に対して、 $\iota_E^{D^\times} : E^\times \cong T_E^{D^\times}$ および $\iota_E^{\mathrm{GL}(2)} : E^\times \cong T_E^{\mathrm{GL}(2)}$ によって、 D^\times のトーラス $T_E^{D^\times}$ と $\mathrm{GL}(2, F)$ のトーラス $T_E^{\mathrm{GL}(2)}$ を同一視する。すると、 $C^\infty(\mathcal{E}_G - Z, \omega)$ は G によらない次のような空間 $\mathcal{C}(F)$ と同一視される。 $\mathcal{C}(F)$ は smooth 関数 $\varphi^E : E^\times \rightarrow \mathbb{C}$ で $\varphi^E(ax) = \omega(a)^{-1} \varphi^E(x)$ ($a \in F^\times$) を満たすものの族 $\varphi = \{\varphi^E\}_{E \in \mathcal{Q}(F)}$ 全体のなす線型空間で、内積は

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{Q}(F)} \int_{F^\times \setminus E^\times} \varphi_1^E(t) \overline{\varphi_2^E(t)} \delta_E(t) \frac{d\mu_{E^\times}}{d\mu_{F^\times}}(t)$$

ここで、 $\delta_E(t) = D_{T_E^G}(\iota_E^G(t))$ 、或いは具体的に書けば、

$$\delta_E(t) = \left| \frac{\mathrm{tr}_{E/F}(t)^2}{N_{E/F}(t)} - 4 \right|_F, \quad t \in E^\times$$

である。

命題 48. 中心指標が ω である離散系列指標 $\mathrm{tr} \pi$ ($\pi \in \Pi_2(G, \omega)$) の $\mathcal{E}_G - Z$ への制限全体は内積 (4.12) に関して正規直交系を成す。つまり、

$$\langle \mathrm{tr} \pi, \mathrm{tr} \pi' \rangle_{\mathrm{ell}} = \begin{cases} 1 & (\pi \cong \pi'), \\ 0 & (\pi \not\cong \pi') \end{cases}$$

$\mathrm{tr} \sigma$ ($\sigma \in \Pi_2(D^\times, \omega)$) は $L^2(\mathcal{E}_{D^\times}, \omega) \cong L^2(\mathcal{E}_{\mathrm{GL}(2, F)}, \omega)$ の正規直交基底を成す。

Proof: (cf. [8, Theoreme A.3.h (p.59)]) $G = D^\times$ (D : 四元数体) のとき、群 $Z \backslash G$ はコンパクトであり、 $G = G_{\mathrm{ell}}$ である (補題 10) ことに注意しよう。従って、この場合の命題の主張はコンパクト群の指標の直交関係式に他ならず、その完全性は Peter-Weyl の定理から従う。

$f_\pi \in C_c^\infty(G, \omega)$ を π の擬行列係数とする。すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} \pi'(f_\pi) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_G} \frac{1}{2} \int_{Z \backslash T_{\mathrm{reg}}} [\mathrm{tr} \pi'](t) \Phi(t, f_\pi) D_T(t) d\mu_{Z \backslash T}(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}} \int_{Z \backslash T_{\mathrm{reg}}} [\mathrm{tr} \pi'](t) \overline{[\mathrm{tr} \pi](t)} D_T(t) d\mu_{Z \backslash T}(t) \quad (\because \text{命題 44(2)}) \\ &= \langle \mathrm{tr} \pi', \mathrm{tr} \pi \rangle_{\mathrm{ell}} \end{aligned}$$

これと命題 44(1) から結論は明らか。□

注意：一般の p -進代数群に対する離散系列指標の直交関係式に関しては、[8, A.3] を参照してください。そこでは、2通りの方法で証明が与えられています。第一証明では、(当時 $\mathrm{GL}(n)$ に対しては証明されていた) 離散系列の行列係数に対するある予想を仮定して直交関係式を導いています。その予想は、Clozel によって肯定的に解かれました ([7])。第二証明では、擬行列係数の存在とその性質を証明し ([8, A.4]) 利用する方法がとられています。このノートでは、この後者の方式に従いました。

5. JACQUET-LANGLANDS 対応

5.1. 局所対応. F を標数 0 の局所体として $G = \mathrm{GL}(2, F)$ とおく。 D を F 上の四元数体として、 ν_D をその被約ノルム、 τ_D をその被約トレースとする。 D^\times, G の中心を区別せず Z と書き、自然に F^\times と同一視しておく。ユニタリー指標 $\omega : F^\times \rightarrow \mathbb{C}^1$ を固定し、これを中心 Z の指標と見做す。正則楕円元の対 $(\gamma, \gamma') \in G_{\mathrm{ell}} \times D_{\mathrm{ell}}^\times$ に対して、

$$\det \gamma = \nu_D(\gamma'), \quad \mathrm{tr} \gamma = \tau_D(\gamma')$$

が成り立つとき、 $\gamma \leftrightarrow \gamma'$ と書くことにする。

補題 49. 正則楕円共役類の空間の間の全単射 $\psi : (G_{\text{ell}} - Z)/\text{Ad}(G) \rightarrow (D_{\text{ell}}^\times - Z)/\text{Ad}(D^\times)$ で条件

$$\psi(\mathcal{O}_G(\gamma)) = \mathcal{O}_{D^\times}(\gamma') \quad \text{iff} \quad \gamma \leftrightarrow \gamma'$$

を満たすものが一意に決まる。

Proof: 補題 9 より写像 ψ とその逆写像 ψ' が、任意の $(E, t) \in \mathcal{Q}(F) \times (E^\times - F^\times)$ に対して

$$\psi(\mathcal{O}_G(\iota_E^G(t))) = \mathcal{O}_{G'}(\iota_E^{G'}(t)), \quad \psi'(\mathcal{O}_{G'}(\iota_E^{G'}(t))) = \mathcal{O}_G(\iota_E^G(t))$$

を満たすように矛盾無く定義されることが分かる。これが上の条件を満たすことは補題 7 から従う。□

定理 50. 全単射 $\text{JL}_F : \Pi_2(G, \omega) \rightarrow \Pi(D^\times, \omega)$ であって、 $\gamma' \leftrightarrow \gamma$ となる任意の正則楕円元対 $(\gamma, \gamma') \in G_{\text{ell}} \times D_{\text{ell}}^\times$ に対して

$$[\text{tr JL}_F(\pi)](\gamma') = -\text{tr } \pi(\gamma)$$

を満たすものがただ一つ存在する。更に、次が成り立つ。

- 玉河測度に関する離散系列表現の形式次数はこの対応で保たれる: $d(\text{JL}_F(\pi)) = d(\pi)$
- 任意のユニタリー指標 $\eta : F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して $\text{JL}_F(\text{St}(\eta)) = \eta \circ \nu_D$ である。□

5.2. 大域対応. F を有限次元代数体、その整数環を \mathfrak{o}_F とする。 F のアルキメデス素点全体の集合を $\Sigma_\infty = \Sigma_{\mathbb{R}} \cup \Sigma_{\mathbb{C}}$ 、有限素点全体の集合を Σ_{fin} 、 $\Sigma = \Sigma_\infty \cup \Sigma_{\text{fin}}$ を素点全体の集合とする。 $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ に対し、 \mathfrak{o}_v を完備化 F_v の整数環、 \mathfrak{p}_v を \mathfrak{o}_v の極大イデアル、 ϖ_v を \mathfrak{p}_v の生成元とし、剰余体 $\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v$ の位数を q_v とかく: $q_v = \#(\mathfrak{o}_v/\mathfrak{p}_v)$ 。完備化 F_v ($v \in \Sigma_\infty$) の直積環を F_∞ とする: $F_\infty = \prod_{v \in \Sigma_\infty} F_v$ 。 F のアデール環を \mathbb{A} とすれば、 \mathbb{A} は有限アデール全体の環 \mathbb{A}_{fin} と F_∞ の直積に分解される: $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}_{\text{fin}}$ 。

\mathfrak{A} を F 上の四元数体とする。 $\text{GL}(2)$ を F -代数群と見做して G と書き、乗法群 \mathfrak{A}^\times の定義する F -代数群を $G_{\mathfrak{A}}$ で表す。 $G, G_{\mathfrak{A}}$ の中心を区別せずに Z で表す。イデール類指標 $\omega = \otimes_v : F^\times \backslash \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を固定する。 $\Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ を、中心指標 ω を持つ $G(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現全体の集合とする。

$\eta^2 = \omega$ を満たすイデール類群指標 $\eta : F^\times \backslash \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ に対して、 $\phi_\eta(g) = \eta(\nu_D(g))$ ($g \in G'(\mathbb{A})$) の形を持つ函数 ϕ_η 全体の張る $\mathcal{L}_0^2(G', \omega)$ の閉部分空間を $\mathcal{L}_{\text{sp}}^2(G', \omega)$ とおき、その直交補空間を $\mathcal{L}_0^2(G', \omega)$ と定義する。 $\Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega)$ を $\mathcal{L}_0^2(G', \omega)$ の既約部分表現全体の集合とする。

$\Sigma_{\mathfrak{A}}$ を \mathfrak{A} の分岐素点全体の集合とする。 \mathfrak{A} の極大整環 \mathfrak{O} を固定する。任意の $v \in \Sigma - \Sigma_{\mathfrak{A}}$ に対して、同型 $\mathfrak{A}_v \cong M_2(F_v)$ を $\mathfrak{O} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_v \cong M(2, \mathfrak{o}_v)$ となるように固定し、2つの群 $G(F_v), G_{\mathfrak{A}}(F_v)$ を同一視する。

定理 51. 写像 $\text{JL}^{\mathfrak{A}} : \Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega) \rightarrow \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ で次の条件を満たすものがただ一つ存在する: $\sigma \in \Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega)$, $\pi = \text{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma)$ を (抽象ユニタリー表現として) $\sigma \cong \otimes_v \sigma_v$, $\pi \cong \otimes_v \pi_v$ と制限テンソル積に分解するとき、

(5.1)

任意の素点 $v \in \Sigma - \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において ($G_{\mathfrak{A}}(F_v) \cong G(F_v)$ の表現として) $\sigma_v \cong \pi_v$ である。

更に、この対応は次の性質を持つ。

- $\pi = \text{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma)$, $\sigma \cong \otimes_v \sigma_v$, $\pi \cong \otimes_v \pi_v$ とするとき、任意の分岐素点 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において、 $\pi_v \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v)$ かつ $\text{JL}_{F_v}(\pi_v) = \sigma_v$ である。ただし、 $\text{JL}_{F_v} : \Pi_2(G(F_v), \omega_v) \rightarrow \Pi(\mathfrak{A}_v^\times, \omega_v)$ は局所 Jacquet-Langlands 対応である。
- 像 $\text{JL}^{\mathfrak{A}}(\Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega))$ は、任意の分岐素点 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ で $\pi_v \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v)$ を満たすような $\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ 全体からなる。

系 52. ($G_{\mathfrak{A}}$ における強重複度 1 定理) : $\sigma, \sigma' \in \Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega)$, $\sigma \cong \otimes_v \sigma_v$, $\sigma' \cong \otimes_v \sigma'_v$ とする。有限個の素点を除いて $\sigma_v \cong \sigma'_v$ ならば $\sigma = \sigma'$ である。

6. 証明

この章を通して、有限次元代数体 F 上の四元数体 \mathfrak{A} を固定し、 $G' = G_{\mathfrak{A}}$, $G = \mathrm{GL}(2)$ とおく。5.2 節で導入した定義、記号はこの章を通して有効とする。更に、非自明な加法指標 $\psi_F : F \setminus \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}^1$ を固定する。 $v \in \Sigma$ に対して、 $G(F_v)$ の標準的な極大コンパクト部分群 \mathbf{K}_v を [31, §3] のように固定する。その他、 $\mathrm{GL}(2)$ に関わる記号は [31] に従う。

この章は、[15], [12], [11], [25]などを参考にして、若干整理を加えたものである。

6.1. 玉河測度. 任意の素点 $v \in \Sigma$ において、 ψ_F の v -成分 $\psi_{F,v}$ を局所体 F_v の加法指標とし採用し、て 2.1 節で説明した構成によって、様々な F -代数群の F_v 値点上の Haar 測度を正規化する。例えば、 $d\mu_{Z(F_v)}$, $d\mu_{G(F_v)}$, $d\mu_{G'(F_v)}$ などが定義される。 $v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ のとき、 $\mu_{Z(F_v)}(Z(F_v) \cap \mathbf{K}_v) = \mu_{F_v^\times}(\mathfrak{o}_v^\times) = 1$ なので、 $d\mu_{Z(F_v)}$ のテンソル積によってアデール群 $Z(\mathbb{A})$ の Haar 測度 $d\mu_{Z(\mathbb{A})}$ を定義する。一方、補題 13 の証明から $\mu_{G(F_v)}(\mathbf{K}_v) = q_v^{-2d_v} \zeta_{F,v}(2)^{-1}$ であるから、 $\prod_{v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}} \mu_{G(F_v)}(\mathbf{K}_v) < +\infty$ となる。よって、アデール群 $G(\mathbb{A})$ の Haar 測度が

$$d\mu_{G(\mathbb{A})}(g) = \bigotimes_{v \in \Sigma} d\mu_{G(F_v)}(g_v)$$

で定義可能である。 $G'(\mathbb{A})$ に対しても $G(\mathbb{A})$ の場合と平行な構成により Haar 測度 $d\mu_{G'(\mathbb{A})}$ を定義する。(殆ど全ての素点では $G(F_v) \cong G'(F_v)$ であることに注意せよ。) $d\mu_{G(\mathbb{A})}$, $d\mu_{G'(\mathbb{A})}$ を $G(\mathbb{A})$, $G'(\mathbb{A})$ の (非正規化) 玉河測度という。 $Z(\mathbb{A}) \setminus G(\mathbb{A})$, $Z(\mathbb{A}) \setminus G'(\mathbb{A})$ には商測度 $d\mu_{Z(\mathbb{A}) \setminus G(\mathbb{A})} = d\mu_{G(\mathbb{A})} / d\mu_{Z(\mathbb{A})}$, $d\mu_{Z(\mathbb{A}) \setminus G'(\mathbb{A})} = d\mu_{G'(\mathbb{A})} / d\mu_{Z(\mathbb{A})}$ を与える。 L^2 -空間 $\mathcal{L}^2(G, \omega)$, $\mathcal{L}^2(G', \omega)$ の内積はこれらの測度によって定義されているとする。

6.2. セルバーグ跡公式. $\omega : F^\times \setminus \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$ とする。[31, 4.1.1] のように、局所ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ ($v \in \Sigma$) および大域ヘッケ環 $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}), \omega)$ を定義する。 G' に対しても同様に、 $\mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$, $\mathcal{H}(G'(\mathbb{A}), \omega)$ を定義する。

6.2.1. $\mathrm{GL}(2)$ の場合 (簡易化された跡公式). ([31, §7] を参照せよ。) $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}), \omega)$ に対する右正則表現 $R(f) : \mathcal{L}^2(G, \omega) \rightarrow \mathcal{L}^2(G, \omega)$ はスペクトル分解

$$\mathcal{L}^2(G, \omega) = \mathcal{L}_{\mathrm{cus}}^2(G, \omega) \hat{\oplus} \mathcal{L}_{\mathrm{res}}^2(G, \omega) \hat{\oplus} \mathcal{L}_{\mathrm{cont}}^2(G, \omega)$$

に応じて $R(f) = R_{\mathrm{cus}}(f) + R_{\mathrm{res}}(f) + R_{\mathrm{cont}}(f)$ と分解されて、 $R_{\mathrm{cus}}(f)$, $R_{\mathrm{res}}(f)$ はトレース族作用素であった。その跡は絶対収束級数

$$(6.1) \quad \mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f) = \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)} \mathrm{tr} \pi(f),$$

$$(6.2) \quad \mathrm{tr} R_{\mathrm{res}}(f) = \mathrm{vol}(Z(\mathbb{A}) G(F) \setminus G(\mathbb{A}))^{-1} \sum_{\eta^2 = \omega} \int_{Z(\mathbb{A}) \setminus G(\mathbb{A})} \eta(\det g) f(g) dg$$

で与えられた。(重複度 1 定理により、各既約カスプ表現の $\mathcal{L}_{\mathrm{cus}}^2(G, \omega)$ での重複度は 1 であることに注意する。) 更に、試験函数 $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}), \omega)$ が次の条件を満たすとする。

- (a) f は分解可能である。即ち、各素点で函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ が決まって、殆ど全ての素点では $f_v = f_v^\circ$ 、

$$f(g) = \prod_v f_v(g_v), \quad g = (g_v) \in G(\mathbb{A})$$

となる。ただし、各有限素点において、 $f_v^\circ \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ は $f_v^\circ(g_v) = \omega_v(z_v)^{-1}$ ($g = z_v k_v \in Z(F_v) \mathbf{K}_v$) かつ $f_v^\circ|(G(F_v) - Z(F_v) \mathbf{K}_v) \equiv 0$ で定義される函数である。

- (b) 2 つの素点 v_1, v_2 が存在して、

$$(6.3) \quad v \in \{v_1, v_2\} \text{ に対して } \Phi_v(a_v, f_v) = 0 \ (\forall a_v \in \mathcal{H}_{G(F_v)})$$

ただし、 Φ_v は群 $G(F_v)$ における軌道積分を表す。

$\gamma \in (\mathcal{E}_{G(F)} - Z(F)) \cup \mathcal{H}_{G(F)}$ とする。 $G_\gamma(\mathbb{A})$ 上の Haar 測度 $d\mu_{G_\gamma(\mathbb{A})}$ を、各素点において ($\psi_{F,v}$ を使って) 群 $G_\gamma(F_v)$ 上に固定してある Haar 測度 $d\mu_{G_\gamma(F_v)}$ (2.2 節参照) の直積測度で定義する: $d\mu_{G_\gamma(\mathbb{A})} = \otimes_v d\mu_{G_\gamma(F_v)}$. $\gamma \in (\mathcal{E}_{G(F)} - Z(F)) \cup \mathcal{H}_{G(F)}$ に対するアデールの軌道積分を

$$\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g) d\mu_{G_\gamma(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})}(g)$$

で定義する。測度の決め方から、積公式 $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = \prod_v \Phi_v(\gamma, f_v)$ が成り立つ。

さて、簡易化されたセルバーグ跡公式は次のようになる ([31, 定理 93]) :

$$(6.4) \quad \begin{aligned} & \text{tr } R_{\text{cus}}(f) + \text{tr } R_{\text{res}}(f) \\ &= \tau(G) f(1) + \sum_{\gamma \in [(\mathcal{E}_{G(F)} - Z(F)) \cup \mathcal{H}_{G(F)}] / Z(F)} \text{vol}(Z(\mathbb{A}) G_\gamma(F) \backslash G_\gamma(\mathbb{A})) \iota(\gamma)^{-1} \Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) \end{aligned}$$

ただし、

$$\tau(G) = \text{vol}(Z(\mathbb{A}) G(F) \backslash G(\mathbb{A})) \quad (Z \backslash G \text{ の玉河数})$$

であり、 $\iota(\gamma)$ は $-\gamma$ と γ が $G(F)$ -共役であるかないかに従い 1 または 2 とする。

6.2.2. $G_{\mathbb{A}}$ の場合. $G' = G_{\mathbb{A}}$ とおこう。群 $Z(\mathbb{A}) \backslash G'(\mathbb{A})$ はコンパクトなので、右正則表現 $\mathcal{L}^2(G', \omega)$ は既約表現の離散直和に分解する。 $\mathcal{L}_{\text{sp}}^2(G', \omega)$, $\Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ の定義により、

$$\mathcal{L}^2(G', \omega) = \left\{ \bigoplus_{\sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)} \sigma \right\} \hat{\oplus} \mathcal{L}_{\text{sp}}^2(G', \omega)$$

となる。試験函数 $f' \in \mathcal{H}(G'(\mathbb{A}), \omega)$ に対して、右正則表現 $R(f')$ はトレース族作用素であって上の分解に沿って 2 つの作用素 $R_0(f') : \mathcal{L}_0^2(G', \omega) \rightarrow \mathcal{L}_0^2(G', \omega)$, $R_{\text{sp}}(f') : \mathcal{L}_{\text{sp}}^2(G', \omega) \rightarrow \mathcal{L}_{\text{sp}}^2(G', \omega)$ の和に分解される。セルバーグ跡公式は

$$(6.5) \quad \begin{aligned} & \text{tr } R_0(f') + \text{tr } R_{\text{sp}}(f') \\ &= \tau(G') f'(1) + \sum_{\gamma \in [(\mathcal{E}_{G'(F)} - Z(F)) \cup \mathcal{H}_{G'(F)}] / Z(F)} \text{vol}(Z(\mathbb{A}) G'_\gamma(F) \backslash G'_\gamma(\mathbb{A})) \iota'(\gamma)^{-1} \Phi'_{\mathbb{A}}(\gamma, f') \end{aligned}$$

と表せる。ただし、

$$\tau(G') = \text{vol}(Z(\mathbb{A}) G'(F) \backslash G'(\mathbb{A})) \quad (Z \backslash G' \text{ の玉河数})$$

であり、 $\iota'(\gamma)$ は $-\gamma$ と γ が $G'(F)$ -共役であるかないかに従い 1 または 2 とする。また、各中心化群 $G'_\gamma(\mathbb{A})$ 上の Haar 測度を直積 $d\mu_{G'_\gamma(\mathbb{A})} = \otimes_v d\mu_{G'_\gamma(F_v)}$ で決めたくて、アデールの軌道積分を

$$\Phi'_{\mathbb{A}}(\gamma, f') = \int_{G'_\gamma(\mathbb{A}) \backslash G'(\mathbb{A})} f'(g^{-1}\gamma g) d\mu_{G'_\gamma(\mathbb{A}) \backslash G'(\mathbb{A})}(g)$$

で定義すれば、分解可能な試験函数 $f' = \otimes_v f'_v$ に対して積公式 $\Phi'_{\mathbb{A}}(\gamma, f') = \prod_v \Phi'_v(\gamma, f'_v)$ が成り立つ。

6.3. 局所対応の構成 (\mathbb{R} 上の場合). $\mathbb{H} = \{\mathbb{C}, -1\}_{\mathbb{R}}$ を Hamilton 四元数体とする:

$$\mathbb{H} = \left\{ \xi = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

$\mathbb{H}^1 = \{\xi \in \mathbb{H} \mid \det(\xi) = 1\} = \text{SU}(2)$ とおくと、 $\xi \mapsto ((\det \xi)^{1/2}, \xi (\det \xi)^{-1/2})$ は Lie 群の同型写像 $\mathbb{H}^\times \rightarrow \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{H}^1$ を与える。 $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ の有限次元表現 $\rho_{l_1, l_2}^{\mathbb{C}}$ の制限 $\sigma_c(l_1, l_2) = \rho_{l_1, l_2}^{\mathbb{C}}|_{\mathbb{H}^\times}$ は \mathbb{H}^\times の既約表現で、 \mathbb{H}^\times の中心指標 $\omega(z) = |z|_{\mathbb{R}}^m \text{sgn}(z)^\epsilon$ ($m \in \mathbb{C}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$) に対して、

$$\Pi(\mathbb{H}^\times, \omega) = \{\sigma_c(l_1, l_2) \mid l_1 - l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, l_1 + l_2 = m, l_1 - l_2 + 1 \equiv \epsilon \pmod{2}\}$$

であることが分かる。(SU(2) に対して、コンパクトリー群の既約表現の Cartan-Weyl 分類を適用し、あとは中心指標による補正を行えばよい。) 4.3 節で復習した $GL(2, \mathbb{R})$ の離散系列の分類結果と比較すると、対応 $\sigma(l_1, l_2) \mapsto \sigma_c(l_1, l_2)$ によって全単射 $\Pi_2(GL(2, \mathbb{R}), \omega) \rightarrow \Pi(\mathbb{H}^\times, \omega)$ が得られる。この対応が定理 50 の指標条件を満たすことを示せばよい。 $\mathcal{T}_{GL(2, \mathbb{R})}^{\text{ell}} = \mathcal{T}_{\mathbb{H}^\times}^{\text{ell}} = \{T\}$ 、ただし

$$T = \left\{ z \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid z > 0, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

である。完全系列 (4.4) と補題 32 より

$$(6.6) \quad [\text{tr } \sigma(l_1, l_2)](t) = -\text{tr } \rho_{l_1, l_2}(t), \quad t \in T - Z$$

である。一方、 $[\text{tr } \rho_{l_1, l_2}](t) = [\text{tr } \rho_{l_1, l_2}^{\mathbb{C}}](t) = \text{tr } \sigma_c(l_1, l_2)(t)$ は明らかである。よって、

$$\text{tr } \sigma(l_1, l_2)(t) = -\text{tr } \sigma_c(l_1, l_2)(t), \quad t \in T - Z$$

となり、確かに定理 50 の条件が満たされている。□

系 53. $G = GL(2, \mathbb{R})$ とする。中心指標 ω の離散系列表現 $\sigma(l_1, l_2)$ の指標は楕円元上で

$$[\text{tr } \sigma(l_1, l_2)] \left(z \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \right) = \omega(z) \frac{e^{-i(l_1-l_2)\theta} - e^{i(l_1-l_2)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$$

で与えられる。特に、これは G_{ell} 全体に *smooth* に拡張される。

Proof: ρ_{l_1, l_2} の指標公式 (= Weyl の指標公式の特別な場合) と (6.6) から従う。□

注意: このノートでは、[25], [8] に従って、 p -進体上での局所対応の構成を保型表現の Jacquet-Langlands 対応を経由して行う。実素点では、 $GL(2, \mathbb{R})$ の任意の離散系列表現が主系列表現の組成因子に現れることから、上で見たように保型表現を経由することなく至極単純に局所対応の証明が出来る。 p -進体上でも、超尖点表現の存在によって状況は困難さを著しく増すものの、純局所的な証明がやはり可能である ([4, Chap.13])。

6.4. 試験函数の matching.

定義 54. $v \in \Sigma$ とする。2 つの函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ および $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ の対 (f_v, f'_v) を考える。

- $v \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$ の場合: 次の 2 条件を満たすとき、 (f_v, f'_v) を matching pair と呼び $f_v \leftrightarrow f'_v$ と書く:

- (1) $\gamma_v \leftrightarrow \gamma'_v$ なる任意の正則楕円元対 $(\gamma_v, \gamma'_v) \in G_{\text{ell}} \times G'_{\text{ell}}$ に対して

$$\Phi_v(\gamma_v, f_v) = \Phi'_v(\gamma'_v, f'_v)$$

である

- (2) 任意の $a_v \in \mathcal{H}_{G(F_v)}$ に対して $\Phi_v(a_v, f_v) = 0$ である。

- $v \in \Sigma - \Sigma_{\mathbb{Q}}$ の場合: $G(F_v) \cong G'(F_v)$ から導かれる同型 $\mathcal{H}(G(F_v), \omega_v) \cong \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ によって f_v, f'_v が対応するとき (f_v, f'_v) を matching pair と呼び $f_v \leftrightarrow f'_v$ と書く。

注意: $v \in \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap \Sigma_{\text{fin}}$, $f_v \leftrightarrow f'_v$ ならば f_v, f'_v は E 型函数である。実際、命題 18(2) の最初の主張より $\mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ の函数はすべて E 型である。よって、条件 (1) から $\gamma_v \mapsto \Phi_v(\gamma, f_v)$ は G_{ell} 上 smooth な拡張を持つ。これと条件 (2) から f_v も E 型になる。

補題 55. (1) $v \in \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap \Sigma_{\text{fin}}$ として、 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), 1)$ を $G(F_v) = GL(2, F_v)$ の Steinberg 表現の擬行列係数とする。 $G'(F_v)$ 上の定数函数 $f'_v = -\text{vol}(Z(F_v) \backslash G'(F_v))^{-1}$ に対して $f_v \leftrightarrow f'_v$ となる。

- (2) $v \in \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ として、 $f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}), \omega_v)$ を $G(F_v) = GL(2, \mathbb{R})$ の離散系列表現 $\sigma(l_1, l_2)$ ($l \in \mathbb{N}^*$) の擬行列係数とする。 $G'(F_v)$ の有限次元表現 $\sigma' = \sigma_c(l_1, l_2)$ の 0 でない単位ベクトル ξ' をとり $f'_v(g') = -d(\sigma')^{-1} \phi_{\xi', \xi'}^{\sigma'}(g')$ とおくと、 $f_v \leftrightarrow f'_v$ となる。更に、 f_v, f'_v は E 型である。

Proof: (1) $T \in \mathcal{T}_{G(F_v)}^{\text{ell}}$ に対して $\text{vol}(Z(F_v) \setminus T) = 1$ であったから、 $\Phi'_v(\gamma, f'_v) = 1$ ($\forall \gamma \in \mathcal{E}_{G'(F_v)} - Z$) となる。これと補題 37 および命題 44 から $f_v \leftrightarrow f'_v$ である。

(2) $F = \mathbb{R}$ での局所対応から、 $\text{JL}_{\mathbb{R}}(\sigma(l_1, l_2)) = \sigma_c(l_1, l_2)$ である。これと命題 44 から結論が出る。□

補題 56. $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}} \cap \Sigma_{\text{fin}}$ とする。

- (1) 任意の $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ に対して、 $f_v \leftrightarrow f'_v$ なる E 型函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ が存在する。
- (2) 任意の E 型函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ に対して、 $f_v \leftrightarrow f'_v$ なる $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ が存在する。

Proof: (1) $\varphi^E(\iota_E^{G(F_v)}(t)) = \Phi(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f'_v)$ ($E \in \mathcal{Q}(F_v)$, $t \in E^\times - F_v^\times$) として、 $\varphi^E : T_E^{G(F_v)} \rightarrow \mathbb{C}$ を定義し、命題 28 を適用すればよい。

(2) $\varphi^E(\iota_E^{G'(F_v)}(t)) = \Phi(\iota_E^{G(F_v)}(t), f_v)$ ($E \in \mathcal{Q}(F_v)$, $t \in E^\times - F_v^\times$) として、 $\varphi^E : T_E^{G'(F_v)} \rightarrow \mathbb{C}$ を定義すると、 f_v が E 型なので命題 28 が適用できる。□

補題 57. $f_v \leftrightarrow f'_v$ とする。更に、 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}} \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ のときには、 f_v, f'_v は補題 55 の条件を満たす試験函数の組とする。

- (1) $f_v(1) = -f'_v(1)$ である。
- (2) 任意の指標 $\eta_v : F_v^\times \rightarrow \mathbb{C}^1$ に対して、

$$\int_{Z(F_v) \setminus G(F_v)} f_v(g) \eta_v(\det g_v) d\mu_{Z(F_v) \setminus G(F_v)}(g_v) = \int_{Z(F_v) \setminus G'(F_v)} f'_v(g'_v) \eta_v(\nu_{\mathfrak{A}_v}(g'_v)) d\mu_{Z(F_v) \setminus G'(F_v)}(g'_v)$$

である。

Proof: (1) F が非アルキメデス的としよう。 $T = T_E^{G(F_v)}$ ($E \in \mathcal{Q}(F_v)$) とすると、任意の $\gamma \in T - Z(F_v)$ に対して $\Phi_v(\gamma, f_v) = \Phi'_v(\gamma, f'_v)$ である。この等式において、 $\gamma \rightarrow 1$ とした極限を考える。 f_v は上で注意したように E 型なので、germ 展開 (2.5) より $\Gamma_1^T f_v(1) = -\text{vol}(Z(F_v) \setminus G'(F_v)) f_v(1)$ に近づく。右辺は命題 18 より連続なので

$$\int_{T' \setminus G'(F_v)} f'_v(1) d_{T' \setminus G'(F_v)} \mu = \text{vol}(T' \setminus G'(F_v)) f'_v(1)$$

に近づく。ここで、 $T' = T_E^{G'(F_v)} \subset G'(F_v)$ である。よって、 $f_v(1) = -f'_v(1)$ を得る。

$F = \mathbb{R}$ の場合には、系 53 と補題 44 から従う。

(2) f_v は E 型なので、補題 17 から、左辺は

$$\frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} \delta_E(t) \eta_v(t)^2 \Phi_v(\iota_E^{G(F_v)}(t), f_v) d\mu_{F_v^\times \setminus E^\times}(t)$$

となる。右辺は、同様に

$$\frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} \delta_E(t) \eta_v(t)^2 \Phi'_v(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f'_v) d\mu_{F_v^\times \setminus E^\times}(t)$$

に等しい。 $f_v \leftrightarrow f'_v$ より $\Phi_v(\iota_E^{G(F_v)}(t), f_v) = \Phi'_v(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f'_v)$ ($\forall t \in E^\times - F_v^\times$) なのでこれら 2 つの表示は一致する。□

6.5. Main Lemma の証明.

補題 58. 分解可能な試験函数 $f = \otimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}), \omega)$, $f' = \otimes_v f'_v \in \mathcal{H}(G'(\mathbb{A}), \omega)$ が与えられ、任意の素点 v において $f_v \leftrightarrow f'_v$ が成り立つとする。更に、 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}} \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ に対しては、 f_v, f'_v は補題 55(2) の条件を満たす試験函数の組とする。

$$(6.7) \quad \{\mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f) + R_{\mathrm{res}}(f)\} - \{\mathrm{tr} R_0(f') + \mathrm{tr} R_{\mathrm{sp}}(f')\} = (\tau(G) - \tau(G')) f(1)$$

である。

Proof: (1) 2つの跡公式 (6.4), (6.5) の右辺同士を比較する。($v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ においては試験函数 f_v は E 型函数なので、特に非楕円正則共役類に対する軌道積分は消滅する。 \mathfrak{A} は斜体ゆえ $\#\Sigma_{\mathfrak{A}} \geq 2$ なので、6.1.1 節の条件 (b) が満たされることに注意しよう。) (6.4) の右辺の和で、 $\gamma \in \mathcal{H}_{G(F)}$ に対する軌道積分 $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = 0$ となる。実際、 $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = \prod_v \Phi_v(\gamma, f_v)$ であり、素点 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において f_v は E 型函数なので $\Phi_v(\gamma, f_v) = 0$ である。

$\gamma \in \mathcal{E}_{G(F)} - Z(F)$ とすると、 $\gamma = \iota_E^{G(F)}(t)$ となる $E \in \mathcal{Q}(F)$ および $t \in T_E(F)$ が存在する。中心化群 G_γ はトーラス T_E と一致するから、体積因子 $\mathrm{vol}(Z(\mathbb{A}) G_\gamma(F) \backslash G_\gamma(\mathbb{A}))$ は $\mathrm{vol}(\mathbb{A}^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times)$ となる。もし、 $\Sigma_{\mathfrak{A}} \not\subset \Sigma(E)$ であるとすると、軌道積分 $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = 0$ となる。実際、 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}} - \Sigma(E)$ なる素点においては $E_v = E \otimes_F F_v \cong F_v \oplus F_v$ と分解するので、 $\gamma \in T_E(F_v)$ は $G(F_v)$ の分裂トーラス $M(F_v)$ のある元 a_v と $G(F_v)$ -共役になる。 f_v が E 型なことから $\Phi_v(\gamma_v, f_v) = \Phi_v(a_v, f_v) = 0$ となる。よって、 $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = 0$ を得る。

従って、補題 11 から、 $E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)$ でない限り $\Phi_{\mathbb{A}}(\gamma, f) = 0$ となる。故に、公式 (6.4) は

$$(6.8) \quad \mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f) + \mathrm{tr} R_{\mathrm{res}}(f) = \tau(G) f(1) + \sum_{E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)} \sum_{t \in (E^\times - F^\times)/F^\times} \frac{1}{2} \mathrm{vol}(\mathbb{A}^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times) \Phi_{\mathbb{A}}(\iota_E^{G(F)}(t), f)$$

と書きなおせる。同様に、補題 9 によれば公式 (6.5) は次の表示を持つ：

$$(6.9) \quad \mathrm{tr} R_0(f') + \mathrm{tr} R_{\mathrm{sp}}(f') = \tau(G') f'(1) + \sum_{E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F)} \sum_{t \in (E^\times - F^\times)/F^\times} \frac{1}{2} \mathrm{vol}(\mathbb{A}^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times) \Phi'_{\mathbb{A}}(\iota_E^{G'(F)}(t), f')$$

よって、補題を証明するには

$$(6.10) \quad \Phi_{\mathbb{A}}(\iota_E^{G(F)}(t), f) = \Phi'_{\mathbb{A}}(\iota_E^{G'(F)}(t), f'), \quad (E \in \mathcal{Q}_{\mathfrak{A}}(F), t \in E^\times - F^\times)$$

$$(6.11) \quad f(1) = f'(1),$$

を示せば十分である。

(6.10) の証明 : 両辺とも局所軌道積分のオイラー積に分解しているので、各因子ごとに等号を確かめればよい。 $v \in \Sigma - \Sigma_{\mathfrak{A}}$ のとき、 $f_v \leftrightarrow f'_v$ より、同型 $G(F_v) \cong G'(F_v)$ のもとで 2 つの函数は一致する。故に、自明に $\Phi_v(\iota_E^{G(F)}(t)_v, f_v) = \Phi'_v(\iota_E^{G'(F)}(t)_v, f'_v)$ である。 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ のとき、 $\iota_E^{G(F)}(t)_v \in G(F_v)_{\mathrm{ell}} - Z(F_v)$, $\iota_E^{G'(F)}(t)_v \in G'(F_v)_{\mathrm{ell}} - Z(F_v)$ で $\iota_E^{G(F)}(t)_v \leftrightarrow \iota_E^{G'(F)}(t)_v$ なので、 $f_v \leftrightarrow f'_v$ より、やはり $\Phi_v(\iota_E^{G(F)}(t)_v, f_v) = \Phi'_v(\iota_E^{G'(F)}(t)_v, f'_v)$ が従う。

(6.11) の証明 : $f(1) = \prod_v f_v(1)$, $f'(1) = \prod_v f'_v(1)$ である。任意の素点で $f_v \leftrightarrow f'_v$ なので、 $v \in \Sigma - \Sigma_{\mathfrak{A}}$ ならば $f_v(1) = f'_v(1)$ は自明であり、 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ においては補題 57(1) より $f_v(1) = -f'_v(1)$ である。 $\#\Sigma_{\mathfrak{A}}$ が偶数であることから $f(1) = f'(1)$ を得る。□

定理 59. $\tau(G) = \tau(G')$ である。

Proof: (cf. [15, (16.1.8)]) $S = \Sigma_{\mathfrak{A}}$ とおく。(6.7) を次の状況で使う：

- $\omega = 1$
- $v \in S \cap \Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して、 f_v は $\mathrm{GL}(2, F_v)$ の Steinberg 表現の擬行列係数、 $f'_v = -\mathrm{vol}(Z(F_v) \backslash G'(F_v))$

- $v \in S \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ においては、 $l_1 = 1/2, l_2 = -1/2$ として補題 (55)(2) の条件を満たすように f_v, f'_v をとる。

補題 55 より、これは各素点 $v \in S$ において試験函数の matching pair を与えることを注意しよう。 $v \in S$ において、 K_v の有限次元表現 ϵ_v を f_v が生成する両側 K_v -加群が $\epsilon_v \boxtimes \epsilon_v$ の部分表現となるように固定する。 π を $\mathcal{L}^2(G, 1)$ の既約部分表現、 σ を $\mathcal{L}^2(G', 1)$ の既約部分表現とする。 $\pi \cong \hat{\otimes}_{v \in S} \pi_v, \sigma \cong \hat{\otimes}_{v \in S} \sigma_v$ と制限直積に分解して、

$$M_\pi = \left\{ \hat{\otimes}_{v \in S} \mathcal{V}_{\pi_v}[\epsilon_v] \right\} \hat{\otimes} \left\{ \hat{\otimes}_{v \in \Sigma - S} \mathcal{V}_{\pi_v} \right\}, \quad M'_\sigma = \left\{ \hat{\otimes}_{v \in S} \mathcal{V}_{\sigma_v}^{G'(F_v)} \right\} \hat{\otimes} \left\{ \hat{\otimes}_{v \in \Sigma - S} \mathcal{V}_{\sigma_v} \right\}$$

とおく。 $G_{\mathbb{A}}^S$ を $G(F_v) \cong G'(F_v)$ ($v \in \Sigma - S$) の制限直積群とすると、この群は $\Sigma - S$ に亘るテンソル積因子を經由して Hilbert 空間 M_π, M'_σ にユニタリーに作用する。 M_π は $G_{\mathbb{A}}^S$ の $\mathcal{V}_\pi^S = \hat{\otimes}_{v \in \Sigma - S} \mathcal{V}_{\pi_v}$ における既約表現 π^S の有限重複度 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{\pi_v}[\epsilon_v]$ の直和、 M'_σ は $G_{\mathbb{A}}^S$ の $\mathcal{V}_\sigma^S = \hat{\otimes}_{v \in \Sigma - S} \mathcal{V}_{\sigma_v}$ における既約表現 σ^S の有限重複度 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{\sigma_v}^{G'(F_v)}$ の直和である。($G(F_v)$ の既約ユニタリー表現の許容可能性による。) R^S を既約部分表現 $\pi \subset \mathcal{L}^2(G, 1)$ で条件「 $\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), 1) \implies \pi_v \cong \text{St}_{G(F_v)} (\forall v \in S)$ 」 or 「 $\dim \pi = 1, \pi_v = 1 (\forall v \in S)$ 」を満たすものを走らせたときの M_π^S 全体の直和、 r^S を既約部分表現 $\sigma \subset \mathcal{L}^2(G', 1)$ で $\sigma_v = 1 (\forall v \in S)$ なるものを走らせたときの M'_σ^S 全体の直和とする。これらは、 $G_{\mathbb{A}}^S$ の既約ユニタリー表現の直和に分解されるユニタリー表現である。さて、任意の $f^S \in \mathcal{H}(G_{\mathbb{A}}^S, 1)$ に対して

$$(6.12) \quad \text{tr } R^S(f^S) - \text{tr } r^S(f^S) = [\tau(G) - \tau(G')] f^S(1)$$

が成り立つことを見よう。

$\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), 1)$ ならば、任意の $v \in S$ で π_v は無限次元表現であるから、 $G(F_v)$ の既約ユニタリー表現の分類から、 π_v は既約な主系列表現または離散系列表現である。従って、擬行列係数の性質から $\text{tr } \pi_v(f_v) = \delta_{\text{St}_{G(F_v)}, \pi_v}$ である。 $\pi = \eta \circ \det$ (η は $\eta^2 = 1$ を満たす F^\times のイデール類群指標) の場合、補題 47 から $\text{tr } \pi_v(f_v) = -\delta_{\eta_v, 1}$ ($\forall v \in S$) である。これより、

$$\begin{aligned} \text{tr } R_{\text{cus}}(f) + R_{\text{res}}(f) &= \sum_{\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), 1)} \left\{ \prod_{v \in S} \text{tr } \pi_v(f_v) \right\} \text{tr } \pi^S(f^S) + \sum_{\substack{\pi = \eta \circ \det \\ \eta^2 = 1}} \left\{ \prod_{v \in S} \text{tr } \pi_v(f_v) \right\} \text{tr } \pi^S(f^S) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), 1) \\ \pi_v \cong \text{St}_{G(F_v)} (\forall v \in S)}} \text{tr } \pi^S(f^S) + \sum_{\substack{\pi = \eta \circ \det \\ \eta^2 = 1, \eta_v = 1 (\forall v \in S)}} \text{tr } \pi^S(f^S) \quad (\because \#S \text{ は偶数}) \\ (6.13) \quad &= \text{tr } R^S(f^S) \end{aligned}$$

$v \in S$ に対して、 f'_v は自明表現の行列係数なことに注意すれば、

$$(6.14) \quad \text{tr } R_0(f') + \text{tr } R_{\text{sp}}(f') = r^S(f^S)$$

が同様に示せる。(6.7), (6.13), (6.14) より (6.12) が従う。さて、 $\tau(G) > \tau(G')$ であったと仮定すると、等式 (6.12) より任意の $f^S \in \mathcal{H}(G_{\mathbb{A}}^S, 1)$ に対して

$$\text{tr } R^S(f^S * (f^S)^*) - \text{tr } r^S(f^S * (f^S)^*) = [\tau(G) - \tau(G')] \int_{Z_{\mathbb{A}}^S \backslash G_{\mathbb{A}}^S} |f^S(g)|^2 dg \geq 0$$

となる。よって、[15, Lemma 16.1.1] より r^S は R^S の部分表現に同値になる。 r^S の R^S における直和補表現を ρ とすれば、等式 (6.12) より

$$\rho(f^S * (f^S)^*) = [\tau(G) - \tau(G')] \int_{Z_{\mathbb{A}}^S \backslash G_{\mathbb{A}}^S} |f^S(g)|^2 dg$$

が成立する。 $Z_{\mathbb{A}}^S \backslash G_{\mathbb{A}}^S$ は非コンパクトだから [15, Lemma 16.1.2] より矛盾が起こる。 $\tau(G') > \tau(G)$ と仮定しても、同様の論法により矛盾に導かれる。故に、 $\tau(G) = \tau(G')$ である。□

補題 60. 分解可能な試験函数 $f = \otimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}), \omega)$, $f' = \otimes_v f'_v \in \mathcal{H}(G'(\mathbb{A}), \omega)$ が与えられ、任意の素点 v において $f_v \leftrightarrow f'_v$ が成り立つとする。更に、 $v \in \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ に対しては、 f_v, f'_v は補題 55(2) の条件を満たす試験函数の組とする。このとき、

$$\mathrm{tr} R_{\mathrm{res}}(f) = \mathrm{tr} R_{\mathrm{sp}}(f'), \quad \mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f) = \mathrm{tr} R_0(f')$$

である。

Proof: $R_{\mathrm{sp}}(f')$ の定義から容易に、

$$R_{\mathrm{sp}}(f') = \tau(G')^{-1} \sum_{\eta^2 = \omega} \int_{Z(\mathbb{A}) \backslash G'(\mathbb{A})} f'(g') \eta(\nu_D(g')) d\mu_{Z(\mathbb{A}) \backslash G'(\mathbb{A})}(g')$$

が分かる。この表示式と (6.2) および補題 57 から、

$$\tau(G') \mathrm{tr} R_{\mathrm{sp}}(f') = \tau(G) \mathrm{tr} R_{\mathrm{res}}(f)$$

が従う。そこで定理 59 を使えば $\mathrm{tr} R_{\mathrm{sp}}(f') = \mathrm{tr} R_{\mathrm{res}}(f)$ を得る。この関係式と (6.7) および定理 59 より、 $\mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f) = \mathrm{tr} R_0(f')$ が従う。□

補題 61. (Main Lemma): S を素点の有限集合で $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ を含むとする。各 $v \in \Sigma - S$ に対して $G(F_v)$ の既約ユニタリ表現 $\tau_v \in \Pi(G(F_v), \omega_v)$ を殆どすべての $v \in \Sigma - S$ で $\tau^{K_v} \neq 0$ となるように指定して、 $\tau^S = \bigotimes_{v \in \Sigma - S} \tau_v$ とおく。

$$\mathcal{U}(\tau^S) = \{ \pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega) \mid \pi_v \cong \tau_v (\forall v \in \Sigma - S) \},$$

$$\mathcal{U}'(\tau^S) = \{ \sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega) \mid \sigma_v \cong \tau_v (\forall v \in \Sigma - S) \}$$

とする。各素点 $v \in S$ ごとに与えられた函数の matching pair $(f_v, f'_v) \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v) \times \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ (ただし、 $v \in \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ に対しては、 f_v, f'_v は補題 55(2) の条件を満たす試験函数の組) に対して、等式

$$\sum_{\pi \in \mathcal{U}(\tau^S)} \prod_{v \in S} \mathrm{tr} \pi_v(f_v) = \sum_{\sigma \in \mathcal{U}'(\tau^S)} \prod_{v \in S} \mathrm{tr} \sigma_v(f'_v)$$

が成り立つ。

Proof: ([12, Lemma (8.19)]) $G_{\mathbb{A}}^S$ を $G(F_v) \cong G'(F_v)$ ($v \in \Sigma - S$) の制限直積群とする。 $\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ を制限テンソルに分解して $\pi \cong \hat{\otimes}_v \pi_v$ と書き、 $\pi^S = \bigotimes_{v \in \Sigma - S} \pi_v$ と定義する。同様に、 $\sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ を制限テンソルに分解して σ^S を決める。すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} R_{\mathrm{cus}}(f) - \mathrm{tr} R_0(f') &= \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)} \left\{ \prod_{v \in S} \mathrm{tr} \pi_v(f_v) \right\} \mathrm{tr} \pi^S(f^S) - \sum_{\sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)} \left\{ \prod_{v \in S} \mathrm{tr} \sigma_v(f'_v) \right\} \mathrm{tr} \sigma^S(f^S) \\ &= \sum_{\rho \in \hat{G}_{\mathbb{A}}^S} \left\{ \sum_{\pi \in \mathcal{U}(\rho)} \prod_{v \in S} \mathrm{tr} \pi_v(f_v) - \sum_{\sigma \in \mathcal{U}'(\rho)} \prod_{v \in S} \mathrm{tr} \sigma_v(f'_v) \right\} \mathrm{tr} \rho(f^S) \end{aligned}$$

であり、補題 60 より、これは試験函数の任意の matching pair (f, f') に対して消える。補題 31 より結論が従う。□

主定理の証明には関係ないが、ここで玉河数 $\tau(G)$, $\tau(G')$ の具体的な値を決定しておこう。

定理 62. $\tau(G) = \tau(G') = 2$ である。

Proof: 定理 59 より $\tau(G) = 2$ を示せば十分である。[31, 命題 49] において、岩澤分解を使って正規化した $G(\mathbb{A})$ の Haar 測度 $d^{\mathrm{IW}} g$ に関して $\mathrm{vol}_{\mathrm{IW}}(Z_{\infty}^+ G(F) \backslash G(\mathbb{A})) = 2\Delta_F^{1/2} \pi^{r_2} \zeta_F(2) \mathrm{vol}(F^{\times} \backslash \mathbb{A}^1)$ を示した。ただし、 $r_2 = \sharp \Sigma_{\mathbb{C}}$ である。 $\mathrm{vol}(Z_{\infty}^+ Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})) = \mathrm{vol}(F^{\times} \backslash \mathbb{A}^1)$ なので、

$$(6.15) \quad \mathrm{vol}_{\mathrm{IW}}(Z(\mathbb{A}) \backslash G(F) \backslash G(\mathbb{A})) = 2\Delta_F^{1/2} \pi^{r_2} \zeta_F(2)$$

が得られる。中心 Z に関連する群の Haar 測度の正規化は [31] と同じものが採用されていることに注意しよう。あとは、 $\mu_{G(\mathbb{A})}$ と $d^{\text{IW}}g$ の比例定数を決定すればよい。 $v \in \Sigma_{\text{fin}}$ ならば、 $\mu_{G(F_v)}(\mathbf{K}_v) = \zeta_{F,v}(2)^{-1} q_v^{-2d_v}$ であった。 $(\because \text{vol}(\mathfrak{o}_v) = q_v^{-d_v/2})$ 一方、 $d^{\text{IW}}g_v$ の構成に使った F_v^\times の測度に対して $\text{vol}(\mathfrak{o}_v^\times) = q_v^{-d_v/2}$ なので、 $\text{vol}_{\text{IW}}(\mathbf{K}_v) = q_v^{-3d_v/2}$ が簡単に分かる。よって、 $d\mu_{G(F_v)}(g_v) = \zeta_{F,v}(2)^{-1} q_v^{-d_v/2} d^{\text{IW}}g_v$ を得る。無限素点では、補題 12 における定数 C_v によって $d\mu_{G(F_v)}(g_v) = C_v d^{\text{IW}}g_v$ である。 $v \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ ならば $C_v = \zeta_{F,v}(2)^{-1}$ 、 $v \in \Sigma_{\mathbb{C}}$ ならば $C_v = \zeta_{F,v}(2)^{-1} \pi^{-1}$ が容易に分かる。以上より、

$$(6.16) \quad d\tilde{\mu}_{G(\mathbb{A})}(g) = \zeta_F(2)^{-1} \Delta_F^{-1/2} \pi^{-r_2} d^{\text{IW}}g$$

(6.15), (6.16) から

$$\tau(G) = \mu_{G(\mathbb{A})}(Z(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A})) = 2$$

となる。□

6.6. 大域対応の構成.

命題 63. $\sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ とする。

- (1) 性質 (5.1) を満たす $\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ が唯一つつ存在する。
- (2) (1) の π に対して、 $\pi_v \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v) (\forall v \in \Sigma_{\mathfrak{A}})$ である。

Proof: $S = \Sigma_{\mathfrak{A}}$ として、 $\sigma^S = \{\sigma_v\}_{v \in \Sigma - S}$ とする。補題 61 より、 $v \in S$ における任意の試験関数の matching pair (f_v, f'_v) に対して

$$(6.17) \quad \sum_{\pi \in \mathcal{U}(\sigma^S)} \prod_{v \in S} \text{tr } \pi_v(f_v) = \sum_{\pi' \in \mathcal{U}'(\sigma^S)} \prod_{v \in S} \text{tr } \pi'_v(f'_v)$$

である。 $\#\mathcal{U}(\sigma^S) = 1$ を示せばよい。GL(2) の強重複度 1 定理から $\#\mathcal{U}(\sigma^S) \leq 1$ は分かっている。従って、適当な (f_v, f'_v) に対して、上の等式の右辺が零でないことが示せば (1) の証明は終わる。各 $v \in S$ について、零でないベクトル $\xi_v \in \mathcal{V}_{\sigma_v}$ を選び、 $f'_v(g'_v) = d(\sigma_v) \phi_{\xi_v, \xi_v}(\sigma_v)$ の行列係数とする。補題 56 および補題 55(2) より $f_v \leftrightarrow f'_v$ となる E 型関数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ が存在する。補題 43(2) より、 $\text{tr } \pi'_v(f'_v) = \delta_{\pi'_v, \sigma_v}$ なので、等式 (6.17) の右辺は $\pi'_v \cong \sigma_v (\forall v \in \Sigma)$ となる $\pi' \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ の個数 $m_0(\sigma)$ に一致する。 $\sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ だから $m_0(\sigma) \geq 1$ である。これで、(1) が示せた。

さて、 $\mathcal{U}(\sigma^S) = \{\pi\}$ としよう。 π はカスプ保型表現なので、 π_v は無限次元でなければならない。 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ に対して、 $\pi_v \notin \Pi_2(G(F_v), \omega_v)$ となったとすると、既約ユニタリ表現の分類から π_v は既約主系列表現となる。よって補題 32 から $\text{tr } \pi_v(g) = 0 (g \in G(F_v)_{\text{ell}} - Z(F_v))$ である。このことと、 f_v は E 型関数であることより、Weyl の積分公式

$$(6.18) \quad \text{tr } \pi_v(f_v) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_{G(F_v)}} \int_{T-Z(F_v)} [\text{tr } \pi_v](t) \Phi_v(t, f_v) D_T(t) d\mu_{Z(F_v)\backslash T}(t)$$

の右辺は消える。したがって、等式 (6.17) の左辺は零になり、右辺が零でないことと矛盾する。よって、 $\pi_v \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v) (\forall v \in S)$ が示せた。□

命題 63 より、写像

$$(6.19) \quad \text{JL}^{\mathfrak{A}} : \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega) \longrightarrow \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$$

が条件 (5.1) によって決まり、その像は

$$\Pi_{\text{cus}}^{\mathfrak{A}, \square}(G(\mathbb{A}), \omega) = \{\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega) \mid \pi_v \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v) (\forall v \in \Sigma_{\mathfrak{A}})\}$$

に含まれることが分かる。

6.7. 大域対応の像の決定.

命題 64. (1) $\pi \in \Pi_{\text{cus}}^{\mathfrak{A}, \square}(G(\mathbb{A}), \omega)$ に対して、 $\text{JL}(\sigma) = \pi$ を満たす $\sigma \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ が
唯ひとつ存在する。写像 (6.19) は単射でその像は $\Pi_{\text{cus}}^{\mathfrak{A}, \square}(G(\mathbb{A}), \omega)$ に一致する。

(2) $\pi = \text{JL}(\sigma)$ とする。 $v \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ において、 $\gamma \leftrightarrow \gamma'$ なる任意の正則楕円元対 $(\gamma, \gamma') \in G(F_v)_{\text{ell}} \times G'(F_v)_{\text{ell}}$ に対し

$$\text{tr } \pi_v(\gamma) = -\text{tr } \sigma_v(t')$$

が成立する。

Proof: $S = \Sigma_{\mathfrak{A}}$ とする。 $\pi \cong \hat{\otimes}_v \pi_v$ と制限テンソル積に分解すると、仮定より、任意の $v \in S$ において $\pi_v \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v)$ である。 $v \in S$ に対して、 $\sigma_v \in \Pi(G'(F_v), \omega_v)$ を任意に与え、 $a(\sigma_v) = \langle \text{tr } \pi_v, \text{tr } \sigma_v \rangle_{\text{ell}}$ とおく。 σ_v の表現空間の零でない単位ベクトル ξ'_v をとり、行列係数 $f'_v = d(\sigma_v) \phi_{\xi'_v, \xi'_v}$ を考える。補題 56 および補題 55(2) から $f_v \leftrightarrow f'_v$ なる E 型函数 $f_v \in \mathcal{H}(G(F_v), \omega_v)$ が存在する。次のように $\text{tr } \pi_v(f_v) = a(\sigma_v)$ が示される。

$$\begin{aligned} & \text{tr } \pi_v(f_v) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_{G(F_v)}} \int_{T-Z(F_v)} [\text{tr } \pi_v](t) \Phi_v(t, f_v) D_T(t) d\mu_{Z(F_v) \setminus T}(t) \quad (\because \text{Weyl の積分公式から}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} [\text{tr } \pi_v](\iota_E^{G(F_v)}(t)) \Phi_v(\iota_E^{G(F_v)}(t), f_v) \delta_E(t) d\mu_{F_v^\times \setminus E^\times}(t) \\ & \quad (\because f_v \text{ は E 型函数なので非楕円軌道積分は消滅}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} [\text{tr } \pi_v](\iota_E^{G(F_v)}(t)) \Phi_v(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f'_v) \delta_E(t) d\mu_{F_v^\times \setminus E^\times}(t) \\ & \quad (\because f_v \leftrightarrow f'_v \text{ より楕円軌道積分は一致}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{Q}(F_v)} \int_{E^\times - F_v^\times} [\text{tr } \pi_v](\iota_E^{G(F_v)}(t)) \overline{[\text{tr } \sigma_v](\iota_E^{G'(F_v)}(t))} \delta_E(t) d\mu_{F_v^\times \setminus E^\times}(t) \quad (\because \text{命題 43(1)}) \\ &= \langle \text{tr } \pi_v, \text{tr } \sigma_v \rangle_{\text{ell}} = a(\sigma_v) \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz 不等式と命題 48 を使えば

$$|a(\sigma_v)| = |\text{tr } \pi_v(f_v)| \leq \|\text{tr } \pi_v\| \|\text{tr } \sigma_v\| \leq 1$$

である。こうして得られた matching pairs の族 $f_v \leftrightarrow f'_v$ ($v \in S$) に対して補題 61 を適用しよう。 (τ^S としては $\pi^S = \{\pi_v\}_{v \in \Sigma - S}$ を採用する。) $\text{GL}(2)$ の強重複度 1 定理から左辺の和には π のみしか現れず、右辺では f'_v が σ_v の行列係数なので $\text{tr } \pi'_v(f'_v) = \delta_{\pi'_v, \sigma_v}$ (補題 43(2)) であることに注意すれば、

$$(6.20) \quad \prod_{v \in S} a(\sigma_v) = \#\mathcal{U}'(\pi^S, \sigma_S)$$

を得る。ただし、

$$\mathcal{U}'(\pi^S, \sigma_S) = \{\pi' \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega) \mid \pi'_v \cong \sigma_v, (\forall v \in S), \pi'_v \cong \pi_v, (\forall v \in \Sigma - S)\}$$

である。さて、 $|a(\sigma_v)| \leq 1$ ($\forall v \in S$) であったから、(6.20) の左辺は 1 以下である。一方、右辺は自然数なので、

$$(6.21) \quad \#\mathcal{U}'(\pi^S, \sigma_S) \leq 1 \quad (\text{等号成立の条件は } a(\sigma_v) \neq 0 \text{ } (\forall v \in S))$$

が分かった。実際、等号を成立させる $\sigma_S = \{\sigma_v\}_{v \in S}$ の選択が可能なのは次のように示せる: 補題 48 から、 $\text{tr } \pi_v$ は $L^2(G(F_v)_{\text{ell}}, \omega_v)$ の単位ベクトルであり、 $\{\text{tr } \pi'_v \mid \pi'_v \in \Pi_0(G'(F_v), \omega_v)\}$ は $L^2(G'(F_v)_{\text{ell}}, \omega_v) \cong L^2(G(F_v)_{\text{ell}}, \omega_v)$ の完全正規直交系をなす。よって、

$$a(\sigma_v^0) = \langle \text{tr } \pi_v, \text{tr } \sigma_v^0 \rangle_{\text{ell}} \neq 0$$

なる表現 $\sigma_v^0 \in \Pi_0(G'(F_v), \omega_v)$ が存在する。 $v \in S \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ のときは局所対応が既に示されているので、 $\sigma_v = \sigma_c(l_1, l_2)$ とすると、 $a(\sigma_v) \neq 0$ を満たす σ_v は $\sigma_v^0 = \sigma(l_1, l_2)$ のみとなり、正則楕円元上で $\text{tr } \pi_v = \text{tr } \sigma_v^0$ が成り立つ。

そこで、 $\mathcal{U}'(\pi^S, \{\sigma_v^0\}_{v \in S}) = \{\sigma\}$ とおくと $\text{JL}(\sigma) = \pi$ であることが結論される。 JL の単射性を見るには、 $\#\mathcal{U}'(\pi^S) = 1$ を示せばよい。 $\#\mathcal{U}'(\pi^S)$ は $\sigma^S = \{\sigma_v\}_{v \in S} \in \prod_{v \in S} \Pi(G'(F_v), \omega_v)$ に亘る $\#\mathcal{U}'(\pi^S, \sigma_S)$ の和なので、 (6.21) より $\#\mathcal{U}'(\pi^S) = \#\{\sigma_S \mid a(\sigma_v) \neq 0 (\forall v \in S)\}$ である。 σ_S が $a(\sigma_v) \neq 0 (\forall v \in S)$ を満たすとすると、 (6.20), (6.21) から $|a(\sigma_v)| = 1 (\forall v \in S)$ が従う。補題 48 より、 $L^2(G(F_v)_{\text{ell}}, \omega_v)$ において $\text{tr } \pi_v = \sum_{\pi'_v} a(\pi'_v) \text{tr } \pi'_v$ と展開され、Perseval 等式から、

$$1 = \|\text{tr } \pi_v\|_{\text{ell}}^2 = |a(\sigma_v)|^2 + \sum_{\pi'_v \neq \sigma_v} |a(\pi'_v)|^2$$

である。 $|a(\sigma_v)| = 1$ より右辺第二項は零である。よって、 $G(F_v)_{\text{ell}} - Z(F_v) \cong G'(F_v)_{\text{ell}} - Z(F_v)$ 上で $\text{tr } \pi_v = a(\sigma_v) \text{tr } \sigma_v$ である。あとは $a(\sigma_v) = -1 (\forall v \in S \cap \Sigma_{\text{fin}})$ を示せば証明が終わる。実際、もしこれが言えると、補題 48 から $\sigma_v = \sigma_v^0 (v \in S \cap \Sigma_{\text{fin}})$ がわかり、 $v \in S \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$ においては既に $\sigma_v = \sigma_v^0$ であったことを合わせると、 $\#\mathcal{U}'(\pi^S) = \#\{\{\sigma_v^0\}_{v \in S}\} = 1$ となる。

以下、 $v \in S \cap \Sigma_{\text{fin}}$ とする。 f_{π_v} を π_v の擬行列係数とし、 f'_v を上のとおり σ_v の行列係数とすれば、補題 44 より

$$(6.22) \quad \Phi_v(\iota_E^{G(F_v)}(t), f_{\pi_v}) = a(\sigma_v) \Phi'_v(\iota_E^{G'(F_v)}(t), f'_v), \quad t \in E^\times - F_v^\times$$

である。 π_v が超尖点表現であれば $f_{\pi_v} = d(\pi_v) \phi_{\xi, \xi}$ (ξ は π_v の零でないベクトル) ととることが出来る。 $t = 1$ での極限を見ると、germ 展開から

$$\Gamma_1^T f_{\pi_v}(1) = a(\sigma_v) \text{vol}(Z(F_v) \backslash G'(F_v)) f'_v(1)$$

この等式と $f_{\pi_v}(1) = d(\pi_v)$ および $\Gamma_1^T = -\text{vol}(Z(F_v) \backslash G'(F_v)) ((2.6))$ をあわせると、 $-d(\pi_v) = a(\sigma_v) d(\sigma_v)$ となる。 $|a(\sigma_v)| = 1$ かつ $d(\pi_v), d(\sigma_v) > 0$ だから $a(\sigma_v) = -1$ および $d(\pi_v) = d(\sigma_v)$ が結論される。 $\pi_v = \text{St}_{G(F_v)}(\eta_v)$ であれば、(6.22) の左辺は -1 に等しい。 $t = 1$ での極限を見ると、

$-1 = a(\sigma_v) \text{vol}(Z(F_v) \backslash G'(F_v)) d(\sigma_v)$ となり、上と同様の論法で、 $a(\sigma_v) = -1$ が結論される。

注意：上の証明の最後の段階で、 π_v が超尖点表現の場合には形式次数の関係 $d(\pi_v) = d(\sigma_v)$ が示されている。 π_v が Steiberger 表現の捻りの場合には、補題 36 により $d(\text{St}(\eta)) = \text{vol}(F_v^\times \backslash D_v^\times)^{-1} = d(\eta_v)$ である。□

系 52 の証明: G' における強重複度 1 定理を導こう。 $\sigma, \sigma' \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ に対して素点の有限集合 S があって $\sigma_v \cong \sigma'_v (\forall v \notin S)$ とする。 $\Sigma_\infty \cup \Sigma_{\mathfrak{A}} \subset S$ としてよい。 $v \notin S$ ならば $\text{JL}^{\mathfrak{A}}(\pi)_v \cong \sigma_v \cong \sigma'_v \cong \text{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma')_v$ となる。 $\text{GL}(2)$ の強重複度 1 定理から $\text{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \text{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma')$ が従う。 $\text{JL}^{\mathfrak{A}}$ の単射性をつかえば、 $\sigma = \sigma'$ を得る。□

6.8. 局所データの大域データへの埋め込みの存在。

補題 65. F_0 を標数 0 の局所体、 $\omega_0 : F_0^\times \rightarrow \mathbb{C}^1$ を指標とする。このとき、ある有限次元代数体 F 、 F^\times のイデール類群指標 ω および稠密像を持つ体の埋め込み $\iota_0 : F \rightarrow F_0$ が存在して、 v_0 を ι_0 の定める F の素点として $F_{v_0} = F_0$ と見做すとき、 $\omega_{v_0} = \omega_0$ となる。

命題 66. F を有限次元代数体、 ω をイデール類群指標とする。 $G = \text{GL}(2)$ とする。 S を有限素点の有限集合とし、各 $v \in S$ において離散系列表現 $\pi_v^0 \in \Pi_2(G(F_v), \omega_v)$ が与えられているとする。このとき、既約保型カスプ表現 $\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ が存在して、 $\pi_v \cong \pi_v^0 (\forall v \in S)$ となる。

Proof: ([11, VI §3]) $\Sigma - S$ から 3 つの有限素点 w_0, w_1, w_2 を選ぶ。命題 5(2) より $\Sigma_{\mathfrak{A}} = \{w_1, w_2\}$ となる F 上の四元数体 \mathfrak{A} が存在する。 $G' = G_{\mathfrak{A}}$ とおく。 $\pi_{w_1}^0 \in \Pi(G'(F_{w_1}), \omega_{w_1})$ を 2 次元以上の既約表現とする。 $(Z(F_{w_1}) \backslash G'(F_{w_1}))$ はコンパクトな非アーベル群なので、このような $\pi_{w_1}^0$ は存在する。 f'_{w_1} を $\pi_{w_1}^0$ の行列係数の形式次数倍とする。 $f'_{w_0} \in \mathcal{H}(G'(F_{w_0}), \omega_{w_0})$

を $\text{supp}(f'_{w_0}) \subset G'(F_{w_0})_{\text{ell}} - Z(F_{w_0})$ かつ $\mathcal{N}_{w_0} = \{\delta_{w_0} \in G'(F_{w_0})_{\text{ell}} - Z(F_{w_0}) \mid \Phi_{w_0}(\delta_{w_0}, f'_{w_0}) \neq 0\}$ が空でないように選ぶ。さらに、各 $v \in S$ に対して、 f'_v を $\pi_v^0 \in \Pi_2(G'(F_v), \omega_v)$ の擬行列係数とし、 $v \in \Sigma - (S \cup \{w_1, w_0\})$ に対しては $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ を任意にとる (以下でもっと特殊化される)。 $f' = \otimes_v f'_v$ として $G'(\mathbb{A})$ 上の試験函数 $f' \in \mathcal{H}(G'(\mathbb{A}), \omega)$ を構成し、跡公式 (6.5) を適用する。(6.5) 左辺の第 2 項に関しては、任意の 1 次元表現 $\pi'_{w_1} = \eta_{w_1} \circ \det \in \Pi(G'(F_{w_1}), \omega_{w_1})$ に対して、行列係数の直交関係式 (補題 34) から $\text{tr } \pi'_{w_1}(f_{w_1}) = 0$ となり $\text{tr } R_{\text{sp}}(f') = 0$ が従う。左辺の第 1 項では、補題 44 によって、 $\pi' \in \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega)$ が集合

$$\mathcal{U}' = \{\sigma \in \Pi_0(G(\mathbb{A}), \omega) \mid \sigma_v \cong \pi_v^0 (\forall v \in S \cup \{w_1\})\}$$

に属さなければ $\text{tr } \pi(f') = 0$ になる。また、 $f_{w_0}(1) = 0$ より、(6.5) 右辺の第一項も消滅する。これらを考慮に入れると、(6.5) は

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{U}'} [\text{tr } \sigma](f') = \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_{G'(F)} - Z(F)} \text{vol}(Z(\mathbb{A}) G'_\gamma(F) \backslash G'_\gamma(\mathbb{A})) \Phi'_\mathbb{A}(\gamma, f')$$

となる。もし、 $f'_v (v \notin S \cup \{w_1\})$ を上手く選ぶことによって、 $\mathcal{U}' \neq \emptyset$ が示されたとしよう。任意の要素 $\sigma \in \mathcal{U}'$ の写像 $\text{JL} : \Pi_0(G'(\mathbb{A}), \omega) \rightarrow \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ による像 π が求めるものである。

$\mathcal{U}' \neq \emptyset$ なる $f'_v (v \notin S \cup \{w_1\})$ の構成法：ある $\gamma_0 \in \mathcal{E}_{G'(F)} - Z(F)$ が存在して

$$(6.23) \quad \Phi'_\mathbb{A}(\gamma_0, f') \neq 0, \quad \Phi_\mathbb{A}(\gamma, f') = 0 (\forall \gamma \neq \gamma_0)$$

となるように作れば十分である。 $v \in S$ ならば、命題 44 より $\Phi'_v(\delta_v, f'_v) = \overline{\text{tr } \pi_v^0(\delta_v)}$ ($\forall \delta_v \in G'(F_v)_{\text{ell}} - Z(F_v)$) で、この式の右辺は補題 48 から恒等的に零ではない。よって、 $\mathcal{N}_v = \{\delta_v \in G'(F_v)_{\text{ell}} - Z(F_v) \mid \Phi'_v(\delta_v, f'_v) \neq 0\}$ は空でない開集合である。同様にして、 $\Phi'_{w_1}(\delta_{w_1}, f'_{w_1}) \neq 0 (\forall \delta_{w_1} \in \mathcal{N}_{w_1})$ なる空でない開集合 $\mathcal{N}_{w_1} \subset G'(F_{w_1}) - Z(F_{w_1})$ が存在する。 $G'(F)$ の $\prod_{v \in S \cup \{w_1, w_0\}} G'(F_v)$ における像は稠密なので、 $G'(F) \cap \prod_{v \in S \cup \{w_1, w_0\}} \mathcal{N}_v$ は少なくとも 1 つ要素 γ_0 を含む。

$$\Sigma^* = \{v \in \Sigma_{\text{fin}} - (S \cup \{w_1, w_0\}) \mid \mathcal{O}_{G(F_v)}(\gamma_0) \cap \mathbf{K}_v \neq \emptyset\}$$

とおく。 $v \in \Sigma^*$ においては、 f'_v を $zk \in Z(F_v)\mathbf{K}_v$ では $\omega_v(z)^{-1}$ に等しく、 $Z(F_v)\mathbf{K}_v$ の外では零になる函数とする。 $v \in \Sigma_{\text{fin}} - (\Sigma^* \cup S \cup \{w_1, w_0\})$ においては、 $\Phi'_v(\gamma_0, f'_v) \neq 0$ となるような函数 $f'_v \in \mathcal{H}(G'(F_v), \omega_v)$ を任意に選ぶ。すると、

$$\prod_{v \in \Sigma_{\text{fin}}} \Phi'_v(\gamma_0, f'_v) \neq 0$$

である。さて、写像 $\text{Ch} : Z(F) \backslash G(F) \rightarrow F^3$ を $g \in Z(F) \backslash G(F)$ に随伴表現 $\text{Ad}_{\text{sl}(2, F)}(g)$ の特性多項式の係数を対応させる写像とする。 $\prod_{v \in \Sigma_{\text{fin}}} \Phi'_v(\gamma, f'_v) \neq 0$ であるとしよう。任意の $v \in \Sigma^*$ において $\text{Ch}(\gamma)$ の F_v^3 への像は \mathfrak{o}_v^3 に含まれ、 $v \in S \cup \{w_1, w_0\}$ では $\text{Ch}(\gamma)$ の F_v^3 への像はコンパクト集合 $\text{Ch}(\text{supp}(f'_v))$ に含まれる。よって、 γ に依存しないある \mathfrak{o}_F -格子 $L \subset F_\infty^3$ が存在して $\text{Ch}(\gamma)_\infty \in L$ となる。 $\text{Ch}(\gamma_0)_\infty \in L$ の F_∞^3 での微小近傍 V を $V \cap L = \{\gamma_0\}$ となるようにとる。 $\mathcal{N}_\infty(\gamma_0) = \{g_\infty \mid \text{Ch}(g_\infty) \in V\}$ は $Z(F_\infty) \backslash G(F_\infty)$ の $\text{Ad}(G(F_\infty))$ -不変開集合で γ_0 を含んでいる。よって、 $f'_\infty = \prod_{v \in \Sigma_\infty} f'_v$ を台が $\mathcal{N}_\infty(\gamma_0)$ に含まれ、しかも、 $\Phi'_\infty(\gamma_0, f'_\infty) \neq 0$ となるように選べる。これで、(6.23) を満たす試験函数 f' が構成された。□

6.9. 局所対応の構成 (非アルキメデス局所体の場合).

命題 67. F_0 を非アルキメデスの局所体、 $\omega_0 : F_0 \rightarrow \mathbb{C}^1$ を指標とする。 D を F_0 上の四元数体とする。任意の $\pi_0 \in \Pi_2(G(F_0), \omega_0)$ に対して、次の条件を満たす $\sigma_0 \in \Pi(D^\times, \omega_0)$ が唯ひとつ存在する： $\gamma \leftrightarrow \gamma'$ なる任意の正則楕円元対 $(\gamma, \gamma') \in G(F_0)_{\text{ell}} \times D_{\text{ell}}^\times$ に対して

$$(6.24) \quad [\text{tr } \pi_0](\gamma) = -[\text{tr } \sigma_0](\gamma')$$

$\text{JL}_{F_0}(\pi_0) = \sigma_0$ によって定まる写像 $\text{JL}_{F_0} : \Pi_2(G(F_0), \omega_0) \rightarrow \Pi(D^\times, \omega_0)$ は全単射である。

Proof: 補題 65 より、ある有限次元代数体 F 、 F^\times のイデール類群指標 ω および F の有限素点 v_0 が存在して、 $F_{v_0} = F_0$ 、 $\omega_{v_0} = \omega_0$ となる。 ω_{v_1} が不分岐となる $v_1 \in \Sigma_{\text{fin}} - \{v_0\}$ を固定する。 ω_{v_1} が不分岐なので、 $\eta_{v_1}^2 = \omega_{v_1}$ を満たす指標 $\eta_{v_1} : F_{v_1}^\times \rightarrow \mathbb{C}^1$ が存在する。さて、 $\Sigma_{\mathfrak{A}} = \{v_0, v_1\}$ となる F 上の四元数体 \mathfrak{A} をとろう (補題 5)。補題 66 から $\pi_{v_0} \cong \pi_0$ 、 $\pi_{v_1} \cong \text{St}_{G(F_{v_1})}(\eta_{v_1})$ を満たすような既約カスプ保型表現 $\pi \in \Pi_{\text{cus}}(G(\mathbb{A}), \omega)$ がとれる。 $\pi \in \Pi_{\text{cus}}^{\mathfrak{A}, \square}(G(\mathbb{A}), \omega)$ ゆえ、定理 51 から $\text{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma) = \pi$ を満たす $\sigma \in \Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega)$ が存在する。そこで $\sigma_0 = \sigma_{v_0}$ とおくと、命題 64 から (6.24) が成立する。 π_0 に対して、(6.24) を満たすような σ_0 の一意性および対応 $\pi_0 \mapsto \sigma_0$ の単射性は指標の直交関係式 (命題 48) から明らかである。

次に全射性を示そう。任意に $\sigma_0 \in \Pi(G_{\mathfrak{A}}(F_{v_0}, \omega_{v_0}))$ をとる。 $\dim \sigma_0 = 1$ ならば、 $\sigma_0 = \eta \circ \nu_D$ となる指標 $\eta : F_{v_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^1$ が存在する。この場合には、 $\pi_0 = \text{St}_{G(F_{v_0})}(\eta)$ が $\text{JL}_{F_0}(\pi_0) = \sigma_0$ を満たすことは、命題 37 から従う。

$\dim \sigma_0 > 1$ ならば、命題 66 の証明から、 $\sigma \in \Pi_0(G_{\mathfrak{A}}(\mathbb{A}), \omega)$ が存在して $\sigma_{v_0} \cong \sigma_0$ となることがわかる。そこで、 $\text{JL}^{\mathfrak{A}}(\sigma)$ を制限テンソルに分解してその v_0 -成分を π_0 とおくと、定理 51 から $\pi_0 \in \Pi_2(G(F_{v_0}, \omega_{v_0}))$ となる。命題 64 から $\text{JL}_{F_0}(\pi_0) = \sigma_0$ でなくてはならない。

□

REFERENCES

- [1] Arthur, J., Clozel, L., *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University (1989).
- [2] Badulescu, A. I., *Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations*, Invent. Math. **172** (2008), 383–438.
- [3] Badulescu, A. I., *Unitary dual of $GL(n)$ at Archimedean places and global Jacquet-Langlands correspondence*. Compos. Math. **146** (2010), 1115–1164
- [4] Bushnell, C.J., Henniart, G., *The local Langlands conjecture for $GL(2)$* , Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **335**, Springer, 2006.
- [5] Bump, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge studies in Advanced Mathematics: 55, Cambridge University Press (1998).
- [6] Casselman, W., *Introduction to the theory of admissible representations of p -adic groups*, preprint.
- [7] Clozel, L., *Orbital integrals on p -adic groups: A proof of the Howe conjecture*, Ann. of Math, **129** (1989), 237–251.
- [8] Deligne, P., Kazhdan, D., Vigneras, M.-F. *Representations des algebres centrales simples p -adiques*, 33–117, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984
- [9] Duflo, P. M., Labesse, J.-P., *Sur la formule des traces de Selberg*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4 serie, **4**, 193–284 (1971)
- [10] Gelbart, Stephen S., *Automorphic forms on adèle groups*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1975).
- [11] Gelbart, Stephen S., *Lectures on the Arthur-Selberg trace formula*, University Lecture Series **9**, A.M.S. (1996).
- [12] Gelbart, S., Jacquet, H., *Forms of $GL(2)$ from the analytic point of view*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Vol. 33 (1979), part 1, 213–251.
- [13] Godement, R., Jacquet, H., *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics 260, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972
- [14] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on reductive p -adic groups*, Lecture Notes in Mathematics **162**, Springer-Verlag Berlin, Heiderberg, New York (1970)
- [15] Jacquet, H., Langlands, L.P., *Automorphic forms on $GL(2)$* , Lecture Notes in Mathematics, **114**, Springer-Verlag, Berline, Heiderberg, New York (1970).
- [16] Knapp, A.W., *Theoretical aspects of the trace formula for $GL(2)$* , Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **61**, 355–405 (1997).
- [17] Knapp, A.W., *Representation theory of semisimple groups, An over view based on examples*, Princeton University Press, Rrinceton New Jersey, (1986).
- [18] 今野 拓也, 「 GL_2 上の保型形式と標準 L 関数」, (第 16 回整数論サマースクール報告集「保型 L 関数
- [19] Kottwitz, R., E., *Harmonic analysis on reductive p -adic groups and Lie algebras*, Clay Mathematics Proceedings, volume 4 (2005), 393–522.

- [20] Langlands, R. P., *Base change for $GL(2)$* , Ann. of Math. Studies **96**, Princeton University Press (1980).
- [21] 織田 孝幸, 「Selberg Trace Formula 入門」東大講義記録 (1990)
- [22] Ramakrishnan, D., Valenza, R.J., *Fourier analysis on number fields*, Graduate Texts in Mathematics vol. 186, Springer (1998).
- [23] Shalika, J., *On the space of cusp forms of a \mathcal{P} -adic Chevalley groups*, (1969) 262–278.
- [24] Shalika, J., *A theorem on semi-simple p -adic groups*, Ann. of Math. **95** (1972), 226–242.
- [25] Rogawski, Jonathan D, *Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field*, Duke Math. J. 50 (1983), no. 1, 161–196.
- [26] 清水 英男, 「保型関数」岩波講座 基礎数学
- [27] Shimizu, Hideo, *Theta series and automorphic forms on GL_2* , J. Math. Soc. Japan **24**, No.4 (1972), 638–683.
- [28] Shimura, G., *Arithmetic of quadratic forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer (2010).
- [29] Tate, J. *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Algebraic Number Theory, Academic Press (1990), 305–347.
- [30] 都築 正男, 「Eisenstein 級数の定数項 (Langlands-Shahidi 理論への導入)」(第 16 回整数論サマースクール報告集「保型 L 関数」)
- [31] 都築 正男, 若槻聡, 「 $GL(2)$ の跡公式」(本報告集)
- [32] Vigneras, M.-F., *Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p -adique*, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo **28**, Sec. 14 (1982), 945–961.
- [33] Weil, A., *Basic number theory*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 144, Springer-Verlag New York Heiderberg Berlin, 1974.

〒 102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7-1
 上智大学理工学部情報理工学科
 都築 正男